arXiv:2303.03134v1 [math.ST] 6 Mar 2023

矩阵变量狄利克雷平均及其应用

PrincyT[1] 和 Nicy Sebastian[2]1科钦科技大学统计系，印度喀拉拉邦科钦 682 022。电子邮箱：princyt@cusat.ac.in[2] 圣托马斯学院统计系，印度喀拉拉邦特里苏尔 680 001。电子邮箱：nicyseb@yahoo.com

摘要

本文研究矩阵变量情形下的狄利克雷平均，即复数域中关于狄利克雷测度的函数平均。经典幂平均包括调和平均、算术平均和几何平均（Hardy、Littlewood 和 Polya）；deFinetti 将其推广为 y-平均，Carlson 则将其推广为超几何平均，参见本文所列参考文献。Carlson 的超几何平均是对实标量变量上的第一类狄利克雷测度下的标量函数求平均；在当前文献中，这称为该函数的狄利克雷平均。本文探讨复数域中存在第一类或第二类狄利克雷密度时的情形，并计算了复数域中这些狄利克雷密度下若干函数的平均。当矩阵为厄米正定时，定义狄利克雷测度。本文还讨论了一些应用。

AMS 学科 分类：15B52,15B48, 26B10, 33C60, 33C65, 60E05, 62E15, 62H10, 62H05 .

关键词：狄利克雷平均、广义第一类、第2类狄利克雷测度、矩阵自变量函数、复数域中的狄利克雷测度。.

1 引言

Hardy等人（1952年）讨论了包含调和平均、算术平均和几何平均的经典幂平均。经典加权平均的形式如下：

$$f(b) = [w_1 z_1^b + ... + w_n z_n^b]^{\frac{1}{b}}.$$

其中所有量均为实标量， $w' = (w_1, ..., w_n)$ $z' = (z_1, ..., z_n)$， $z_j > 0, w_j > 0, j = 1, ..., n$， $\sum_{j=1}^n w_j = 1$，撇号表示转置。对于 $b = 1$,$f(1)$ 给出 $\sum_{j=1}^n w_j z_j$，即算术平均；当 $b = -1$, $f(-1)$ 提供 $[\sum_j (\frac{w_j}{z_j})]^{-1}$ =调和平均；而当 $b \to 0_+$ 时， $f(0_+)$ 得到$\prod_{j=1}^n z_j^{w_j}$ = 几何平均。

这种加权平均 $f(b)$ 被 deFinetti [deFinetti (1974年)] 推广为 y-平均，并被 Carlson [Carlson (1977年)]推广为超几何平均。在 Carlson 的推广中，权重（$w_1, ..., w_{n-1}$）涉及一个实标量变量的第一类狄利克雷测度，随后对给定函数在该狄利克雷测度上取平均。在当前文献中，这被称为该函数的狄利克雷平均；该函数不必退化为经典的算术平均、调和平均和几何平均。

本文组织如下：第 1.1 节介绍在复数域中建立矩阵变量狄利克雷测度理论所需的基本概念。第 2 节探讨复数域中矩阵自变量函数的狄利克雷平均。第 3 节讨论复矩阵变量二型狄利克雷测度，以及对若干有用的矩阵变量函数的平均。第 4 节介绍矩形矩阵变量狄利克雷测度。第 5 节列出一些有用的应用领域。

1.1 复数域

本文讨论复数域矩阵变量情形下，各种函数关于狄利克雷测度的狄利克雷平均。本文中出现的所有矩阵均为厄米正定矩阵，除非另有说明。为便于区分，复数域中的矩阵用波浪号标记，实矩阵则不加波浪号。我们考虑复矩阵变量的实值标量函数，并对这类函数关于复矩阵变量狄利克雷测度取平均。本文将使用以下标准记号：$\det(X)$表示复矩阵变量 X 的行列式。行列式的绝对值记为$\det(\cdot)$。这意味着，如果 $\det(\tilde{X}) = a+ib$，那么 $\sqrt{(a+ib)(a-ib)} = (a^2+b^2)\det(\tilde{X})$。 $tr(\cdot)$表示$(\cdot)$的迹。$\int_{\tilde{X}}$表示对所有 $\tilde{X}$的积分，其中 $\tilde{X}$ 可以是长方形矩阵、方阵或正定矩阵。 $X > O$ 表示矩阵 X为厄米正定~~矩阵。实数域或~~复数域中的常数矩阵，除非需要特别强调，否则均不加波浪号；若需强调，则使用波浪号。 $O < A < X < B$表示 $A > O$， $X - A > O$， $B - X > O$，其中 A和 B是 $p \times p$常数正定矩阵。因此， $\int_{O<A<\tilde{X}<B} f(\tilde{X})\mathrm{d}\,\tilde{X} = \int_A^B f(\tilde{X})\mathrm{d}\,\tilde{X}$ 表示对满足 $O < A < X < B$ 的厄米正定矩阵 $X > O$ 进行积分，其中 $f(X)$是矩阵变量 X 的实值标量函数；$\mathrm{d}X$ 表示微分的楔积，即对于 $Z = (\tilde{z}_{ij}) = X + iY$，一个由不同变量 $\tilde{z}_{ij}$构成的 $m \times n$ 矩阵，其中 X 和 Y 是实矩阵，$i = +\sqrt{-1}$，微分元为 $\mathrm{d}Z = \mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}Y$，其中 $\mathrm{d}X$ 和 $\mathrm{d}Y$ 分别是 X和 Y中微分的楔积。例如，若 $X = (x_{ij})$且 $m \times n$，则 $\mathrm{d}X = \wedge_{i=1}^m \wedge_{j=1}^n \mathrm{d}x_{ij}$。当$\tilde{Z}$ 为厄米矩阵时， $X = X'$ 且 $Y = -Y'$。此时，$\mathrm{d}X = \wedge_{i\geq j=1}^p \mathrm{d}x_{ij} = \wedge_{i\leq j=1}^p \mathrm{d}x_{ij}$，且 $\mathrm{d}Y = \wedge_{i<j=1}^p \mathrm{d}y_{ij} = \wedge_{i>j=1}^p \mathrm{d}y_{ij}$。复矩阵变量伽马函数记为 $\Gamma_p(\alpha)$，其表达式及积分表示如下：

$$\tilde{\Gamma}_p(\alpha) = \pi^{\frac{p(p-1)}{2}}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-1)...\Gamma(\alpha-(p-1)), \Re(\alpha) > p-1 \tag{1.1}$$

and

$$\tilde{\Gamma}_p(\alpha) = \int_{\tilde{X}>O} |\det(\tilde{X})|^{\alpha-p} \mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(\tilde{X})} \mathrm{d}\tilde{X}, \Re(\alpha) > p-1 \tag{1.2}$$

其中， $\Re(\cdot)$表示$(\cdot)$的实部，积分遍及所有厄米正定矩阵 X。为进行后续计算，我们需要用到复数域中若干变换的雅可比行列式。这里列出这些结果而不作证明。证明及其他类似雅可比行列式可参见 Mathai（1997）。

~ ~引理 1.1。设 X和 Y为 $m \times n$，其元素为 mn 个互不相同的复变量。设A 为 $m \times m$，且 B为 $n \times n$ 非奇异常数矩阵。那么

$$\tilde{Y} = A\tilde{X}B, \det(A) \neq 0, \det(B) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{d}\tilde{Y} = [\det(A^*A)]^n [\det(B^*B)]^m \mathrm{d}\tilde{X} \tag{1.3}$$

其中 A^*和 B^*分别表示 A和 B的共轭转置；若 X、 Y、 A、 B为实数，则

$$Y = AXB \Rightarrow \mathrm{d}Y = [\det(A)]^n [\det(B)]^m \mathrm{d}X \tag{1.3a}$$

且若 a为标量，则

$$\tilde{Y} = a\tilde{X} \Rightarrow \mathrm{d}\tilde{Y} = |a|^{2mn} \mathrm{d}\tilde{X}. \tag{1.3b}$$

~引理 1.2。设 X为 $p \times p$，且是由互不相同的复变量作为元素的厄米矩阵（厄米性除外）。设 A为非奇异常数矩阵。那么

$$\tilde{Y} = A\tilde{X}A^* \Rightarrow \mathrm{d}\tilde{Y} = |\det(A)|^{-2p} \mathrm{d}\tilde{X}. \tag{1.4}$$

若 A、 X、 Y、 $X = X'$为实数，则

$$Y = AXA' \Rightarrow \mathrm{d}Y = [\det(A)]^{p+1} \mathrm{d}X. \tag{1.4a}$$

若 Y、 X、 a、 $X = X'$和 a为标量，则

$$Y = aX \to dY = a^{\frac{p(p+1)}{2}} \mathrm{d}X \tag{1.4c}$$

引理 1.3. 设 $\tilde{X}$ 为 $p \times p$ 且非奇异，并具有常规逆矩阵 $\tilde{X}^{-1}$。则

$$\tilde{Y} = \tilde{X}^{-1} \Rightarrow \mathrm{d}\tilde{Y} = \begin{cases} |\det(\tilde{X}^*\tilde{X})|^{-2p} \mathrm{d}\tilde{X} \ \textit{for a general } \tilde{X} \\ |\det(\tilde{X}^*\tilde{X})|^{-p} \mathrm{d}\tilde{X} \ \textit{for } \tilde{X} = \tilde{X}^* \ \textit{or } \tilde{X} = -\tilde{X}^* \end{cases} \tag{1.5}$$

˜引理 1.4. 设 X 为 $p\times p$ 厄米正定且元素互不相同（厄米正定性除外）。设 $\tilde{T}$ 为下三角矩阵，其中 $\tilde{T}=(\tilde{t}_{ij})$ $\tilde{t}_{ij}=$˜ ˜0，$i<j$、t_{ij}、$i\geq j$ 互不相同，$t_{jj}=t_{jj}>0$、$j=1$、...、p，即对角元素为实数且为正。则

$$\tilde{X}=\tilde{T}\tilde{T}^{*}\Rightarrow \mathrm{d}\tilde{X}=2^{p}\{\prod_{j=1}^{p}t_{jj}^{2(p-j)+1}\}\mathrm{d}\tilde{T}. \tag{1.6}$$

借助引理 1.4，我们可以计算式 (1.2) 中的复矩阵变量伽马积分，并证明其等于式 (1.1) 中的表达式。将引理 1.4 应用于式 (1.2) 中的积分后，该积分可拆分为 p 个如下形式的积分

$$\prod_{j=1}^{p}2\int_{0}^{\infty}(t_{jj}^{2})^{(\alpha-p)+\frac{1}{2}(2(p-j)+1)}\mathrm{e}^{-t_{jj}^{2}}\mathrm{d}t_{jj}=\prod_{j=1}^{p}\Gamma(\alpha-(j-1)),\Re(\alpha)>j-1,j=1,...,p$$

由此得到最终条件为 $\Re(\alpha)>p-1$，以及 $p(p-1)/2$ 个如下形式的积分

$$\begin{aligned}\prod_{i>j}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-|\tilde{t}_{ij}|^{2}}\mathrm{d}\tilde{t}_{ij}&=\prod_{i>j}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(t_{ij1}^{2}+t_{ij2}^{2})}\mathrm{d}t_{ij1}\wedge\mathrm{d}t_{ij2}\\&=\prod_{i>j}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}=\pi^{\frac{p(p-1)}{2}},|\tilde{t}_{ij}|^{2}=t_{ij1}^{2}+t_{ij2}^{2}.\end{aligned}$$

因此，式 (1.2) 中的积分可化为式 (1.1) 中的表达式。

˜ ˜ ˜ ˜引理 1.5。设 X 为 $n\times p$个满秩的$n\geq p$ 矩阵 p。设 $S=X^{*}X$为一个 $p\times p$ 厄米˜ ˜ ˜正定矩阵。令 $\mathrm{d}X$ 和 $\mathrm{d}S$ 分别表示 X˜和 S 中各微分的楔积。那么

$$\mathrm{d}\tilde{X}=|\det(\tilde{S})|^{n-p}\frac{\pi^{np}}{\tilde{\Gamma}_{p}(n)}\mathrm{d}\tilde{S}. \tag{1.7}$$

˜这是一个非常重要的结果，因为 X 是一个矩形矩阵，含有 mn 个互不相同的˜元素，而 S 是厄米正定矩阵，且 $p\times p$。借助上述引理，我们将在复数域上对狄利克雷测度下的若干函数取平均。

2 复数域中矩阵自变量函数的狄利克雷平均

本节中出现的所有矩阵均为 $p\times p$ 厄米正定矩阵，除非另有说明。考虑以下复矩阵变量第一类狄利克雷测度：

$$\begin{aligned}f_{1}(\tilde{X}_{1},...,\tilde{X}_{k})=\tilde{D}_{k}&|\det(\tilde{X}_{1})|^{\alpha_{1}-p}...|\det(\tilde{X}_{k})|^{\alpha_{k}-p}\\&\times|\det(I-\tilde{X}_{1}-...-\tilde{X}_{k})|^{\alpha_{k+1}-p}\end{aligned} \tag{2.1}$$

˜ ˜ ˜其中 X_1、 ...X_k 均为 $p \times p$ 厄米正定矩阵，即 ˜ ˜ ˜ $X_j > O$、 $j = 1$、...、 k满足˜ $I - X_j > O$、 $j = 1$、...、 $kI - (X_1 + ... + X_k) > O$。归一化常数 D_k 可通过逐个对矩阵积分求得，而各个积分则利用如下形式的复矩阵变量第一类贝塔积分计算:

$$\int_O^I |\det(\tilde{X})|^{\alpha-p}|\det(I-\tilde{X})|^{\beta-p}\mathrm{d}\tilde{X} = \frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha)\tilde{\Gamma}_p(\beta)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha+\beta)}, \Re(\alpha) > p-1, \Re(\beta) > p-1 \tag{2.2}$$

˜其中 $\Gamma_p(\alpha)$由（1.1）给出。可以证明，归一化常数如下:

$$\tilde{D}_k = \frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_1 + ... + \alpha_{k+1})}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_1)...\tilde{\Gamma}_p(\alpha_{k+1})} \tag{2.3}$$

对于 $\Re(\alpha_j) > p-1$、 $j = 1$、.....、 $k+1$。由于（2.1）在（2.3）条件下是统计密度，我们可以将给定函数的平均值表示为这些函数的期望值，记为 $E(\cdot)$。下面考虑几个函数，并求它们关于（2.1）中的复矩阵变量狄利克雷测度的平均值。设

$$\phi_1(\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_k) = |\det(\tilde{X}_1)|^{\gamma_1}...|\det(\tilde{X}_k)|^{\gamma_k}. \tag{2.4}$$

则（2.4）关于（2.1）中测度的平均值为

$$\begin{aligned} E[\phi_1] = \tilde{D}_k \int_{\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_k} & |\det(\tilde{X}_1)|^{\alpha_1+\gamma_1-p}...|\det(\tilde{X}_k)|^{\alpha_k+\gamma_k-p} \\ & \times |\det(I-\tilde{X}_1-...-\tilde{X}_k)|^{\alpha_{k+1}-p}\mathrm{d}\tilde{X}_1 \wedge .... \wedge \mathrm{d}\tilde{X}_k. \end{aligned}$$

注意，唯一的变化是将 α_j 改为 $\alpha_j + \gamma_j$，其中 $j = 1$、.....、 k，因此结果可由归一化常数得到。即

$$E[\phi_1] = \{\prod_{j=1}^{k} \frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_j+\gamma_j)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_j)}\} \frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_1 + ... + \alpha_k)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_1+\gamma_1+...+\alpha_k+\gamma_k+\alpha_{k+1})}, \tag{2.5}$$

对于 $\Re(\alpha_j + \gamma_j) > p-1$、 $j = 1$、.....、 k， $\Re(\alpha_{k+1}) > p-1$。设

$$\phi_2(\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_k) = |\det(I - \tilde{X}_1 - ... - \tilde{X}_k)|^{\delta}. \tag{2.6}$$

因此，在 $E[\phi_2]$ 的积分中，唯一的变化是参数 α_{k+1} 变为$\alpha_{k+1} + \delta$。由归一化常数 D_k即可得到结果。也就是说,

$$E[\phi_2] = \frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_{k+1}+\delta)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_{k+1})} \frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_1 + ... + \alpha_{k+1})}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_1 + ... + \alpha_{k+1} + \delta)} \tag{2.7}$$

对于 $\Re(\alpha_{k+1} + \delta) > p-1, \Re(\alpha_j) > p-1, j = 1, ..., k$。(2.7) 中的结构也是服从复矩阵变量第一类贝塔分布的矩阵的行列式的 δ 阶矩的结构。因此，这个 ϕ_2 可以用以下形式等价表示

为服从复矩阵变量第一类贝塔分布的矩阵的行列式。令

$$\phi_3(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_k)=\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(\tilde{X}_1)}. \tag{2.8}$$

下面我们来计算 $k=2$ 的狄利克雷平均。于是

$$E[\phi_3]=\tilde{D}_2\int_{\tilde{X}_1,\tilde{X}_2}\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(\tilde{X}_1)}|\det(\tilde{X}_1)|^{\alpha_1-p}|\det(\tilde{X}_2)|^{\alpha_2-p}$$
$$\times|\det(I-\tilde{X}_1-\tilde{X}_2)|^{\alpha_3-p}\mathrm{d}\tilde{X}_1\wedge...\wedge\mathrm{d}\tilde{X}_3.$$

从 $|\det(I-X_1-X_2)|$ 中提出 $I-X_1$，并作如下变换

$$\tilde{U}_2=(I-\tilde{X}_1)^{-\frac{1}{2}}\tilde{X}_2(I-\tilde{X}_1)^{-\frac{1}{2}}.$$

由引理 1.2 可得，$\mathrm{d}U_2=|\det(I-X_1)|^{-p}\mathrm{d}X_2$。现在可以利用式 (2.2) 中给出的复矩阵变量第一类贝塔积分，对 U_2 积分消去。也就是说，

$$\int_{O<\tilde{U}_2<I}|\det(\tilde{U}_2)|^{\alpha_2-p}|\det(I-\tilde{U}_2)|^{\alpha_3-p}\mathrm{d}\tilde{U}_2=\frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_2)\tilde{\Gamma}_p(\alpha_3)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_2+\alpha_3)} \tag{i}$$

for $\Re(\alpha_2)>p-1,\Re(\alpha_3)>p-1$。需要计算的积分如下 g:

$$\int_{\tilde{X}_1}\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(\tilde{X}_1)}|\det(\tilde{X}_1)|^{\alpha_1-p}|\det(I-\tilde{X}_1)|^{\alpha_2+\alpha_3-p}\mathrm{d}\tilde{X}_1. \tag{ii}$$

为了计算 (ii) 中的积分，我们可以利用复参数区域多项式展开指数部分，参见 Mathai (1997) 以及 Mathai、Provost和Hayakawa (1995)。我们需要一些关于行列式区域多项式展开的记号和结果。广义Pochhammer符号定义如下:

$$[a]_M=\prod_{j=1}^{p}(a-j+1)_{k_j}=\frac{\tilde{\Gamma}_p(a,M)}{\tilde{\Gamma}_p(a)},\tilde{\Gamma}_p(a,M)=\tilde{\Gamma}_p(a)[a]_M \tag{2.9}$$

其中，通常的 Pochhammer 符号为

$$(a)_m=a(a+1)...(a+m-1),a\neq0,(a)_0=1 \tag{2.10}$$

且 M 表示分拆，$M=(m_1,...,m_p)$ $m_1\geq m_2\geq...\geq m_p,m_1+...+m_p=m$指数函数的分区多项式展开如下:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(\tilde{X})}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{M}\frac{\tilde{C}_M(\tilde{X})}{m!} \tag{2.11}$$

其中，$C_M(X)$ 是关于复矩阵变量 X 的 m 阶 zonal 多项式，参见 Mathai（1997）的式（6.1.18）。下面将以引理的形式陈述我们所需的一个关于 zonal 多项式的结果。

引理 2.1。

$$\begin{aligned}\int_{O<\tilde{Z}<I}&|\det(\tilde{Z})|^{\alpha-p}|\det(I-\tilde{Z})|^{\beta-p}\tilde{C}_M(\tilde{Z}\tilde{A})\mathrm{d}\tilde{Z}\\&=\frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha,M)\tilde{\Gamma}_p(\beta)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha+\beta,M)}\tilde{C}_M(\tilde{A})\\&=\frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha)\tilde{\Gamma}_p(\beta)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha+\beta)}\frac{(\alpha)_M}{(\alpha+\beta)_M}\tilde{C}_M(\tilde{A}),\end{aligned}\tag{2.12}$$

另见 Mathai（1997）的式（6.1.21），其中 $\Re(\alpha)>p-1,\Re(\beta)>p-1,A>O$。利用（2.12），我们可以计算 $E[\phi_3]$ 中的 X_1-积分。即,

$$\begin{aligned}\int_{O<\tilde{X}_1<I}&\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A\tilde{X}_1)}|\det(\tilde{X}_1)|^{\alpha_1-p}|\det(I-\tilde{X}_1)|^{\alpha_2+\alpha_3-p}\mathrm{d}\tilde{X}_1\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{M}\int_{O<\tilde{X}_1<I}\frac{\tilde{C}_M(\tilde{A}\tilde{X}_1)}{m!}|\det(\tilde{X}_1)|^{\alpha_1-p}|\det(I-\tilde{X}_1)|^{\alpha_2+\alpha_3-p}\mathrm{d}\tilde{X}_1\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{M}\frac{\tilde{C}_M(\tilde{A})}{m!}\frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_1,M)\tilde{\Gamma}_p(\alpha_2+\alpha_3)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,M)}.\end{aligned}$$

现在，利用关于 X_2-积分的结果， D_2 以及上述结果，所有伽马乘积将相互抵消，最终结果如下:

$$E[\phi_3]=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{M}\frac{\tilde{C}_M(\tilde{A})}{m!}\frac{(\alpha_1)_M}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)_M}={}_1F_1(\alpha_1;\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3;\tilde{A})\tag{2.13}$$

其中 $\Re(\alpha_j)>p-1,j=1,2,3$，且 ${}_1F_1$ 是复矩阵自变量 A 的合流超几何函数。

3 复矩阵变量型 2 狄利克雷测度中的狄利克雷平均

考虑型 2 狄利克雷测度

$$\begin{aligned}f_2(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_k)=\tilde{D}_k&|\det(\tilde{X}_1)|^{\alpha_1-p}...|\det(\tilde{X}_k)|^{\alpha_k-p}\\&\times|\det(I+\tilde{X}_1+...+\tilde{X}_k)|^{-(\alpha_1+...+\alpha_{k+1})}\end{aligned}\tag{3.1}$$

对于 $\Re(\alpha_j)>p-1,j=1,...,k+1$，可以看出，归一化常数与第一类狄利克雷测度中的归一化常数相同。下面计算测度 (3.1) 中的一些狄利克雷平均。令

$$\phi_4(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_k)=|\det(\tilde{X}_1)|^{\gamma_1}...|\det(\tilde{X}_k)|^{\gamma_k}.\tag{3.2}$$

因此，取平均时，变化之处在于 α_j 变为 $\alpha_j+\gamma_j, j=1,...,k$，所以只需根据$\alpha_{k+1}$进行调整，便可从归一化常数求得相应的值。写作 $(\alpha_1+...+\alpha_{k+1})=(\alpha_1+\gamma_1+...+\alpha_k+\gamma_k)+(\alpha_{k+1}-\gamma_1-...-\gamma_k)$。也就是说，将 α_j 替换为 $\alpha_j+\gamma_j, j=1,...,k$，并将 α_{k+1} 替换为 $\alpha_{k+1}-\gamma_1-...-\gamma_k$，即可从归一化常数得到结果。因此

$$E[\phi_4]=\{\prod_{j=1}^{k}\frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_j+\gamma_j)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_j)}\}\frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_{k+1}-\gamma_1-...-\gamma_k)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_{k+1})} \tag{3.3}$$

对于 $\Re(\alpha_j+\gamma_j)>p-1, j=1,...,k$ 和 $\Re(\alpha_{k+1}-\gamma_1-...-\gamma_k)>p-1, \Re(\alpha_{k+1})>p-1$。因此，只有少数几个矩存在，将 $E[\phi_4]$ 解释为 $X_1,...X_k$ 的˜ ˜个行列式的乘积矩。令

$$\phi_5(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_k)=|\det(I+\tilde{X}_1+...+\tilde{X}_k)|^{-\delta}. \tag{3.4}$$

然后，取平均值时，积分中唯一的变化是将 α_{k+1} 改为 $\alpha_{k+1}+\delta$，因此由归一化常数可得以下结果:

$$E[\phi_5]=\frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_{k+1}+\delta)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_{k+1})}\frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_1+...+\alpha_{k+1})}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_1+...+\alpha_{k+1}+\delta)}, \tag{3.5}$$

对于 $\Re(\alpha_{k+1}+\delta)>p-1$，参数的其他条件对于 D_k 保持不变。注意，若 $\Re(\delta)>0$，则 (3.5) 中的结构是复矩阵变量型 1 贝塔矩阵行列式的 δ 阶矩。因此，这种型 2 形式给出了一个型 1 形式结果。令

$$\phi_6(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2)=\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(A\tilde{X}_1)}|\det(I+\tilde{X}_1)|^{\alpha_1+\alpha_3}. \tag{3.6}$$

那么，对于 $k=2$， ϕ_6 在式 (3.1) 的复矩阵变量二型狄利克雷测度下的狄利克雷平均为:

$$\begin{aligned}E[\phi_6]=\tilde{D}_2\int_{\tilde{X}_1,\tilde{X}_2}&\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(\tilde{X}_1)}|\det(I+\tilde{X}_1)|^{\alpha_2+\alpha_3}|\det(\tilde{X}_1)|^{\alpha_1-p}|\det(\tilde{X}_2)|^{\alpha_2-p}\\&\times|\det(I+\tilde{X}_1+\tilde{X}_2)|^{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}\mathrm{d}\tilde{X}_1\wedge...\mathrm{d}\tilde{X}_3.\end{aligned}$$

˜ ˜ ˜从 $I+X_1+X_2$ 中取出 $(I+X_1)$，并作如下变换

$$\tilde{U}_2=(I+\tilde{X}_1)^{-\frac{1}{2}}\tilde{X}_2(I+\tilde{X}_1)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow\mathrm{d}\tilde{U}_2=|\det(I+\tilde{X}_1)|^{-p}\mathrm{d}\tilde{X}_2.$$

˜ U_2积分给出

$$\int_{\tilde{U}_2>O}|\det(\tilde{U}_2)|^{\alpha_2-p}|\det(I+\tilde{U}_2)|^{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}\mathrm{d}\tilde{U}_2=\frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_2)\tilde{\Gamma}_p(\alpha_1+\alpha_3)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}. \tag{i}$$

˜注意，指数变为零，含有 |det$(I+X_1)$| 的因子消失。˜然后， X_1积分为

$$\int_{\tilde{X}_1>O}|\det(\tilde{X}_1)|^{\alpha_1-p}\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(A\tilde{X}_1)}\mathrm{d}\tilde{X}_1=\tilde{\Gamma}_p(\alpha_1)|\det(A)|^{-\alpha_1}. \quad (ii)$$

˜由 (i)、(ii) 和 D_2 得出最终结果如下：

$$E[\phi_6]=\frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_1+\alpha_3)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_3)}|\det(A)|^{-\alpha_1} \quad (3.7)$$

参数的原有条件保持不变，也不需要进一步的条件，其中 $A>O$。注意，如果 ϕ_6 没有因子 |det$(I+\tilde{X}_1)|^{\alpha_1+\alpha_3}$，那么˜ ˜还会出现一个含有 |det$(I+X_1)$| 的因子，此时 X_1-积分将可表示为矩阵自变量惠特克函数，参见 Mathai (1997)。

4 复矩形矩阵变量狄利克雷测度中的狄利克雷平均

1令 B_j 为 $n_j\times n_j$ 厄米正定常矩阵，并令 $B_j^{\frac{1}{2}}$表示 B_j的˜厄米正定平方根。令 X_j 为 $n_j\times p$ 满秩 $n_j\geq p$ 矩阵˜ ˜ ˜ ˜p，使得 $X_j^*X_j=S_j>O$ 或 S_j 为厄米正定矩阵。注意，对于 $p=1$,

˜ ˜
$X_j^*B_jX_j$ 是一个正定厄米型。因此，接下来给出的结果也涵盖了有关厄米型的结果。考虑模型

$$\begin{aligned}f_3(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_k)=\tilde{G}_k&|\det(\tilde{X}_1^*B_1\tilde{X}_1)|^{\alpha_1}...|\det(\tilde{X}_k^*B_k\tilde{X}_k)|^{\alpha_k}\\&\times|\det(I-\tilde{X}_1^*B_1\tilde{X}_1-...-\tilde{X}_k^*B_k\tilde{X}_k)|^{\alpha_{k+1}-p}\end{aligned} \quad (4.1)$$

˜ ˜ ˜ ˜其中，
$\tilde{G}_k$ $O<X_j^*B_jX_j<I$ $j=1$ ... k $O<X_1^*B_1X_1+$为归一化常数，且，，，，
˜...+$\tilde{X}_k^*B_kX_k<I, j=1,...,k$。归一化常数通过以下
˜ ˜ ˜ ˜ ˜ ˜ ˜步骤计算。根据引理 1.1，令
$Y_j=B_j^{\frac{1}{2}}X_j\Rightarrow\mathrm{d}Y_j=|\det(B_j)|^p\mathrm{d}X_j$。令 $Y_j^*Y_j=S_j$。于是，根据引理 1.5，我们有

$$\mathrm{d}\tilde{Y}_j=\frac{\pi^{n_jp}}{\tilde{\Gamma}_p(n_j)}|\det(\tilde{S}_j)|^{n_j-p}\mathrm{d}\tilde{X}_j. \quad (i)$$

Then

$$\mathrm{d}\tilde{X}_1\wedge...\wedge\mathrm{d}\tilde{X}_k=\{\prod_{j=1}^k\frac{\pi^{n_jp}}{\tilde{\Gamma}_p(n_j)}|\det(\tilde{B}_j)|^{-p}|\det(\tilde{S}_j)|^{n_j-p}\}\mathrm{d}\tilde{S}_1\wedge...\wedge\mathrm{d}\tilde{S}_k. \quad (ii)$$

由于总积分为 1，因此我们有

$$\begin{aligned}1 &= \int_{\tilde{X}_1,...\tilde{X}_k} f_3(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_k)\mathrm{d}\tilde{X}_1\wedge...\wedge\mathrm{d}\tilde{X}_k \\ &= \tilde{G}_k\{\prod_{j=1}^{k}\frac{\pi^{n_jp}}{\tilde{\Gamma}_p(n_j)}\}\int_{\tilde{S}_1,...,\tilde{S}_k}|\det(\tilde{S}_1)|^{\alpha_1+n_1-p}... \\ &\times|\det(\tilde{S}_k)|^{\alpha_k+n_k-p}|\det(I-\tilde{S}_1-...-\tilde{S}_k)|^{\alpha_{k+1}-p}\mathrm{d}\tilde{S}_1\wedge...\wedge\mathrm{d}\tilde{S}_k.\end{aligned}$$

现在，e ˜计算关于 S_j 的第一类狄利克雷积分，可得如下结果。即 ，

$$\begin{aligned}\tilde{G}_k = \{\prod_{j=1}^{k}|\det(B_j)|^p\frac{\tilde{\Gamma}_p(n_j)}{\pi^{n_jp}}\frac{1}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_j+n_j)}\} \\ \times\frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_1+...+\alpha_{k+1}+n_1+...+n_k)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_{k+1})}\end{aligned} \tag{4.2}$$

对于 $B_j>O,\Re(\alpha_j+n_j)>p-1,j=1,...,k,\Re(\alpha_{k+1})>p-1$。因此，(4.1) 与 (4.2) 定义了矩形复矩阵变元第一类狄利克雷测度。还有相应的型 2 狄利克雷测度，其定义如下:

$$\begin{aligned}f_4(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_k) = \tilde{G}_k|\det(\tilde{X}_1)|^{\alpha_1}...|\det(\tilde{X}_k)|^{\alpha_k} \\ \times|\det(I+\tilde{X}_1+...+\tilde{X}_k)|^{-(\alpha_1+...+\alpha_{k+1}+n_1+...+n_k)}\end{aligned} \tag{4.3}$$

˜对于 $B_j>O,\Re(\alpha_j+n_j)>p-1,j=1,...,k,\Re(\alpha_{k+1})>p-1$，且 G_k 与 (4.2) 中出现的相同。下面计算 (4.3) 中第二类矩形复矩阵变元狄利克雷测度下若干函数的狄利克雷平均。令

$$\phi_7(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_k)=|\det(\tilde{X}_1)|^{\gamma_1}...|\det(\tilde{X}_k)|^{\gamma_k}. \tag{4.4}$$

那么，在 (4.3) 中取 ϕ_7 的期望值时，唯一的变化是 α_j 变为 $\alpha_j+\gamma_j,j=1,...,k$，因此最终结果可由归一化常数得到。因此

$$E[\phi_7]=\{\prod_{j=1}^{k}\frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_j+n_j+\gamma_j)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_j+n_j)}\}\frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_{k+1}-\gamma_1-...-\gamma_k)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_{k+1})} \tag{4.5}$$

对于 $\Re(\alpha_j+n_j+\gamma_j)>p-1,j=1,...,k,\Re(\alpha_{k+1}-\gamma_1-...-\gamma_k)>p-1,\Re(\alpha_{k+1})>p-1$。令

$$\phi_8(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_k)=|\det(I+\tilde{X}_1+...+\tilde{X}_k)|^{-\delta}. \tag{4.6}$$

那么唯一的变化是，在积分中将 α_{k+1} 替换为 $\alpha_{k+1}+\delta$，除此之外没有其他变化，因此可以通过归一化常数得到该平均值。也就是说，

$$E[\phi_8]=\frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_{k+1}+\delta)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_{k+1})}\frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_1+...+\alpha_{k+1}+n_1+...+n_k)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_1+...+\alpha_{k+1}+n_1+...+n_k+\delta)} \tag{4.7}$$

对于 $\Re(\alpha_j+n_j)>p-1, j=1,...,k, \Re(\alpha_{k+1}+\delta)>p-1, \Re(\alpha_{k+1})>p-1.$

复矩形矩阵变量第一类狄利克雷测度中的情形 $p=1$ 很有趣。这里有一组厄米正定二次型，其联合密度具有以下形式：

$$f_5(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_k)=\tilde{G}_k[\tilde{X}_1^*B_1\tilde{X}_1]^{\alpha_1}...[\tilde{X}_k^*B_k\tilde{X}_k]^{\alpha_k} \times|\det(I-[\tilde{X}_1^*B_1\tilde{X}_1]-...-[\tilde{X}_k^*B_k\tilde{X}_k])|^{\alpha_{k+1}-p} \tag{4.8}$$

其中 $B_j>O$，且 $X_j^*B_jX_j$ 是标量，$j=1,...,k$。考虑与之前相同类型的变换。$\tilde{Y}_j=B_j^{\frac{1}{2}}\tilde{X}_j$。那么 $\tilde{Y}_j^*\tilde{Y}_j=|\tilde{y}_{j1}|^2+...+|\tilde{y}_{jn_j}|^2$，或者 $\tilde{}$ 的绝对值的平方和，其中 $\tilde{y}_{jr}$，且 $Y_j^*=(\tilde{y}_{j1}^*,...,\tilde{y}_{jn_j}^*)$。这是 $2n_j$ 维欧几里得空间中的一个各向同性点。由此可以建立与各种几何概率问题的联系，参见 Mathai（1999）。此外，式（4.8）还与路径模型中广义厄米型的理论相关，参见 Mathai（2007）。让我们求其 h 阶矩

$$\phi_9(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_k)=[\tilde{X}_1^*B_1\tilde{X}_1+...+\tilde{X}_k^*B_k\tilde{X}_k]^h \tag{4.9}$$

对于 $p=1$。对于 $p>1$，我们已经看到，这无法直接获得，但可以获得 $|\det(I-X_1^*B_1X_1-...-X_k^*B_kX_k)|$ 的矩。不过，对于 $p=1$，对于任意 h，可以获得两者的 h-阶矩。通过计算 h 阶矩 $[1-X_1^*B_1X_1-...-X_k^*B_kX_k]$ 对于 $p=1$，我们注意到，对于任意 h，该量及其互补部分 $[X_1^*B_1X_1+...+X_k^*B_kX_k]$ 都服从标量变量型 1 贝塔分布，其参数分别为 $(\alpha_{k+1},\sum_{j=1}^k(\alpha_j+n_j))$ 和 $(\sum_{j=1}^k(\alpha_j+n_j)\ \alpha_{k+1})$。然后

$$E[\phi_9]=\frac{\tilde{\Gamma}_p(\sum_{j=1}^k(\alpha_j+n_j)+h)}{\tilde{\Gamma}_p(\sum_{j=1}^k(\alpha_j+n_j))}\frac{\tilde{\Gamma}_p(\sum_{j=1}^k(\alpha_j+n_j)+\alpha_{k+1})}{\tilde{\Gamma}_p(\sum_{j=1}^k(\alpha_j+n_j)+\alpha_{k+1}+h)} \tag{4.10}$$

对于 $\Re(\alpha_j)>p-1, j=1,...,k+1, \Re(\sum_{j=1}^k(\alpha_j+n_j)+h)>p-1$。设 ϕ_9 服从关于 $p=1$ 的复矩阵变量二型狄利克雷测度。那么第 h 阶矩可化简为：

$$E[\phi_9]=\frac{\tilde{\Gamma}_p(\sum_{j=1}^k(\alpha_j+n_j)+h)}{\tilde{\Gamma}_p(\sum_{j=1}^k(\alpha_j+n_j))}\frac{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_{k+1}-h)}{\tilde{\Gamma}_p(\alpha_{k+1})} \tag{4.11}$$

对于 $\Re(\alpha_{k+1}-h)>p-1, \Re(\alpha_j)>p-1, j=1,...,k+1, \Re(\sum_{j=1}^k(\alpha_j+n_j)+h)>p-1.$

对于厄米正定狄利克雷测度或矩阵变量狄利克雷测度中的第1类和型 2 狄利克雷测度，可以得到许多此类结果。

5 应用

在特殊函数理论、分数阶微积分、生物学、概率论和随机过程中的应用中，我们使用狄利克雷平均及其多种方法。本节介绍狄利克雷平均的主要应用领域:

5.1 特殊函数

Carlson 在其著作 Carlson (1977) 中引入了狄利克雷平均。Carlson (1963,1969, 1975, 1987) 指出，这种平均方法的直接思想可以推广并统一众多特殊函数，包括各种正交多项式和广义超几何函数。Neuman 和 Fleet (1994) 以及 Carlson (1991) 给出了狄利克雷样条与一类重要的多变量超几何函数之间的关系。Carlson (1991)、Massopust 和 Forster (2010) 对 B 样条的诸多研究，以及 Simi´c 和 Bin-Mohsin (2020) 对 Stolarsky均值的研究，都用到了狄利克雷平均。

5.2 分数阶微积分

许多著名数学家都给出了幂函数、指数函数等初等函数的狄利克雷平均。文献中已有许多结果：对这些函数取狄利克雷平均并运用分数阶积分后，可将初等函数转换为求和形式，从而得到新的结果，参见 Kilbas 和 Kattuveettill (2008)、Saxena 等人 (2010)、Kumar 等人 (2022)。这些结果将在未来为各个领域的数学家和科学家所用。

5.3 基因表达建模

聚类是解读微阵列数据和确定遗传网络的一项关键数据处理技术。层次狄利克雷过程（HDP）聚类能够通过在统计模型中纳入层次结构，捕捉生物数据（如基因表达数据）中常见的层次元素。Wang 和 Wang（2013）提出了一种用于基因表达聚类的层次狄利克雷过程模型。

5.4 几何概率

Thomas 和 Mathai（2009）提出将广义狄利克雷模型应用于几何概率问题。当欧几里得 n空间中的线性无关随机点服从高度一般化的实矩阵变量贝塔密度时，他们对随机平行多面体的体积进行了探讨。为了检验统计假设，研究给出了结构分解，并将随机体积与广义狄利克雷模型及

似然比准则联系起来。由此可以利用广义狄利克雷边缘分布的 $p-$值计算随机体积的百分位点。

5.5 贝叶斯分析

Carlson 对狄利克雷平均的原始定义表现为混合多项分布的概率生成函数。狄利克雷平均还对椭圆积分的求解作出了重要贡献，并与统计应用存在多种联系。Dickey（1983年）发现，在多项抽样和列联表的贝叶斯推断中，可以构造出若干个嵌套族，这些嵌套族推广了狄利克雷分布。这些分布可用于对个人概率总体进行建模，其中的个人概率会随着从统计数据中进行推断的过程而演化。

参考文献

[1] Carlson, B. C.《应用数学特殊函数》，Academic Press：纽约州纽约，美国，1977年。[2] Carlson, B. C.（1963年）。Lauricella超几何函数。F_D《数学分析与应用杂志》，7，452-470。[3] Carlson, B. C.（1969年）。初等超越函数与高等超越函数之间的联系。《SIAM应用数学杂志》，17，116-148。[4] Carlson, B. C.（1975年）。对数的积分平均的不变性。《美国数学月刊》，82，379-382。[5] Carlson, B. C.（1987年）。$x^t logx$的狄利克雷平均。《SIAM数学分析杂志》，18，550-565。[6] Carlson, B. C.（1991年）。 $B-$样条、超几何函数与狄利克雷平均。《逼近理论杂志》，67，311-325。[7] deFinetti, B.（1974年）：《概率论》，第I卷，Wiley，纽约，1974年。[8] Dickey, J. M.（1983年）。多重超几何函数：概率解释与统计用途。《美国统计学会杂志》，78，628-637。[9] Hardy, G.H.、Littlewood,J.E. 和 Polya, G.《不等式》。剑桥大学出版社（第一版于1934年出版），1952年。[10] Massopust, P. 和 Forster, B.（2010年）。多元复 $B-$样条与狄利克雷平均。《逼近理论杂志》，162，252-269。

[11] Mathai, A. M.《矩阵变换的雅可比行列式与矩阵变量函数》。World Scientific Publishing，纽约，1997。[12] Mathai, A. M.《几何概率导论：分布方面及其应用》。戈登与布里奇出版社，阿姆斯特丹，1999。[13] Mathai, A. M.（2007年）。一般矩阵变量模型下的随机体积，《线性代数及其应用》，425，162-170。[14] Mathai, A. M.、Provost, S.B. 和 Hayakawa, T.《双线性型与区域多项式》。讲义系列，施普林格出版社，纽约，1995。[15] Neuman, E. 和 Fleet, P. J. V.（1994年）。狄利克雷样条的矩及其在超几何函数中的应用。《计算与应用数学杂志》，53，225-241。[16] Kilbas, A. A. 和 Kattuveettill, A.（2008年）。通过分数阶积分与特殊函数表示广义米塔格-莱夫勒函数的狄利克雷平均。《分数阶微积分与应用分析》，11，471-492。[17] Kumar, D.、Ram, J. 和 Choi, J.（2022年）。广义米塔格-莱夫勒型函数的狄利克雷平均。《分形与分数阶》，6，297。[18] Saxena, R. K.、Pog´any, T. K.、Ram, J. 和 Daiya, J.（2010年）。广义多指标米塔格-莱夫勒函数的狄利克雷平均。《亚美尼亚数学杂志》，3，174-187。[19] Simi´c, S. 和 Bin-Mohsin, B.（2020年）。多变量中的Stolarsky均值。《数学》，8，1320。[20] Wang, L. 和 Wang, X.（2013年）。用于基因表达聚类的层次狄利克雷过程模型。《EURASIP生物信息学与系统生物学杂志》，第5卷。[21] Thomas, S. 和 Mathai, A. M.（2009年）。 p–平行多面体的内容及其与似然比统计量的联系。《Sankhy¨a：印度统计学杂志，A辑》，71(1)，49-63。