arXiv:2303.03163v1 [quant-ph] 6 Mar 2023

面向学生和专业人士的ZX演算基础

Bob Coecke Quantinuum
17 Beaumont Street OX1 2NA 牛津，英国
bob.coecke@quantinuum.com

2023年3月7日

摘要

这些是Artur Ekert在牛津大学数学研究所开设的《量子信息导论》课程中，2023年希拉里学期客座讲座的讲义。读者需具备一些狄拉克符号的基础知识。

对于具有一些量子学基础知识的《图解量子》读者而言，这些讲义也构成了一条最短路径，可用于解释他们在QiP中学到的内容如何与传统的量子形式体系相关。

1 引言

ZX演算 [7, 8, 9] 早在 2007 年就已出现，但直到过去几年才得到广泛使用，尤其是随着量子产业的兴起，这带来了新的科学与技术挑战 [12]。它开始崭露头角的领域包括编译 [17, 27], 电路优化 [20, 28],纠错 [18, 22], 量子自然语言处理 [6], 量子机器学习 [35, 34], ， 以及围绕光子量子计算的许多问题 [19, 29]。

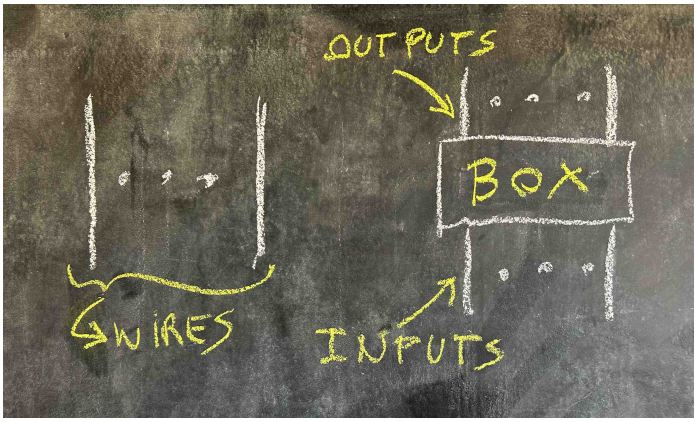
其近年来声名鹊起的另一个原因，是《图解量子过程 [14], 》一书的出版。该书在介绍 ZX演算 时完全不涉及范畴论，而这在此前曾是许多人的障碍。更重要的是，最近还出版了《图解量子 [11] 》一书，该书完全不要求任何数学基础。因此，本书也将 ZX演算 确立为一种教育工具，它能够为使 Quantum 更具包容性作出重要贡献，同时提供一种全新的视角。

2 过程理论作为线和盒子

ZX演算是我们在 [14] 所称的过程理论的一个实例，也就是说，这是一种将过程视为一等公民的理论。回溯2500年的历史，当时曾有一场

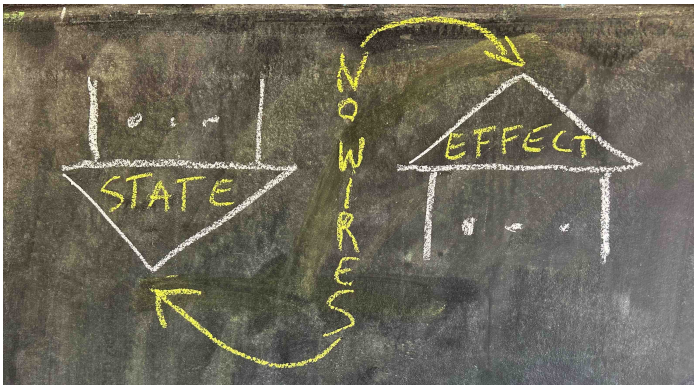
前苏格拉底哲学家赫拉克利特与巴门尼德之间的争论：前者主张一切存在都是过程，世界处于不断的流变之中；而巴门尼德则主张，在任意时刻，世界都是一个静态实例。柏拉图、亚里士多德、开普勒、牛顿等人都遵循巴门尼德的思路，在讨论动态演化之前，先对世界进行运动学描述。怀特海是第一个重新引入赫拉克利特过程思想的人。随着范畴论的诞生，用于实现这一点的适当数学工具如今也已具备，并且可以等价地描述为图示 [26]。

过程理论的语言由线和盒子组成：

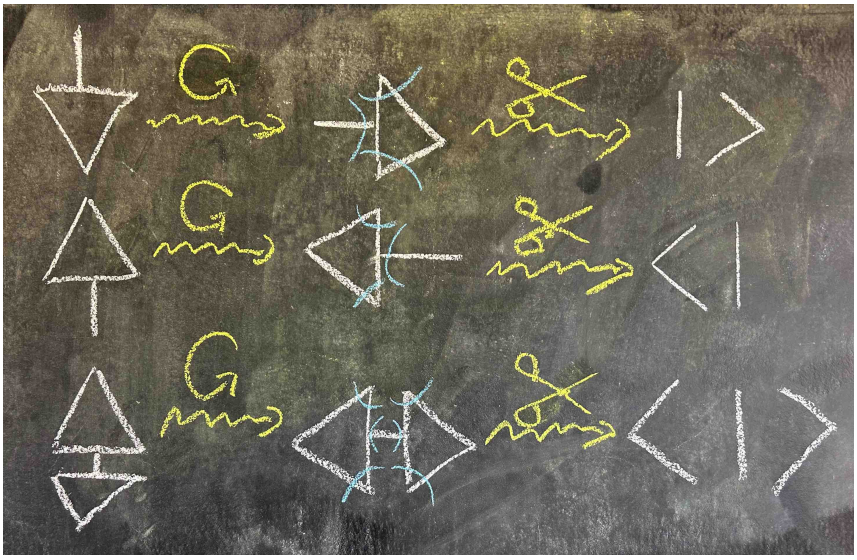


这些盒子会有一些输入线和输出线。这里的线代表量子系统或经典系统——可以把它们看作量子粒子和经典数据存在或传递的地方。盒子会变换这些粒子和数据。例如，盒子可以是一个幺正门、一次量子测量，或者将经典数据编码为量子态等。我们约定时间向上流动，也就是说，输入位于底部，输出位于顶部。

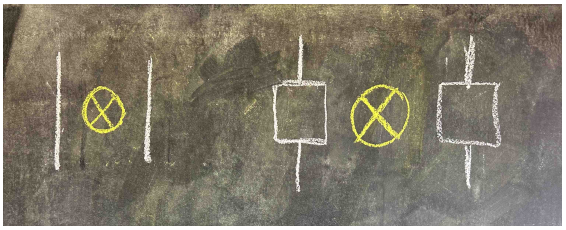
有一种特殊的盒子，称为态和效应（或测试），它们分别对应没有输入和没有输出的盒子：



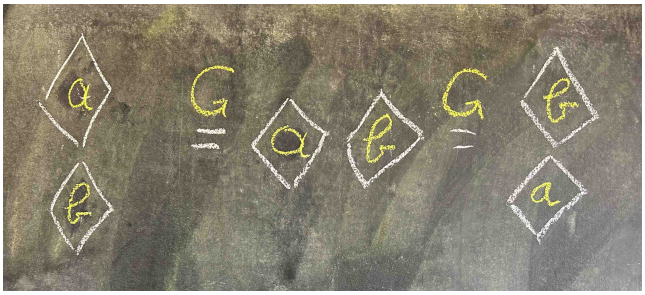
我们将它们画成三角形，因为这样就会与下述狄拉克符号相似：



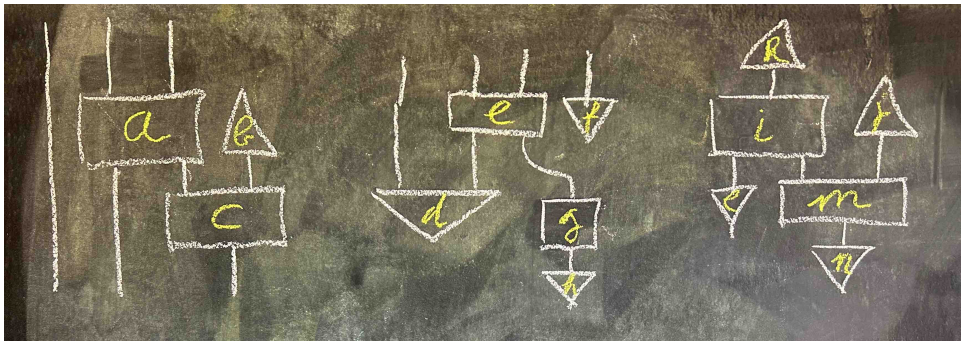
我们确实可以将这些过程理论视为狄拉克符号的二维扩展，其中将两条线和/或盒子并排放置对应于张量积：



这里画出了张量符号，但在图中，这些张量符号实际上只是空白。还要注意，在过程理论中，数对应于既没有输入也没有输出的盒子，记作菱形，这同样是因为狄拉克符号。由于没有外部量子线路对它们加以约束，它们可以自由移动：



我们还了解了如何将盒子连接起来，从而构成图示。以下是作为图示的一个适当过程、一个态和一个数的示例：

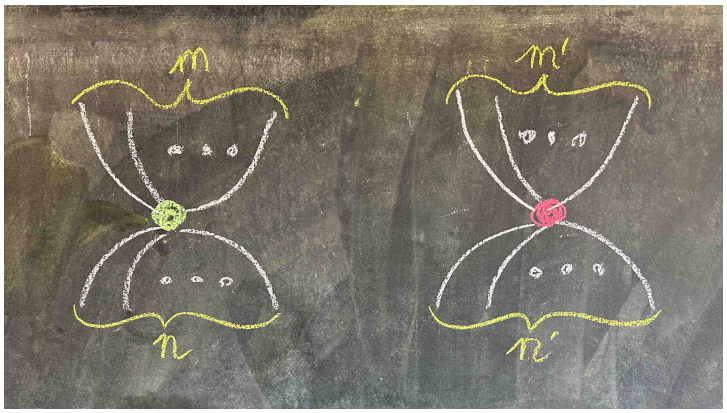


3 线性映射的 ZX记法

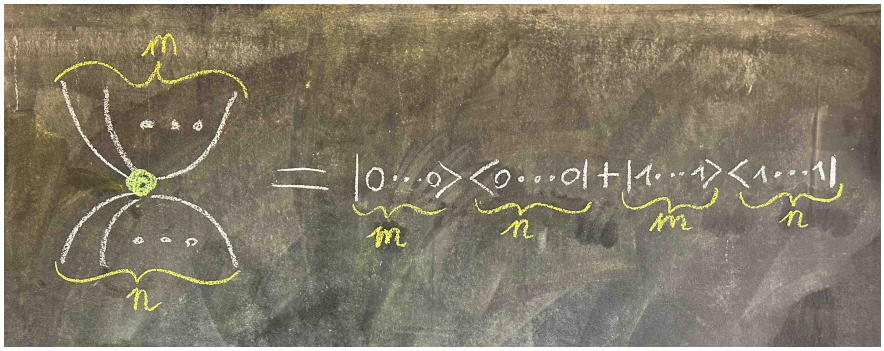
上面的盒子只是抽象的盒子，或者按你的理解称为黑箱。现在，我们将用一些特定的线性映射填充它们，并将其称为ZX记法。

普通蜘蛛

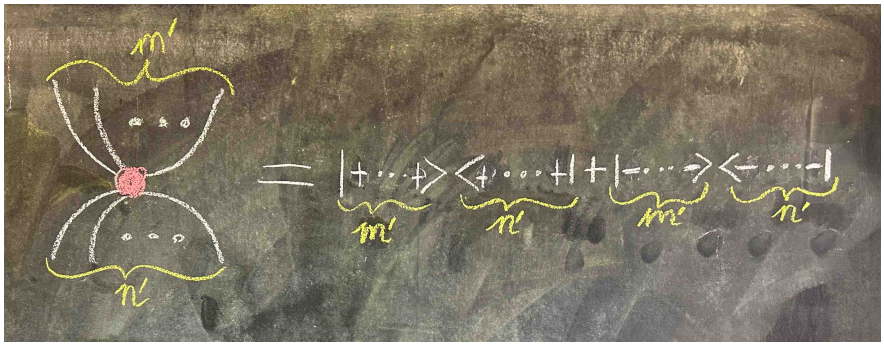
ZX记法主要有两种符号，分别称为Z 蜘蛛 (绿色) 和X蜘蛛(红色):



它们分别表示以下线性映射:



and:



因此，它们唯一的区别在于各自所用的基：

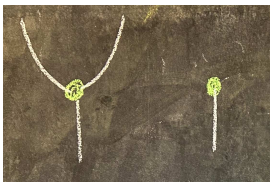
$$\text{Z-basis} = \{|0\rangle, |1\rangle\}$$

and:

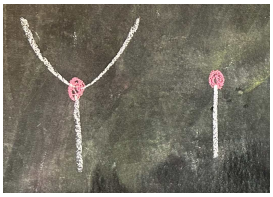
$$\text{X-basis} = \left\{ |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \ , \ |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right\}$$

以下是一些此类蜘蛛的重要例子：

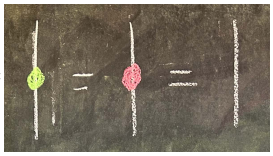
$\{|0\rangle, \ |1\rangle\}$-复制/删除 =



$\{|+\rangle, \ |-\rangle\}$-复制/删除 =



恒等态射 =



贝尔态或杯 =



贝尔效应或帽 =



GHZ态 =



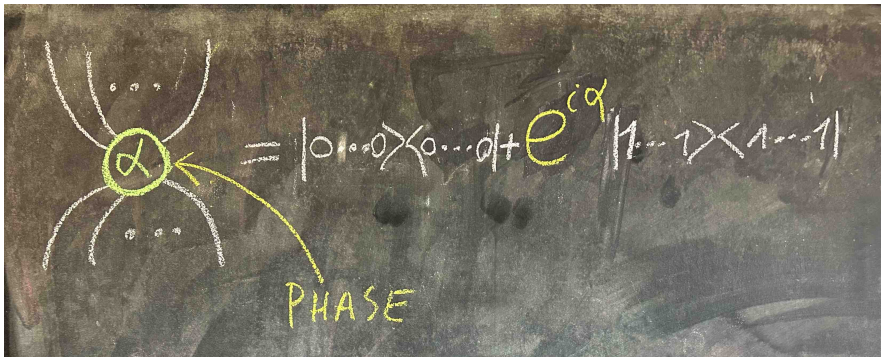
首先请注意，这里的态未经过归一化，这在计算上有其优势。

练习。 证明，对于两种颜色，杯蜘蛛和帽蜘蛛确实相同。请自行验证，除它们、普通导线和无腿蜘蛛之外，不存在其他不同颜色的蜘蛛彼此相同。

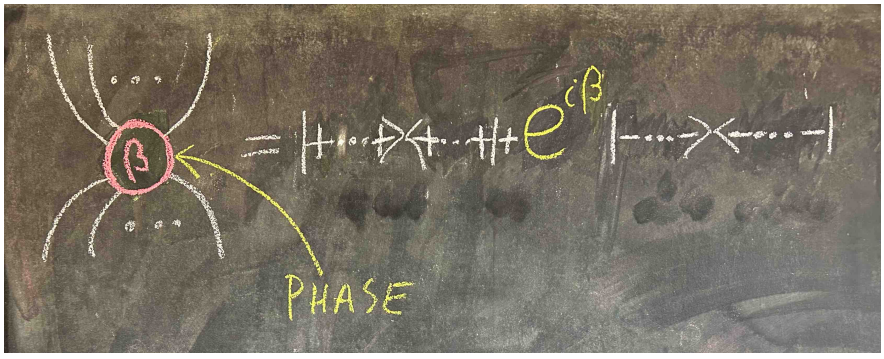
练习。 证明无腿蜘蛛的值为 2，且它等于一个由杯和帽组成的圆。

带相位的蜘蛛

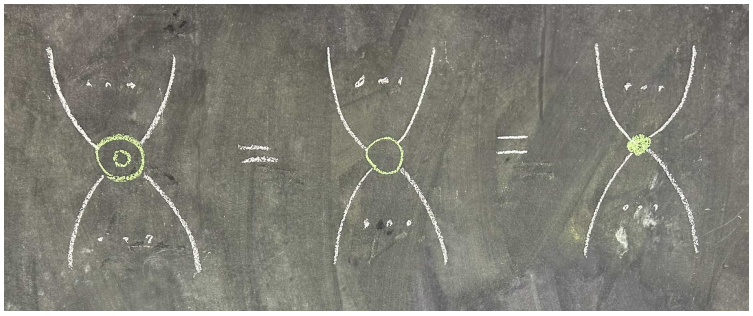
现在我们还允许这些蜘蛛带有 相位，也就是 $[0, 2\pi]$ 中的一个数，它会如下改变线性映射：



and:



我们通常不写 0 相位：

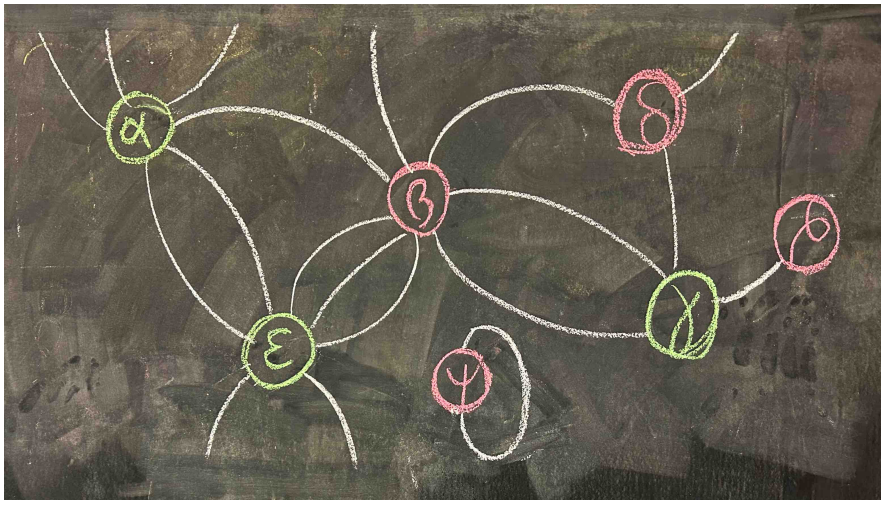


这里有一些示例：

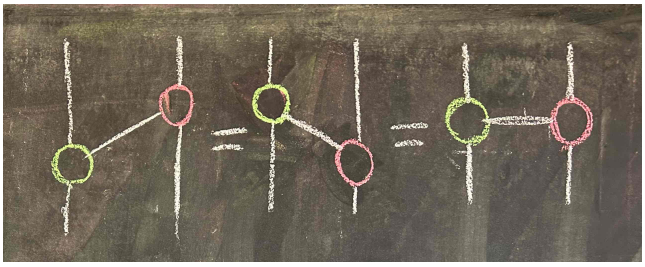
相位门 $=$ 

非门 $=$ 

一个 ZX 图 是由 Z 蜘蛛和 X蜘蛛组成的“网”：

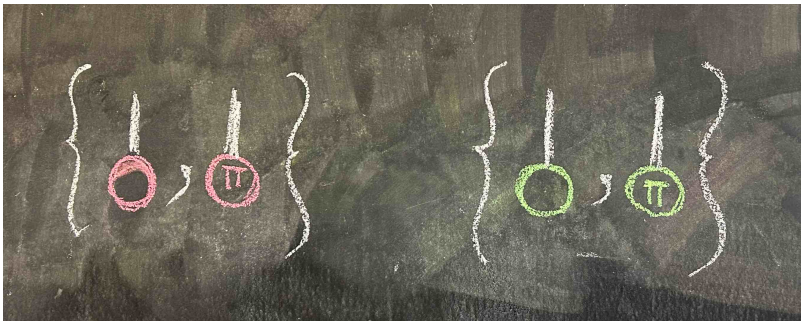


当我们结合两种颜色的蜘蛛时，最重要的例子是：

受控非门 $=$ 

练习。 证明定义受控非门的两种方式确实相同，从而证明水平量子线路的合理性。

此外，除归一化因子外，我们可以将所有基态写成蜘蛛：



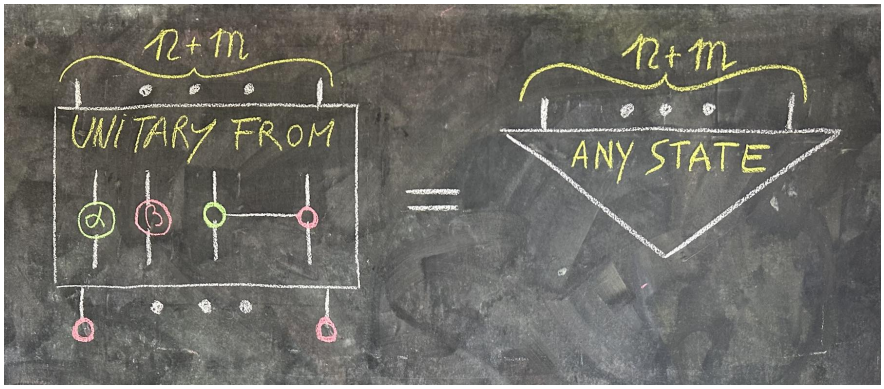
请注意，虽然绿色蜘蛛是用Z基构造的，但其基向量是用X蜘蛛表示的，反之亦然。

练习。 证明确实如此。

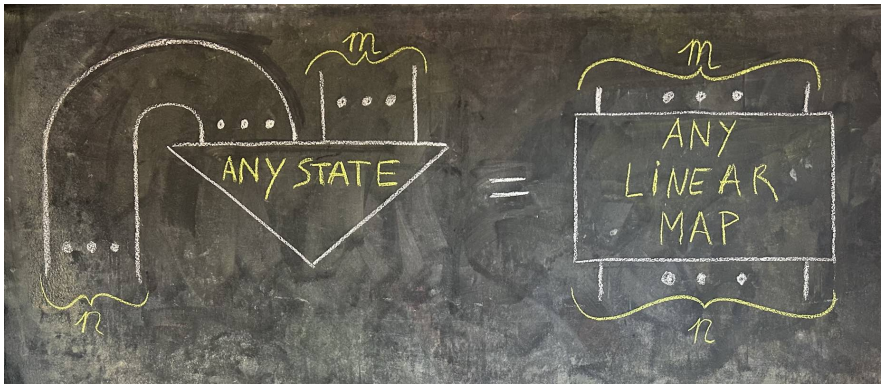
4 ZX记法的普适性

定理。 任意量子比特之间的线性映射都可以用蜘蛛表示。

换句话说，ZX记法是完备的 [5, 9, 14]。我们可以如下证明这一点。众所周知，量子比特之间的任意酉映射都可以用 CNOT门、Z相位门和 X相位门表示，而我们已经看到，这些门中的每一个都可以用 ZX蜘蛛表示。这意味着，我们可以取一个 $n+m$ 个量子比特的态，并用蜘蛛表示，例如 $|0\ldots0\rangle$，然后通过适当的酉算子生成任意其他 $n+m$ 量子比特态：



然后，我们可以使用杯态将任意的 $n+m$ 量子比特态转换为从 n 量子比特到 m 量子比特的线性映射：

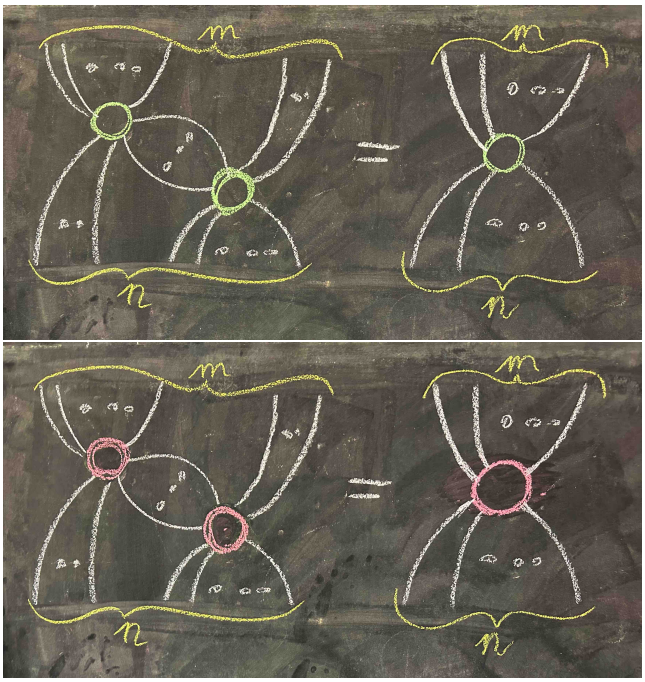


根据 $n+m$ 量子比特态与从 n 量子比特到 m 量子比特的线性映射之间的同构，我们可以利用帽得到任意从 n 量子比特到 m 量子比特的线性映射。关于这一同构的更详细图示说明，请参见 [13, §3.1] 和 [14,§4.1.2]。

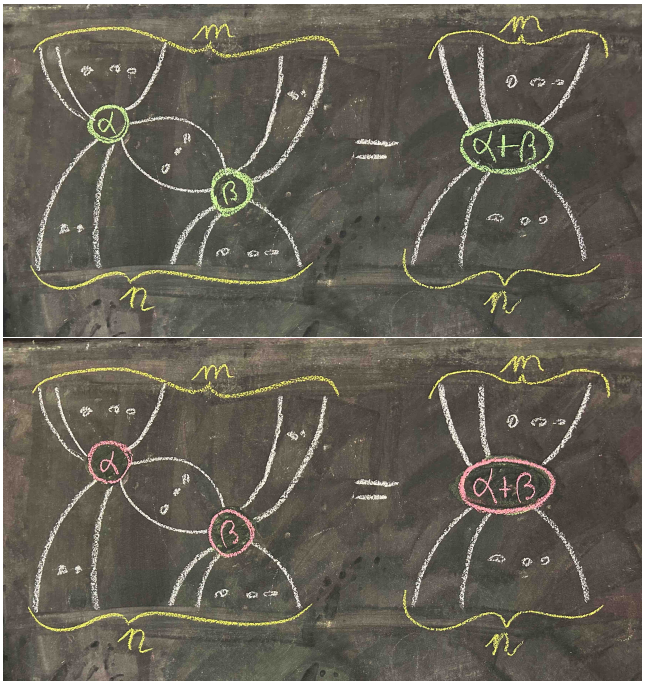
5 ZX演算规则

蜘蛛融合

ZX演算真正有用之处在于，这些简单规则允许我们变换 ZX图。对于颜色相同且没有相位的蜘蛛，我们有以下规则：

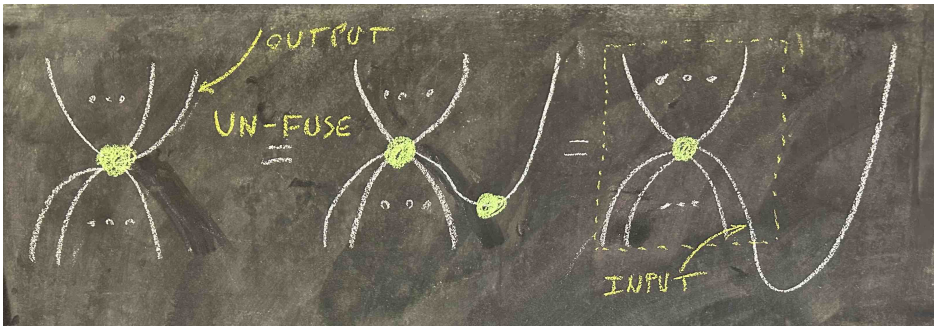


这告诉我们，相同颜色的蜘蛛会融合在一起。这也意味着，任何由相同颜色蜘蛛组成的连通图示都只取决于其输入和输出的数量，因为每个这样的网本身就是一个蜘蛛。如果蜘蛛带有相位，那么融合时这些相位会相加：



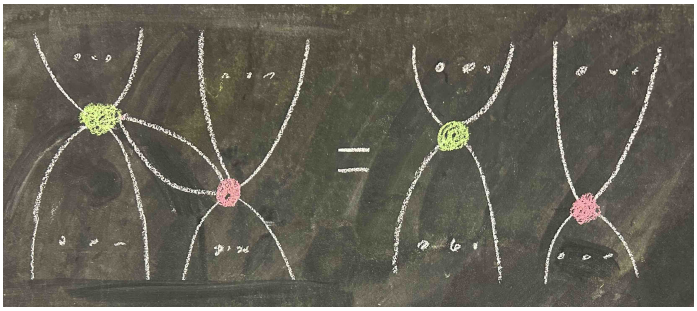
练习。 证明带相位的蜘蛛的融合规则。

备注。 根据蜘蛛融合，在 ZX 图中，我们总可以忽略蜘蛛的哪些部分是输入、哪些部分是输出，因为我们可以通过融合或拆分，并使用杯或帽，任意地将输入变为输出，反之亦然，如下所示：

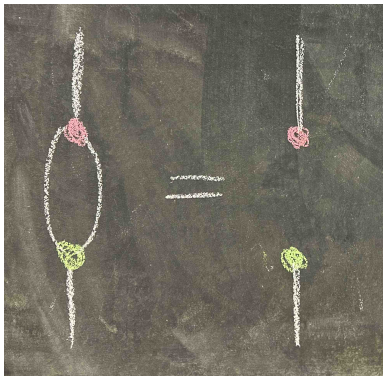


霍普夫规则（或剪腿）和双代数规则（或平方消去）

当不同颜色的蜘蛛共享两条腿时，这两条腿会消失：



借助蜘蛛融合，可以将其简化如下：

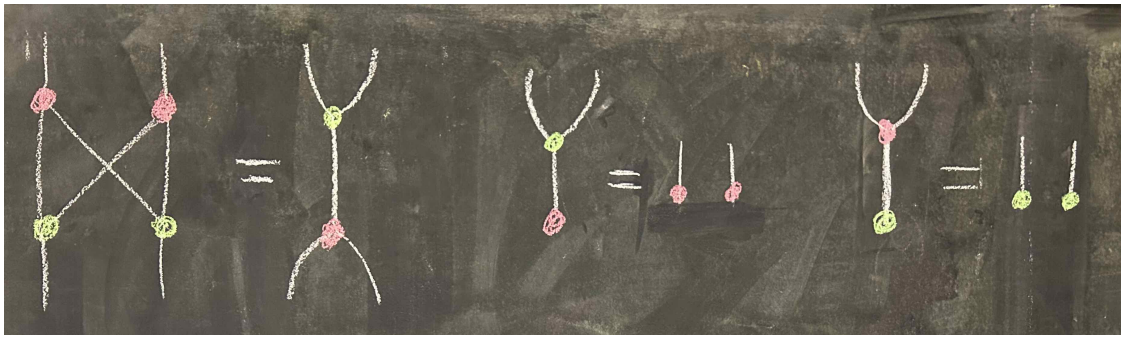


出于历史 原因，我们将其称为霍普夫规则。在 [11] 我们称之为剪腿。

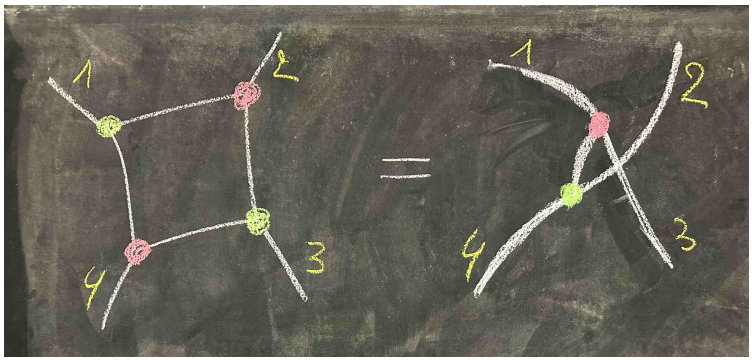
备注。这个等式只在相差一个因子的意义下成立，不过为了论证方便，我们暂且不讨论这个问题。事实上，只要你不是在计算概率，通常总能在计算结束时推导出归一化因子应该是多少 [14, §3.4.3]。

练习。 证明霍普夫规则。

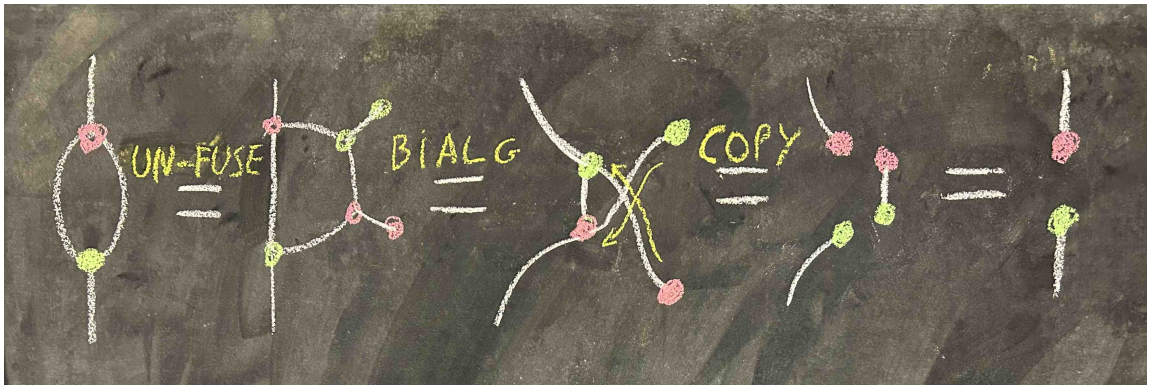
有一条比霍普夫规则更强的规则，由三个等式组成：



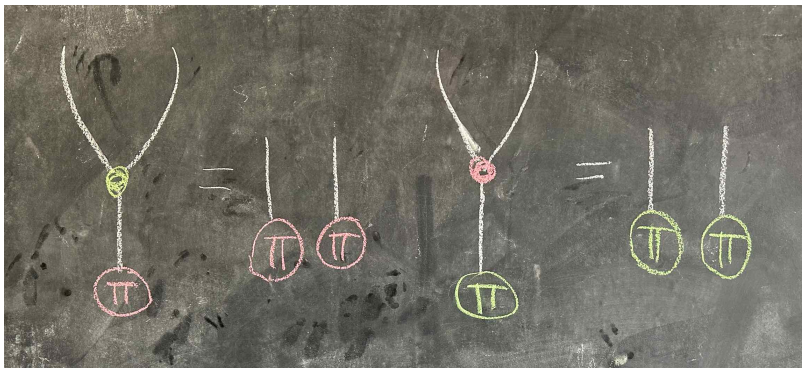
出于历史原因，我们将其中第一条称为双代数规则。这两条复制规则分别表示“绿色复制红色”和“红色复制绿色”。在实践中，第一条更常以下述形式使用，它能够消去平方，而剪腿只能消去 2-环：



因此，在 [11] 中它被称为平方消去。可以由双代数规则和两条复制规则推导出霍普夫规则：



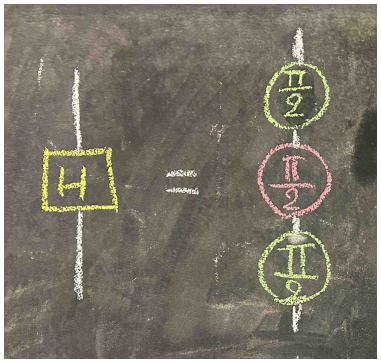
运用一些群论（这里不作介绍，详见 [14, §9.3.4], ），还可以证明，其他基态也会被相反颜色复制：



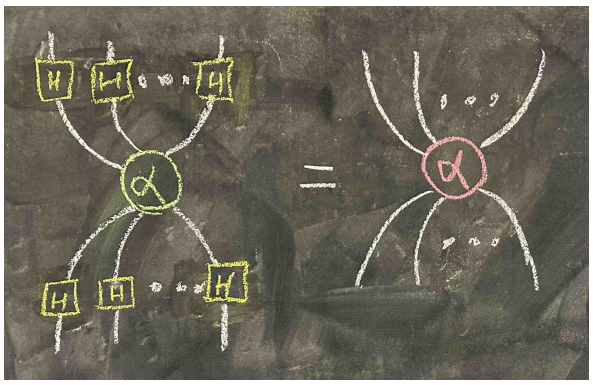
上述规则已经能帮你走很远，其中包括一些前沿的新量子计算技术，后文会进一步介绍。不过，我们会先给出一组更大的规则，并证明其中一个非常重要的结论。

颜色变换

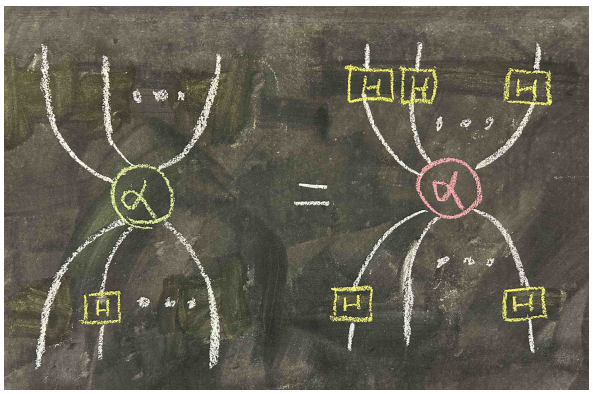
使用一种专门的记法来表示哈达玛门很有用，它可以用欧拉角通过 ZX记法写成如下形式：



另一条额外规则称为颜色变换：



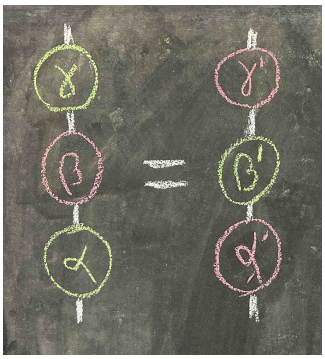
等价地，只要改变其颜色， H-框就可以穿过一个蜘蛛被复制：



练习。 证明颜色变化规则。

相位-颜色交换

最后一条规则具有如下形式：



我们称之为相位-颜色交换 [16, 33]，但这里我们不具体说明角度之间的关系，因为我们不会用到它。事实上，它在实际应用中并不常用。

6 ZX演算的完备性

定理。任何关于量子比特之间的线性映射及其复合的等式，都可以在ZX演算中推导出来。

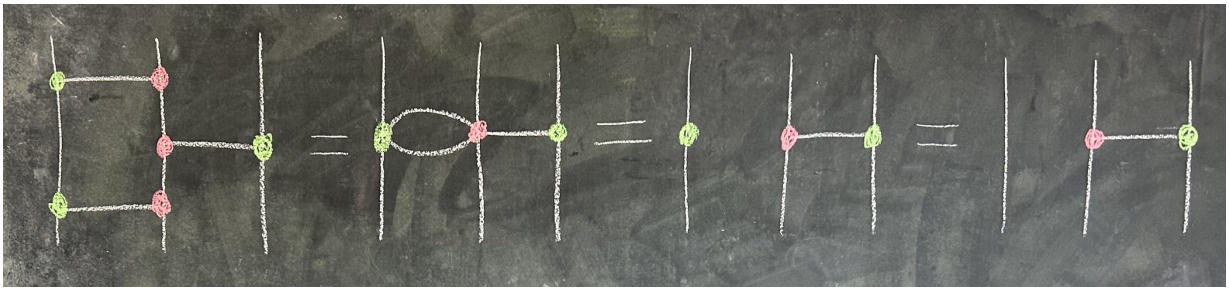
换句话说，ZX演算对于线性映射是完备的。这里的证明很难，经过一系列论文的研究才发展到这一步 [1, 2, 23, 25, 24, 33]。

7 使用ZX演算进行操作（第一部分）

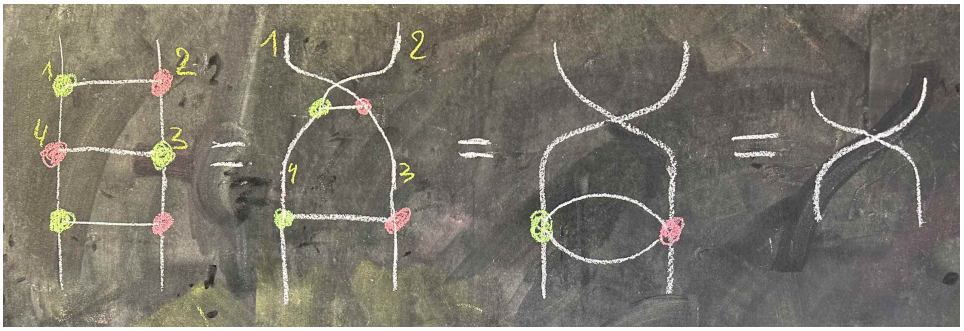
现在我们将看到ZX演算的实际应用。下面所述协议的目的并不是对其进行详细讨论，而是说明ZX演算如何帮助推导或验证这些协议。我们提供了原始论文的链接，方便你对照相关描述。

7.1 量子电路相关操作

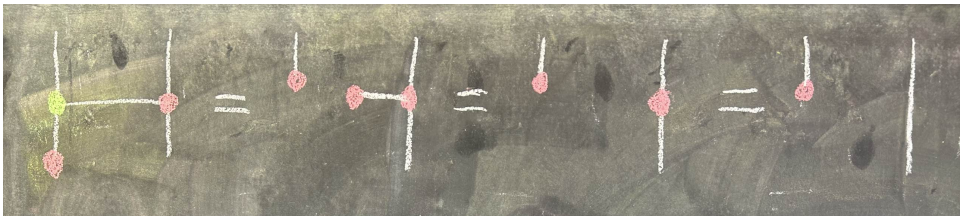
现在我们可以使用ZX演算来简化这个量子电路：



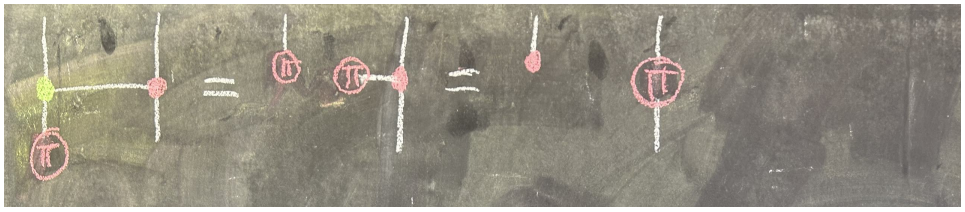
或者这个量子电路：



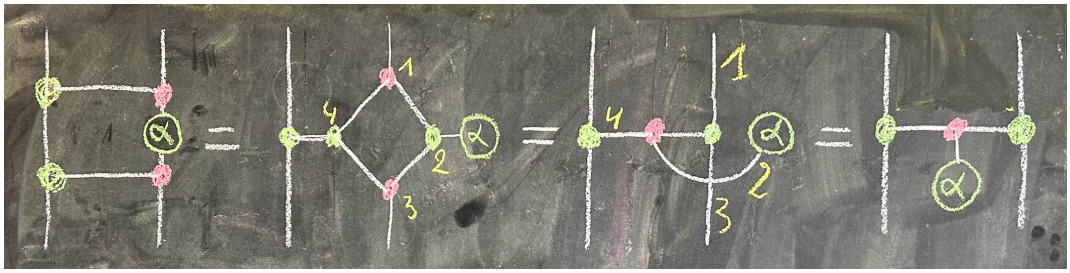
或者我们可以使用它来展示受控非门确实实现了受控非门应有的功能o：



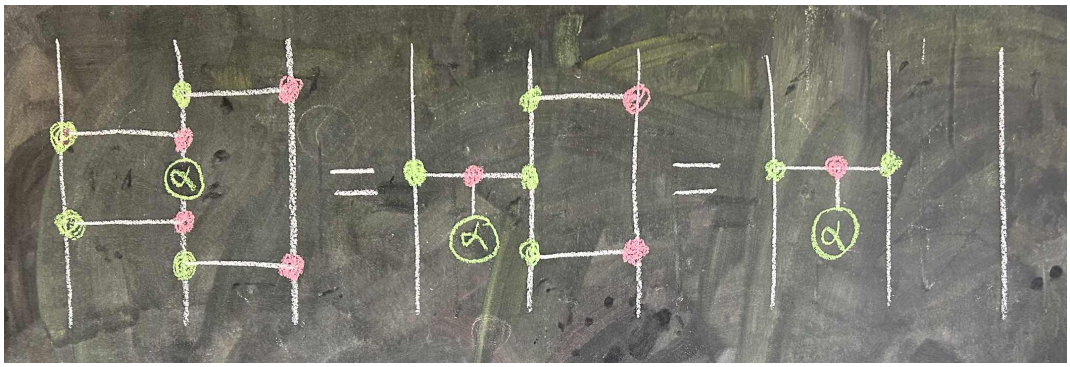
and:



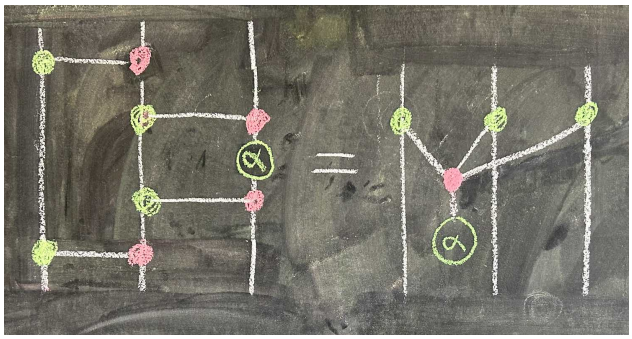
这些都是非常简单的例子。现在，我们将介绍一种普遍适用的技术，它用于量子电路优化，例如在 tket-compiler [17] 中。下面这个电路片段包含一个“隐藏”的平方，我们可以对其进行简化：



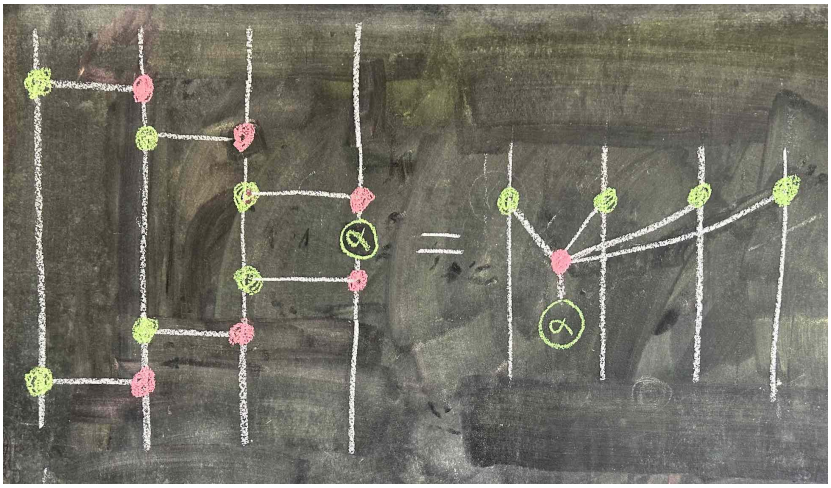
现在垂直量子线路上只有绿色蜘蛛，因此可以对下面的电路进行简化，例如：



类似的技巧还可以推广到更复杂的情形，参见：



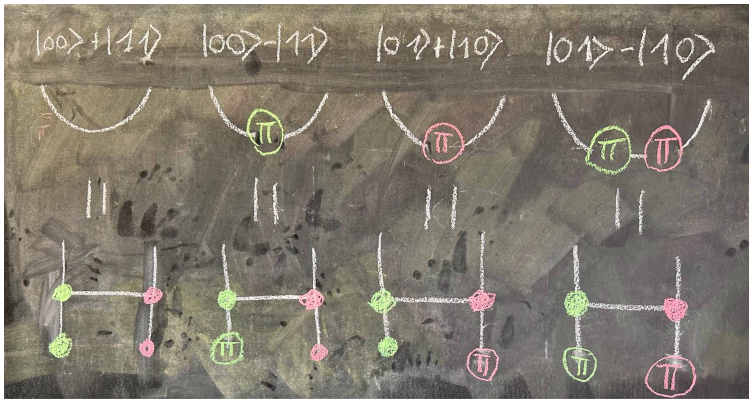
and:



以此类推。

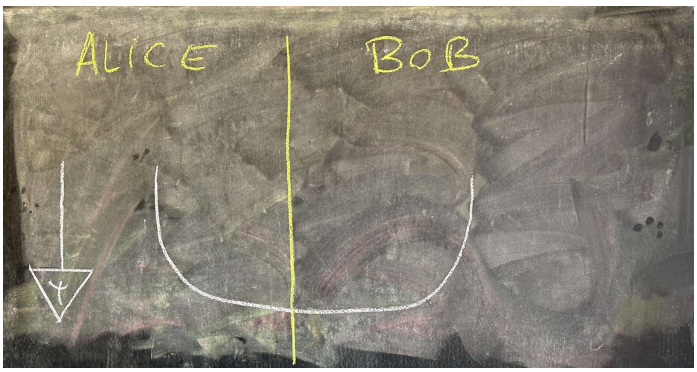
7.2 量子隐形传态

Bell 基可以表示如下：

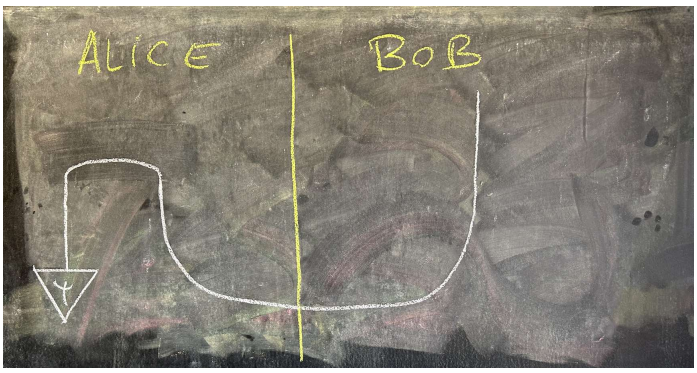


练习。 验证这一点。

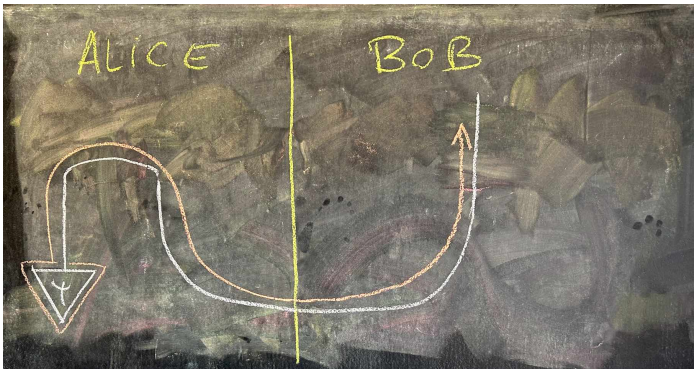
现在，假设 Alice 和 Bob 共享一个贝尔态，Alice 有一个处于 $|\psi\rangle$ 态的量子比特，而 Bob 需要该态。如何在不实际传送量子比特的情况下传递这个态：



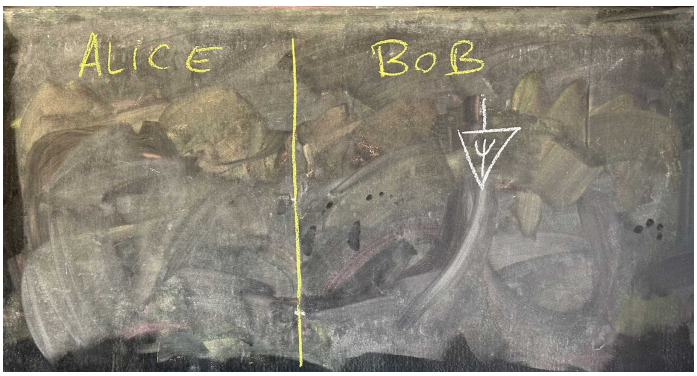
现在，一个显而易见的解决方案出现了：Alice 施加一个贝尔效应：



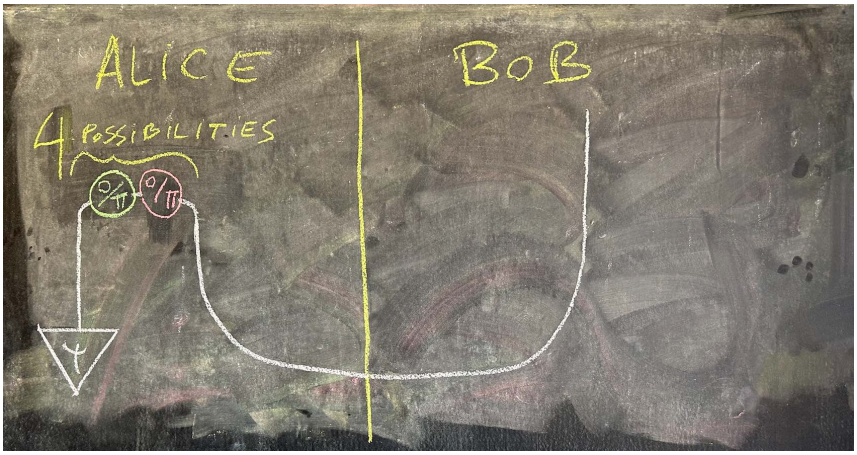
现在，我们确实可以沿着量子线路滑动态：



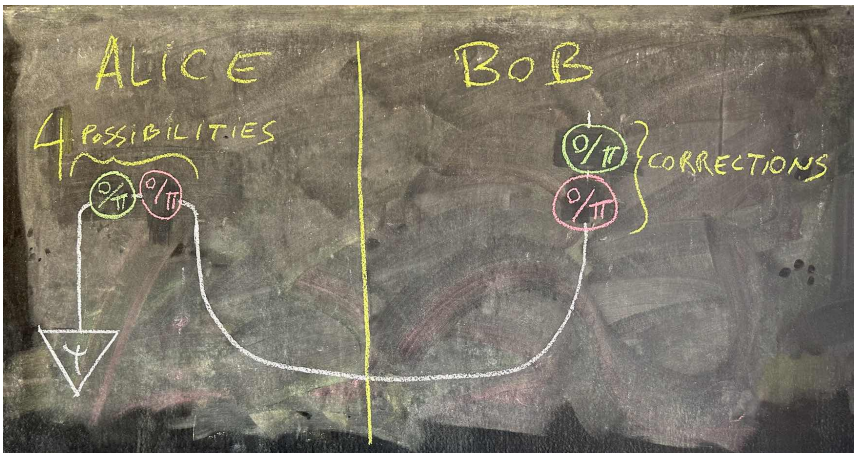
这样它最终就会到达 Bob 手中：



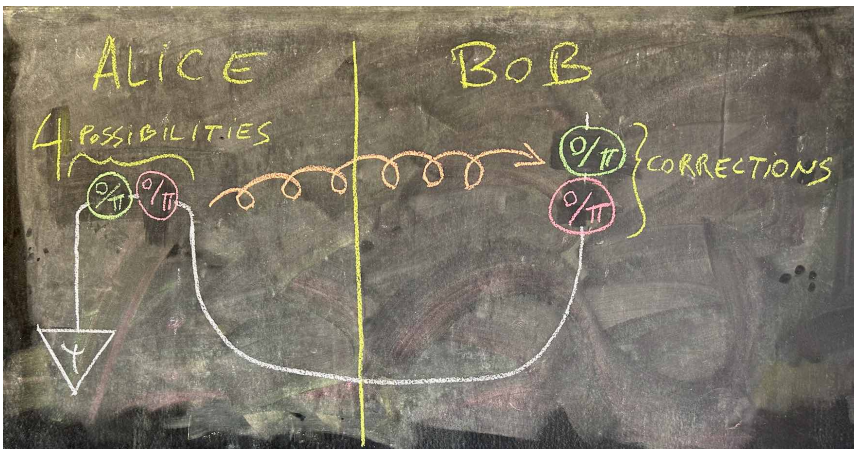
但只有将贝尔效应作为针对贝尔基进行测量的一部分，我们才能实现它，而这种测量会产生四种贝尔效应之一：



幸运的是，我们可以在 Bob 端撤销相应的幺正算子：



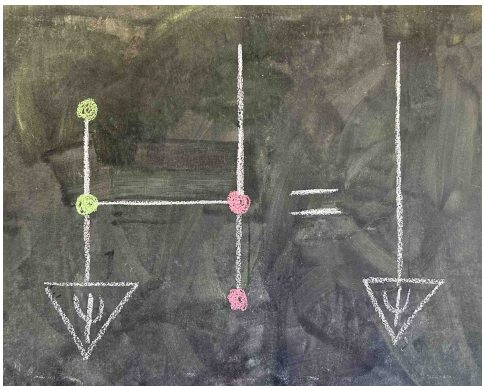
这需要将两个比特从 Alice 发送给 Bob：



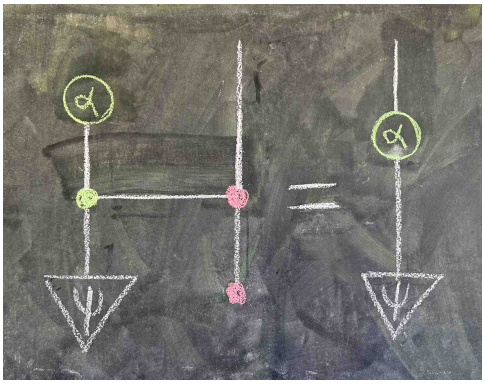
量子隐形传态的原始论文是 [4]。

7.3 基于测量的量子计算

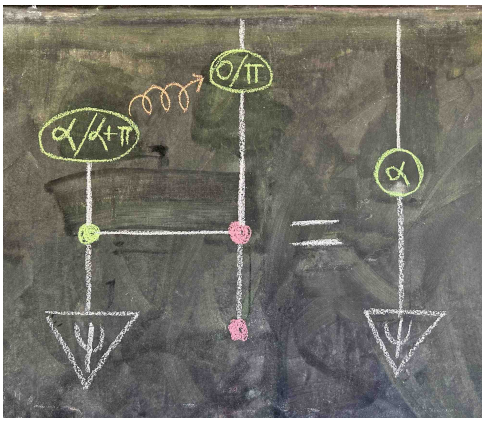
我们还可以如下传递一个态，这次只涉及两个量子比特：



如果不使用 X 测量，而是使用对应于带相位的基的测量，那么该相位会作为相位门应用于态：

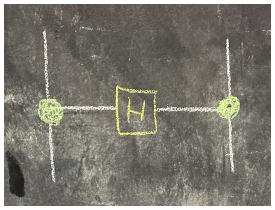


再次考虑两种可能的测量结果，我们可以进行如下操作：

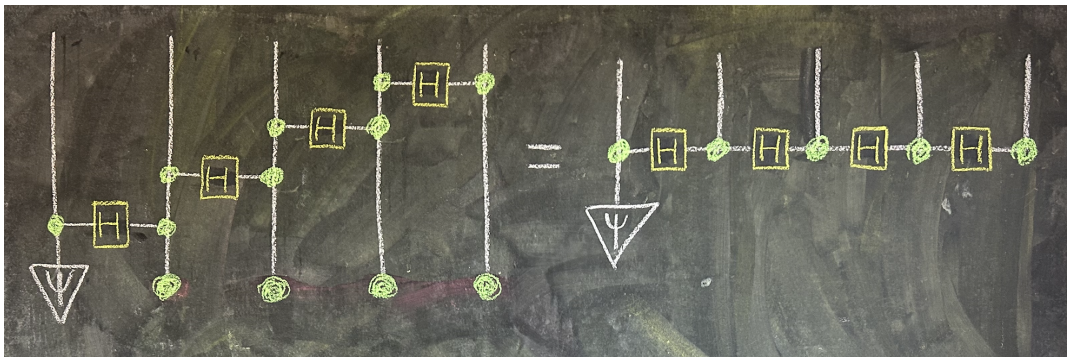


现在，该门会针对每一种测量结果加以应用。这种应用相位门的方式称为基于测量的量子计算。使用以下门：

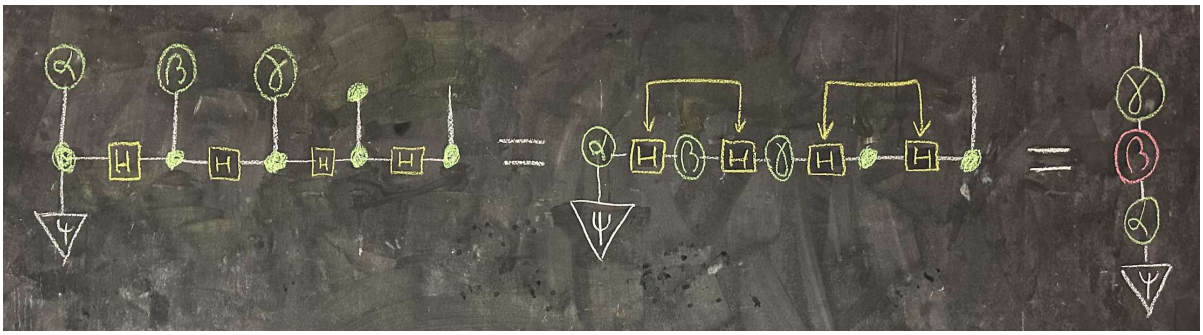
受控 Z 门 =



我们可以构造出以下态:



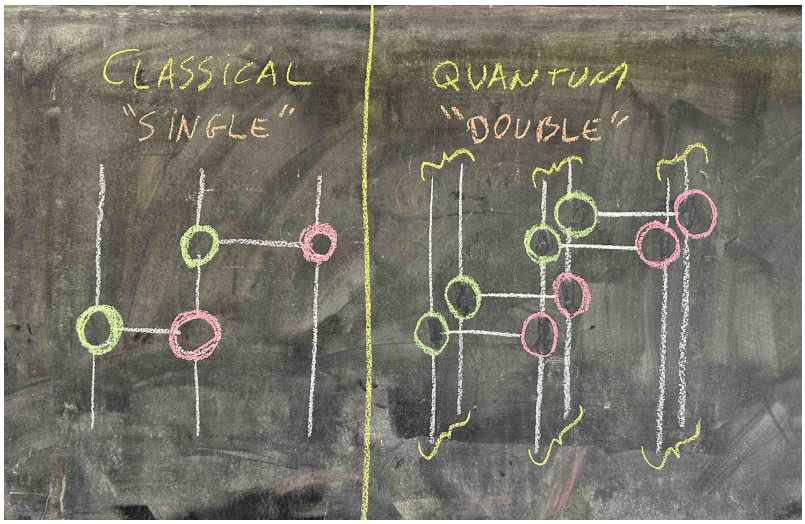
现在，使用基于测量的量子计算，我们得到:



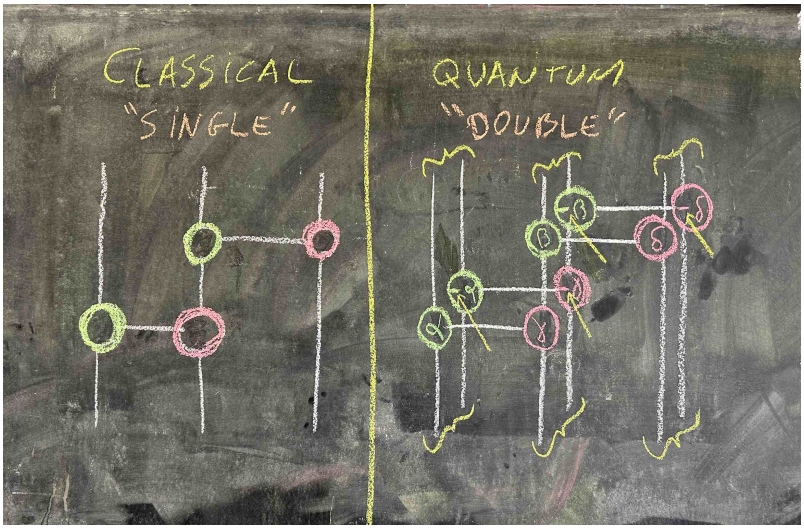
也就是说，我们根据欧拉角应用了一个任意酉算子。这里介绍的两种基于测量的量子计算协议最初分别见于 [30]和 [31] 。

8 经典与量子图示

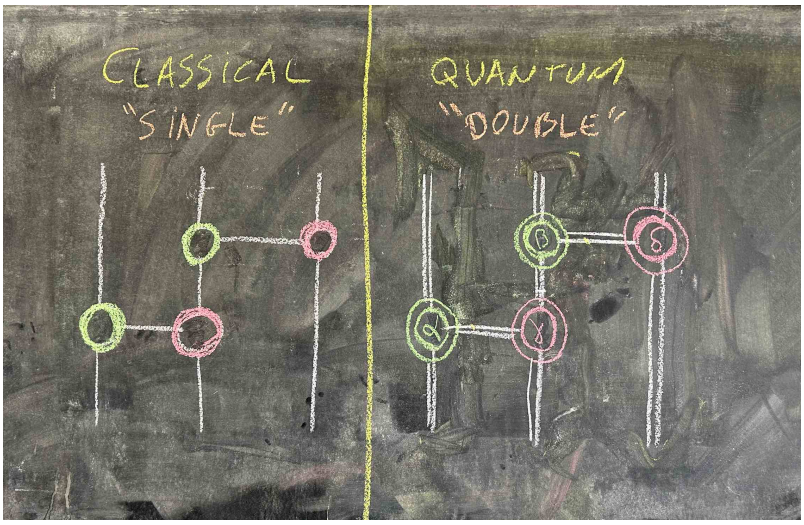
为了区分经典图示和量子图示，我们将经典图示绘制为单图示，而将量子图示绘制为双重图示:



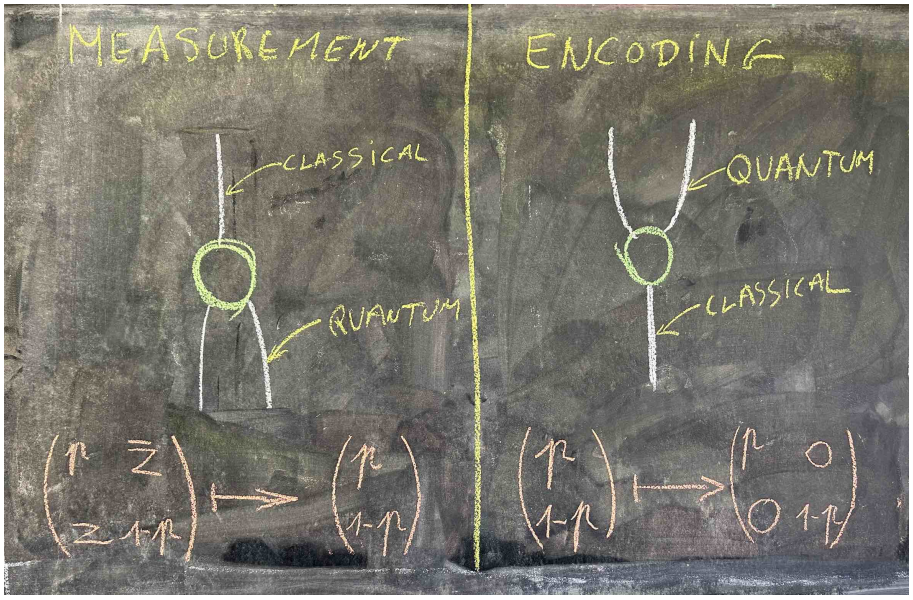
如果存在相位，那么双重图示需要加上一个负号：



为了便于绘图，我们只需将量子线路和蜘蛛节点进行双重处理：



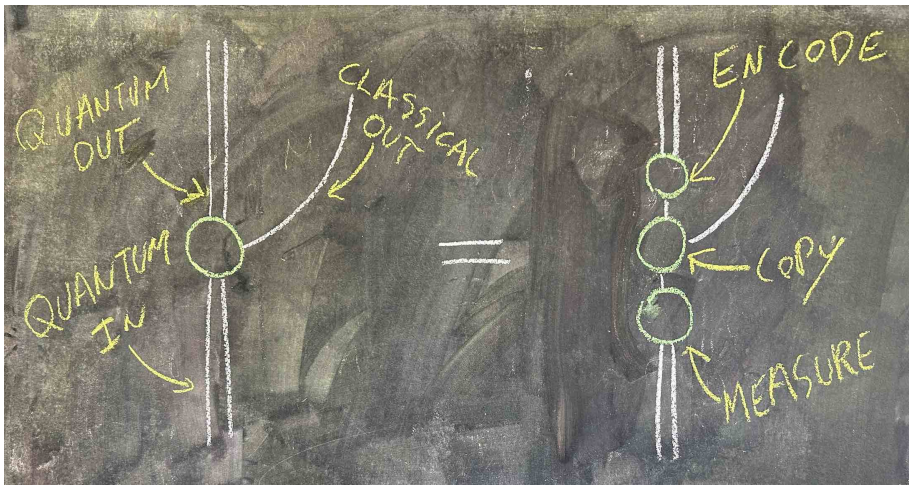
一个测量从量子转为经典，我们也可以编码经典数据为量子态，如下所示：



如前所述，测量接收一个密度矩阵，并返回可能结果上的经典概率分布；而编码接收经典概率分布，并返回一个在对角线上具有该概率分布的密度矩阵。

练习。 证明确实如此。为此，应将密度矩阵视为一个双量子比特态，这是因为量子比特到量子比特的线性映射与双量子比特态之间存在同构。

无损测量如下所示：



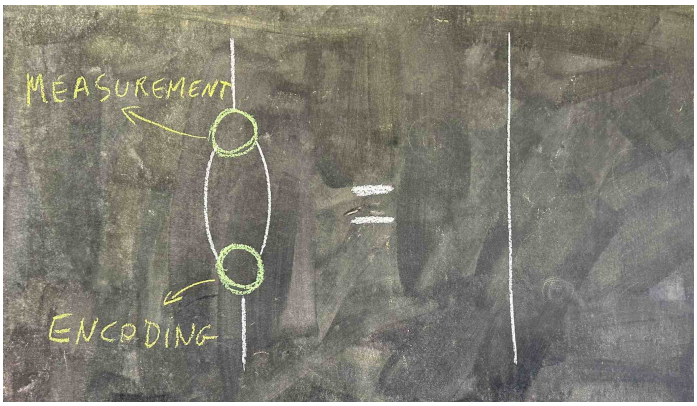
右侧的分解清楚地表明，坍缩在这里是隐含的。

9 使用ZX演算做事情（第二部分）

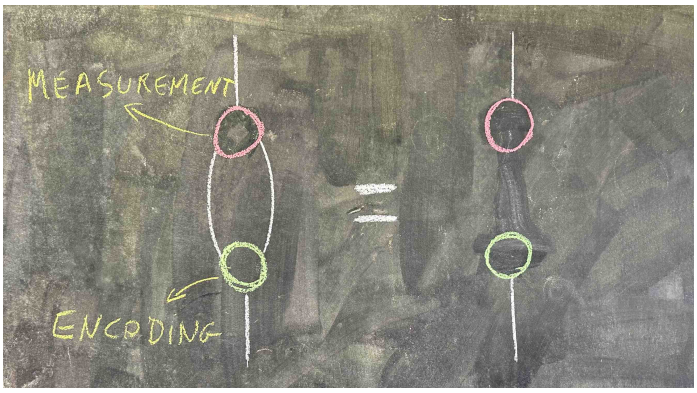
现在，我们将进一步了解 ZX演算 的实际应用。

9.1 组合量子测量

测量 通过蜘蛛融合将其编码为相同颜色后，结果等同于什么也没做 g:



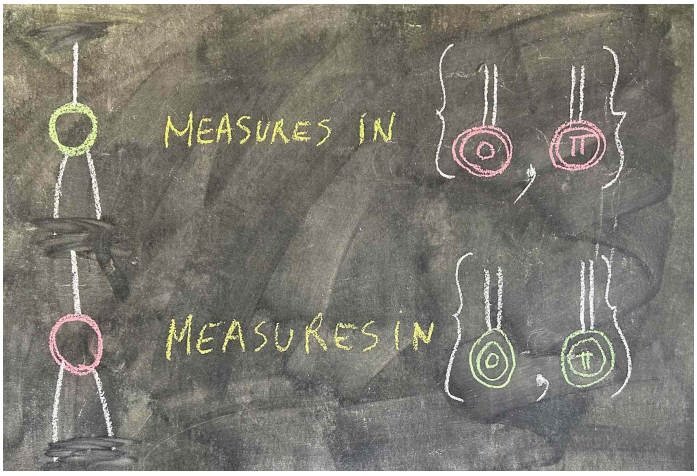
而根据不同颜色的霍普夫规则，我们得到:



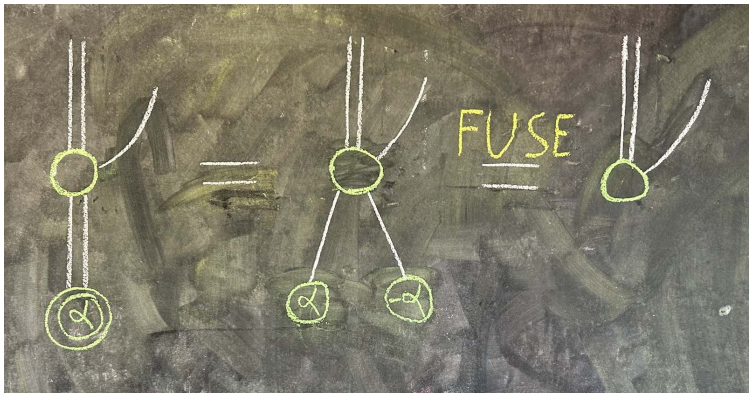
也就是说，没有任何东西能够通过。事实上，经典态:



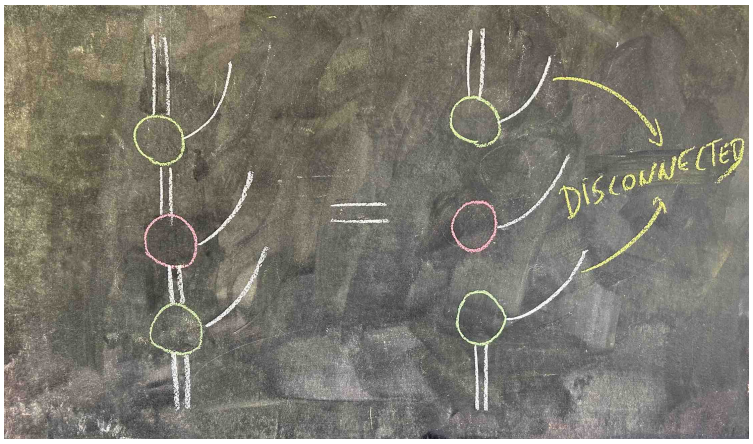
分别表示通过 Z 测量和 X 测量获得的经典数据所对应的均匀概率分布。在我们的 ZX 表示中，经典数据确实是编码在测量所用的基中的 [14, §9.2.4], 回顾一下:



当我们测量一个相位时：



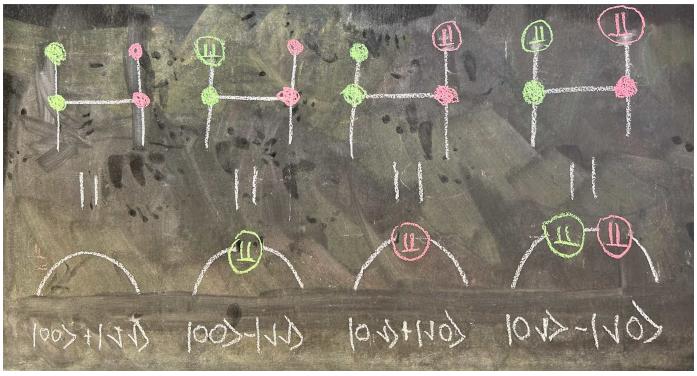
它会消失；如果我们先测量 Z，再测量 X，最后再测量 Z：



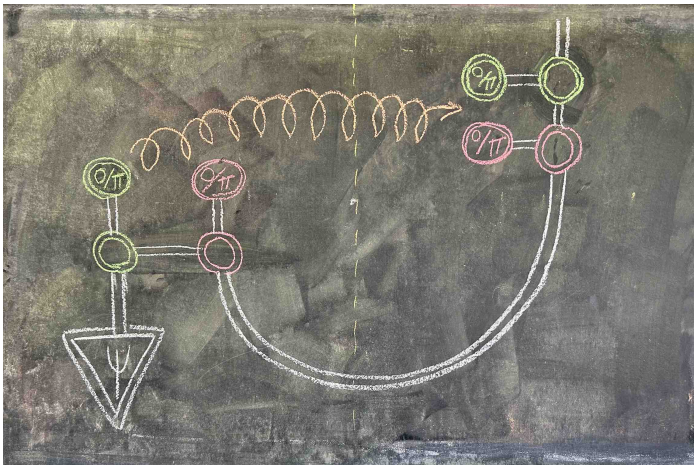
因此，两次 Z 测量的结果彼此无关。如 [15], 所示，这个简单的结果直接构成了 BB84 形式的量子密钥分发的安全性基础 [3], ，而使用杯态则可得到 Ekert 91 形式 [21]。

9.2 经典通信

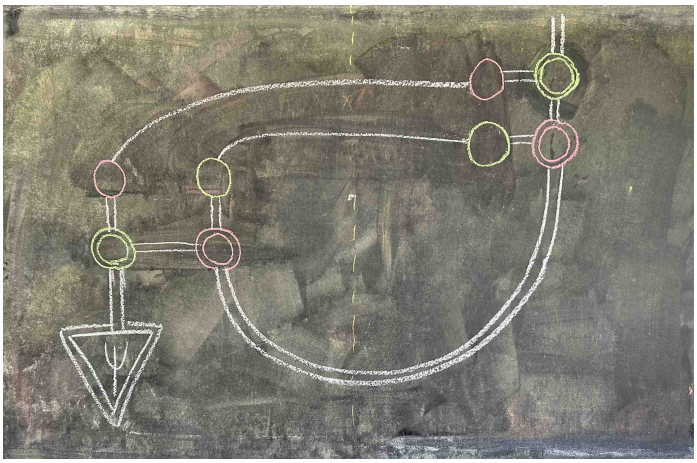
现在，我们再次探讨量子隐形传态，以便将 Alice 和 Bob 之间的通信也纳入图示中。将之前看到的内容上下翻转，我们可以把贝尔测量表示为一个受控非门、一个 Z 测量和一个 X 测量：



因此我们得到：



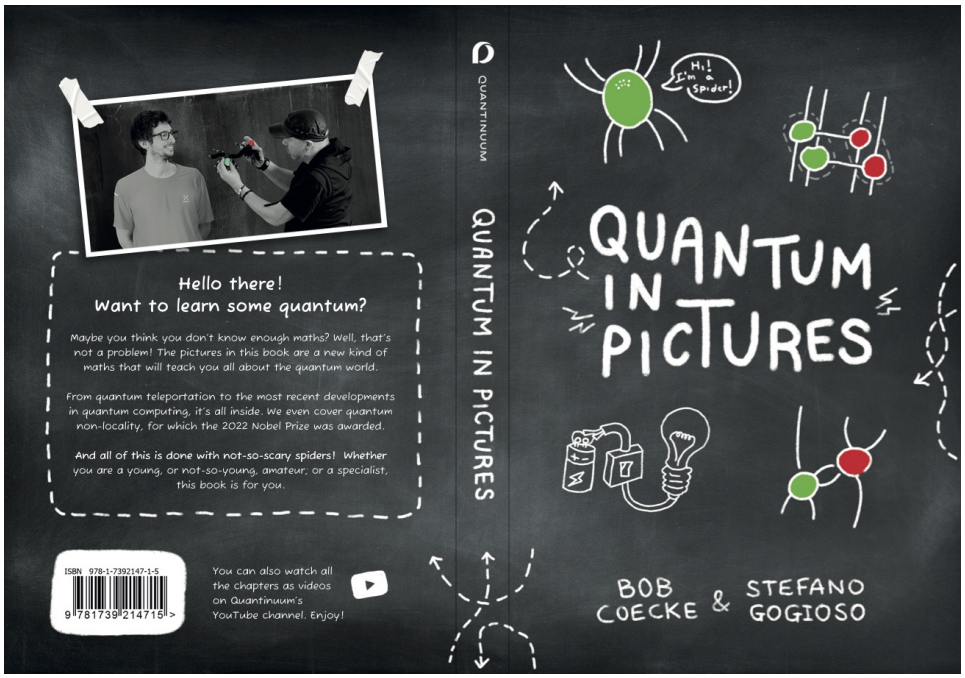
现在，将蜘蛛用作测量和编码，我们得到：



其中，颜色变化是因为在红/绿基中进行绿/红测量。现在，我们终于知道封面上的渡渡鸟一直在想什么了： [14]



如果你对ZX演算还意犹未尽，那么这本《渡渡鸟书》也是继续阅读的好去处。如果它的900页让你望而却步——要知道，我们在牛津大学只用20讲就能教完它——不妨从《图解量子》 [11] 开始：



[14] 和 [11] 都包含量子非定域性的纯图示证明，以及许多这里未介绍的其他内容。事实上，QiP以图示方式讲述ZX故事，完全不涉及希尔伯特空间，也不要求具备任何其他数学或物理学基础。仅仅是这件事成为可能，本身就意义重大，无论从

科学与教育视角。一个与本教程有些相似但年代更早的教程是 [10]。 [12] 介绍了 ZX演算 一些较新的应用，也探讨了更多相关哲学。专业人士也可以阅读更进阶的[32]。所有 ZX 出版物 均可在以下网址找到：

https://zxcalculus.com/publications.html

以及 ZX演算 Discord 页面链接。

10 致谢

感谢 Marcello Benedetti 和 Lia Yeh 仔细校对这些笔记，也感谢 Matty Hoban 提供额外评论。

参考文献

[1] M. Backens。ZX演算对于稳定子量子力学是完备的。新物理学杂志，16:093021，2014。arXiv:1307.7025。

[2] M. Backens。ZX演算对于单量子比特 Clifford+T 群是完备的。载于 B. Coecke、I. Hasuo 和 P. Panangaden（编），量子物理与逻辑第 *11* 届研讨会论文集，理论计算机科学电子会议录第 172 卷，第 293–303 页。开放出版协会，2014。

[3] C. H. Bennett 和 G. Brassard。量子密码学：公钥分发与抛硬币。载于*IEEE*计算机、系统与信号处理国际会议论文集，第 175–179 页。IEEE，1984。

[4] C. H. Bennett、G. Brassard、C. Crepeau、R. Jozsa、A. Peres 和 W. K. Wootters。通过双重经典信道和 Einstein-Podolsky-Rosen 信道传送未知量子态。《物理评论快报》，70(13):1895–1899，1993。[5]B. Coecke。量子图像主义。《当代物理学》，51:59–83，2009。arXiv:0908.1787。[6] B. Coecke、G. de Felice、K. Meichanetzidis 和 A. Toumi。面向近期应用的量子自然语言处理基础，2020。arXiv 预印本 arXiv:2012.03755。[7] B. Coecke 和 R. Duncan。量子可观测量的图形演算。*zxcalcu-lus.com/publications.html*，2007。[8] B. Coecke 和 R. Duncan。相互作用的量子可观测量。载于自动机、语言与编程国际研讨会（*ICALP*）第*37*届会议论文集，《计算机科学讲义》，2008。[9] B. Coecke 和 R. Duncan。相互作用的量子可观测量：范畴代数与图示法。新物理学杂志，13:043016，2011。arXiv:quant-ph/09064725。

[10] B. Coecke 和 R. Duncan。教程：量子电路的图形演算。载于国际可逆计算研讨会，第1–13页。施普林格，2012。[11] B. Coecke 和 S. Gogioso。图解量子。Quantinuum，2022。[12] B. Coecke、D. Horsman、A. Kissinger 和 Q. Wang。幼儿园毕业的量子力学学生（……或者我是如何学会不再把乐高积木粘在一起，并爱上ZX演算的）。*arXiv*预印本 *arXiv:2102.10984*，2021。[13] B. Coecke 和 A. Kissinger。范畴量子力学 I：因果量子过程。载于 E. Landry（编），职业哲学家的范畴。牛津大学出版社，2016。arXiv:1510.05468。[14] B. Coecke 和 A. Kissinger。图解量子过程：量子理论与图示推理入门。剑桥大学出版社，2017。[15] B. Coecke 和 S. Perdrix。范畴量子力学中的环境与经典信道。载于第*19*届欧洲计算机科学逻辑协会计算机科学逻辑年会论文集（*CSL*），《计算机科学讲义》第6247卷，第230–244页，2010。扩展版本：arXiv:1004.1598。[16] B. Coecke 和 Q. Wang。用于2量子比特 Clifford+T 量子电路的ZX规则。载于 Jarkko Kari 和 Irek Ulidowski（编），可逆计算——第*10*届国际会议 *RC 2018*，英国莱斯特，*2018*年*9*月*12–14*日，论文集，《计算机科学讲义》第11106卷，第144–161页。施普林格，2018。[17] A. Cowtan、S. Dilkes、R. Duncan、W. Simmons 和 S. Sivarajah。浅层电路的相位门合成。*arXiv*预印本 *arXiv:1906.01734*，2019。[18] N. de Beaudrap 和 D. Horsman。ZX 演算是一种用于表面码晶格手术的语言。*arXiv*预印本 *arXiv:1704.08670*，2017。[19] G. de Felice 和 B. Coecke。通过弦图实现量子线性光学。arXiv:2204.12985。[20] R. Duncan、A. Kissinger、S. Perdrix 和 J. Van De Wetering。利用ZX演算对量子电路进行图论化简。$Quantum$，4:279，2020。[21] A. K. Ekert。基于贝尔定理的量子密码学。《物理评论快报》，67(6):661–663，1991。[22] C. Gidney 和 A. G. Fowler。利用催化 $|CCZ\rangle$to $2|T\rangle$ 变换实现高效魔态工厂。$Quantum$，3:135，2019年4月。[23] A. Hadzihasanovic。量子比特纠缠的图示公理化。载于*IEEE*计算机科学逻辑年会研讨会第*30*届会议论文集（*LICS*），2015。arXiv:1501.07082。

[24] A. Hadzihasanovic、K. F. Ng 和 Q. Wang。《纯态量子比特量子计算的两种完备公理化》。载于第*33*届 *ACM/IEEE*计算机科学逻辑研讨会论文集，第502–511页。ACM，2018年。[25] E. Jeandel、S. Perdrix 和 R. Vilmart。《Clifford+T 量子力学的 ZX演算完备公理化》。载于第*33*届 *ACM/IEEE*计算机科学逻辑研讨会论文集，第559–568页，2018年。arXiv 预印本 arXiv:1705.11151。[26] A. Joyal 和 R. Street。《张量演算的几何 I》。《数学进展》，88:55–112，1991年。[27] A. B. Khesin、J. Z. Lu 和 P. W. Shor。《基于 ZX 演算的图形化量子 Clifford 编码器编译器》。arXiv:2301.02356。[28] A. Kissinger 和 J. van de Wetering。《减少量子电路中的非Clifford门数量》。《物理评论*A*》，102:022406，2020年8月。[29] D. Litinski 和 N. Nickerson。《活动体积：一种适用于非局域连接有限的高效容错量子计算机的架构》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2211.15465*，2022年。[30] S. Perdrix。《基于测量的量子计算中以态传输取代量子隐形传态》。《国际量子信息杂志》，3(01):219–223，2005年。[31] R. Raussendorf、D.E. Browne 和 H.J. Briegel。《簇态上的基于测量的量子计算》。《物理评论*A*》，68(2):22312，2003年。[32]J. van de Wetering。《在职量子计算机科学家的 ZX演算》。*arXiv:2012.13966*，2020年。[33] R. Vilmart。《纯量子比特量子力学的近最优 ZX演算公理化》。*arXiv* 预印本 *arXiv:1812.09114*，2018年。[34] Q. Wang、R. Yeung 和 M. Koch。《ZX图的微分与积分及其在量子机器学习中的应用》。arXiv:2201.13250。[35] Chen Zhao 和 Xiao-Shan Gao。《利用 ZX演算分析量子神经网络训练中的贫瘠高原现象》。*Quantum*，5:466，2021年。