arXiv:2303.03176v1 [physics.flu-dyn] 6 Mar 2023

使用金兹堡-朗道方程对安装噪声进行建模与闭环控制

UgurKarban[1*]，Eduardo Martini[2] 和 Peter Jordan[2]

[1*]中东技术大学航空航天工程系，土耳其安卡拉，邮编 06800。[2]流体、热学与燃烧系，PPrime研究所，法国国家科学研究中心—普瓦捷大学—ENSMA，法国普瓦捷，邮编 86036。

通讯作者。电子邮箱：ukarban@metu.edu.tr；其他作者：eduardo.martini@ensma.fr；peter.jordan@univ-poitiers.fr；

摘要

安装噪声是与飞机喷气发动机相关的主要声源。近期研究表明，线性波包模型可用于预测安装噪声，这意味着也可以采用线性控制策略来降低安装噪声。本文提出了一个简单模型，用于测试不同的控制方法，并突出说明在实际射流中实现成功噪声控制可能面临的限制。该模型包含真实再现实际控制问题所需的全部基本要素：通过线性金兹堡-朗道模型获得随机波包；在波包附近引入半无限半平面，以计及机翼后缘的影响；并通过在后缘处放置偶极点源实现致动，该点源用于模拟压电致动器。将基于最优因果预解算子的控制方法与经典波抵消方法进行了比较。通过将传感器置于不同位置，测试了因果性约束对控制性能的影响。我们证明，当传感器未置于后缘上游足够远的位置时——由于几何限制，这可能是实际控制问题中的情况——因果性会降低控制性能。我们还表明，通过结合使用最优因果控制与对强迫的建模，可以缓解这一限制。

关键词：关键词1，关键词2，关键词3，关键词4

1 引言

喷流噪声正成为航空业日益重要的问题。现代超高涵道比（UHBR）涡扇发动机较低的出口速度，显著降低了喷气发动机直接辐射的噪声。然而，这些发动机增大的喷嘴直径导致喷流唇线与机翼结构之间的距离减小，从而使喷流与机翼襟翼相互作用所产生的噪声增加，该噪声称为安装噪声。本研究聚焦于安装噪声问题的建模与控制。

与安装喷流相关的噪声生成机制，即机翼邻近区域内喷流的噪声生成机制，已知不同于自由喷流中的机制。然而，在两种情况下，波包都是关键要素。对于亚音速自由喷流，研究表明波包的抖动是一个重要声源，因为它会导致波包的相干性衰减，从而提高其声学效率（Cavalieri 等人，2011；Cavalieri 和 Agarwal，2014；Cavalieri 等人，2019）。为了使波包模型能够准确预测喷流噪声，其应表现出与真实喷流相似的相干性衰减。这意味着，按构造在整个区域内具有单位相干性的秩一波包模型，即使能够较好地捕捉剪切层中的湍流脉动，也无法给出准确的噪声预测。当喷口出口与襟翼后缘（TE）之间的距离较大时，安装喷流也是如此。Nogueira 等人（2016）表明，当喷嘴与后缘之间相距四个直径时，需要引入相干性衰减模型才能准确预测噪声。与其结果相反，Faranosov 等人（2019）表明，采用通过求解线性抛物化稳定性方程获得的波包模型——该模型按构造为秩一——当后缘位于喷嘴下游约三个直径处时，可以较准确地预测安装噪声。这表明，随着后缘与喷口出口之间的间距缩短，秩一波包模型可能足以进行噪声预测。在许多已发表的UHBR涡扇发动机缩比模型试验中（Davy 等人，2019），喷口出口与襟翼后缘之间的距离约为两个至三个直径，因此小于三个直径的距离构成了更具相关性的情形。

一旦获得合适的源模型，就可以利用气动声学类比对安装喷流中的噪声产生进行建模。声源直接发出的噪声称为入射噪声，可使用 Lighthill声学类比（Lighthill，1952年）进行预测。 Ffowcs Williams andHall （1970年）提出了定制格林函数（TGF），利用 Curle类比（Curle，1955）可以考虑靠近半无限板的声源所产生的散射声场。已有许多研究（Cavalieri 等人，2014；Nogueira 等人，2016；Piantanida 等人，2016；da Silva 等人，2019）表明，针对半无限板的 TGF 可用于准确预测安装喷流构型中的声场。

文献中报道的所有这些进展都指向这样一种假设：安装噪声可以建模为一种涉及线性机制的线性.....

分别用于噪声产生和传播的源模型与 TGF。这使得通过实时测量喷口出口周围单个位置的湍流脉动，对安装噪声实施线性控制成为可能，从而预测这些测得的脉动经对流和放大后将在下游形成的波包。获得波包的估计值后，即可利用 TGF 预测该波包辐射的噪声。当然，要控制安装噪声，需要配备合适的执行器，使其能够产生与安装喷流构型声场相似的声场。已知安装喷流的声学指向性呈偶极型，这是由于后缘对声音的强烈放大作用，使其相当于一个点偶极子。

安装噪声控制正逐渐成为一个热门研究课题。目前已有不少研究探讨安装噪声的被动控制策略。Rego 等人 (2021年) 随后 Jente 等人(2022) 研究了利用可渗透表面降低安装噪声的潜力。采用类似方法，Kamliya Jawahar 等人 (2023年) 研究了利用多孔板降低安装噪声。Mancinelli 等人(2022) 研究了在实心平板的后缘采用柔性表面，使后缘能够透过波包引起的压力脉动。

另一方面，关于安装噪声主动控制的研究较少。据作者所知，相关文献仅限于两项研究（Bychkov 等人，2019；Kopiev 等人，2020年），这些研究探讨了使用等离子体致动器控制射流中的不稳定性，从而降低安装噪声。本文探索一种基于固体表面后缘致动的替代主动控制策略的潜力。我们采用与 Maia 等人 (2020年) 和 Maia 等人 (2021年) 用于自由喷流控制的策略类似的闭环控制策略。我们采用一个理想化模型问题，其中包含半无限板附近的线性波包，以及一个连接在平板后缘的点偶极子。通过求解带有随机外部强迫的金兹堡-朗道方程，获得该线性波包。我们对强迫、G-L 问题的参数以及半无限板的位置进行配置，使所得声场与实际低亚声速射流的声场相似。利用点传感器测量波包中的随机脉动，以确定控制输入。我们研究在一种实际配置下因果性约束对控制性能的影响；在该配置中，传感器与后缘之间的距离，与实际飞机上喷口出口和襟翼后缘之间的距离相近。我们的目标是找到控制的最佳传感器位置，并探讨在飞机实际装置的几何限制下此类控制的可行性，即使噪声产生机制完全线性且用于控制的执行器是理想执行器。

我们采用两种不同的控制策略：波抵消方法和基于最优因果预解式的控制。这两种方法都属于频域方法。前者是一种经典线性控制方法，

涉及计算线性控制三个要素之间的线性传递函数：传感器、观测器和执行器，并寻找能够抵消观测器处脉动的控制律。该方法已用于许多研究中的流动控制（Thomas，1983年；Laurien 和 Kleiser，1989年；Li 和 Gaster，2006年；Sasaki 等人，2018b，a；Maia 等人，2021年）。由于控制律通常是非因果的，因此往往需要将其截断为因果部分。后一种方法由Martini 等人 （2022）提出，在计算最优控制核时将因果性作为约束条件。当传感器与执行器之间的距离较小时，该方法的性能明显优于波抵消方法。在频域中通过 Wiener-Hopf 分解（Youla 等人，1976年）实现因果性约束。Martini 等人Martini 等人（2022）测试了该方法，用于控制扩张段流动中的湍流脉动，其情形与射流类似。我们在不同传感器位置下比较这两种方法，以验证上述假设。

本文的结构如下：我们在第 2 节重新介绍两种控制方法。在第 3 节中，我们详细介绍金兹堡-朗道模型以及半无限板的 TGF 函数。在第 4 节中，我们展示在模型问题上实施这些控制方法的结果。最后，我们在第 5 节中总结全文，并给出一些结语。

2 控制方法

本研究所用的模型包含两部分：(*i*) 波包模型，可表示为一个一维线性时域系统：

$$\partial_t q(x,t) - \mathcal{A} q(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

其中，q 和 f 分别表示状态和外部激励，$\mathcal{A}$ 表示线性时不变算子；以及 (*ii*) 通过定制格林函数（TGF）求解的声传播问题，用于计算波包 $q(x,\ t)$ 产生的声音。

空间分布系统的最优因果控制可通过线性二次调节器（线性二次调节器）实现（Motee 和 Jadbabaie，2008年）。此类控制器需要系统的状态空间表示，其中包括声场。与波包模型不同，考虑了半无限平面所致声散射的 TGF 仅以频域形式提供。因此，为声传播问题建立动态时域模型并非易事。此外，建立包含声场的状态空间表示，会使线性二次调节器问题的代价取决于观测位置。通常会将观测器放置在远离声源域的位置，这可能导致问题规模过大，不适用于基于线性二次调节器的方法。鉴于这些限制，我们着重研究基于传感器、执行器和目标之间传递函数的控制方法。

2.1 波抵消方法

控制问题通过图1所示示意图呈现y，u 和 z 分别表示传感器、执行器和观测位置，而 n 表示不相关的测量噪声。我们采用与Maia 等人 (2021年所用方法类似的反应式前馈回路。前馈回路的框图也见图1。传感器与观测器之间的关系可写为

$$\hat{z}_c(\omega) = \left(\hat{H}_{yz}(\omega) + \hat{\Gamma}(\omega)\hat{H}_{az}(\omega)\right)\left(\hat{y}(\omega) + \hat{n}(\omega)\right), \tag{2}$$

其中，帽号表示经过傅里叶变换的量，$\hat{z}_c$ 表示控制器启用时的观测器$\hat{}$ $\hat{}$，H_{yz} 和 H_{az} 分别表示 y-z与 a-z之间的线性传递函数，它们满足

$$\hat{z}_y(\omega) = \hat{H}_{yz}(\omega)\left(\hat{y}(\omega) + \hat{n}(\omega)\right), \tag{3}$$

$$\hat{z}_a(\omega) = \hat{H}_{az}(\omega)\hat{a}(\omega), \tag{4}$$

其中，在测量与致动之间没有闭环连接时，$\hat{z}_y$ 和$\hat{z}_a$ 分别表示由波包和致动器产生的噪声。在式（1）中存在随机激励的情况下，$\hat{y}(\omega)$和$\hat{a}(\omega)$也会成为随机量。对于式（3）中的$\hat{P}_{yy} \triangleq \langle \hat{y}\hat{y}^* \rangle$、$\hat{P}_{nn} \triangleq \langle \hat{n}\hat{n}^* \rangle$和$\hat{P}_{zy} \triangleq \langle \hat{z}_y\hat{y}^* \rangle$，以及式（4）中的$\hat{P}_{aa} \triangleq \langle \hat{a}\hat{a}^* \rangle$和$\hat{P}_{za} \triangleq \langle \hat{z}_a\hat{a}^* \rangle$，计算其互谱密度（CSD）后，即可计算出传递函数:

$$\hat{H}_{yz}(\omega) = \hat{P}_{zy}(\omega)\left(\hat{P}_{yy} + \hat{P}_{nn}\right)^{-1}(\omega), \tag{5}$$

$$\hat{H}_{az}(\omega) = \hat{P}_{za}(\omega)\hat{P}_{aa}^{-1}(\omega), \tag{6}$$

其中 $\langle\cdot\rangle$ 表示期望算子，上标 $*$ 表示复共轭。两个随机信号 $\hat{u}_1(\omega)$ 和 $\hat{u}_2(\omega)$ 之间的互功率谱密度（CSD）采用 Welch 算法（Welch，1967年）进行预测

$$\langle \hat{u}_1(\omega)\hat{u}_2^*(\omega) \rangle = \frac{1}{N_b}\sum_{k=1}^{N_b} \hat{u}_1^{(k)}(\omega)\hat{u}_2^{*(k)}(\omega), \tag{7}$$

其中 N_b 表示实现次数。

请注意，要对实际控制问题进行建模，并不需要在执行器与测量之间设置反馈回路。压电致动器预计会产生声学驱动，而不会使波包发生流体动力学变化，因此也不会影响传感器；该传感器旨在测量射流中的流体动力学脉动。当致动对测量没有影响时，反馈控制便简化为前馈控制，正如 Sasaki 等人Sasaki 等人 (2018b）所述。将观测器的输出 $\hat{z}$ 在（2）中设为零，则

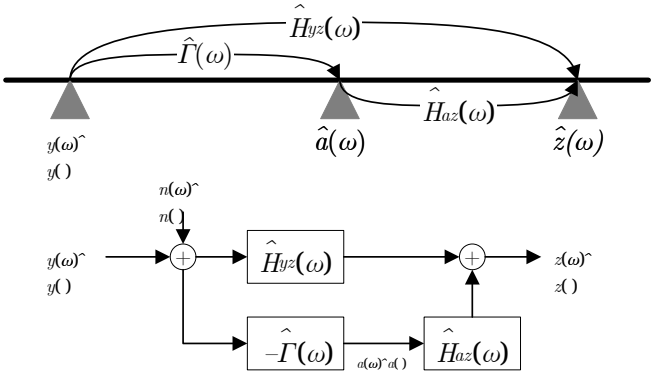

图 1 控制问题（上）及相应流程图（下）的示意图。

cont上文所述前馈回路对应的控制律为 by

$$\hat{\Gamma}(\omega) = -\hat{H}_{yz}(\omega)\hat{H}_{az}^{-1}(\omega). \tag{8}$$

波动抵消法中的控制核是在频域中获得的，这意味着无法确保因果性。根据传感器、观测器和执行器的位置，可以得到因果或非因果控制回路。通过在时域中计算控制核（即进行傅里叶逆变换），然后截去核的非因果部分，可以实现因果控制。然而，截去非因果部分后，该核便不再是最优的。我们将在下一小节讨论最优因果控制的应用，以减轻这一影响。

2.2 最优因果控制

Martini 等人提出了一种将因果性作为约束条件的最优频域控制方法，见 Martini 等人(2022)。该方法通过基于 resolvent 的估计来确保最优性，这种估计此前已在另一项研究中提出（Martini 等人，2020年）。该方法通过引入拉格朗日乘子的形式扩展为包含因果性约束，而该乘子通过 Wiener-Hopf 分解计算。本文简要回顾这一方法。有关完整说明，请参阅 Martini 等人 (2022)。

为了对波包进行建模，我们考虑式（1）所给出的线性系统。对空间进行离散化并进行傅里叶变换后，我们得到

$$-i\omega\hat{\mathbf{q}}(\omega) - \mathbf{A}\hat{\mathbf{q}}(\omega) = \hat{\mathbf{f}}(\omega), \tag{9}$$

可重新整理为

$$(-i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})\hat{\mathbf{q}}(\omega) = \hat{\mathbf{f}}(\omega), \tag{10}$$

其中，此处及下文中，粗体字母表示相应变量的离散化向量，变量以相同字母表示，$\mathbf{I}$ 表示单位矩阵。为简洁起见，下文将省略对 ω 的依赖。将预解算子定义为$\mathbf{R} = (-i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$，即可得到外部激励与状态之间的线性关系：

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{f}}. \tag{11}$$

传感器读数可表示为

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{n}}, \tag{12}$$

其中，$\mathbf{C}$ 和 $\hat{}\mathbf{n}$ 分别表示测量矩阵和测量噪声。

对于声传播问题，我们考虑一个格林函数，$\hat{}G(x, x', \omega)$，用于计算由位于 x 的声源产生并经半无限板散射后，在 x' 处观测器位置的声压。该关系以离散形式表示为

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{q}}. \tag{13}$$

类似地，致动 $\hat{}\mathbf{a}$对观测器的影响通过另一个格林函数建模，

$$\hat{\mathbf{z}}_a = \hat{\mathbf{G}}_a\hat{\mathbf{a}}. \tag{14}$$

线性系统和格林函数的细节将在第4节给出。将测量与致动之间的控制增益定义为

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{\Gamma}}\hat{\mathbf{y}}, \tag{15}$$

将受控观测点定义为

$$\hat{\mathbf{z}}_c = \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{z}}_a = \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{G}}_a\hat{\mathbf{\Gamma}}\hat{\mathbf{y}}, \tag{16}$$

非因果控制的代价函数通过同时最小化观测点处的声压和致动量，表示为

$$\mathcal{J} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle Tr\left(\hat{\mathbf{z}}_c^H\hat{\mathbf{z}}_c\right) + Tr\left(\hat{\mathbf{a}}^H\mathbf{Q}\hat{\mathbf{a}}\right)\right\rangle d\omega, \tag{17}$$

其中，$\mathbf{Q}$ 为致动惩罚项，上标 H 表示厄米共轭。利用期望算子的分配律以及对于任意两个维度适当的矩阵 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{F}$ 所满足的恒等式 $Tr(\mathbf{EF}) = Tr(\mathbf{FE})$,

该代价函数可展开为

$$\mathcal{J}=\int_{-\infty}^{\infty}\langle Tr(\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}^H)+Tr(\hat{\mathbf{z}}_a\hat{\mathbf{z}}_a^H)+Tr(\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}_a^H)+Tr(\hat{\mathbf{z}}_a\hat{\mathbf{z}}^H)+Tr(\mathbf{Q}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^H)\rangle d\omega. \tag{18}$$

定义互谱密度矩阵 $\hat{\mathbf{P}}_{zz}\triangleq\langle\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}^H\rangle$, $\hat{\mathbf{P}}_{yy}\triangleq\langle\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}^H\rangle$ 和 $\hat{\mathbf{P}}_{zy}\triangleq\langle\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{y}}^H\rangle$，式（18）中出现的各项可写为

$$Tr(\langle\hat{\mathbf{z}}_a\hat{\mathbf{z}}_a^H\rangle)=Tr(\hat{\mathbf{G}}_a^H\hat{\mathbf{G}}_a\hat{\mathbf{\Gamma}}\hat{\mathbf{P}}_{yy}\hat{\mathbf{\Gamma}}^H), \tag{19}$$

$$Tr(\langle\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}_a^H\rangle)=Tr(\hat{\mathbf{G}}_a^H\hat{\mathbf{P}}_{zy}\hat{\mathbf{\Gamma}}^H), \tag{20}$$

$$Tr(\mathbf{Q}\langle\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^H\rangle)=Tr(\mathbf{Q}\hat{\mathbf{\Gamma}}\hat{\mathbf{P}}_{yy}\hat{\mathbf{\Gamma}}^H). \tag{21}$$

代价函数 $\mathcal{J}$ 可通过将 $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ 和 $\hat{\mathbf{\Gamma}}^H$ 视为相互独立的变量（Ahlfors，1979），并令式（18）关于 $\hat{\mathbf{\Gamma}}^H$的导数为零来求得。代入后得到

$$(\hat{\mathbf{G}}_a^H\hat{\mathbf{G}}_a+\mathbf{Q})\hat{\mathbf{\Gamma}}\hat{\mathbf{P}}_{yy}+\hat{\mathbf{G}}_a^H\hat{\mathbf{P}}_{zy}=0, \tag{22}$$

由此得到最优增益矩阵：

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}=-(\hat{\mathbf{G}}_a^H\hat{\mathbf{G}}_a+\mathbf{Q})^{-1}\hat{\mathbf{G}}_a^H\hat{\mathbf{P}}_{zy}\hat{\mathbf{P}}_{yy}^{-1}. \tag{23}$$

到目前为止，推导式（23）时尚未施加因果性约束，因此，所得控制矩阵可能包含非因果部分，其具体形式取决于传感器、执行器和观测器的位置。在频域中设计因果控制，可通过构造一个 Wiener-Hopf问题来实现。此时的代价函数为

$$\mathcal{J}'=\mathcal{J}+\int_{-\infty}^{\infty}Tr(\hat{\mathbf{\Lambda}}_-\hat{\mathbf{\Gamma}}_++\hat{\mathbf{\Gamma}}_+^H\hat{\mathbf{\Lambda}}_-^H)d\omega, \tag{24}$$

其中 $\hat{\mathbf{\Gamma}}_+$ 表示因果增益矩阵，而 $\hat{\mathbf{\Lambda}}_-$ 是使问题在整个复平面上适定所需的矩阵（详情见 Martini 等人(2022)。更新后的代价函数（见式(24)）导出最终方程

$$(\hat{\mathbf{G}}_a^H\hat{\mathbf{G}}_a+\mathbf{Q})\hat{\mathbf{\Gamma}}_+\hat{\mathbf{P}}_{yy}+\hat{\mathbf{\Lambda}}_-+\hat{\mathbf{G}}_a^H\hat{\mathbf{P}}_{zy}=0 \tag{25}$$

待求解的对象为 $\hat{\mathbf{\Gamma}}_+$。 Martini 等人(2022)提出的求解式(25)中Wiener-Hopf问题的方法总结于附录 A。所得控制核为

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_+=\hat{\mathbf{D}}_+^{-1}\left(\hat{\mathbf{D}}_-^{-1}\hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{E}}_-^{-1}\right)_+\hat{\mathbf{E}}_+^{-1}, \tag{26}$$

其中 $\hat{\mathbf{D}}\triangleq\hat{\mathbf{G}}_a^H\hat{\mathbf{G}}_a+\mathbf{Q}$、$\hat{\mathbf{E}}\triangleq\hat{\mathbf{P}}_{yy}$ 以及 $\hat{\mathbf{F}}\triangleq-\hat{\mathbf{G}}_a^H\hat{\mathbf{P}}_{zy}$。

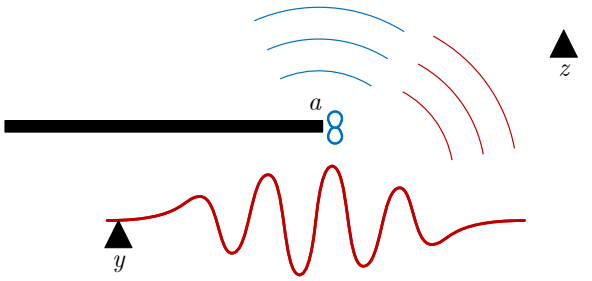

图 2 模型问题示意图，由一个波包、半无限板和一个点偶极子组成；传感器 y 和观测器 z 分别位于波包上和声场中。

3 安装噪声线性模型

本研究将安装噪声分为两部分进行建模：构成喷流湍流并与襟翼相互作用、从而产生主要噪声源的波包，采用受外部随机强迫驱动的线性金兹堡-朗道（G-L）方程建模。线性形式的 G-L 方程构成一个线性对流-扩散-耗散系统。EwertEwert（2016）采用了类似的方法进行声源建模。波包与襟翼之间的声学相互作用通过在波包附近放置一个半无限半平面，并使用能够考虑平面引起的散射的定制格林函数来建模。图2展示了示意图。各部分的详细内容将在以下小节中介绍。

3.1 金兹堡-朗道模型

线性 G-L 方程表示为：

$$\partial_t q + U\partial_x q - \gamma\partial_{xx} q - \mu q = f, \tag{27}$$

其中，$U = 1$ 为对流系数，$\gamma = 1/120$表示类似黏性的参数，$\mu = \mu_0($ $1 - 2x/L)$与 $L = 20$ 共同决定响应在区域 $x = [0, L]$内的增长，而 f 为外部激励项。齐次部分的全局稳定性由 μ_0决定。当 $\mu_0 = 2.29$时达到稳定性的临界极限。当 μ_0 小于临界极限时，G-L 方程表现为扩张段流动；而当 μ_0 高于临界极限时，则代表一个振荡系统。由于喷流属于放大器型，本研究将 $\mu_0 = 1.5$ 设为该值，以获得一个对流不稳定系统。在 $x = 0$ 和 $x = L$ 处的边界条件均设为 0。区域采用切比雪夫离散化，网格点数为$N = 100$。时间推进采用隐式克兰克-尼科尔森方法，时间步长为 $\Delta t = 0.125$。将时域数据转换到频域时，采用了包含 1024 个快速傅里叶变换（FFT）点的快速傅里叶变换。对于随机数据的傅里叶变换（FT），我们使用了一个

指数窗函数（Martini 等人，2019）表示为

$$w = e^{4-\frac{T^2}{t(T-t)}}, \tag{28}$$

其中，t 和 T 分别表示时间和周期。

方程（27）可改写为离散形式：

$$\partial_t \mathbf{q} + \mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{f}, \tag{29}$$

其中，$\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{q}$ 分别表示离散的强迫和状态，而$\mathbf{A}$表示离散的线性算子。

外部激励由随机信号生成，随后在时间上进行带通滤波，将频率成分限制在区间$0.1 < f < 0.5$内。选择此频率范围，是因为波包-半无限板构型在该范围内产生的声音呈偶极型，正如第 3.2 节将要看到的；这与实际的射流-襟翼相互作用噪声情况类似（Piantanida 等人，2016）。空间支撑范围和相关性通过乘以如下双点相关张量进行控制：

$$\mathcal{M}(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2+x_2^2)/L_x^2} e^{-(x_1-x_2)^2/L_c^2}, \tag{30}$$

其中，$L_x = L/40$ 和 $L_c = L/10$ 分别表示空间支撑范围和相关长度。对 $\mathcal{M}$ 及滤波后的强迫进行离散化后，式（29）中使用的外部激励为

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{f}}, \tag{31}$$

其中，$\mathbf{M}$ 表示离散化的相关张量，$\tilde{\mathbf{f}}$ 表示上述经时间滤波、空间白噪声形式的强迫。外部激励和状态的功率谱密度（PSD）如图3所示。强迫仅作用于区域初始部分的 $x/L < 1$ 范围内，且限制在 $0.1 < St < 0.6$ 频率范围内，超出该范围的部分将被滤除。此处及下文中，频率均以斯特劳哈尔数 $St \triangleq fU/D$表示，其中 f 表示频率，U 和 D 分别表示特征速度和特征长度，且二者均取为 1。强迫的功率谱密度在 $St = 0.3$附近达到峰值。外部激励在入口段引起的扰动因 G-L 系统的对流不稳定性而得到放大，并在区域中部附近达到峰值，此处 μ 变为零。越过该点后，$\mu < 0$会在扰动到达区域末端之前使其衰减。状态的功率谱密度在频率轴上的分布与强迫相似，限制在 $0.1 < St < 0.6$ 范围内，并在 0.3 附近达到峰值。

3.2 半无限板的定制格林函数

由.....提出了用于计算靠近半无限板放置的点源所产生声音的定制格林函数（TGF）

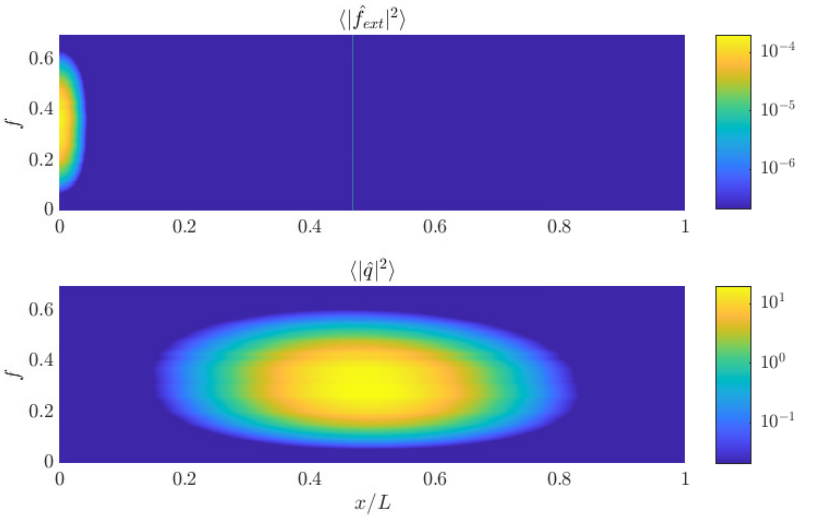

图 3 外部激励 f_{ext} （顶部）和状态 q （底部）的功率谱密度图。

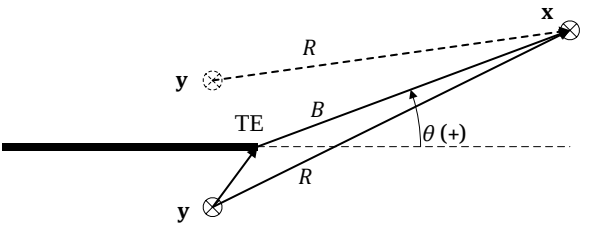

图4 示意图，用于说明与定制格林函数相关的几何定义。

Ffowcs WilliamsandHall (1970年) 的表达式为:

$$G_t(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)=\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\int_{-\infty}^{u_R}e^{-iu^2}du+\frac{e^{-ikR'}}{R'}\int_{-\infty}^{u_{R'}}e^{-iu^2}du\right), \tag{32}$$

其中

$$u_R=2\sqrt{\frac{krr_0}{B+R}}\cos\frac{\theta-\theta_0}{2}, \tag{33}$$

$$u_{R'}=2\sqrt{\frac{krr_0}{B+R'}}\cos\frac{\theta+\theta_0}{2}. \tag{34}$$

在上述方程中，$\mathbf{y}=[r_0,\theta_0,z_0]^\top$ 和$\mathbf{x}=[r,\theta,z]^\top$ 分别表示声源和观测位置，ω 表示角频率，且

$k = \omega c_0$ 表示声波波数，其中声速 c_0 在本研究中设为 2.5，对应的马赫数为 $M \triangleq U/c_0 = 0.4$。 R 和 R' 分别表示声源与观测器之间的距离，以及镜像声源与观测器之间的距离。 B 表示声源经由后缘到观测器的最短距离。图 4 给出了示意图，以说明相应的几何关系和坐标轴定义。以半无限板后缘为圆柱坐标系的中心，项 R、 R' 和 B 可计算如下：

$$R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0) + (z - z_0)^2}, \tag{35}$$

$$R' = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta + \theta_0) + (z - z_0)^2}, \tag{36}$$

$$B = \sqrt{(r + r_0)^2 + (z - z_0)^2}. \tag{37}$$

式(32)中的菲涅耳积分通过级数展开计算，方法参见Chang 和 Jin (1996)。请注意，当声源与半无限板之间的距离趋于无穷大时，式(32)给出的格林函数将化简为自由场格林函数，如下所示：

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{e^{-ikR}}{R}. \tag{38}$$

由 G-L 模型得到的线声源所产生的声场可通过以下积分计算：

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = \int_S \hat{q}(\mathbf{y}, \omega) G_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y}, \tag{39}$$

其中 S 表示计算线声源的区域。本例中的线声源具有随机性。为直观展示期望声场，我们对线声源进行谱正交分解（SPOD）（Towne 等人，2018年），并计算线声源的最优 SPOD 模态。随后，我们计算式(39)给出的积分。附录 B中介绍了如何使用离散系统进行 SPOD。

与 Nogueira 等人 (2017年) 研究的情形类似，声源相对于半无限平面后缘在笛卡尔坐标系中的相对位置表示为 $(x_0, y_0) = ([-10, 10], -1)$，对应于第 3.1 节所述长度为 20 的声源域。总场、入射场和散射场产生的声压如图 5 所示。请注意，TGF 仅适用于远场声压。因此，应忽略后缘所在原点附近的声压场。可以看到，散射场在 y 方向上呈反对称分布，且类似于偶极子，尤其是在下游区域。这为我们的控制方法提供了支持，因为我们试图用一个位于半无限平面后缘处的偶极子来抵消这一声压场。

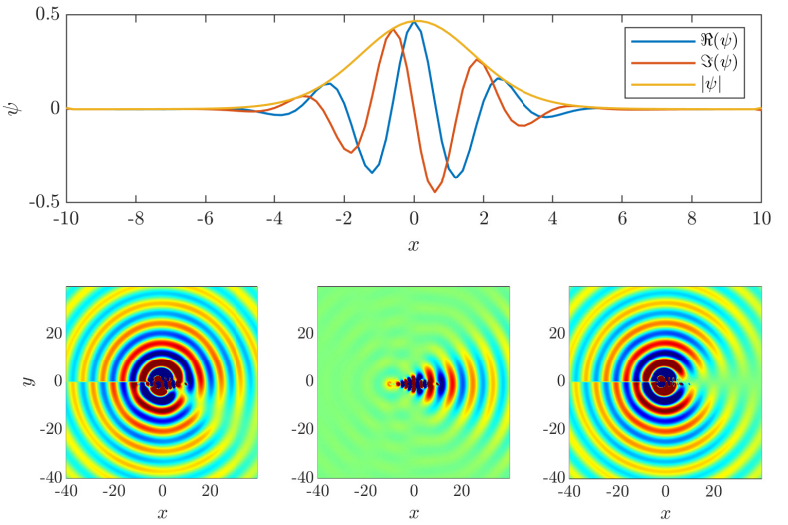

图 5 上：在 $St = 0.3$时，状态 q 的最优 SPOD 模态 ψ。下：使用上图中的线声源，在半无限平面附近放置声源后得到的总压力场（左）、入射压力场（中）和散射压力场（右）。

图 6 展示了有无半无限平面时，声场在若干频率下的指向性。指向角 θ 的定义如图 4 所示。线声源本身具有很强的指向性，峰值辐射出现在后向角区域，这让人联想到亚声速射流（Cavalieri 等人，2012）。安装平面会显著增强上游区域的声场（ $|\theta|$ 较大），而对下游区域的影响可以忽略（ $|\theta|$ 较小）。这是预期之中的，因为无限平面不会在 $\theta = 0$ 方向上散射声场。

3.3 执行器的格林函数

为了获得执行器与观测器之间的传递函数，我们还需要另一个格林函数。与表面法线对齐的偶极子的指向性由 sin 给出θ，其中 θ 根据图中所示的坐标轴定义 4。给定一个时变函数 $\Gamma(t$来定义执行器的振荡振幅，观测器处的声压可计算为

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{r c_0} \Gamma \left(t - \frac{r}{c_0} \right) \sin \theta, \tag{40}$$

它是位于表面后缘的点偶极子的延迟格林函数。请注意，由于偶极子不会沿表面方向 $\theta = \pi$ 发出声音，因此平板本身不会产生散射。

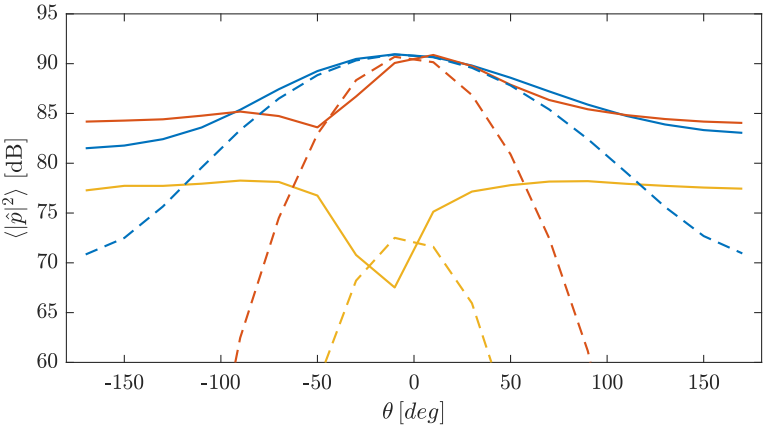

图 6 三种频率下，存在（实线）或不存在（虚线）半无限平面时线声源产生的声场功率谱密度：$St = 0.1$（蓝色）、0.2（橙色）、0.3（黄色）。

4 应用于模型问题的控制方法

我们将介绍第 2 节所述控制方法在模型问题中的具体实现。我们选择这些测试案例，旨在突出计算控制核时施加因果性的重要性，这与最优因果控制的做法一致，有助于提升实际安装噪声问题中的控制性能。

图2中给出了示意图。坐标轴与图4所示相同，其中半无限板位于 x轴上，其后缘位于 $x = 0$。线声源放置在（x_0, y_0）=（$[-10, 10], -1$）。对于所有情况，我们将观测位置固定为（r, θ）=（$20, -\pi/2$）。请注意，$\theta = -\pi/2$表示地面的方向，这也是安装噪声问题所涉及的方向。传感器的位置会直接影响控制性能，因为它决定了控制问题是否具有因果性。下文将进行详细分析。

4.1 控制问题的因果性

如前所述，我们考虑一种反应式前馈控制：传感器测量波包中的脉动。随后，执行器利用这些信息产生反声，从而降低波包的噪声。将传感器放置在波包上游，可以为执行器留出时间来产生反声，以抵消波包噪声。另一方面，如果将传感器放置在波包起始位置的下游，那么在传感器完成测量时，波包已经产生了一些噪声，这意味着若要完全抵消这些噪声，就需要非因果信息。

这一问题在图中进行了可视化 7，其中展示了定制格林函数的时间核（见（32）与

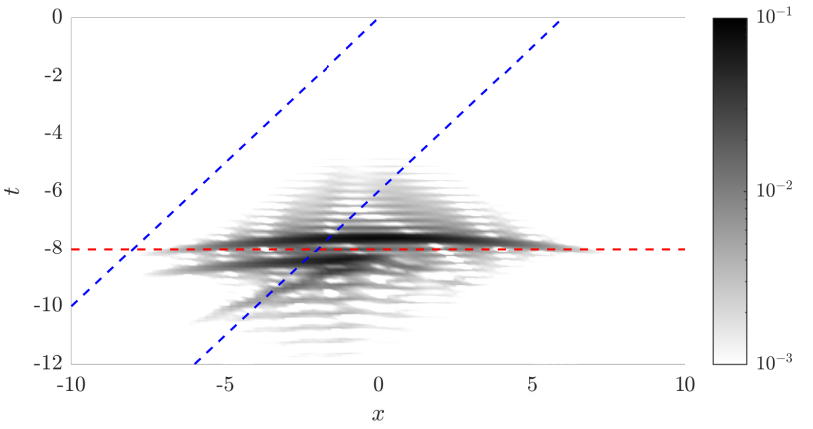

图 7 观测器位于 $(r,\ \theta) = (20,\ -\pi/2$ 时，TGF 的核与线声源的均方根的乘积。红色虚线表示位于后缘的执行器与观测器之间的时延。蓝色虚线表示传感器与其下游声源之间的对流时延。

$\mathbf{q}(t)$ 的均方根（RMS）相乘后，随声源域位置变化的情况。该图展示了计算时刻 $t = 0$观测器处声音所需的所有过去信息。该核在 $x = 10$之前有两个主要峰值，分别对应线声源及其因半无限板存在而产生的镜像声源。在 $x = 10$之后，镜像声源消失，因为平板在此处结束。我们观察到，峰值位置的时延朝区域两端逐渐增大。这是因为观测器位于 $x = 10$，因此，区域边界处产生的声波需要比区域中心处产生的声波传播更长的距离才能到达观测器。红色虚线表示控制动作的时延，即执行器与观测器之间的距离除以声速。每条蓝色虚线对应一个不同的声源位置，该位置由蓝线与红色虚线的交点表示。蓝色虚线的斜率表示波包对流速度的倒数。对于给定的传感器位置，核中位于相应蓝色虚线下方的部分是因果的，因此可以根据传感器读数中的过去信息进行预测。与此相反，核中位于蓝色虚线上方的部分表示未来信息，因此无法获取。我们看到，将传感器置于 $x = -8$ 会产生一个因果系统；而将传感器置于 $x = -2$时，TGF 的核仍有很大一部分位于非因果区域。后一位置与实际安装噪声问题更相关，因为它大致对应于喷口出口（参见引言中的讨论）。传感器可以以最低的结构复杂度安装在喷口出口处，并且可以预期，利用该位置的速度数据能够较好地表征波包（Cavalieri 等人，2013；Nogueira 等人，2016）。此外，相干性，因此，

传感器与观测器之间的传递函数会随着传感器进一步向下游移动而改善，但这又加剧了因果性问题。所有这些问题都表明，在实际问题中，因果性约束不可避免。接下来，我们将研究这两种控制方法在此配置下的表现。

4.2 传递函数的辨识

波动抵消法需要辨识传感器与观测器之间的传递函数， H_{yz}以及类似地，执行器与观测器之间的传递函数， H_{uz}。后者也是最优因果控制所需的，正如第2.2节所述；前者则使用 G-L 系统的控制方程建模。

辨识传递函数需要计算互谱密度矩阵，如第2.1节所述。互谱密度矩阵使用 Welch 算法进行预测，该算法将一段较长的时域信号切分成较短的区块，对每个区块进行傅里叶变换（FT），并对所得的傅里叶实现取平均。如果传感器与观测器之间，或类似地，执行器与观测器之间存在延迟相关性，则可以将时间区块长度设置得远大于时延，从而使时延对相关水平的影响可以忽略。对于随机过程，给定时间区块长度 T 和时延 τ，两个信号之间相关水平的收敛速度与 T/τ成正比。对于实验研究，这种解决方案是可行的；而对于数值研究，为使相关水平达到收敛而增加时间区块长度，可能会显著提高仿真成本。这还会使总成本取决于观测位置，这并不可取。

或者，给定两个信号 $a(t)$ 和 $b(t)$，且 $a(t)$ 与 $b(t-\tau)$ 之间达到最大相关性，则可以通过计算其傅里叶变换来得到收敛的互谱密度矩阵

$$\hat{a} = \mathcal{F}(a(t)), \tag{41}$$

$$\hat{b} = e^{i\omega\tau}\mathcal{F}(b(t-\tau)), \tag{42}$$

并使用（7）。在（42）中加入指数项，以校正延迟信号 b（$t-\tau$）的傅里叶变换相位。采用这种方法，可以在 Welch 平均（Blanco 等人，2022）中使用更短的时间块来计算收敛的传递函数，从而获得更好的统计收敛性。在图8中，我们展示了该校正对相干度的影响，其定义为

$$\gamma_{yz} = \hat{P}_{yz}(\hat{P}_{yy}\hat{P}_{zz})^{-1/2}. \tag{43}$$

相干度是两个信号之间线性度的指标，其中相干度为 1 表示两者呈线性关系，相干度为 0 则表示两者不具线性关系。由于我们对声源采用线性模型，预期相干度为 1，

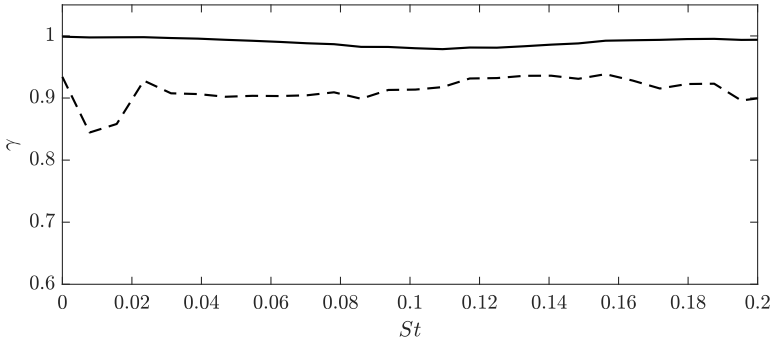

图 8 应用（实线）和未应用（虚线）相位校正时的相干值 γ_{yz}。

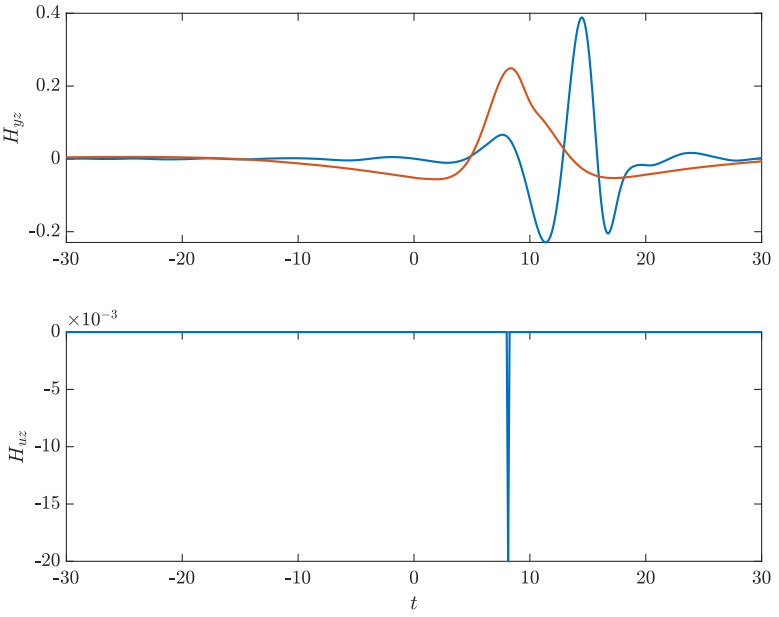

图 9 传感器位置 $x = -8$（蓝色）和 -2（橙色）对应的核 H_{yz}（上图）以及 H_{uz}（下图）。为便于直观比较，$x = -2$ 处的 H_{yz} 乘以 10。

可以看出，实施上述相位校正后，实际情况几乎正是如此。

所得的时域传递函数 H_{yz} 对应于位于 $x = -8$ 和 -2 以及 H_{uz} 的两个传感器位置，如图9所示。时间轴的负值部分和正值部分分别表示未来和过去，即非因果部分和因果部分。执行器与

观测器是一个带时延的狄拉克δ函数，这与第 3.3 节给出的定义一致。该峰值出现的时刻定义了执行器的因果性阈值：峰值之前的任何事件都无法由执行器抵消。当传感器位于 $x = -8$ 时，传感器与观测器之间的传递函数峰值出现在较晚的时刻；而当传感器移至 -2 时，峰值则提前出现，大致对应于 H_{uz} 中的峰值。

4.3 控制性能

使用方程（8）、（23）和（26）计算得到的控制核，以下分别称为波抵消、非因果和最优因果控制核，并针对两个传感器位置进行比较，如图10所示。再次说明，时间轴的负半轴和正半轴分别表示非因果部分和因果部分。可以看到，式（8）和（23）给出的非因果核在两个位置处完全相同，因此与配置的因果性无关。当传感器位于 $x = -8$ 时，式（26）给出的最优因果核主要与另外两个核具有相同的结构，只是在 $t = 0$处有一个小峰值。注意，非因果核几乎完全位于因果部分，只有一小部分落在非因果半轴上。这是因为该传感器位置处的问题几乎具有因果性，正如本节前文所述。因果核在 $t = 0$ 处的峰值用于补偿落在非因果半轴上的少量信息。时域核中存在此类尖锐峰值，意味着核的高频成分能量增加；这在实际执行器中可能会造成问题，因为执行器会具有非零的阻尼惯性，以限制其在一定频率以上的响应。另一方面，可以通过定义频率相关的致动惩罚项 $\mathbf{Q}$ 来考虑这种限制。在本研究考察的所有情形中，我们均将致动惩罚项设为常数 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$，因为我们的目标是确定理想执行器情况下可达到的最大控制性能。

在传感器位置为 $r,\ \theta) = (20,\ -\pi/2)$ 时，噪声控制结果如图 $x = -8$ 所示，涵盖三个频率 $St = 0.1$、0.2 和 0.3；11^ 展示了两种控制方法的结果。我们将测量噪声设为 $\mathbf{P}_{nn} = c\mathbf{I}$，取值为 $c = 1 \times 10^{-3}$，此设置适用于两种方法。稍后将讨论这些参数对控制性能的影响。计算控制信号时，将核的非因果部分截断为零，以确保实时控制的因果性。对于位于 $x = -8$ 的传感器，两种方法在三个频率下的性能相近。竖直虚线表示观测器位置。在 $St = 0.1$ 处，噪声降低可以忽略；而在 $St = 0.3$ 处，噪声降低最高可达 8 dB。得益于散射噪声的偶极性质，在 $-\pi/2$ 处控制噪声会使所有角度的噪声整体降低，只有 $-15° < \theta < 5°$ 的小范围除外。

在图 12中，我们展示了与图 11相同的结果，但传感器位于 $x = -5$处。波抵消方法在控制点处实现了约 5 dB 的噪声降低，对应的峰值频率为 $St = 0.1$ 和 0.2

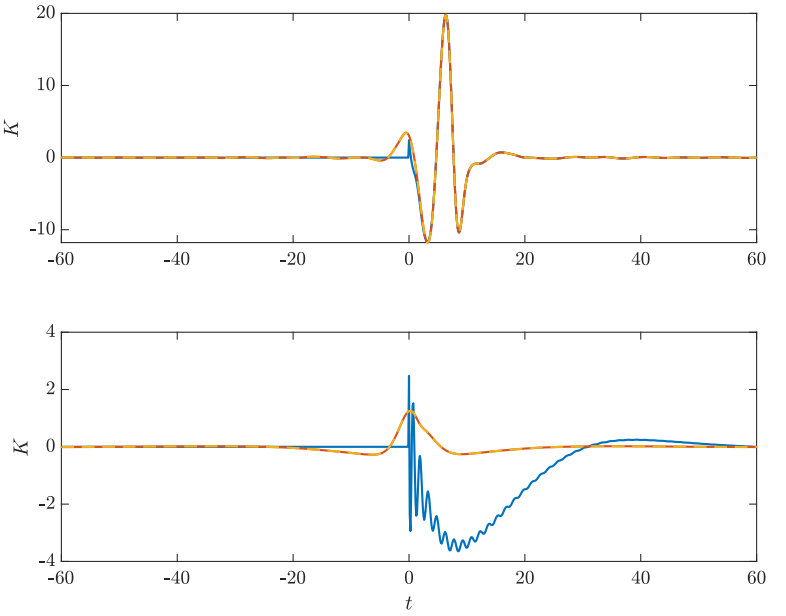

图 10 传感器位置为 $x = -8$ （上）和 -2 （下）时，波抵消（黄色虚线）、非因果（橙色）和最优因果（蓝色）控制的核函数。

但会导致 $St = 0.3$处的噪声产生略有增加。另一方面，最优因果控制在 $St = 0.1$ 处实现了 10 dB 的降低，并在 $St = 0.2$ 和 0.3 处实现了超过 20 dB 的降低。在 $St = 0.2$处，指向性与入射声源的指向性在 $-90° < \theta < 70°$ 范围内一致，这表明散射声，即无限大板的影响，在该指向性范围内被完全抵消。与先前声源位置情况相比，控制性能的提升可以由 $x = -5$处信号质量的提高来解释。图 5 显示，波包包络在 $x = 0$处达到峰值，并延伸至 $x = \pm 6$。该区域存在的指数增长机制表明，$x = -5$ 处的扰动振幅明显大于 $x = -8$ 处的扰动；鉴于我们假设整个区域内的测量噪声保持恒定，这将带来更高的信噪比。

传感器位置为 $x = -5$ 时控制方法性能的差异，可以通过比较两个相应核的傅里叶变换与非因果核的傅里叶变换来研究。振幅和相位的比较见图13。通过 WC 方法获得的核的振幅谱与非因果核相似，在频率范围 $\sim 30\%$ 内，差异不超过 $0.05 < St < 0.4$。另一方面，其相位从 $St = 0.3$开始明显偏离非因果核的相位，导致高

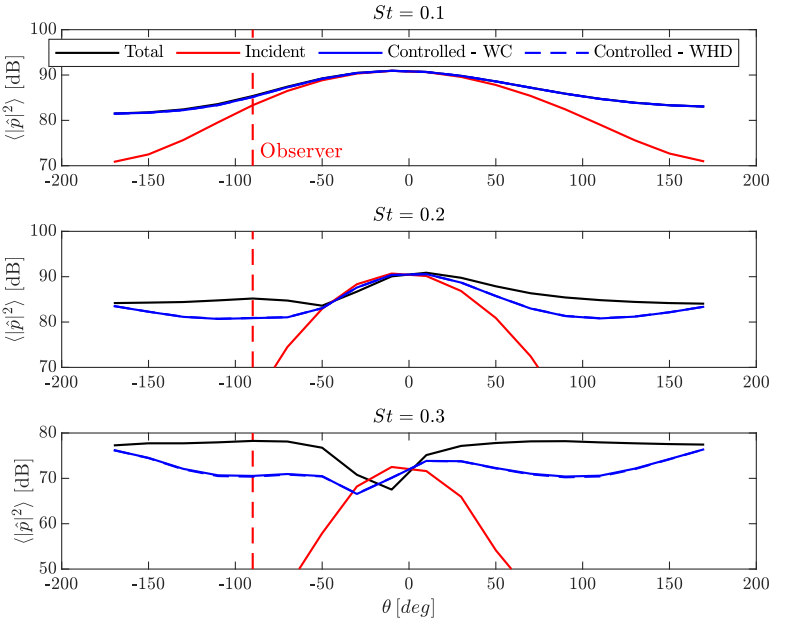

图 11 传感器位于 $x = -8$ 时，安装状态下采用控制的声学指向性与无控制的安装状态（黑色）和自由状态（红色）在 $St = 0.1$ （上）、0.2（中）和 0.3（下）处的对比。蓝色实线和蓝色虚线分别对应 WC 和 OCC 方法。红色竖直虚线表示观测位置。

频率下的控制效果欠佳，导致噪声增加，如图12所示。相反，通过最优因果控制获得的核，其振幅谱和相位谱与非因果核高度吻合，从而实现了最优噪声降低。

现在，我们考虑更现实的传感器位置 $x = -2$。该情况下的指向性图如图14所示。我们看到，WC 方法在 $St = 0.1$ 处实现了 3 dB 的噪声降低，同时在屏蔽侧造成了更大的噪声增幅。超过这一频率后，该方法的表现明显不如未控制的情况，噪声增幅最高达 12 dB。最优因果控制再次在观测器处及区域其他位置实现了显著的噪声降低。然而，尽管该位置的扰动进一步放大，信噪比有所改善，但与之前的传感器位置相比，所实现的噪声降低仍约少 5 dB。这些结果表明，存在一个能够实现最大噪声降低的最优传感器位置，超过该位置后，我们预计控制性能会变差。可通过计算以下量来对此进行研究：

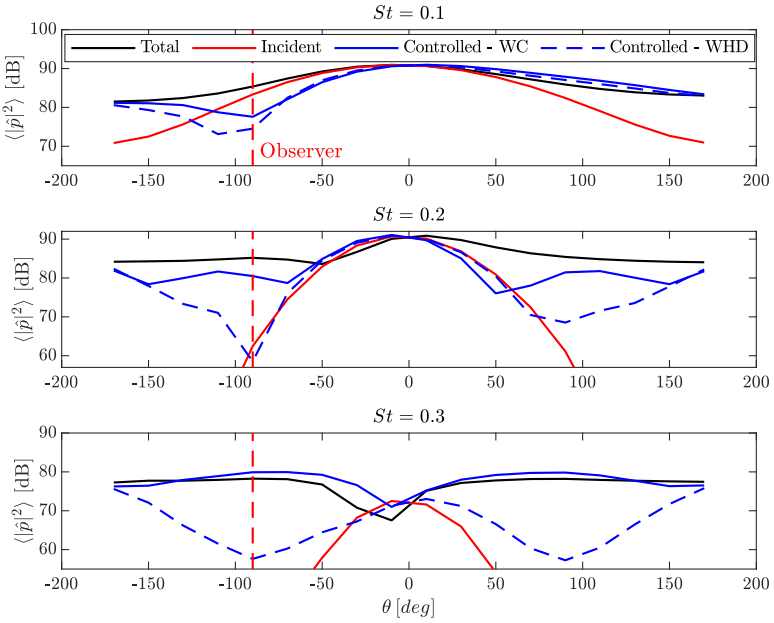

图 12 与图 11 中传感器位于 $x = -5$ 时相同的图。

观测点处由能量比给出的噪声降低量：

$$NR = \frac{\int_0^\infty \langle |\hat{\mathbf{z}}_c|^2 \rangle d\omega}{\int_0^\infty \langle |\hat{\mathbf{z}}|^2 \rangle d\omega}, \tag{44}$$

其中，$\hat{\mathbf{z}}_c$ 表示受控情况下观测器处的声压。我们采用两种方法计算传感器位于 $x \in [-8, 1]$ 范围内不同位置时的噪声降低，并将结果与图 15上方图中的非因果控制结果进行比较。可以看出，对于传感器位于 $x = -6.5$下游的位置，因果性开始影响波抵消方法的性能；而对于最优因果控制，传感器位于 $x = -4.5$ 下游的位置时，性能才开始下降。在更现实的情况下，传感器位置约为 $x = -2$时，噪声降低为 8 dB。非因果控制使用式（23）给出的核，且不截断非因果部分；当传感器位于 $x = 0$时，其性能最佳，此处波包达到最大振幅，从而获得最高信噪比。

我们通过计算整个区域内的总体噪声降低比，评估本研究所采用控制策略的性能。该策略是在半无限板的后缘使用偶极致动器

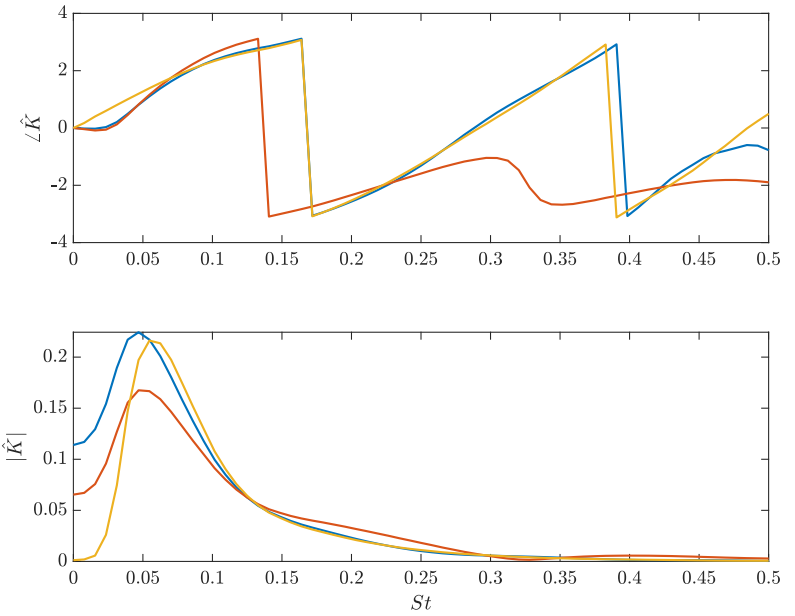

图13 采用波抵消（黄色）、非因果（橙色）和最优因果（蓝色）方法得到的控制核的相位（上图）和振幅（下图），传感器位置为 $x = -5$。上图：相位；下图：振幅

其定义为

$$OANR = \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}\langle|\hat{\mathbf{z}}_c|^2\rangle d\omega d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}\langle|\hat{\mathbf{z}}|^2\rangle d\omega d\theta}. \tag{45}$$

结果见图 15的下图。再次可以看到，当传感器位于$x = -6.5$时，$OANR$在 WC 方法下达到最小值，使总噪声降低了 *1.4* dB。最优因果控制在传感器位于 $x = -1.5$ 时达到最小$OANR$，使总噪声降低了 *1.5* dB。鉴于这些结果，我们可以得出结论：假设有理想的偶极致动器可用，在实际的传感器配置下，最优因果控制能够显著降低噪声。

5 结论

我们以一个模型问题展示了利用控制飞机安装噪声的概念验证。该模型基于这样的设想：安装噪声具有偶极子指向性（Piantanida 等人，2016），可通过安装在后缘（TE）处、能够沿垂直方向振动的执行器进行控制

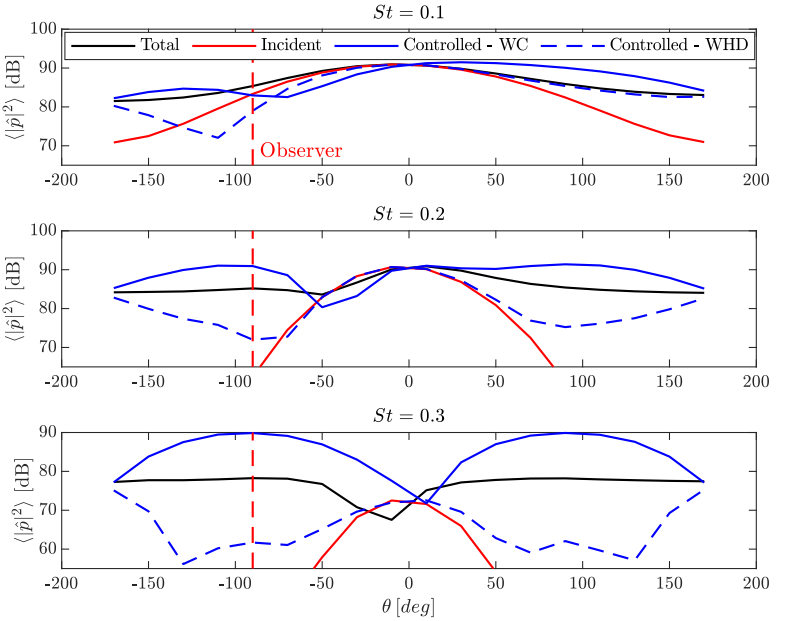

图 14 与图 11 相同的曲线，传感器位置为 $x = -2$。

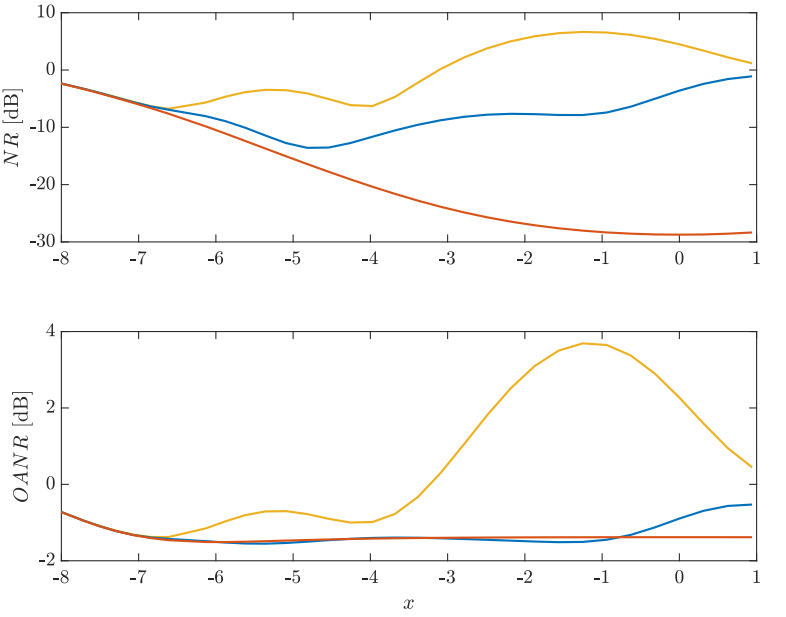

图 15 使用（8）（黄色）、（23）（橙色）和（26）（蓝色）在观测器处（上图）及全局范围内（下图）获得的总噪声降低。

方向，因此可作为偶极子声源来抵消安装噪声。假设这种控制是可行的，那么，要向控制器实时提供数据以抵消射流—襟翼相互作用产生的随机噪声，需基于以下假设：安装噪声的主要成因是射流对流不稳定性导致剪切层中出现的波包与襟翼后缘之间的相互作用。Cavalieri 等人 (2013)证明，这些波包可以用抛物化稳定性方程（PSE）的线性解进行建模，从而得到秩一模型；随后，利用 PSE 模型便可准确预测安装噪声（Faranosov 等人，2019）。由于该模型为秩一模型，因此可以通过对剪切层脉动进行单点测量，实时预测波包，这也为实时向控制器提供输入创造了可能。本研究针对一种符合实际的构型，检验了这种控制策略在因果性约束方面的极限。

我们设计了一个模型，其中采用基于金兹堡–朗道（G-L）方程的随机波包模型来表征射流动力学，以半无限板替代机翼襟翼，并在半无限板的后缘放置一个点偶极子来模拟执行器。声传播采用针对半无限板定制的格林函数计算（Ffowcs Williams and Hall，1970年）。观测器位于平板下方，距平板后缘 $90°$，对应于实际安装噪声问题中位于地面方向的观测器。G-L 问题的参数经过设置，使波包产生的噪声具有与低马赫数下实际射流相似的特性，即呈现偶极子指向性，并在斯特劳哈尔数 $St \approx 0.2$ 处达到峰值；此处假设特征长度为 1，在实际问题中，该长度为喷嘴直径。文中展示了传感器位置对问题因果性的影响。结果表明，位于襟翼后缘上游 $\sim 2D$ 的现实传感器位置会导致控制问题具有非因果性。我们采用了两种控制方法：波抵消（WC）方法和最优因果（OC）控制。在 WC 方法中，通过截断核的非因果部分来实现因果控制。然而，这种截断会使所得控制核变为次优。在最优因果控制中，则将因果性作为约束条件。传感器位于后缘足够上游时，两种方法的性能相近，此时控制问题具有因果性；但考虑到实际的射流–襟翼构型，这种布置并不实用。在更现实的传感器位置 $x = -2$ 下，后缘位于 $x = 0$处时，WC 方法使观测器处的噪声级增加了 6 dB，因此证明毫无用处。另一方面，对于相同构型，OC 控制使观测器处的噪声降低了近 8 dB。全局噪声降低了 1.5 dB，这表明采用所提出的控制概念，可以在目标点实现显著的噪声控制，而不会在全局范围内产生额外噪声。

模型问题中实现的控制性能取决于若干因素。净噪声降低量与测量噪声水平成反比，而

实际实施中的测量噪声水平预计会与本研究中设定的数值不同。实际射流中的非线性效应也可能对我们采用的线性噪声控制方法产生负面影响。另一个重要因素是实际执行器的性能，它可能具有有限的频率响应，或具有不同于偶极子的指向性。我们在此考虑的是一个理想的控制问题，因此，本研究实现的控制性能展示了实际实施中所能达到效果的上限。

附录A Wiener-Hopf问题的解

为求解式（25）中定义的 Wiener-Hopf问题，我们定义了两个 Wiener-Hopf分解

$$\hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{D}}_{-}\hat{\mathbf{D}}_{+}, \tag{A1}$$

$$\hat{\mathbf{D}} = (\hat{\mathbf{D}})_{-} + (\hat{\mathbf{D}})_{+}, \tag{A2}$$

ˆ 对于给定的矩阵$\mathbf{D}$，它们分别具有乘法性和加法性。这里，下标 $-$ 和 $+$ 表示在下半复平面和上半复平面内正则，即分别完全因果和非因果。对于以下形式的 Wiener-Hopf问题

$$\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{K}}_{+}\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{\Lambda}}_{-} + \hat{\mathbf{F}}, \tag{A3}$$

因果部分的解为

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_{+} = \hat{\mathbf{D}}_{+}^{-1}\left(\hat{\mathbf{D}}_{-}^{-1}\hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{E}}_{-}^{-1}\right)_{+}\hat{\mathbf{E}}_{+}^{-1}. \tag{A4}$$

然后，在（A3）中令 ˆD ≙ ˆG_a^HˆG_a + Q、ˆE ≙ ˆP_{yy} 和 ˆF ≙ − ˆG_a^HˆP_{zy}，并将它们代入，即可得到（25）中的因果增益矩阵。有关如何实现（A1）和（A2）中给出的 Wiener-Hopf分解的详细信息，请参阅 Martini 等（2022）；文中介绍了一种基于希尔伯特变换的高效无矩阵方法，用于执行乘法分解。加法分解可通过对（A2）中的 ˆD 进行傅里叶逆变换，将所得时域核 D 分成两部分，使得 D−($t < 0$) $= 0$ 且 D+($t > 0$) $= 0$，最后分别对 D− 和 D+ 进行傅里叶变换，得到 D− 和 D+。

附录 B 谱正交分解

SPOD（Towne等人，2018年）离散空间随机变量 ˆ$\mathbf{q}$ 可通过计算互谱密度矩阵 ˆ$\mathbf{P}_{qq} = \langle \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^H \rangle$，如（7）所示，然后

求解特征值问题

$$\hat{\mathbf{P}}_{qq}\mathbf{W}\boldsymbol{\psi} = \lambda\boldsymbol{\psi}, \tag{B5}$$

其中，$\boldsymbol{\psi}$ 和 λ 分别表示特征向量和特征值，$\mathbf{W}$ 是用于计算能量范数的矩阵，因此，给定随机变量 $\hat{}\hat{}\ \xi(x)$ 的能量可利用离散化向量 $\boldsymbol{\xi}$ 计算为

$$\langle\hat{\boldsymbol{\xi}}^H\mathbf{W}\hat{\boldsymbol{\xi}}^H\rangle = \langle\int_S \hat{\xi}^*(x)W\hat{\xi}(x)dS\rangle, \tag{B6}$$

$\hat{}$ 其中，S 表示定义 ξ 的区域，W 表示能量范数，本研究中将其选为 1。随后通过特征分解得到 SPOD 模态

$$\mathbf{W}^{1/2}\hat{\mathbf{P}}_{qq}\mathbf{W}^{1/2^H} = \tilde{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}^H, \tag{B7}$$

其中，$\boldsymbol{\Lambda}$是包含特征值的对角矩阵，$\tilde{\boldsymbol{\Psi}} \triangleq[\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{(1)}\ \tilde{\boldsymbol{\psi}}^{(2)}\ \cdots]$ 表示包含特征向量的矩阵。然后，计算式（B5）中关于式（B6）所定义范数正交的特征向量，得到

$$\boldsymbol{\psi}^{(i)} = \mathbf{W}^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{(i)}, \tag{B8}$$

其中，上标（i）表示第 i个特征向量。最优 SPOD 模态定义为对应于最大特征值的特征向量。

声明

资助。 本研究获得欧盟“地平线 2020年”研究与创新计划的资助，资助协议编号为 861438。U.K. 获得了 TUBITAK 2236 联合资助人才交流计划 2 的资助（项目编号：121C061）。

作者贡献。 所有作者均参与了研究构思与设计。Ugur Karban 和 Eduardo Martini 编写了分析代码。Ugur Karban 撰写了初稿，后由 Eduardo Martini 和 Peter Jordan 修订。所有作者均阅读并批准了最终稿。

Co竞争利益。 作者声明不存在需要披露的竞争利益。 e.

参考文献

Ahlfors LV（1979）《复分析》第3版。麦格劳-希尔教育

Blanco DC、Martini E、Sasaki K 等（2022）通过时间平移改进谱正交分解的收敛性。《流体力学杂志》950：A9。https://doi.org/10.1017/jfm.2022.790

Bychkov OP、、Faranosov G 等（2019）基于等离子体的无激励湍流射流不稳定波主动闭环控制。第 2 部分：安装喷流。https://doi.org/10.2514/6.2019-2558，URL https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2019-2558

Cavalieri AV、Jordan P、Agarwal A 等（2011）用于亚音速射流噪声的抖动波包模型。《声学与振动杂志》330(18)：4474–4492。https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.04.007，URLhttps://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X11002641

Cavalieri AV, Rodr´ıguez D, Jordan P 等（2013）湍流射流速度场中的波包。《流体力学杂志》730：559–592

CavalieriAVG, Agarwal A（2014）相干性衰减及其对波包声辐射的影响。《流体力学杂志》748：399–415。https://doi.org/10.1017/jfm.2014.186

Cavalieri AVG, Jordan P, Colonius T 等（2012）亚声速喷流中的轴对称超指向性。《流体力学杂志》704：388–420。https://doi.org/10.1017/jfm.2012.247

Cavalieri AVG, Jordan P, Wolf WR 等（2014）湍流射流邻近区域平板对波包的散射。《声学与振动杂志》333(24)：6516–6531

Cavalieri AVG、Jordan P、Lesshafft L（2019）喷流动力学与声辐射的波包模型。《Applied Mechanics Reviews》71。https://doi.org/10.1115/1.4042736，020802

Chang Sc、Jin JM（1996）特殊函数计算。Wiley-Interscience

Curle N（1955）固体边界对气动声的影响。《伦敦皇家学会会刊：数学与物理科学辑》231：505–514。https://doi.org/10.1098/RSPA.1955.0191，网址 https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1955.0191

Davy R、Mortain F、Huet M 等（2019）采用麦克风阵列处理分析安装喷流噪声声源。https://doi.org/10.2514/6.2019-2654，网址 https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2019-2654，https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/6.2019-2654

Ewert R（2016）通过受迫线性平流-扩散-耗散方程实现湍流声源的典范随机实现。https://doi.org/10.2514/6.2016-2965，网址 https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.

2016-2965, https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/6.2016-2965

Faranosov G、Bychkov OP、Kopiev V 等（2019）同向流条件下喷流-平板相互作用噪声的建模。载于： 25th AIAA/CEASAeroacous- tics Conference。美国航空航天学会论文 2492-2019。美国航空航天学会

Ffowcs Williams JE、Hall LH（1970年）散射半平面邻近区域湍流产生的气动声。《流体力学杂志》40(4)：657–670。https://doi.org/10.1017/S0022112070000368

Jente C、Schmidt J、Delfs J 等（2022）透流材料对喷流-襟翼相互作用噪声的降噪潜力。https://doi.org/10.2514/6.2022-3040，网址 https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2022-3040, https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/6.2022-3040

Kamliya Jawahar H, Karabasov SA, Azarpeyvand M（2023年）利用多孔处理降低射流安装噪声。《声音与振动杂志》545：117,406。https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117406，网址 https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X22005892

Kopiev V, Faranosov G, Bychkov O, 等（2020年）利用等离子体致动器主动控制受激喷流的射流-平板相互作用噪声。《声音与振动杂志》484：115,515

Laurien E, Kleiser L（1989年）边界层转捩与转捩控制的数值模拟。《流体力学杂志》199：403–440。https://doi.org/10.1017/S002211208900042X

Li Y, Gaster M（2006年）边界层不稳定性的主动控制。《流体力学杂志》550：185–205。https://doi.org/10.1017/S0022112005008219

Lighthill MJ（1952年）论空气动力学产生的声音 I：一般理论。《伦敦皇家学会会刊 A：数学与物理科学》211(1107):564–587

Maia IA、Jordan P、Cavalieri AVG 等（2020年）受迫湍流喷流的闭环控制。arXiv预印本 arXiv:200909299

Maia IA、Jordan P、Cavalieri AVG 等（2021年）对受迫湍流喷流中随机扰动的实时反馈控制。《物理评论·流体》6(12):123,901

Mancinelli M, Jordan P,LebedevA, etal（2022）探索喷流-平板构型中可减小安装喷流噪声的柔性后缘特性。https://doi.org/10.2514/6.2022-2872，网址 https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2022-2872, https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/6.2022-2872

Martini E, Cavalieri AV, Jordan P, 等（2019）利用任意信号对常微分方程进行精确频域辨识。arXiv 预印本 arXiv:190704787

Martini E, Cavalieri AVG, Jordan P, 等（2020）基于预解式的过渡流和湍流最优估计。《流体力学杂志》900:A2。 https://doi.org/10.1017/jfm.2020.435

Martini E, Jung J, Cavalieri AV, 等（2022）通过维纳–霍普夫形式实现最优估计与控制的基于预解式的工具。《流体力学杂志》937:A19。
https://doi.org/10.1017/jfm.2022.102

Motee N, Jadbabaie A（2008年）空间分布系统的最优控制。IEEE自动控制汇刊 53(7):1616–1629。https://doi.org/10.1109/TAC.2008.929366

Nogueira PA、Piantanida S、Cavalieri AV 等（2016）基于抛物化稳定性方程预测安装喷流的声音辐射。https://doi.org/10.2514/6.2016-2858，网址
https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2016-2858,
https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/6.2016-2858

Nogueira PA、Cavalieri AV、Jordan P（2017年）安装喷流声辐射的一个模型问题。《声学与振动杂志》391：95–115。
https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.12.015，网址
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X1630726X

Piantanida S、Jaunet V、Huber J 等（2016）扫掠后缘对湍流喷流波包的散射。《美国声学学会杂志》140(6)：4350–4359

Rego L, Ragni D, Avallone F, 等（2021年）使用透流材料降低喷流安装噪声。《声音与振动杂志》498：115,959。https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.115959，网址
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X21000316

Sasaki K, Morra P, Fabbiane N, 等（2018a）论边界层流动控制的波抵消特性。《理论与计算流体动力学》32(5)：593–616

Sasaki K, Tissot G, Cavalieri AVG, 等（2018b）自由剪切流的闭环控制：一种采用抛物化稳定性方程的框架。《理论与计算流体动力学》32(6)：765–788

da Silva FD, Jordan P, Cavalieri AVG（2019）论具有相干效应的波包散射噪声建模。《美国声学学会杂志》146(6)：4472–4480。https://doi.org/10.1121/1.5140190，网址https://doi.org/10.1121/1.5140190,
https://arxiv.org/abs/https://doi.org/10.1121
/1.5140190

Thomas ASW（1983年）利用波叠加原理控制边界层转捩。《流体力学杂志》137:233–250。https://doi.org/10.1017/S0022112083002384

Towne A、Schmidt OT、Colonius T（2018年）谱正交分解及其与动态模态分解和解析子分析的关系。《流体力学杂志》847:821–867

Welch P（1967年）使用快速傅里叶变换估计功率谱：一种基于对经过修改的短周期图进行时间平均的方法。IEEE音频与电声学汇刊 15(2):70–73。https://doi.org/10.1109/TAU.1967.1161901

Youla D、Jabr H、Bongiorno J（1976年）最优控制器的现代 Wiener-Hopf 设计——第二部分：多变量情形。IEEE自动控制汇刊 21(3):319–338。https://doi.org/10.1109/TAC.1976.1101223