arXiv:2303.03190v1 [math.GT] 6 Mar 2023

轨道组合学与簇代数

SHUNSUKE KANO

Abstract. W. P. Thurston 提出了轨道的概念，用以研究曲面上的测度叶状结构／层状结构以及伪阿诺索夫映射类。本文利用 Goncharov–Shen 势函数 [GS15]，将轨道的若干概念转化为簇代数的语言。通过这一转化，我们证明了 [IK21] 一般伪阿诺索夫映射类的符号稳定性。

Contents

1. 引言 1

第一部分 簇代数语言下的轨道 6
2. 带装饰测度叶状结构 6 3. 轨道图册与簇坐标 11 4. Goncharov–Shen 势与 $\mathcal{V}$-簇 24

第二部分：轨道分裂与热带簇变换 28
5. 符号稳定的突变环 29 6. 轨道分裂 30 附录 A. 簇系综 37 参考文献 40

1. Introduction

轨道由 W. P. Thurston 引入[Th]以研究测度叶状结构[1]和伪阿诺索夫映射类。轨道是平滑嵌入曲面中的图，使得每个顶点看起来都像铁路轨道上的转换点。（见图6。）对于轨道，我们通常在每条边上赋予一个 $\mathbb{R}_{\geq 0}$值的权重（本节后文称为测度），并要求其满足转换条件(3.1)。我们可以将轨道与权重组成的有序对视为测度叶状结构的组合模型。（具体定义见第3.1 节。）更准确地说，文献 [Th] 证明了以下空间：这些

日期：2023年3月7日。[1]在 [Th], 他使用测度层叠来代替测度叶状结构。不过，这些概念密切相关。例如，众所周知，测度叶状结构空间与测度层叠空间同构，且同构为分段线性流形。

“可再生”且“极大”（称为完备）的轨道构成了测度叶状结构空间的一个图册。另一方面，对于每个伪阿诺索夫映射类 ϕ，都存在一条称为不变轨道的轨道，它在映射 ϕ 的作用下具有良好的性质。伪阿诺索夫映射类的许多性质都可以从不变轨道得到。例如，伪阿诺索夫映射类的拓扑熵等于与不变轨道相关联的转移矩阵的谱半径的对数。

由 S. Fomin 和 A. Zelevinsky [FZ02]，创立的簇代数是一种组合结构，广泛出现于数学和数理物理的众多分支中，例如离散可积系统、Painlev´e 方程、结合代数的表示、Donaldson–Thomas 不变量以及量子场论。高阶 Teichm¨uller 空间理论便是其中之一 [FG06, FG07]。V. Fock 和 A. Goncharov 引入了一对具有某种“正性”的概形 $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$，称为簇系综，并赋予其一个离散对称群 Γ 的作用，该群称为簇模群 [FG09]。这些概形通过一个 Γ-等变态射 $p\colon \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ 相互关联，该态射称为系综映射。利用正性，我们可以考虑簇系综的半域 $\mathbb{P}$ 值点集 $(\mathcal{A}(\mathbb{P})\ \mathcal{X}(\mathbb{P}))$。簇系综是为称为种子变异类的组合数据定义的。由带 puncture 曲面 Σ 的理想三角剖分得到一个变异类，因此我们将相应的簇系综记为 $(\mathcal{A}_\Sigma, \mathcal{X}_\Sigma)$。已知它们的 $\mathbb{R}_{>0}$ 值点集对应于 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(\Sigma)$ 的某些推广：

$$\mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}_{>0}) \cong \widetilde{\mathcal{T}}(\Sigma), \qquad \mathcal{X}_\Sigma(\mathbb{R}_{>0}) \cong \widehat{\mathcal{T}}(\Sigma).$$

这里，$\widetilde{\mathcal{T}}(\Sigma)$ 和 $\widehat{\mathcal{T}}(\Sigma)$ 分别称为装饰 Teichm¨uller 空间和增强 Teichm¨uller 空间。（更多详情参见 [Pen，第 2] 节。本书将后者称为带孔 Teichm¨uller 空间。）通常的 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(\Sigma)$ 对应于系综映射的像：$p(\mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}_{>0})) \cong \mathcal{T}(\Sigma)$。此外，众所周知，它们的热带半域 $\mathbb{R}^{\mathrm{trop}} = (\mathbb{R}, \min\ +)$ 值点集对应于测度叶状结构空间的某些推广：

$$\mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \cong \widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma), \qquad \mathcal{X}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \cong \widehat{\mathcal{MF}}(\Sigma).$$

前者 $\widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma)$ 的元素允许存在“外围叶”（后者 $\mathcal{MF}(\Sigma)$ 的元素则允许存在陷入穿孔点的叶）。（前者 $\widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma)$ 参见第 2 节，后者参见 [GW17]。）序测度叶状结构空间 $\mathcal{MF}(\Sigma)$ 对应于系综映射的像：$p(\mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})) \cong \mathcal{MF}(\Sigma)$。此外，映射类群 $MC(\Sigma)$ 可视为有限指数簇模群 Γ_Σ 的一个子群。

本文的目的有二：其一是将轨道理论的术语转换为簇代数理论中的术语（第I部分）；其二是比较伪阿诺索夫映射类的不变列车轨道的分裂序列与其表示路径的符号（第II部分）。

1.1. 用簇代数表述轨道（第**I**部分）。测度叶状结构的空间 $\mathcal{MF}(\Sigma)$ 是一个分段线性流形。如上所述，其中一种分段线性结构（图册）由完全轨道给出。这意味着每条完- 全轨道都给出一个局部图表。

另一方面，A. Goncharov 和 L. Shen 在 $\mathcal{A}$上的 [GS15]引入了一个势函数。我们称之为Goncharov–Shen 势函数。我们证明，热带化 Goncharov–Shen 势函数[2] 在 $\mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$ 上的最大线性区域对应于与完全轨道相关联的 $\mathcal{MF}(\Sigma)$ 的局部 chars。

定理 1.1 (推论 4.6和定理 4.8)。 设 Σ 为一个带 puncture 曲面。那么，存在一个双射，将 Σ 上的完全轨道集合映射到热带化 Goncharov–Shen 势函数在 $\mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$上的最大线性区域集合。此外，由轨道给出的分段线性结构与由 $\mathcal{MF}(\Sigma)$ 上的簇结构给出的分段线性结构 $\setminus\{\emptyset\}$ 等价。

注 1.2. 我们可以轻松地将由 $\widetilde{}$ $\widetilde{}\mathcal{MF}(\Sigma)$上的轨道给出的分段线性结构扩展到 $\mathcal{MF}(\Sigma)$，并据此重述定理 1.1。考虑到识别 $\mathcal{MF}(\Sigma) \cong \mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$，一个自然的问题是， $\mathcal{X}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$上是否存在由轨道给出的分段线性结构$\widehat{}$。 $\mathcal{X}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})(\cong \mathcal{ML}(\Sigma))$的轨道见 [IK20b，附录 A] ，但这些轨道适用于裤分解，而非理想三角剖分。

簇代数理论中最基本的操作是变异。众所周知，理想三角剖分的翻转对应于相应对偶箭图的变异。此外，轨道还有一些著名的初等变换，称为分裂、折叠和移位（见图13和14）。我们建立了它们之间的联系：

定理 1.3 (定理3.15)。 设 Σ 是一个带 puncture 曲面，且 $\triangle$ 和 $\triangle'$ 是 Σ 的理想三角剖分，它们通过沿一条理想弧进行翻转而相关。则，适合于 $\triangle$ 的完全轨道集合与适合于 $\triangle'$的完全轨道集合之间存在一个二元关系。

1.2. 轨道分裂与热带簇变换（第 **II** 部分）。T. Ishibashi 与作者引入了变异环的 符号稳定性 这一概念，将其作为伪阿诺索夫性的簇代数类比。在 [IK20a], 中，我们比较了映射类的符号稳定性与伪阿诺索夫性。作为结果，我们发现一致的 符号稳定性等价于一般的 伪阿诺索夫性。前者在某种意义上是最强的符号稳定性，而后者并不是一类十分特殊的伪阿诺索夫映射类。

符号稳定性是突变环的符号序列的某种渐近性质。我们要求，若一个突变环的符号稳定为一个由

[2]Goncharov–Shen 势的热带化（即 $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$ 上的诱导函数）是一个分段线性映射。

“严格”符号构成的序列，则该突变环是符号稳定的；但一般伪阿诺索夫映射类的符号序列可能包含零。

如上所述，伪阿诺索夫映射类有一条良好的轨道，称为不变轨道。已知伪阿诺索夫映射类的作用可表示为对不变轨道进行一系列特定的分裂或移位。利用由翻转产生的轨道之间的二元关系的细节（定理1.3），我们可以将这一系列对不变轨道进行的分裂或移位，转化为相应突变环的一系列“严格”符号。

定理1.4 (定理6.7)。设 ϕ 是带 puncture 曲面 Σ上的一个（一般）伪阿诺索夫映射类。于是， ϕ^r 对某个 $r \geq 1$是符号稳定的。

根据这一定理，我们可以计算与伪阿诺索夫映射类相关的一些熵（推论6.9）。

1.3. 未来方向与问题。这里，我们提出本工作的后续研究或应用的一些方向。

1.3.1. g-向量扇的完备化。在簇 $\mathcal{X}$ 的热带化 $\mathcal{X}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$ 上，存在一些扇，例如 g-向量扇 [GHKK18、Rea14] （Fock–Goncharov 扇 [FG09]）、突变扇 [Rea14] 以及散射扇 [Rea20]。当且仅当簇结构（即突变类）为有限时， g-向量扇才是完备的。T. Yurikusa 研究了这样一类簇代数：其 g-向量扇的支撑集是稠密的[Yur20, Yur21]。特别地，几乎每个标记曲面的簇代数都属于这一类 [Yur20, Theorem 1.2]。另一方面，散射扇是完备的 [Rea20, Theorem 3.1] ，而 g-向量扇是其中的一个子扇。 g-向量扇外部的结构非常复杂，被称为荒地 [Nak21]。

与理想三角剖分相适配的轨道在 $\mathcal{MF}(\Sigma) \cong p(\mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}))$（推论 3.9）。重要的是，子集 $p(\mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})) \subset \mathcal{X}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$ 位于 g-向量扇的外部，因此产生了以下问题：

问题1.5. 与理想三角剖分相适配的轨道所给出的扇，与 g-向量扇外部的散射扇之间是否存在某些关系?

通过使用突变环的表示路径的符号 γ （附录A.4），我们可以定义 ϕ符号扇，其中锥由 γ的可能符号参数化。显然，突变扇是任意突变环的任意表示路径的符号扇的细分。此外， g-向量扇是突变扇的子扇[Rea14，猜想 8。1][3]。此外，对于某些伪阿诺索夫映射类，以下结论成立：$\mathcal{C}^{\mathrm{stab}}_\gamma \cap p(\mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})) = p(\mathcal{V}(\tau^+_\phi))$。这里， $\mathcal{C}^{\mathrm{stab}}_\gamma$是某个符号扇的锥， $\mathcal{V}(\tau^+_\phi)$ 是

[3]这是 [Rea14中的一个猜想，即猜想8。1] 但现在我们可以借助符号一致性猜想[GHKK18]证明它。

映射类 τ_ϕ^+ 的不变轨道 ϕ （第6.3节）的“权重”。这表明第1.5问所述关系的存在。

此外，对于有限维代数上的二项倾斜复形，还存在 g-向量扇的概念 [AIR14]。T. Yurikusa、P.-G. Plamondon 和 T. Aoki 还研究了其 g-向量扇稠密的代数类 [PY23、AY20]。我们希望，本文中的一些技术有助于研究这些代数的 g-向量扇外部。

1.3.2. 高阶轨道。 对于半单李代数 $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}、\ \Sigma}$、$\mathcal{X}_{\mathfrak{g}、\ \Sigma}$）以及标记曲面 $\mathfrak{g}$、 Σ）这一对对象，存在一个簇系综（ $\mathfrak{g}$和标记曲面 Σ。情形 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ 是我们的情形： （$\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2、\ \Sigma}$、 $\mathcal{X}_{\mathfrak{sl}_2、\ \Sigma}$） = （$\mathcal{A}_\Sigma$、 $\mathcal{X}_\Sigma$）。特别地，对于一般的半单李代数，Goncharov–Shen 势函数均有定义 $\mathfrak{g}$ [GS15]。

另一方面，在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ 属于 [DS20] 和 [IK22] 的情形下，提出了高阶测度层叠的几何模型；但它们分别只是 $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_3,\Sigma}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$ 和$\mathcal{X}_{\mathfrak{sl}_3,\Sigma}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$ 的有理点。

轨道不仅为“有理”测度层叠（叶状结构），也为“实”测度层叠（叶状结构）提供了几何模型。我们希望存在一种轨道的高阶类比，能够为“实”高阶测度层叠提供几何模型。第一部分I 的大部分讨论纯粹是簇代数方面的，因此，如果我们能够将高阶轨道构造为某种图，那么预计类似于定理 1.1 的结论也对它们成立。此外， g-向量扇在（$\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}_2$, Σ）的簇结构中一般并不稠密。我们希望在实现上述目标后，能够利用高阶轨道分析（ g-向量扇之外的部分（$\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}_2, \Sigma$）。

论文结构。 第 2 节根据 [PP93] 回顾装饰测度叶状结构空间的理论。在此，我们从几何角度给出热带化 Goncharov–Shen 势函数对应的映射。第 3 节回顾轨道的概念，并介绍适合理想三角剖分的轨道。第一部分的主要结果基本都在此给出。第 4 节通过热带化 Goncharov–Shen 势函数，将第 3 节的结果转译出来。附录 A 回顾簇代数的概念。

第 5 节回顾变异环的符号稳定性这一概念，并说明这些符号的几何意义。第 6 节利用不变轨道的一系列特定分裂与平移，证明一般伪阿诺索夫映射类的符号稳定性。由此，我们计算出一些伪阿诺索夫映射类的熵。

致谢。作者感谢 Tsukasa Ishibashi 长期以来就本项目进行讨论。他还感谢 Yuji Terashima 告知他有关轨道分裂的内容，并感谢 Osamu Iyama 分享有关温和代数的 g-向量扇的问题。作者得到数学科学研究联盟中心、东北大学科学研究资助的部分支持。

第一部分：用簇代数描述轨道

在前半部分中，我们通过热带化 Goncharov–Shen 势，将轨道理论中的一些概念转换为簇代数的语言。

2. Decorated measured foliations

本节将回顾有关测度叶状结构的概念。带 puncture 曲面$\Sigma = (\Sigma, P)$是一个连通的定向带 puncture 曲面 Σ，其亏格为 g，有 h 个穿孔点 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_h\}$ 且没有边界分支，并满足

(S1) $2g - 2 + h > 0$,

(S2) 当 $g = 0$时， $h > 3$。

条件 (S1) 确保理想三角剖分的存在，而 (S2) 排除了这样一种曲面：其任意理想三角剖分所对应的箭图都没有箭头。

2.1. 带装饰测度叶状结构空间。带穿孔点曲面$\Sigma = (\Sigma, P)$上的叶状结构 F是 Σ 上的叶状结构，具有孤立叉状奇点，并且 F 的单叉奇点集合包含于 P。我们将奇点为其端点的叶称为奇异叶。

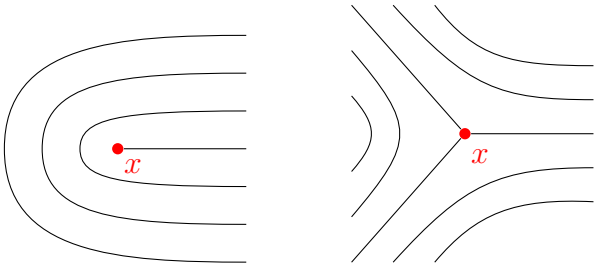


Figure 1. 左：单叉奇点；右： x处的三叉奇点。

叶状结构 F 的横截测度是定义在每条横截弧上的测度 μ，它等价于 $\mathbb{R}$ 某区间上的勒贝格测度；并且，如果横截弧 α和 β 可通过横截弧同痕相互变换，且每个端点始终位于同一条叶上，那么$\int_\alpha \mu = \int_\beta \mu$。

这样的一对（F， μ）称为曲面 Σ上的测度叶状结构。测度叶状结构上的等价关系由同痕和怀特海德塌缩生成，如图2所示；测度叶状结构的等价类集合（包括空叶状结构$\emptyset$）记作 $\mathcal{MF}(\Sigma)$。我们将用记号 $[F, \mu]$表示 $\mathcal{MF}(\Sigma)$中由测度叶状结构（F， μ）所代表的元素。

F在 Σ 上的部分叶状结构（F, μ）是定义在 Σ的某个子曲面上的测度叶状结构。我们将（F, μ）的支撑子曲面称为其支撑集，并记作 $|F|$。我们不假设部分测度叶状结构的支撑集是连通的。与部分测度叶状结构不同，我们有时使用“全测度叶状结构”一词来指支撑集为F的部分测度叶状结构

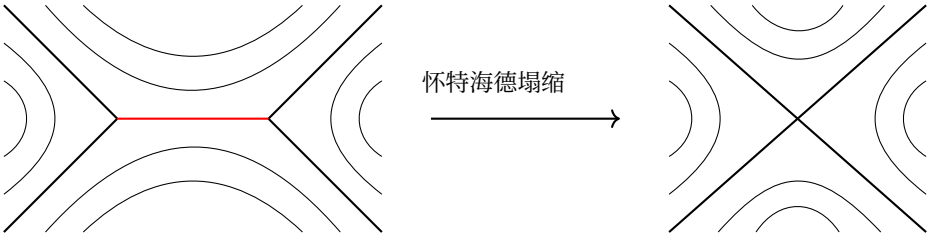


FIGURE 2. 怀特海德塌缩

的等价类。对于部分测度叶状结构 (F,μ)，可以将 $\Sigma\setminus|F|$ 的每个连通分支塌缩为其脊，并通过塌缩映射拉回横截测度 μ，从而得到 Σ 上的全测度叶状结构 (F_0,μ_0)。显然，F_0 的等价类不依赖于脊的选择，因此塌缩操作给出了 $\mathcal{MF}(\Sigma)$中的一个定义良好的元素。因此，可以认为 $\mathcal{MF}(\Sigma)$中的元素由一个部分测度叶状结构表示，我们有时也会采用这样的代表元。

简要提一下 $\mathcal{MF}(\Sigma)$上的自然拓扑。令 $\mathcal{S}(\Sigma$表示 Σ上非周边简单闭曲线的同伦类集合。众所周知，每个类 $[c]\in\mathcal{S}(\Sigma$都有一个代表元 $c_F\in[c]$，对于每个测度叶状结构（μ，F），该代表元在此类中使 μ的测度达到最小值。此外，如果两个测度叶状结构 (F_1,μ_1) 和 (F_2,μ_2) 等价，那么有 $\int_{c_{F_1}}\mu_1=\int_{c_{F_2}}\mu_2$。这些结论的证明见 [FLP，第5节。3] 由此我们得到一个定义良好的映射

$$I_*^{\mathrm{MF}}:\mathcal{MF}(\Sigma)\to\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{S}(\Sigma)},\quad [F,\mu]\mapsto I_{[F,\mu]}^{\mathrm{MF}}$$

其中 $I_{[F,\mu]}^{\mathrm{MF}}([c]):=\int_{c_F}\mu$ 对 $[c]\in\mathcal{S}(\Sigma)$。空叶状结构对应于像中的零向量。已知映射 I_*^{MF}是单射（[FLP，定理613]），因此它将 $\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{S}(\Sigma)}$ 上的弱拓扑拉回到 $\mathcal{MF}(\Sigma)$。

带装饰测度叶状结构的空间是一个平凡丛 $\widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma):=\mathcal{MF}(\Sigma)\times\mathbb{R}^P$。$\widetilde{\ }$可以将元素 $(\mathcal{F},(c_p)_{p\in P})\in\mathcal{MF}(\Sigma)$ 视为曲面 Σ 上的一个“带外围叶的测度$\widetilde{\ }$叶状结构”$(F,\widetilde{\mu})$ 的代表元。也就是说，它限制为部分测度叶状结构 (F,μ)，其支撑集是从 Σ 中移除每个穿孔点 $p\in P$ 周围的一个小开圆盘 D_p 后得到的子曲面，满足 $[F,\mu]=\mathcal{F}$；同时，它限制为 $\overline{D_p}\setminus\{p\}$ 上的一个叶状结构，其叶均为非奇异叶，并围绕 p，且带有“横截测度”，使得对于每个 $p\in P$，连接 p 与 D_p 边界点的弧的测度为 c_p。注意，c_p 可以为负值。我们称这样的代表元为带装饰测度叶状结构，并将 D_p 中的叶称为外围叶。从这个角度看，测度叶状结构 $\widetilde{\ }(\mathcal{MF})$ 的空间 Σ 被视为 $\mathcal{MF}(\Sigma)$ 的零截面。

$\widetilde{\ }$2.2. $\mathcal{MF}(\Sigma)$的坐标。Σ 中的理想弧是不可缩曲线 α 的同痕类，满足 $\partial\alpha\subset P$。Σ 的理想三角剖分 $\triangle$ 是由理想弧组成的集合，满足

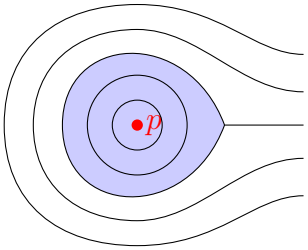


FIGURE 3. 穿孔点附近带装饰测度叶状结构的局部模型 $p \in P$。蓝色区域表示 D_p。

- $\triangle$ 中的任意一对理想弧只能在端点处相交；
- 与 $\bigcup\triangle$ 互补的每个区域都是一个三角形，其边（分别为顶点）是理想弧（分别为穿孔点）。

我们将 $\bigcup\triangle$ 的一个补区域的闭包称为$\triangle$的理想三角形。条件（S1）和（S2）确保这样的理想三角剖分 $\triangle$存在，特别是数值 $-3\chi(\Sigma) > 0$ 给出了 $\triangle$中理想弧的数量。令 $\mathsf{Tri}(\Sigma)$表示这样一个图，其顶点是 Σ 的理想三角剖分，相邻顶点通过一次翻转相互关联。

对于 Σ中的每条理想弧 α，我们在 $\mathcal{MF}(\Sigma)$上定义函数 a_α，如下：

$$\mathsf{a}_\alpha(\mathcal{F}) := \frac{1}{2}\int_\alpha \mu$$

对于表示 $\mathcal{F}$的测度叶状结构（F，μ），此外，我们将 a_α扩展到 $\mathcal{MF}(\Sigma)$，如下：

$$\mathsf{a}_\alpha(\mathcal{F}, (c_p)_p) := \int_\alpha \widetilde{\mu} = \mathsf{a}_\alpha(\mathcal{F}) + \frac{1}{2}c_{p_1} + \frac{1}{2}c_{p_2}$$

其中（$\widetilde{F}$，$\widetilde{\mu}$）是表示（$\mathcal{F}$，$(c_p)_p$）和 $\partial\alpha = \{p_1, p_2\}$ 的带装饰测度叶状结构。

命题 2.1 （[PP93]）。对于每个理想三角剖分 $\triangle$ 的 Σ，映射

$$\mathbf{a}^\triangle : \widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma) \to \mathbb{R}^\triangle,\ (\mathcal{F}, \boldsymbol{c}) \mapsto (\mathsf{a}_\alpha(\mathcal{F}, \boldsymbol{c}))_{\alpha\in\triangle}$$

给出了 $\mathcal{MF}(\Sigma)$ 的一个全局坐标。

证明略。由给定数值 $(\mathsf{a}_\alpha)_\alpha \in \mathbb{R}^\triangle$ 重构带装饰测度叶状结构如下：首先，取一个数 $v > 0$，使得数值 $\mathsf{a}'_\alpha := \mathsf{a}_\alpha + v$ 对于 $\triangle$ 的每个理想三角形（其边为 α、β、γ）均为正数并满足三角不等式：

$$|\mathsf{a}'_\alpha - \mathsf{a}'_\beta| \le \mathsf{a}'_\gamma \le \mathsf{a}'_\alpha + \mathsf{a}'_\beta.$$

然后，对于每个理想三角形 t，在 $\triangle$上，我们可以放置测度叶状结构，使得每条叶都环绕一个穿孔点（见图5），且与边 α 的 t 同位的理想弧的测度为 $2\mathsf{a}'_\alpha$。将它们粘合起来，就得到装饰测度叶状结构；也就是说，存在一个支撑集为 D_p 的分支，其所有叶都环绕一个穿孔点 p。将它们切除，并把每个补区域收缩至

该区域所含的穿孔点，我们便得到 Σ 的测度叶状结构（F,μ）。令c_p 为连接 p 与 D_p 边界上一点的弧的测度与 $-v$之和。因此，我们有

$$\int_\alpha \mu = 2\mathsf{a}'_\alpha - (c_p+v) - (c_q+v) = 2\mathsf{a}_\alpha - c_p - c_q$$

对于理想弧 $\alpha \in \triangle$ 使得 $\partial\alpha = \{p,q\}$。因此，我们得到满足 $\mathsf{a}_\triangle([F,\mu], (c_p)_p) = (\mathsf{a}_\alpha)_\alpha$ 的元素 $([F,\mu], (c_p)_p) \in \widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma)$。■

我们称此坐标为 $\mathcal{A}$-坐标，属于 $\mathcal{MF}(\Sigma)$。沿着 $\kappa \in \triangle$ 进行翻转的坐标变换如图所示。

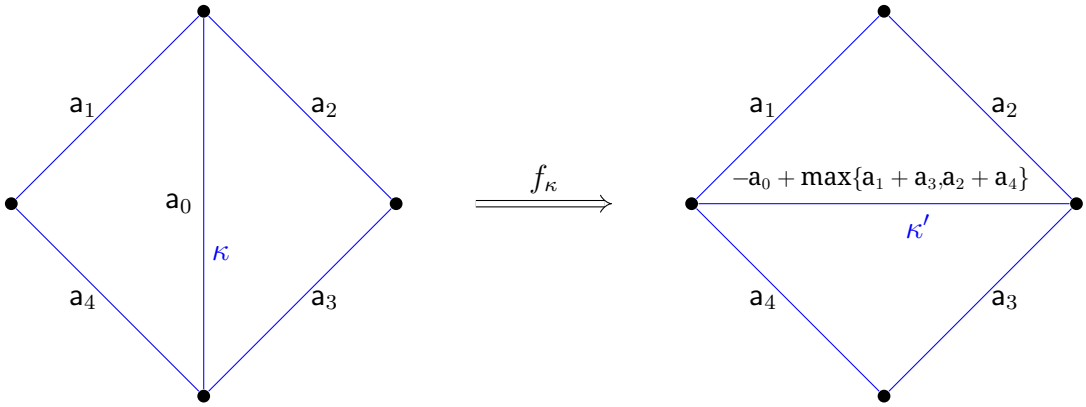


FIGURE 4. 翻转的坐标变换。即使某些边彼此重合，此处的变换规则仍然成立。

因此，带装饰测度叶状结构的空间 $\mathcal{MF}(\Sigma)$ 是一个分片线性流形，其分段线性图册由理想三角剖分 $\triangle$ 的 $\mathcal{A}$-坐标 $\mathsf{a}^\triangle$ 给出。

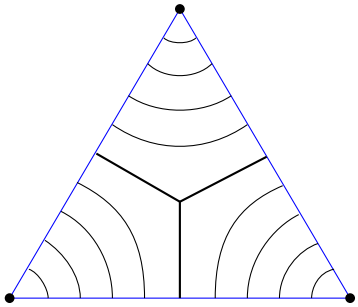
根据命题 $\mathbb{R}^\triangle$ 2.1 的证明中所述的从一个元素重构带标记的（部分）测度叶状结构的过程，一个元素 $\widetilde{\mathcal{F}} \in \widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma)$ 有一个代表元（$\widetilde{F}_\triangle$，$\widetilde{\mu}_\triangle$），使得每个理想三角形中至多有一个奇点。其支撑集在 $\triangle$的每个理想三角形中局部呈现为图 5 所示的构型 $\triangle$。我们称这个代表元为典范模型，$\mathcal{F}$ 相对于 $\triangle$而言。请注意，图 5 中描绘的、环绕顶点的叶可能并不存在。

2.3. 映射 w。对于每个 $p \in P$，以及 $(\mathcal{F}, (c_p)_p) \in \mathcal{MF}(\Sigma)$，我们定义 $\mathsf{w}_p(\mathcal{F}, (c_p)_p) := c_p$。它们构成自然投影

$$\mathsf{w} : \widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma) \to \mathbb{R}^P,\ (\mathcal{F}, \boldsymbol{c}) \mapsto (\mathsf{w}_p(\mathcal{F}, \boldsymbol{c}))_p = \boldsymbol{c}.$$

显然，$\mathsf{w}^{-1}(0)$ 给出丛 $\mathcal{MF}(\Sigma) \to \mathcal{MF}(\Sigma)$ 的零截面。因此 $\mathsf{w}^{-1}(0) \cong \mathcal{MF}(\Sigma)$。

定义2.2. 我们用$T_{\triangle,p}$ 表示其边界包含 p的 $\triangle$ 的理想三角形集合。

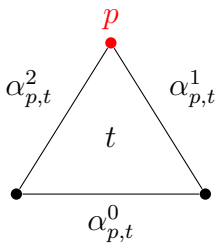


~FIGURE 5. $F_\triangle$的局部模型。

引理2.3. 对于理想三角剖分 $\triangle$ 和穿孔点 $p \in P$，映射w_p 表示为

$$\mathsf{w}_p = \min\left\{\mathsf{a}_{\alpha^1_{p,t}} + \mathsf{a}_{\alpha^2_{p,t}} - \mathsf{a}_{\alpha^0_{p,t}} \;\middle|\; t \in T_{\triangle,p}\right\} \tag{2.1}$$

由 $\mathcal{A}$-坐标 $\mathsf{a}^\triangle = (\mathsf{a}_\alpha)_{\alpha\in\triangle}$ 给出。这里，理想弧 $\alpha^k_{p,t}$ ($k = 0,1,2$) 定义如下：



~ ~ ~证明。对于 $\mathcal{F} \in \mathcal{MF}(\Sigma)$，取关于 $\triangle$ 的一个典范模型 $(F_\triangle, \widetilde{\mu}_\triangle)$。固定一个理想三角形$t \in T_{\triangle,\ p}$。如果不存在奇异叶，其奇异端点包含于 t 中且与 $\alpha^0_{p,\ t}$ 相交，那么 t 中只有围绕角 p 的叶。否则，将 $\alpha^0_{p,\ t}$ 在与奇异叶的交点处分解为两条弧 β_1 和 β_2，使得对于 $i = 1,\ 2,\ \beta_i$ 与 α^i 相邻。再令 γ_i 为 $\alpha^i_{p,\ t}$ 的一个子弧，该子弧对于 $i = 1,\ 2$ 等价于 β_i。注意，差集 $\alpha^1_{p,\ t} \setminus \gamma_1$ 和 $\alpha^2_{p,\ t} \setminus \gamma_2$ 等价于连接 p 与 t 中奇异点（若存在）的弧 $\delta_{p,\ t}$。于是，我们有

$$\begin{aligned}
2\big(\mathsf{a}_{\alpha^1_{p,t}}(\widetilde{\mathcal{F}}) + \mathsf{a}_{\alpha^2_{p,t}}(\widetilde{\mathcal{F}}) - \mathsf{a}_{\alpha^0_{p,t}}(\widetilde{\mathcal{F}})\big) &= \int_{\alpha^1_{p,t}} \widetilde{\mu}_\triangle + \int_{\alpha^2_{p,t}} \widetilde{\mu}_\triangle - \int_{\alpha^0_{p,t}} \widetilde{\mu}_\triangle \\
&= \int_{\alpha^1_{p,t}} \widetilde{\mu}_\triangle + \int_{\alpha^2_{p,t}} \widetilde{\mu}_\triangle - \left(\int_{\beta_1} \widetilde{\mu}_\triangle + \int_{\beta_2} \widetilde{\mu}_\triangle\right) \\
&= \int_{\alpha^1_{p,t}} \widetilde{\mu}_\triangle - \int_{\gamma_1} \widetilde{\mu}_\triangle + \int_{\alpha^2_{p,t}} \widetilde{\mu}_\triangle - \int_{\gamma_2} \widetilde{\mu}_\triangle \\
&= 2\int_{\delta_{p,t}} \widetilde{\mu}_\triangle.
\end{aligned}$$

因此，（2.1）的右端项是围绕 p 的外围叶的测度，它无非就是w_p。■

3. Train track atlases and cluster coordinates

由 W.Thurston 引入的轨道 [Th], 是曲面上测度叶状结构的一种组合模型[4]。也就是说，众所周知，“极大”轨道为测度叶状结构空间 $\mathcal{MF}(\Sigma)\setminus\{\emptyset\}$（不含空叶状结构）提供了一个分段线性图册。轨道理论主要通过裤分解来描述。例如，Dehn–Thurston坐标是与曲面裤分解相关联的曲面测度叶状结构空间上的全局坐标。本节尝试用理想三角剖分来描述轨道。

3.1. 轨道的基本概念。

本小节回顾轨道的定义及其性质。本部分的主要参考文献是 [PH]。

定义 3.1. 一个 轨道 (或简称 轨道) τ 是嵌入在曲面 [5] 中的一个具有三价顶点的图（不一定连通） $\Sigma\setminus P$，满足：

(1) τ 的每条边的内部都是 C^1。**(2)** 对于 τ的每个顶点 v ，都有一个定义良好的 $T_v\tau\subset T_v\Sigma$一维切空间。**(3)** 对于 τ补集的每个连通分支 S ，沿 S 的 C^1 条边将 S双重化所得的双重 $D(S)$ 具有负欧拉示性数： $\chi(D(S))<0$。

简言之，轨道是一个光滑嵌入曲面中的图，其顶点的形状也像铁轨。轨道补集的每个连通分支都有若干尖点；若有 k 个尖点，我们称其为 k边形。轨道的最后一个条件排除了轨道补集中以下类型的连通分支：

- 环带，
- 一次打孔的零边形，
- 无穿孔的 k边形（$k\leq 2$）。

我们称轨道的边为分支，顶点为开关点。

轨道 τ'的子图被称为 τ τ的子轨道。

[4]在 [Th], 他考虑测度“层状结构”，但测度叶状结构空间与测度层状结构空间之间存在分段线性同构 [CB]。[5]三价火车轨道被称为 一般 轨道，在 [PH]中。我们可以通过 梳理，将任意轨道变形为一般轨道。

设 τ 为一条轨道，并令 $B(\tau)$ 表示其所有分支的集合。然后，令$V(\tau) \subset \mathbb{R}^{B(\tau)}$ 表示由满足以下条件的映射 ν 构成的闭凸锥

$$\begin{cases} \nu(b) \geq 0 \text{ 对于每个 } b \in B(\tau) \ \nu \quad = \nu \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad s \quad (b_0) \quad (b_1) \quad + \nu(b_2) \text{，对于 } \tau \text{ 中的每个} \\ \text{转换点，如图6所示。} \end{cases} \tag{3.1}$$

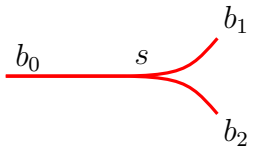


FIGURE 6. 转换条件。

$V(\tau)$中的一个元素称为 τ的横截测度。若存在横截测度 $\nu \in V(\tau)$，使得对所有 $b \in B(\tau)$均有 $\nu(b)$，则称轨道 τ 为常返的。此外，若常返轨道 τ 不是任何常返轨道的真子轨道，则称其为完全的。

定理3.2 （[PH，推论1.4。2]）。（1）若 $g > 1$ 或 $h > 1$，则任意常返列车轨道都是某个完全轨道的子轨道，且该完全轨道的每个补区域都是一次穿孔单角形或无穿孔三角形。（2）若 $g = h = 1$，则任意常返列车轨道都是某个完全轨道的子轨道，该完全轨道唯一的补区域是一次穿孔二角形。

对于一个锥 V，我们用 $\dim V$表示由$\mathbb{R}$-张成的向量场 V的维数。对于任意完全轨道 $V(\tau)$，都有 $\dim = 6g - 6 + 2h$ （参见 τPH，推论 1.1.3 和引理 2.1。1]）。因此，我们可以通过在 V (τ中取 $\mathbb{R}^{6g-6+2h}$ 的 $\mathbb{R}$-张成空间的一组基 $V(\tau)$，将 $\mathbb{R}^{B(\tau)}$视为欧几里得空间中的一个锥。

对于一条轨道 $\tau \subset \Sigma$，存在一个纤维化邻域 $\tau \subset N_\tau \subset \Sigma$，并配有一个收缩映射 r_τ： $N_\tau \searrow \tau$。子空间 N_τ 的边界上有尖点，它们与 τ的转换点重合。我们认为 N_τ 由 r_τ 的纤维构成叶状结构，并将这些叶称为横带。参见图7。

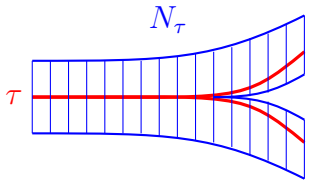


FIGURE 7. 轨道顶点附近的纤维化邻域

我们称 $\mathcal{F} \in \mathcal{MF}(\Sigma)$ 被 τ 承载，记作 $\mathcal{F} \prec \tau$，若可按如下方式变形 $\mathcal{F}$ 的一个代表 (F, μ)：沿奇异叶 F 切开并展开，使得

其支撑集包含于 N_τ，且 F 的每个叶都与 N_τ 的横带横截。我们用 $\mathcal{V}(\tau) \subset \mathcal{MF}(\Sigma)$ 表示由被 τ 承载的部分测度叶状结构所代表的元素构成的子空间。

我们如下定义映射 ψ_τ：$V(\tau) \to \mathcal{MF}(\Sigma)$：对于每个横截测度$\nu \in V(\tau)$，令 τ_ν 表示 τ的子轨道，它由满足$\nu(b) > 0$的分支 $b \in B(\tau)$组成。令 F'_ν, μ'_ν 是 N_{τ_ν}上的一个测度叶状结构，其叶与横带横

$$\int_{t_b} \mu'_\nu = \nu(b)$$

对于每个 $b \in B(\tau_\nu)$。这里，t_b 是 N_{τ_ν} 的一条横带，与 b横截。然后，通过收缩 N_{τ_ν} 的补区域和$\psi_\tau(\nu) := [F_\nu, \mu_\nu]$，我们在 Σ 上定义测度叶状结构（F_ν, μ_ν）。

定理 3.3 ([PH，定理 2.7。4])。映射 ψ_τ：$V(\tau) \to \mathcal{MF}(\Sigma)$是一个嵌入，其像为 $\mathcal{V}(\tau)$。

回忆一下，带装饰测度叶状结构的空间 $\mathcal{MF}(\Sigma)$ 是一个以$\widetilde{\Sigma}$ $\widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma)$为底、纤维为 $\mathbb{R}^P$ 的平凡丛。我们将由满足 $\mathcal{F} \in \mathcal{V}(\tau)$ 的带装饰测度叶状结构 $(\mathcal{F}, \boldsymbol{c})$ 构成的子集记为 $\mathcal{V}(\tau) \subset \mathcal{MF}(\Sigma)$，并定义

$$\widetilde{\psi}_\tau := \psi_\tau \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^P} : \widetilde{V}(\tau) := V(\tau) \times \mathbb{R}^P \to \widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma).$$

注 3.4。我们在上文 [PH] 中请读者注意，但相应的陈述针对的是“双递归轨道”。如果一个轨道既是递归的又是“横向递归的”，则称其为双递归轨道。可以验证，这些陈述对递归轨道同样成立。此外，每个适合理想三角剖分的完全轨道 τ ——理想三角剖分将在下一小节中定义，并且主要在本文中使用——都是横向递归的（因为由 ρ：$B(\tau) \to \mathbb{R}$ 定义的 $\rho(b) = 1$ 满足 τ 上切向测度定义的条件）。

3.2. 适合理想三角剖分的轨道。本小节中，我们定义适合理想三角剖分的轨道类型。这些轨道与簇代数理论十分契合。

定义 3.5. 轨道 τ 适配理想三角剖分 $\triangle$，如果

- τ 与 $\triangle$ 横截，且
- 在 $\triangle$的每个三角形中，τ 都属于图8所示的某一种构型。

对于这样的轨道，我们称一个分支为短分支，如果它包含在单个三角形中。也就是说，图8 最右侧的子轨道有三个短分支。此外，我们将其他分支称为长分支。如果适合理想三角剖分的轨道 τ 位于$\triangle$ 图8 中左侧、中间或右侧的构型 t 的 $\triangle$三角形中，那么我们分别称 τ 在 t上属于 I 型、II 型或 III 型。

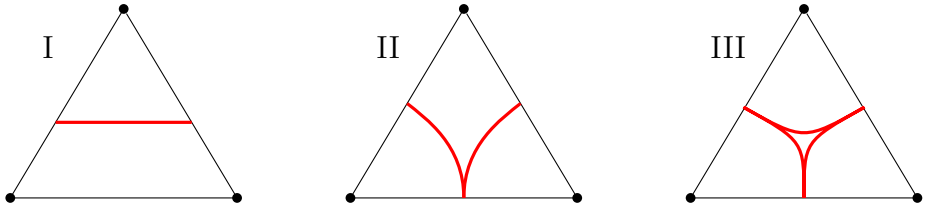


FIGURE 8。适合理想三角剖分的轨道局部模型。

我们用 $\mathrm{TT}_{\triangle}$ 表示适合理想三角形 $\triangle$的三角形的集合，并用 $\mathrm{TT}_{\triangle}^{\max} \subset \mathrm{TT}_{\triangle}$ 表示由完全轨道组成的子集。

例 3.6。 设 Σ 是一个带有四个穿孔点的球面。取理想三角剖分 $\triangle$如图 9所示。于是，$\#\mathrm{TT}_{\triangle} = 8$ 和 $\#\mathrm{TT}_{\triangle}^{\max} = 4$。

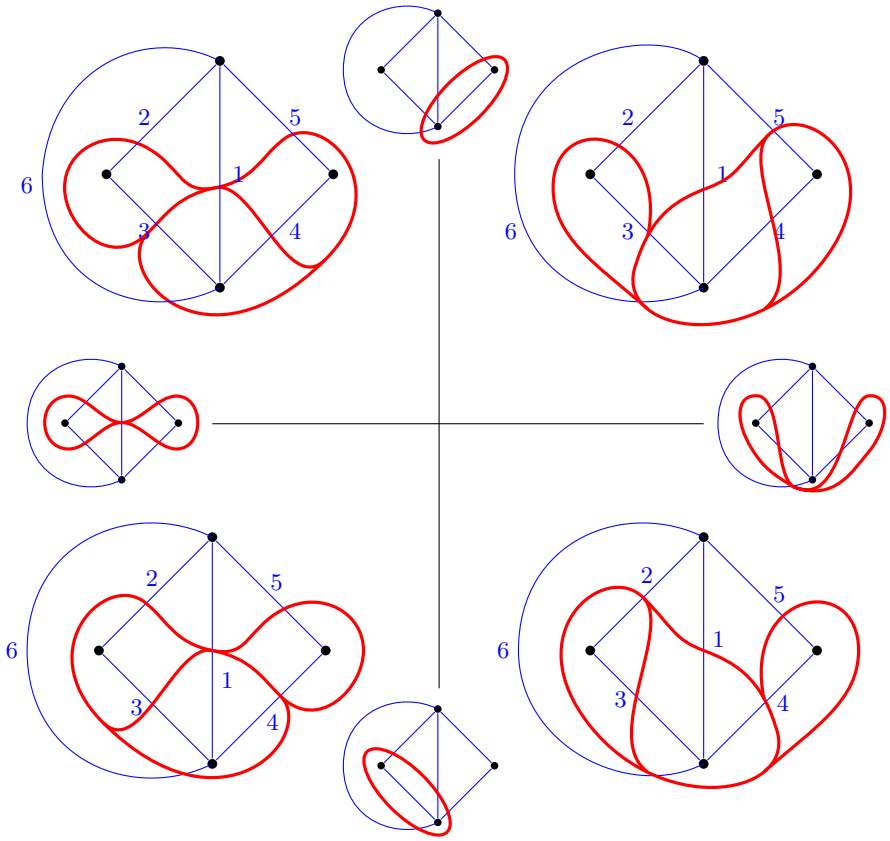


FIGURE 9. 对于 $\tau \in \mathrm{TT}_{\triangle}$，锥 $V(\tau)$。

令 $D_{\triangle}(\mathsf{w})$ 表示坐标 $\mathsf{a}^{\triangle}$ 中映射 w: $\widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma) \to \mathbb{R}^P$ 的最大线性区域集合。

定理3.7. 设 Σ的一个理想三角剖分为 $\triangle$ 。那么，映射

$$\widetilde{\mathcal{V}} : \mathrm{TT}_{\triangle}^{\max} \to D_{\triangle}(\mathsf{w}),\ \tau \mapsto \widetilde{\mathcal{V}}(\tau)$$

是一个良定义双射。

证明。首先，我们看到映射 $\mathcal{V}$ 定义良好。取 $\tau \in \mathrm{TT}_{\triangle}^{\max}$。那么，$\tau$ 是 II 型或 III 型，因为 τ 是完备的。也就是说，如果存在一个三角形，使得 τ 是 I 型，那么包含与 τ 不横截的那条边的补区域有两个穿孔点。此外，对于每个穿孔点 $p \in P$，$\triangle$ 中恰有一个三角形 t_p 使得 τ 是 II 型，而在 $\triangle$ 的其他三角形上，τ 是 III 型。

我们注意到，对侧不存在短分支 p 在 t_p 对应于等式 $\mathsf{w}_p = 0$ 在 $\mathcal{MF}(\Sigma)$ 中。令 $\mathsf{w}_{t_p} := \mathsf{a}_{\alpha_p^1} + \mathsf{a}_{\alpha_p^2} - \mathsf{a}_{\alpha_p^0}$ 其中 α_p^i 是 t_p 的边，如图10所示。那么，我们可以将锥 $\mathcal{V}(\tau)$ 写作

$$\mathcal{V}(\tau) = \{\mathcal{F} \mid \mathsf{w}_p(\mathcal{F}) = \mathsf{w}_{t_p}(\mathcal{F}) = 0,\ p \in P\} \subset \mathcal{MF}(\Sigma)$$

因为 $\mathsf{w}^{-1}(0) \cong \mathcal{MF}(\Sigma)$。因此，我们有

$$\widetilde{\mathcal{V}}(\tau) = \{\widetilde{\mathcal{F}} \mid \mathsf{w}_p(\widetilde{\mathcal{F}}) = \mathsf{w}_{t_p}(\widetilde{\mathcal{F}}),\ p \in P\} \subset \widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma).$$

也就是说，映射 w_p 是 $\mathcal{V}(\tau)$ 上的线性映射 w_{t_p}。如果 $\mathcal{V}(\tau)$ 不是 w 的线性区域中极大的一个，那么它就是另一个区域的面；但由于 τ 的完备性，$\mathcal{V}(\tau)$ 的维数是满维的，因此这种情况不可能发生。因此，$\mathcal{V}(\tau) \in D_{\triangle}(\mathsf{w})$。

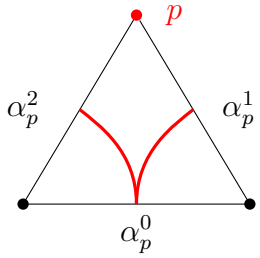


FIGURE 10. t_p。

反过来，我们取 $\mathcal{K} \in D_{\triangle}(\mathsf{w})$。根据 $D_{\triangle}(\mathsf{w})$ 的定义，对于任意 $\mathcal{F} \in \mathcal{K}$ 和 $p \in P$，存在一个三角形 $t_p \in T_{\triangle,P}$，使得 $\mathsf{w}_p(\mathcal{F}) = \mathsf{w}_{t_p}(\mathcal{F})$。此外，令 $\mathcal{K} := \mathcal{K} \cap \mathcal{MF}(\Sigma)$，则 $\mathcal{K} = \mathcal{K} \times \mathbb{R}^P$，因为形式 $\mathsf{w}_p = \mathsf{w}_{t_p}$ 在任意 $p \in P$ 下的作用 $\mathbb{R}^P$ 于 $\mathcal{MF}(\Sigma)$ 时保持不变。接下来，我们根据三角形组 $\boldsymbol{t} = (t_p)_p$ 定义轨道 $\tau_{\boldsymbol{t}}$。令 $\tau_{\triangle}$ 为 Σ 的一个理想三角剖分 $\triangle$ 的高速公路。也就是说，$\tau_{\triangle}$ 是通过将 $\triangle$ 的对偶胖图中每个三价顶点的邻域替换为一个小的尖点三角形而得到的图，如图11所示。对于每个穿孔点 $p \in P$，高速公路 $\tau_{\triangle}$ 都有一个一次打孔的零边形作为补区域，因此它不是轨道。不过，将每个 $p \in P$ 对应的、位于穿孔点 p 对面的三角形 t_p 中的短分支切除后得到的图 $\tau_{\boldsymbol{t}}$ 是完全轨道，因为它的补区域仅由单穿孔单边形或无穿孔的三角区域组成。特别是，由构造可知，轨道 $\tau_{\boldsymbol{t}}$ 适用于 $\triangle$。显然，在 $\mathcal{V}(\tau_{\boldsymbol{t}})$ 上 $\mathsf{w}_p = \mathsf{w}_{t_p}$，，因此 $K = \mathcal{V}(\tau_{\boldsymbol{t}})$。■

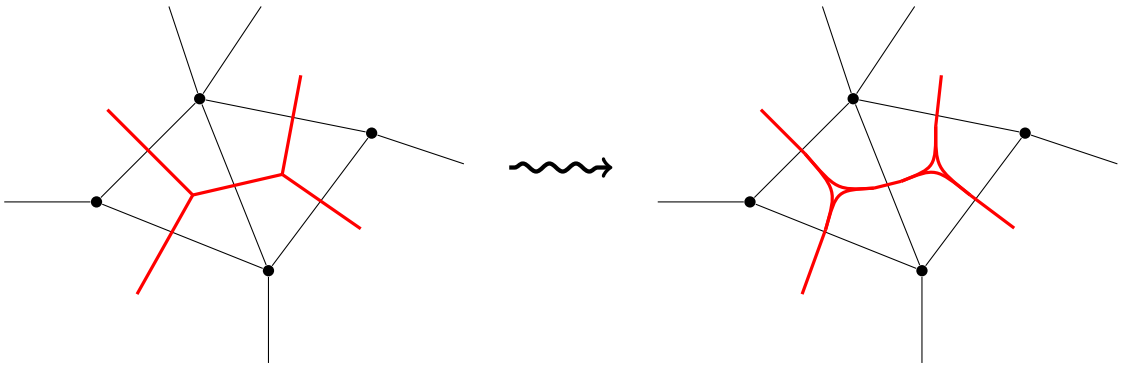


FIGURE 11. 从对偶胖图到高速公路的变形。

例3.8。这里，我们举例说明如何根据定理3.7证明中与 $D_\triangle(\mathrm{w})$ 中某个元素对应的三角形组 $\boldsymbol{t}$ 构造轨道 $\tau_{\boldsymbol{t}}$。令 Σ 为一个带五个穿孔的球面（即 $g=0, h=5$），并取一个如图12左侧所示的三角剖分 $\triangle$。此外，我们按照图12左侧的标注方式为穿孔点和三角形编号。取 $\triangle$的一个三角形组 $\boldsymbol{t}=(t_{p_i} \mid i=1,\dots,5) = (t_5, t_2, t_3, t_4, t_6)$。可以验证，对应于 $\boldsymbol{t}$的 $D_\triangle(\mathrm{w})$ 中的元素确实存在。图12右侧展示了由高速公路 $\tau_\triangle$得到的轨道 $\tau_{\boldsymbol{t}}$。

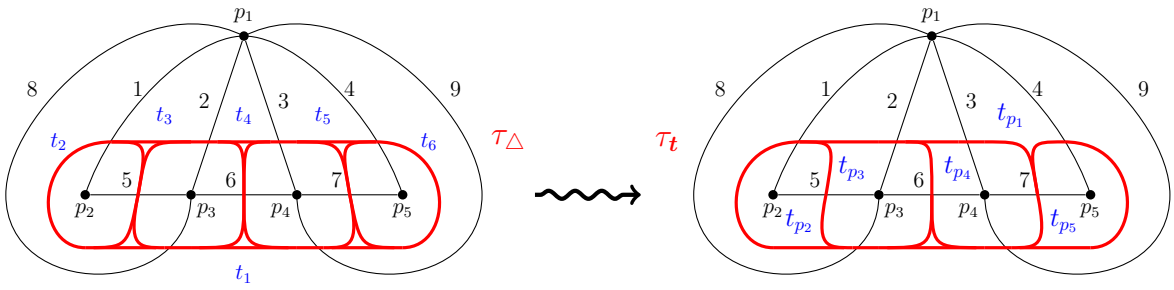


FIGURE 12. 由理想三角形 $\triangle$的三角形元组 $\boldsymbol{t}$ 得到的带五个穿孔的球面上的完全轨道。

根据 w 的热带化的分段线性性的定义，我们有如下结论：

推论3.9. 对于 Σ的每个理想三角剖分，我们有

$$\bigcup_{\tau\in \mathrm{TT}_\triangle^{\max}} \mathcal{V}(\tau) = \widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma).$$

此外，$\operatorname{int}\mathcal{V}(\tau_1)\cap\operatorname{int}\mathcal{V}(\tau_2)=\emptyset$ 对 $\tau_1\neq\tau_2\in\mathrm{TT}_\triangle^{\max}$ 成立。也就是说，集合 $\{\mathcal{V}(\tau) \mid \tau\in\widetilde{\mathrm{TT}_\triangle^{\max}}\}$ 在 $\mathcal{MF}(\Sigma)$ 上构成一个完备扇。

3.3. 轨道的初等变换。本小节将考察轨道的变形。考察由映射类引起的理想三角剖分的移动时，我们可以将其分解为一系列初等变换的复合，这些初等变换称为翻转。对于一种与映射类“相适配”的轨道，我们可以考察轨道的移动，并将其分解为若干轨道的“初等变换”，如同理想三角剖分的翻转。

首先，我们回顾轨道之间最基本的关系，称为承载（参见测度叶状结构的承载一节3.1）。对于两个轨道 τ_1， $\tau_2 \subset \Sigma$， τ_1 被承载τ_2，若 $\tau_1 \prec \tau_2$满足以下条件，则记作 τ_1同伦于某个轨道 τ_1'，使得 $\tau_1' \subset$内部 N_{τ_2}且与 N_{τ_2}的横带横截。根据测度叶状结构承载的定义，显然有

$$\mathcal{V}(\tau_1) \subset \mathcal{V}(\tau_2) \subset \mathcal{MF}(\Sigma)$$

对于任意满足 $\tau_1 \prec \tau_2$的轨道 τ_1、 τ_2，因此，复合映射

$$\psi_{\tau_2}^{-1} \circ \psi_{\tau_1} : V(\tau_1) \to V(\tau_2)$$

是一个线性映射（的限制）。

设 $V(\tau_i)$是向量空间 $\mathbb{R}^{B(\tau_i)}$ 中关于 $i = 1$、2的一个锥。那么，映射 $\psi_{\tau_2}^{-1} \circ \psi_{\tau_1}$的某些线性扩张的逆映射的表示矩阵，称为承载 $\tau_1 \prec \tau_2$的转移矩阵。我们在此对其进行定义。

令 $M = (m_{b_1,\ b_2})_{b_1 \in B\ (\tau_1)\ \ b_2 \in B\ (\tau_2)}$ 表示承载 $\tau_1 \prec \tau_2$ 的转移矩阵。那么，

$$m_{b_1,b_2} := |r_{\tau_2}^{-1}(p_{b_2}) \cap b_1'|$$

其中 p_{b_2} 是分支 $b_2 \in B\ (\tau_2)$ 中的内点，而 b_1' 是 τ_1' 通 b_1 过 τ_1 与 τ_1'之间的同伦所对应的分支。显然，此定义取决于嵌入 $\tau_1' \subset N_{\tau_2}$、收缩映射 r_{τ_2}： $N_{\tau_2} \searrow \tau_2$以及点 $p_{b_2} \in b_2 \in B\ (\tau_2)$ 的选择。由于转换条件，这些矩阵在 $\psi_{\tau_2}^{-1} \circ \psi_{\tau_1}$ （V（τ_1）） 上定义了同一个映射，而该映射与 $\psi_{\tau_2}^{-1} \circ \psi_{\tau_1}$的逆映射一致。更多细节请参阅 [PH，命题 1.7。5]。

定义 3.10（轨道的初等移动）。设 τ 为一条轨道。初等移动是轨道在分支 $b_k \in B$（τ）附近的一种局部变形。它分为 3 种类型：

(1) 分裂：如果轨道 τ 在分支b_k附近呈现图13 左侧的形状，那么它有 3 种分裂方式，分别称为左分裂、右分裂和中心分裂。它们绘于图13右侧。(2) 折叠：这是对各种可能的分裂方式进行逆变形的统称。

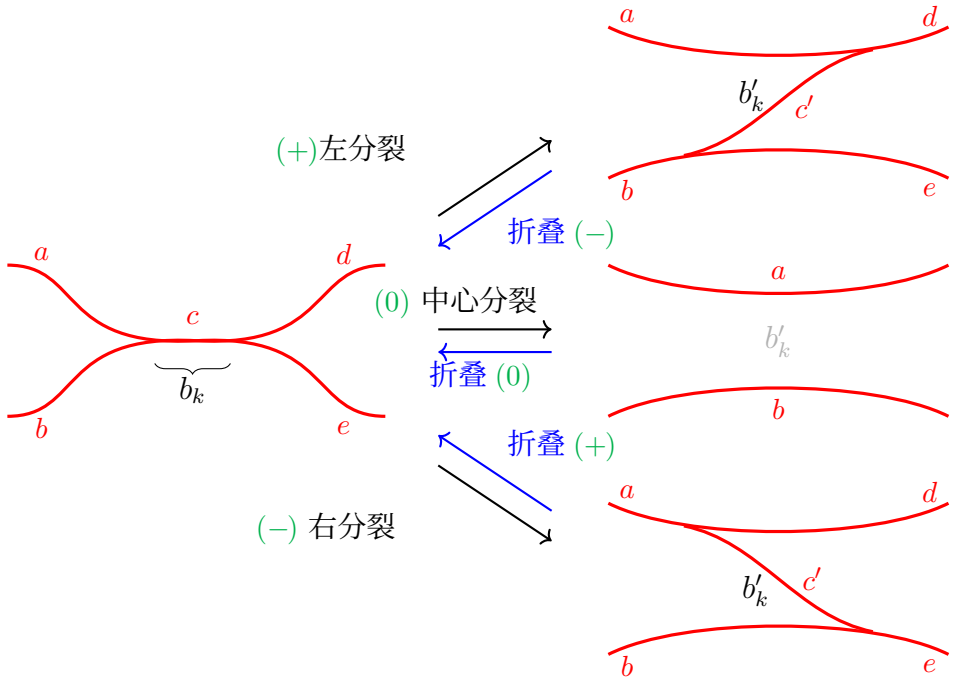


FIGURE 13. 分裂与折叠。

(3) 移位：如果轨道 τ 在分支 b_k附近呈现图 14 左侧或右侧的形状，那么从左到右以及从右到左的变形都称为移位。

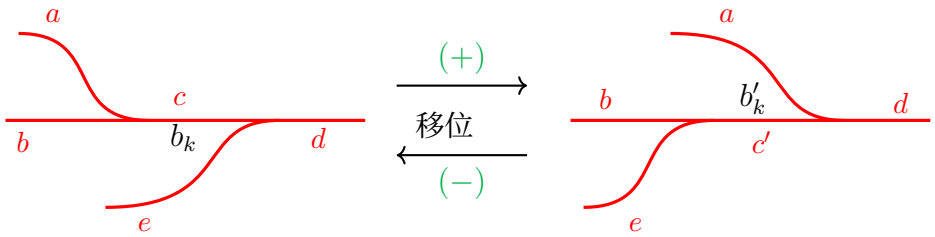


FIGURE 14. 移位。

引理3.11。如果轨道 τ_1 是通过在分支 $b_k \in B(\tau_2)$ 处分裂或移位得到的，则 $\tau_1 \prec \tau_2$。此外，该承载存在一个转移矩阵，使得相应的线性映射仅改变与分支 b_k 对应的分量，且该变换写作

$$c = \begin{cases} a + c' + e & \text{if the move is a left splitting,} \\ a + b & \text{if the move is a central splitting,} \\ b + c' + d & \text{if the move is a right splitting,} \end{cases} \tag{3.2}$$

$$c = a + b \qquad \text{if the move is a shifting.} \tag{3.3}$$

这里，符号 a、b、c、c'、d、e 表示 $\mathbb{R}^{B(\tau_1)}$ 和 $\mathbb{R}^{B(\tau_2)}$ 中的某些分量，这些分量在图 *13* 和*14* 中用红色字母表示。

证明。我们可以在图 τ_1' 中看到满足承载 $\tau_1 \prec \tau_2$ 条件的轨道 15。显式变换（3.2）和（3.3）由这些嵌入以及对 p_{b_1} 的适当选择给出，$b_1 \in B(\tau_1)$。■

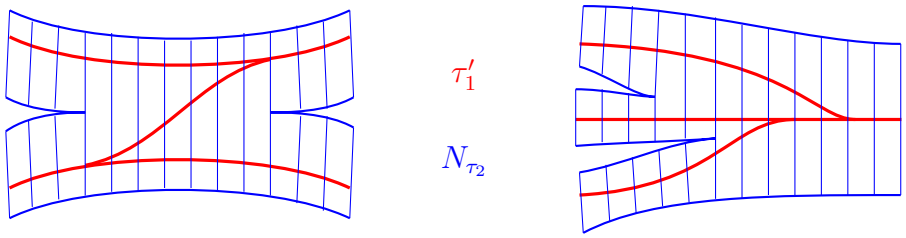


FIGURE 15. 与承载 $\tau_1 \prec \tau_2$相对应的嵌入。

推论 3.12。（1）设轨道 τ_R、τ_L 和 τ_C 分别由沿分支 $b \in B(\tau)$ 对 τ 进行右分裂、左分裂和中心分裂得到。则有 $\mathcal{V}(\tau) = \mathcal{V}(\tau_R) \cup \mathcal{V}(\tau_L)$ 以及 $\mathcal{V}(\tau_C) = \mathcal{V}(\tau_R) \cap \mathcal{V}(\tau_L)$。

（2）若轨道 τ' 由对 τ 进行移位得到，则在 $\mathcal{MF}(\Sigma)$ 中，$\mathcal{V}(\tau) = \mathcal{V}(\tau')$。

证明。(2)：根据引理 3.11，$\tau' \prec \tau$和 $\tau \prec \tau'$。因此，我们得到 $\mathcal{V}(\tau)$ 与 $\mathcal{V}(\tau')$ 之间两个方向的包含关系。

(1)：由于 $\tau_R, \tau_R \prec \tau$，我们有 $\mathcal{V}(\tau_R) \cup \mathcal{V}(\tau_L) \subset \mathcal{V}(\tau)$。若测度叶状结构 (F, μ) 表示 $\mathcal{V}(\tau)$ 中的一个点，我们可以通过沿奇异叶切割并展开来变形 F，使其包含于 N_τ 中，且其叶与横带横截。沿分支 b 附近进一步切割并展开后，其支撑集包含于 N_{τ_R} 或 N_{τ_L} 中（也可能同时包含于两者中）。具体出现哪种情况，取决于 b 周围奇异叶的构型。也就是说，没有其他可能性，因此我们有 $[F, \mu] \in \mathcal{V}(\tau_R) \cup \mathcal{V}(\tau_L)$。用同样的论证可以看出，$\mathcal{V}(\tau_C) = \mathcal{V}(\tau_R) \cap \mathcal{V}(\tau_L)$。■

3.4. 由翻转得到的适配理想三角剖分的轨道的二元关系。设 τ 是适配于 $\triangle$ 的 Σ 的理想三角剖分的轨道。我们聚焦于由 $\triangle$ 的两个理想三角形组成的四边形 Q。此外，考虑沿着 Q 的对角弧 α 对 $\triangle$ 进行翻转后得到的理想三角形 $\triangle'$。于是，存在若干种适配于 $\triangle'$ 且在 Q 之外与 τ 一致的轨道。我们将在本小节中利用轨道的初等变换研究这些可能性。

首先，考虑轨道 $\tau \in \mathrm{TT}_\triangle$，其在 Q 的两个理想三角形中的局部模型均为 III 型。

引理 3.13。从 τ 沿着 Q 内的分支进行初等变换序列后，只能得到一个轨道 $\tau' \in \mathrm{TT}_{\triangle'}$。

证明。 现在， τ 局部看起来如图 16左上角的构型所示。因此，我们只能沿着与 α 横截的分支进行初等移动，因为 Q 内的其他分支不会出现在初等移动的局部模型中。此移动可以是左分裂或右分裂，因此我们先选择左分裂。对于图 16右上角所示的轨道，我们只能在分支 b_1 和b_2 处进行移位，因为另一种可能性不过是第一次分裂的反向操作。之后，初等移动只有一种可能，即在 b'处折叠。然后，我们得到轨道 τ' ，它适用于理想三角剖分 $\triangle' = f_\alpha(\triangle)$。

此外，对于选择右分裂的情况，我们也可以采用相同的论证。在这种情况下，我们同样得到相同的轨道 $\tau' \in \mathbf{TT}_{\triangle'}$。 ■

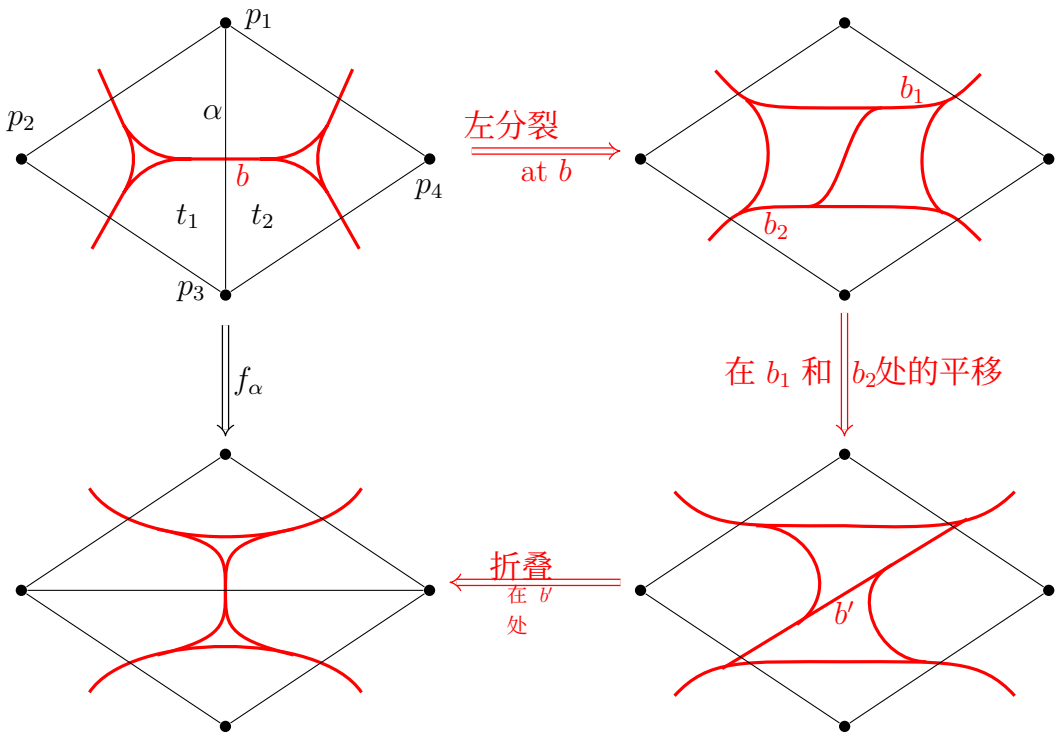


FIGURE 16. 由一次翻转引起的轨道变形分解为初等移动。

轨道在 τ 的一个或两个理想三角形中为 II 型的情形 Q是引理3.13中的退化情形。为概括其他模式，我们定义 $\mathbf{TT}^{\max}_{\triangle}$与 $\mathbf{TT}^{\max}_{\triangle'}$之间的对称二元关系 $\triangle$， $\triangle' \in \mathrm{Tri}(\Sigma)$，使得 $\triangle' = f_\alpha(\triangle)$。

首先，我们引入带标号三角剖分的概念。由理想三角剖分 $\triangle$ 和双射 $\ell \colon I \colon = \{1, 2, \dots, -3\chi(\Sigma)\} \to \triangle$ 组成的对 $(\triangle, \ell)$ 称为带标号（理想）三角剖分。令 $\mathbb{T}\mathbf{ri}(\Sigma)$ 表示一个图，其顶点为带标号三角剖分，且相邻顶点之间通过带标号翻转或标号置换的作用相关联

在 $\mathfrak{S}_I$ 中。对于 $k \in I$，$(\triangle, \ell) \overset{k}{\text{——}} (\triangle', \ell')$ 表示 $\mathbb{T}\mathbf{ri}(\Sigma)$ 的边，即 $\triangle' = f_{\ell(k)}(\triangle)$ 和 $\ell(i) = \ell'(i)$ 对于 $i \neq k$。对于 $(\triangle, \ell) \in \mathbb{T}\mathbf{ri}(\Sigma)$，$\mathbf{TT}^{(\triangle,\ell)} := \mathbf{TT}_{\triangle}$ 和 $\mathbf{TT}^{\max}_{(\triangle,\ell)} := \mathbf{TT}^{\max}_{\triangle}$。

定义 3.14. 对于 $\mathbb{T}\mathbf{ri}(\Sigma)$ 中的 $(\triangle, \ell) \overset{k}{\text{——}} (\triangle', \ell')$，若 $\tau \in \mathbf{TT}^{\max}{}_{(\triangle,\ell)}$ 和 $\tau' \in \mathbf{TT}^{\max}{}_{(\triangle',\ell')}$ 可通过沿 $\triangle$ 内对角线为 $\ell(k)$ 的四边形中的分支进行一系列初等变换而相互关联，则称它们相关。显然，λ_k 是 $\mathbf{TT}^{\max}_{(\triangle,\ell)}$ 与 $\mathbf{TT}^{\max}_{(\triangle',\ell')}$ 之间的对称二元关系。

定理3.15. 设对于 $k \in I$，$\mathbb{T}\mathbf{ri}(\Sigma)$ 中有 $(\triangle, \ell) \overset{k}{\text{——}} (\triangle', \ell')$，并取 $\tau_0 \in \mathbf{TT}^{\max}_{(\triangle,\ell)}$。那么，经过 τ_0 的二元关系链 λ_k 的最大长度为 1 或 2。也就是说，这些链只有 $\tau_0\lambda_k\tau_0'$、$\tau_0\lambda_k\tau_0'\lambda_k\tau_1$ 或 $\tau_0'\lambda_k\tau_0\lambda_k\tau_1'$ 这几种情况，其中某个 $\tau_1 \in \mathbf{TT}^{\max}{}_{(\triangle,\ell)}$ 和 $\tau_0', \tau_1' \in \mathbf{TT}^{\max}{}_{(\triangle',\ell')}$。此外，在每种情况下，我们分别有 $\mathcal{V}(\tau_0) = \mathcal{V}(\tau_0')$、$\mathcal{V}(\tau_0) \cup \mathcal{V}(\tau_1) = \mathcal{V}(\tau_0')$ 和 $\mathcal{V}(\tau_0) = \mathcal{V}(\tau_0') \cup \mathcal{V}(\tau_1')$。

证明。由于 τ_0 是完备的，τ_0 在边界包含 ℓ（k）的 $\triangle$ 的理想三角形中属于 II 型或 III 型。设 t_1 和 t_2 为理想三角形，使得 $t_1 \cap t_2 = \ell$（k）。此外，设p_1、p_2、p_3、p_4为 Σ的穿孔点，使得 p_1、p_2、$p_3 \in t_1$、p_1、p_3、$p_4 \in t_2$。见图 16 左上方。

所有可能的模式汇总于表 1中。在此表中，与穿孔点对应的行（或列）表示不存在横跨至p_i（位于 t_1 中）的短分支（或 p_j（位于 t_2中）的短分支）。符号 $\emptyset$ 表示轨道在 t_1 或 t_2中属于 III 型。从 τ_0 到适用于 τ'的轨道，在四边形内可能发生的初等变换序列列于各单元格中。这些变换由与单元格（$\emptyset$，$\emptyset$）（引理 3.13）对应的序列删去一些不可能发生的变换后得到。由于与（p_1，p_1）和（p_3，p_3）对应的轨道并不完备，因此这里以符号 $\times$填充。我们注意到，其他单元格中列出的变换在对应单元格的变换序列中只出现一次。由推论 3.12，可总结如下：

- (p_1, p_4)、(p_2, p_1)、(p_2, p_3)、(p_3, p_4) 和 $(\emptyset, \emptyset)$：包含 τ_0 的最长链由 $\tau_0\lambda_k\tau_0'$ 实现，其中某个 $\tau_0' \in \mathbf{TT}_{\max(\triangle',\ell')}$。在这种情况下，我们有 $\mathcal{V}(\tau_0) = \mathcal{V}(\tau_0')$。
- (p_1, p_3)、$(p_1, \emptyset)$、(p_3, p_1)、$(p_3, \emptyset)$、$(\emptyset, p_1)$ 和 $(\emptyset, p_3)$：包含τ_0的最长链由 $\tau_0\lambda_k\tau_0'\lambda_k\tau_1$ 实现，其中某个 $\tau_1 \in \mathbf{TT}_{\max(\triangle,\ell)}$ 以及 $\tau_0' \in \mathbf{TT}_{\max(\triangle',\ell')}$。在这种情况下，我们有 $\mathcal{V}(\tau_0) \cup \mathcal{V}(\tau_1) = \mathcal{V}(\tau_0')$

- (p_2, p_4)、$(p_2, \emptyset)$ 和 $(\emptyset, p_4)$：包含 τ_0 的最长链由 $\tau_0'\lambda_k\tau_0\lambda_k\tau_1'$ 实现，其中 τ_0'、$\tau_1' \in \mathbf{TT}_{\max(\triangle',\ell')}$。在这种情况下，我们有 $\mathcal{V}(\tau_0) = \mathcal{V}(\tau_0') \cup \mathcal{V}(\tau_1')$。

■

3.5. 关于 $\mathcal{MF}$（Σ）的轨道图册。根据推论 3.9，显然

$$\bigcup_{\tau \in \mathbf{TT}^{\max}_{\triangle}} \operatorname{int} \widetilde{\mathcal{V}}(\tau) \subsetneq \widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma). \tag{3.4}$$

$t_1 \diagdown t_2$	p_1	p_3	p_4	$\emptyset$
p_1	$\times$	fold	移位	移位与折叠
p_2	移位	移位	分裂	分裂与移位
p_3	fold	$\times$	移位	移位与折叠
$\emptyset$	移位与折叠	移位与折叠	分裂与移位	分裂、移位与折叠

TABLE 1. 适合理想三角剖分 $\triangle$ 的完全轨道可能经历的初等变换序列。

然而，对等式（3.4）左侧的所有理想三角剖分取并集后，我们可以恢复该等式：

引理3.16. 设 Σ 是一个带 puncture 曲面，则有

$$\bigcup_{\triangle\in \mathrm{Tri}(\Sigma)} \bigcup_{\tau\in \mathrm{TT}_{\triangle}^{\max}} \operatorname{int} \widetilde{\mathcal{V}}(\tau) = \widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma) \setminus \{\text{peripheral foliation}\}.$$

这里，外围叶状结构指的是每一条叶都是外围的测度叶状结构。

我们在第 5 节之后不会用到这个结论，因此可以略去其证明。

证明。 根据定理 3.7 的双射及其证明，我们将证明以下等价表述：

$$\bigcup_{\triangle\in \mathrm{Tri}(\Sigma)} \bigcup_{\tau\in \mathrm{TT}_{\triangle}^{\max}} \operatorname{int} \mathcal{V}(\tau) = \mathcal{MF}(\Sigma) \setminus \{\emptyset\}.$$

取任意一点 $\emptyset \neq \mathcal{F} = [F, \mu] \in \mathcal{MF}(\Sigma)$。那么，尽管根据推论3.9，存在某个$\triangle \in \mathrm{Tri}(\Sigma)$和 $\tau \in \mathrm{TT}_{\triangle}^{\max}$ 使得 $\mathcal{F} \in \mathcal{V}(\tau)$， $\mathcal{F}$ 仍可能包含在 $\mathcal{V}(\tau)$ 的边界中。令 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{V}(\tau)$ 的一个面，该面包含 $\mathcal{F}$，且在所有这样的面中余维最大。由于 $V(\tau) \subset \mathbb{R}^{B(\tau)}$ 是多面体的，这样的面 $\mathcal{K}$ 被唯一确定。令 $K := \psi_\tau^{-1}(\mathcal{K}) \subset V(\tau)$。显然，该面 K 由 τ的那些分支 $B(\tau)_{\mathcal{F}} = \{b_1, \dots, b_k\}$ 决定，在这些分支上测度为零：

$$K = \{\nu \mid \nu(b) = 0 \text{ for } b \in B(\tau)_{\mathcal{F}}\}.$$

首先，我们假设集合 $B(\tau)_{\mathcal{F}}$ 包含长分支。令 $\triangle_{\mathcal{F}} \subset \triangle$ 为由 $B(\tau)_{\mathcal{F}}$中长分支的对偶构成的理想弧集合。此外，我们考虑与 $\triangle_{\mathcal{F}}$对应的 $\triangle$ 的对偶胖图 $G^{\triangle}$ 中的子图 $G^{\triangle}_{\mathcal{F}}$。取$\alpha \in \triangle_{\mathcal{F}}$，使得它的对偶边是 $G^{\triangle}_{\mathcal{F}}$的一条端边。令 $(\triangle, \ell) \xrightarrow{k} (\triangle', \ell')$ 且$\ell(k) = \alpha$。那么，根据定理 3.15，存在 $\tau' \in \mathrm{TT}^{\max}_{(\triangle',\ell')}$，使得 $\tau \lambda_k \tau'$, $\mathcal{F} \in \mathcal{V}(\tau')$。令$\mathcal{K}'$ 为 $\mathcal{V}(\tau')$ 中包含 $\mathcal{F}$ 且余维最大的面，并令 $K' := \psi_{\tau'}^{-1}(\mathcal{K}')$。那么，我们有 $\operatorname{codim} K' < \operatorname{codim} K$，因为对于 τ'中与 $\ell'(k)$ 横截的分支 b'， $\psi_{\tau'}^{-1}(\mathcal{F})(b') > 0$；这是因为 $\ell(k) = \alpha$ 的对偶边是 $G^{\triangle}_{\mathcal{F}}$ 的一条端边。（参见坐标变换图4或引理3.11。）重复此过程，直到

子图 $G_{\mathcal{F}}^{\triangle''}$ 消失，此时 $\triangle''$ 为最终理想三角剖分。令 $\tau'' \in \mathrm{TT}_{\triangle''}^{\max}$ 使得 $\mathcal{F} \in V(\tau'')$。那么， $B(\tau'')_{\mathcal{F}}$的所有分支都是短分支。

接下来，我们考虑 $B(\tau)_{\mathcal{F}}$ 的所有分支都很短的情形。考虑 $\tau_{\mathcal{F}}$，它是 τ 的子轨道，由 z 权重不为零的分支组成。若 $B(\tau)_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$，则存在一个带一个 puncture 的 $k > 1$ 边区域，作为 $\tau_{\mathcal{F}}$ 的补区域。令 p 为该 k 边区域的一个穿孔点。然后，以任意顺序翻转与穿孔点 p 相邻的 $\triangle$ 的理想弧，并将由相应二元关系得到的完全轨道记为 $\triangle''$，使得 $\mathcal{F} \in V(\tau'')$。考虑对 $\tau_{\mathcal{F}} \subset \tau$ 的子轨道应用与二元关系序列相对应的初等变换，我们可以认为， $\tau_{\mathcal{F}}$ 的 k 边区域分裂为 $k-1$ 个三角区域和一个 τ'' 的带一个 puncture 的单边区域。（见图 17）因此$\tau''_{\mathcal{F}} = \tau''$。■

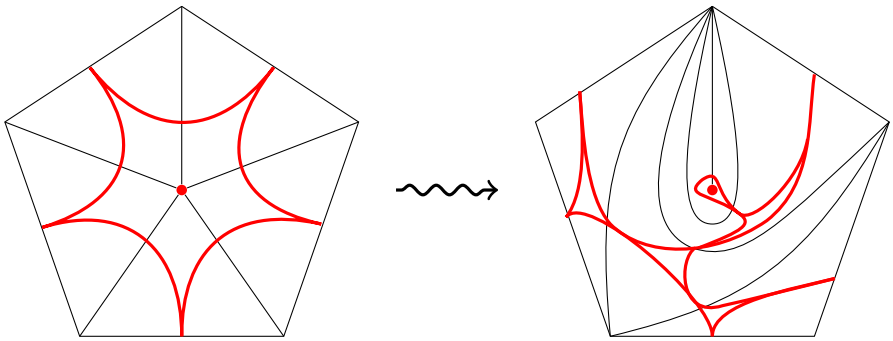


FIGURE 17. 从带一个 puncture 的五边形变形为4个无穿孔三角区域和一个一次穿孔单角形。

对于完全轨道 τ，令

$$\phi_\tau := (\psi_\tau|_{\operatorname{int} V(\tau)})^{-1} : \operatorname{int} \mathcal{V}(\tau) \subset \mathcal{MF}(\Sigma) \to \operatorname{int} V(\tau) \subset \mathbb{R}^{B_\tau}. \tag{3.5}$$

这里， B_τ 是 τ 的分支集合 $B(\tau)$ 的一个子集，使得这些分支上的权重构成 $\mathbb{R}$-张成的 $V(\tau)$ 的基。也就是说，

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(\nu(b) \mid b \in B(\tau),\ \nu \in V(\tau)) = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(\nu(b) \mid b \in B_\tau,\ \nu \in V(\tau)).$$

定理 3.17。集合

$$\{(\operatorname{int} \mathcal{V}(\tau), \phi_\tau) \mid \tau \in \mathrm{TT}_{\triangle}^{\max},\ \triangle \in \mathrm{Tri}(\Sigma)\}$$

给出了 $\mathcal{MF}(\Sigma) \setminus \{\emptyset\}$ 的一个分段线性图册。因此，集合

$$\{(\operatorname{int} \widetilde{\mathcal{V}}(\tau), \phi_\tau \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^P}) \mid \tau \in \mathrm{TT}_{\triangle}^{\max},\ \triangle \in \mathrm{Tri}(\Sigma)\}$$

$\widetilde{\text{给出了}}$ $\mathcal{MF}(\Sigma) \setminus \{$周边叶层$\}$的一个分段线性图册。

可以直接利用引理3.11和3.16以及定理3.15 证明$\widetilde{\text{}}$，但我们将在下一节中利用 $\mathcal{MF}$（Σ）上的热带化簇结构来证明。

注 3.18. 设 G_τ 是由完全轨道 τ 通过将每个作为三角形的补区域塌缩为一个三价顶点而得到的图。于是， $\triangle_\tau$ 的对偶图 G_τ 是 Σ 的一个理想三角剖分。也就是说， $\tau \in \mathrm{TT}^{\max}_{\triangle_\tau}$。因此，并集 $\bigcup_{\triangle\in\mathrm{Tri}(\Sigma)} \mathrm{TT}^{\max}_{\triangle}$ 不过是 Σ 上的完全轨道的集合，所以我们可以将定理 3.17 改写如下：集合 $\{(\mathrm{int}\ \mathcal{V}(\tau)\ \phi_\tau) \mid \tau \text{是 } \Sigma\}$ 上的完全轨道给出了一个 $\mathcal{MF}(\Sigma) \setminus \{\emptyset\}$ 的分段线性图册。W. P. Thurston [Th，第 8 节10]已经证明了这一陈述。我们对定理 3.17 的证明策略是“半”代数的，因此某些技术可能可以推广到其他突变类。

4. Goncharov–Shen potential and $\mathcal{V}$-variety

$\widetilde{\text{在上一节中，我们看到，}}$ $\mathcal{MF}(\Sigma)$ 上存在一种由轨道 $\widetilde{\text{给出的分段线性结构，适用于理想三角剖分。另一方面，}}$ $\mathcal{MF}(\Sigma)$ 上存在一种由与理想三角剖分相关联的 $\mathcal{A}$ 坐标给出的分段线性结构。这正是由与 Σ 的理想三角剖分相关联的簇结构的热带化所给出的分段线性结构。本节将把适用于理想三角剖分的轨道转化为簇代数的语言。

4.1. 与带 puncture 曲面相关联的簇系综。首先，我们回顾带 puncture 曲面 Σ 的突变类 s_Σ 以及与 s_Σ 相关联的簇系综 $p_\Sigma : \mathcal{A}_\Sigma \to \mathcal{X}_\Sigma$ 的一些性质。

定理 4.1 ([FST08],参见 [IK20a，定理 4.1])。 若 Σ 是除单穿孔曲面以外的标记曲面，则存在一个图嵌入

$$\mathbb{T}\mathrm{ri}(\Sigma) \hookrightarrow \mathbb{E}\mathrm{xch}_\Sigma.$$

这里， $\mathbb{E}\mathrm{xch}_\Sigma$ 表示突变类 s_Σ 的带标号交换图。

带标号交换图由带标号的“标记”三角剖分图实现。（参见 [FST08]。）当我们只关注与 $(\triangle \in \mathrm{Tri}(\Sigma)$ 相关联的局部坐标图表时，有时会将 $\triangle, \ell)$ 的某个提升 $\in \mathbb{T}\mathrm{ri}(\Sigma)$ 与 $(\triangle, \ell)$ 等同起来。

将带装饰测度叶状结构空间上的 $\mathcal{A}$-坐标变换与热带化簇 $\mathcal{A}$-簇 $\mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$ 的簇坐标进行比较， $\widetilde{\text{我们有如下识别}}$ $\mathcal{MF}(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$ 使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \\ {\scriptstyle \mathsf{a}_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_i^{(\triangle,\ell)}} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{(-1)} & \mathbb{R}. \end{array}$$

这里，$(\triangle, \ell) \in \mathbb{T}\mathrm{ri}(\Sigma)$ 且 $\ell(i) = \alpha \in \triangle$。此外，此识别诱导出识别 $\mathcal{MF}(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \\ \downarrow & & \downarrow p_\Sigma \\ \mathcal{MF}(\Sigma) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{U}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}). \end{array}$$

这里，左侧的垂直映射是平凡丛 $\widetilde{\mathcal{MF}}(\Sigma) = \mathcal{MF}(\Sigma) \times \mathbb{R}^P$ 的自然投影。

4.2. Goncharov–Shen 势与 $\mathcal{V}$-簇。Goncharov–Shen 势定义于[GS15]，对应于模空间 $\mathcal{A}_{G,\Sigma}$ 该模空间由 Σ上的带标记扭曲 G-局部系统构成，其中 G 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂半单单连通群 G，但我们只会针对 $G = SL_2$进行讨论。

首先，我们回顾簇 $\mathcal{A}$-簇的一些基本性质。设 s 是一个一般的变异类。注意，对于 $v, v' \in \mathbb{E}\mathrm{xch}_{\mathsf{s}}$，存在自然识别 $\operatorname{coker} p^*_{(v)} \cong \operatorname{coker} p^*_{(v')}$，因此我们将 $\operatorname{coker} p^*$ 统称为它们。令 $H_{\mathcal{A},\mathsf{s}}$ 表示与 $\operatorname{coker} p^*$的对偶格相关联的环面：

$$H_{\mathcal{A},\mathsf{s}} := T_{(\operatorname{coker} p^*)^*} := \operatorname{Hom}(\operatorname{coker} p^*, \mathbb{G}_m).$$

可以认为，$(\operatorname{coker} p^*)^* = N^{(v)}/\operatorname{im} p^*_{(v)} \subset N_{(v)}$对应于某个 $v \in \mathbb{E}\mathrm{xch}_{\mathsf{s}}$。加法作用 $(\operatorname{coker} p^*) \otimes N_{(v)} \to N_{(v)}$通过环面 $\mathcal{A}_{\mathsf{s}}$在$H_{\mathcal{A}}$上诱导出作用，s([FG09，第 2 节3])。

命题 4.2（[FG09，引理 2.10]）。系综映射 $p: \mathcal{A}_{\mathsf{s}} \to \mathcal{U}_{\mathsf{s}}$ 是一个 $H_{\mathcal{A},\mathsf{s}}$-托尔索。

从某种意义上说，Goncharov–Shen 势给出了这个托尔索的一个“截面”。

接下来，我们固定 $\mathsf{s} = \mathsf{s}_\Sigma$，取带 puncture 曲面 Σ。对于每个理想三角剖分$\triangle$ 和每个穿孔点 $p \in P$，我们定义

$$W_p^{\triangle} = \sum_{t \in T_{\triangle,p}} \frac{A^0_{p,t}}{A^1_{p,t} A^2_{p,t}} \tag{4.1}$$

其中 $A^i_{p,t}$ 是$A^{\triangle}_{\alpha^i_p,t}$，而 $\alpha^i_{p,t}$ 是三角形 $t \in T_{\triangle,p}$ 的边（见图 10）。映射$W_p^{\triangle}$: $\mathcal{A}_{\triangle} \to \mathbb{A}^1$ 粘合起来并确定映射 $W_p: \mathcal{A}_\Sigma \to \mathbb{A}^1$。我们记作 $W = (W_p)_{p \in P}: \mathcal{A}_\Sigma \to (\mathbb{A}^1)^P$，并称其为 Goncharov–Shen 势函数（简称 GS 势）。令$\mathcal{V}_\Sigma$ 表示单位 $1 \in (\mathbb{A}^1)^P$ 的 $W^{-1}(1) \subset \mathcal{A}_\Sigma$，并称其为 $\mathcal{V}$-簇。

由于 GS 势 W 是一个正有理映射，也就是说，它可以表示为不含减法的形式，因此我们可以在半域 $\mathbb{P}$处进行热带化。根据定义，我们可以对 $\mathcal{V}$-簇 $\mathcal{V}_\Sigma(\mathbb{P})$进行热带化 $(W^{\mathbb{P}})^{-1}(e)$，其中 $W^{\mathbb{P}}$是 W 在 $\mathbb{P}$ 处的热带化，而 $e \in \mathbb{P}^\times$ 表示乘法单位元。

命题 4.3. 设 $\mathbb{P}=\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}$ 或 $\mathbb{R}_{>0}$。那么，系综映射诱导出一个同构$\mathcal{V}_\Sigma(\mathbb{P}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_\Sigma(\mathbb{P})$。

我们可以利用 [GS15 的证明来证明这一点。2]在更一般的设定下，突变类 s 由半单群 G、Σ和标记曲面 G 组成的一对 Σ得到。这里，我们给出 $\mathbb{P}=\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}$的几何证明。情形 $\mathbb{P}=\mathbb{R}_{>0}$ 可通过识别 $\mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}_{>0})$ 和装饰 Teichm¨üller 空间（[Pen]）证明。

首先，我们来看热带化的 GS 势 $w := W^{\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}} : \mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \to \mathbb{R}^P$ 的几何描述。

Le $\widetilde{}$ mma 4.4. 在识别 $\mathcal{MF}(\Sigma) \cong \mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$ 下，我们有 $w = \mathsf{w}$.

证明。对于 $\triangle \in \mathrm{Tri}(\Sigma)$ 和 $p \in P$,

$$\begin{aligned}\mathsf{w}_p &= \min\left\{\mathsf{a}^1_{p,t} + \mathsf{a}^2_{p,t} - \mathsf{a}^0_{p,t} \;\middle|\; t \in T_{\triangle,p}\right\} \\ &= \min\left\{a^0_{p,t} - a^1_{p,t} - a^2_{p,t} \;\middle|\; t \in T_{\triangle,p}\right\} = w_{\triangle,p} \circ a_\triangle = w_p.\end{aligned}$$

■

因此，我们得到

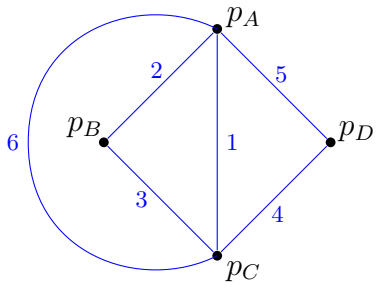
$$\mathcal{U}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \cong \mathcal{MF}(\Sigma) \cong \mathsf{w}^{-1}(0) \cong w^{-1}(0) \cong \mathcal{V}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}).$$

注记 4.5. 映射 w 是 GS 势W的最大加法热带化的相反数。

$\widetilde{}$ 通过对映射 w 的 $\mathcal{MF}(\Sigma)$ 与 w 的 $\mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$ 进行识别，我们可以转译定理 3.7和 3.17的结果：

推论 4.6. 存在一个双射 $\mathrm{TT}^{\max}_\triangle \xrightarrow{\sim} D_\triangle(w)$。这里， $D_\triangle(w)$ 表示簇 $\mathcal{A}$坐标 $\boldsymbol{a}^\triangle$中 w 的最大线性区域集合。

例 4.7. 这里我们给出具有 4 个 punctures 的球面的 GS 势及其热带化的例子。考虑以下带标号三角剖分 $(\triangle, \ell)$



并如上所述为穿孔点编号。然后，

$$\begin{aligned}W^\triangle_{p_A} &= \frac{A_3}{A_1A_2} + \frac{A_3}{A_2A_6} + \frac{A_4}{A_1A_5} + \frac{A_4}{A_5A_6}, \\ W^\triangle_{p_B} &= \frac{A_1}{A_2A_3} + \frac{A_6}{A_2A_3},\end{aligned}$$

$$W^{\triangle}_{p_C} = \frac{A_2}{A_1A_3} + \frac{A_2}{A_3A_6} + \frac{A_5}{A_1A_4} + \frac{A_5}{A_4A_6},$$
$$W^{\triangle}_{p_D} = \frac{A_1}{A_4A_5} + \frac{A_6}{A_4A_5}.$$

其热带化为

$$\begin{aligned}
w^{\triangle}_{p_A} &= \min\{a_3 - a_1 - a_2,\, a_3 - a_2 - a_6,\, a_4 - a_1 - a_5,\, a_4 - a_5 - a_6\},\\
w^{\triangle}_{p_B} &= \min\{a_1 - a_2 - a_3,\, a_6 - a_2 - a_3\},\\
w^{\triangle}_{p_C} &= \min\{a_2 - a_1 - a_3,\, a_2 - a_3 - a_6,\, a_5 - a_1 - a_4,\, a_5 - a_4 - a_6\},\\
w^{\triangle}_{p_D} &= \min\{a_1 - a_4 - a_5,\, a_6 - a_4 - a_5\}.
\end{aligned}$$

子空间 $\mathcal{V}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \subset \mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$ 由分片线性方程 $w^{\triangle}_{p_A} = w^{\triangle}_{p_B} = w^{\triangle}_{p_C} = w^{\triangle}_{p_D} = 0$ 定义。如果 $w^{\triangle}_{p_A} = a_3 - a_1 - a_2 = 0$，则有

$$a_1 - a_6 \geq 0,\ a_4 - a_1 - a_5 \geq 0,\ a_4 - a_5 - a_6 \geq 0$$

由 $w^{\triangle}_{p_A} \geq 0$ 得出。利用这些（不等）式，我们得到

$$w^{\triangle}_{p_B} = a_6 - a_2 - a_3 = 0,\ w^{\triangle}_{p_C} = a_5 - a_1 - a_4 = 0,\ w^{\triangle}_{p_D} = a_6 - a_4 - a_5 = 0.$$

由此，满足 $w^{\triangle}_{p_A} = a_3 - a_1 - a_2 = 0$ 的 $\mathcal{V}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$ 中的点可参数化为 $a_2 + a_4 - a_3 - a_5$ 和 $a_1 - a_6$，并且它们满足不等式

$$a_2 + a_4 - a_3 - a_5 \geq 0,\ a_1 - a_6 \geq 0.$$

其他情况 $w^{\triangle}_{p_A} = a_3 - a_2 - a_6 = 0$，$w^{\triangle}_{p_A} = a_4 - a_1 - a_5 = 0$ 和 $w^{\triangle}_{p_A} = a_4 - a_5 - a_6 = 0$ 也由 $a_2 + a_4 - a_3 - a_5$ 和 $a_1 - a_6$ 参数化，并且满足一些不等式。我们可以将它们概括为图18。

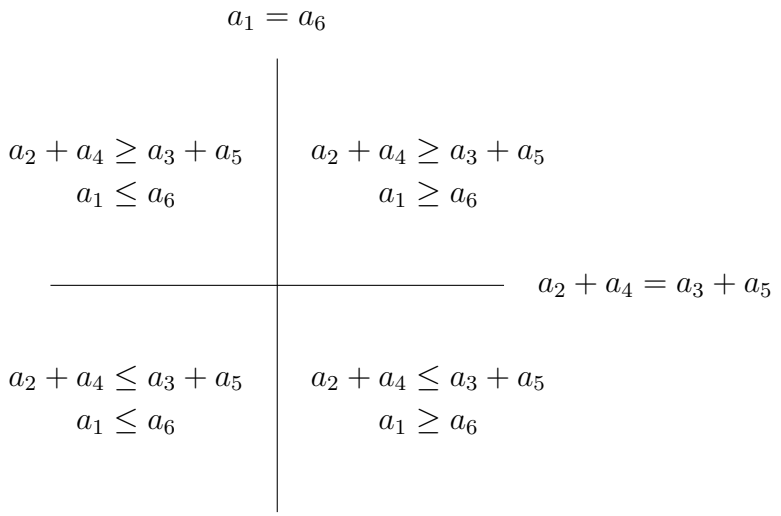


FIGURE 18. 带有 4 个穿孔点的球面上的热带化的 GS 势的线性区域。

可以验证，该图中的每个区域都对应于图9中相同位置的区域。注意，$a_i = -\mathsf{a}_{i\circ}$

我们将 $\mathcal{V}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \subset \mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$ 与 $\mathcal{MF}(\Sigma) \subset \mathcal{MF}(\Sigma)$，分别对应起来。由定理3.17，可知 $\mathcal{V}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \setminus \{0\}$ 和 $\mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \setminus p_\Sigma^{-1}(0)$ 上的分段线性图册由适配于理想三角剖分的完全轨道给出。

定理 4.8. 设 Σ 是一个带 puncture 曲面。那么，由完全轨道给出的 $\mathcal{V}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \setminus \{0\}$ 和由热带化簇结构给出的 $\mathcal{A}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \setminus p_\Sigma^{-1}(0)$ 上的分段线性结构是等价的。

证明。只需证明从由热带化簇结构给出的坐标图到由完全轨道给出的坐标图的坐标变换具有分段线性性。设 τ 是适配于 Σ 上理想三角剖分 $\triangle$ 的完全轨道。那么，我们的目标是证明映射

$$(\phi_\tau \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^P}) \circ (a_\triangle|_{K(\tau)})^{-1} : \mathbb{R}^\triangle \to \mathbb{R}^{B_\tau} \times \mathbb{R}^P \tag{4.2}$$

是分段线性的。这里，$K(\tau) := a_\triangle(\mathrm{int}\ \mathcal{V}(\tau))$，而 B_τ 是(3.5)中所述的 $B(\tau)$的子集。令 $B(\tau_\triangle, \tau) \subset B(\tau_\triangle)$由高速公路 $\tau_\triangle$ 的短分支组成，使得从 $\tau_\triangle$ 中移除 $B(\tau_\triangle, \tau)$中的分支后得到的图与轨道τ重合。我们注意到，当我们将$\widetilde{V}(\tau)$视为高速公路 $\tau_\triangle$的权重集合时，额外映射$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^P}$对应于集合 $B(\tau_\triangle, \tau)$。此外，映射 $\boldsymbol{a}^\triangle$ 不过就是 $\tau_\triangle$的长分支上的权重。因此，映射(4.2)是从由 $\tau_\triangle$ 的长分支给出的基到由分支$B_\tau \cup B(\tau_\triangle, \tau)$给出的基的基变换映射的限制，所以特别地，该映射是线性的。■

定理的证明*3.17.* 我们看到，从由完全轨道 τ_1 给出的坐标图到由另一个完全轨道 τ_2 给出的坐标图的坐标变换是分段线性映射。注意，

$$(\phi_{\tau_2} \circ \phi_{\tau_1}^{-1})|_{\phi_{\tau_1}(\mathrm{int}\,\widetilde{\mathcal{V}}(\tau_1) \cap \mathrm{int}\,\widetilde{\mathcal{V}}(\tau_2))} = (\phi_{\tau_2} \circ a_{\triangle_2}^{-1} \circ a_{\triangle_2} \circ a_{\triangle_1}^{-1} \circ a_{\triangle_1} \circ \phi_{\tau_1}^{-1})|_{\phi_{\tau_1}(\mathrm{int}\,\widetilde{\mathcal{V}}(\tau_1) \cap \mathrm{int}\,\widetilde{\mathcal{V}}(\tau_2))}.$$

这里，上述等式的右边是分段线性映射 $\phi_{\tau_2} \circ a_{\triangle_2}^{-1}$、 $a_{\triangle_2} \circ a_{\triangle_1}^{-1}$ 和$a_{\triangle_1} \circ \phi_{\tau_1}^{-1}$的复合，因此其本身也是分段线性映射。结合引理3.16，所需结论得证。■

第二部分：轨道分裂与热带簇变换

在这一部分的后半部分，我们通过对“不变轨道”进行特定的分裂与平移序列，证明一般伪阿诺索夫映射类的符号稳定性。关于水平边 $\lambda_k \mathbf{TT}^{\max}_{(\triangle,\ell)}$ 与 $\mathbf{TT}^{\max}_{(\triangle',\ell')}$ 之间的二元关系 $(\triangle, \ell) \overset{k}{\text{——}} (\triangle', \ell')$ 在 $\mathbb{T}\mathrm{ri}(\Sigma)$ 中的观察结果，总结于表 1，在此处发挥了核心作用。

5. Sign-stable mutation loops

本节简要回顾从[IK21]出发的突变环的表示路径的符号稳定性概念。

设 s 是一个突变类。首先，我们回顾与 $\mathbb{E}\mathrm{xch}_{\mathbf{s}}$ 中的一条边 $v \overset{k}{\text{---}} v'$ 相关联的热带簇 $\mathcal{X}$-变换 $\mu_k : \mathcal{X}_{(v)}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \to \mathcal{X}_{(v')}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$。对于一个实数$a \in \mathbb{R}$，令 $\mathrm{sgn}(a)$ 表示其符号：

$$\mathrm{sgn}(a) := \begin{cases} + & \text{if } a > 0, \\ 0 & \text{if } a = 0, \\ - & \text{if } a < 0. \end{cases}$$

下面的表达式将在后文中很有用：

引理 5.1（[IK21，引理 3.1]）。热带簇 $\mathcal{X}$-变换 μ_k： $\mathcal{X}_{(v)}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \to \mathcal{X}_{(v')}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$ 由下式给出

$$\mu_k^* x_i^{(v')} = \begin{cases} -x_k^{(v)} & \text{if } i = k, \\ x_i^{(v)}(w) + [\mathrm{sgn}(x_k^{(v)}) b_{ik}^{(v)}]_+ x_k^{(v)} & \text{if } i \neq k. \end{cases} \tag{5.1}$$

定义 5.2（路径的符号）。设 γ： $v_0 \overset{k_0}{\text{---}} v_1 \overset{k_1}{\text{---}} \cdots \overset{k_{m-1}}{\text{---}} v_m$ 是 $\mathbb{E}\mathrm{xch}_{\mathbf{s}}$ 中的一条路径，并固定一点 $w \in \mathcal{X}_{\mathbf{s}}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$。
符号 γ a t w是由下式定义的符号序列 $\boldsymbol{\epsilon}_\gamma(w) = (\epsilon_0, \ldots, \epsilon_{h-1}) \in \{+, 0, -\}^h$

$$\epsilon_\nu := \mathrm{sgn}(x_{k_{i(\nu)}}^{(v_{i(\nu)})}(w))$$

对于 $\nu = 0, \ldots, h-1$。这里，$(k_{i(0)}, k_{i(1)}, \ldots, k_{i(h-1)})$ 是 $(k_0, k_1, \ldots, k_m)$ 中由水平边组成的子序列。

例 5.3。对于 $[F, \mu] \in \mathcal{MF}(\Sigma) \cong \mathcal{V}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$，我们有 $x_\alpha^\triangle([F, \mu]) = \sum_\beta b_{\alpha\beta}^\triangle a_\beta([F, \mu])$。因此，当且仅当其支撑集位于图 19 左侧（分别为右侧）的构形中时，$\mathrm{sgn}(x_\alpha^\triangle[F, \mu]) = +$（分别为 $-$）。也就是说，若 $\mathrm{sgn}(x_\alpha^\triangle([F, \mu])) = +$（分别为 $= -$），则 $x_\alpha^\triangle([F, \mu])$ 由 $\int_\gamma \mu$（分别为 $-\int_\gamma \mu$）给出。这里，γ是横截弧，它连接从理想三角形中的奇异点发出的奇异叶，这些理想三角形的边包含 α。

例 5.4。 正如表 1所示，轨道的初等变换对应于由翻转产生的二元关系。因此，每个初等变换都对应于热带化簇变换的一个线性区域。在图 13 和 14中，绿色字母表示相应的符号。

符号稳定性是指，在反复迭代突变环时，突变环的表示路径的符号所具有的渐近稳定性：

定义 5.5（符号稳定性）。设 γ： $v_0 \to \phi^{-1}(v_0)$ 是一个突变环 ϕ 的表示路径。设 $\Omega \subset \mathcal{X}_{\mathbf{s}}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$ 是一个在重新缩放

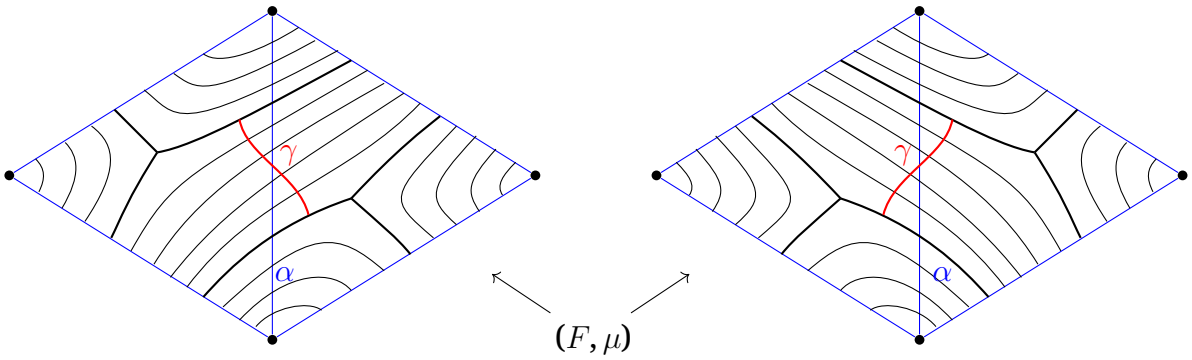


FIGURE 19. 左图（分别为右图）展示了测度叶状结构 (F,μ) 的局部模型，其在 α 处的剪切坐标为负（分别为正）；左图：$x_\alpha^\triangle([F,\mu]) = +\int_\gamma \mu$，右图：$x_\alpha^\triangle([F,\mu]) = -\int_\gamma \mu$。

$\mathbb{R}_{>0}$ 的作用下不变的子集。若存在一个严格符号序列 $\boldsymbol{\epsilon}_{\gamma,\Omega}^{\mathrm{stab}} \in \{+,-\}^{h(\gamma)}$，使得对于每个 $w \in \Omega \setminus \{0\}$，都存在一个整数 $n_0 \in \mathbb{N}$，则称 γ 在 Ω 上是符号稳定的，满足

$$\boldsymbol{\epsilon}_\gamma(\phi^n(w)) = \boldsymbol{\epsilon}_{\gamma,\Omega}^{\mathrm{stab}}$$

对所有 $n \geq n_0$ 均成立。我们称 $\boldsymbol{\epsilon}_{\gamma,\Omega}^{\mathrm{stab}}$ 为 Ω 上的稳定符号 γ。

6. Train track splittings

本节将阐明表示伪阿诺索夫映射类的轨道分裂序列与该伪阿诺索夫映射类的某条表示路径的稳定符号之间的具体关系。

6.1. 一般伪阿诺索夫映射类的符号稳定性。首先，我们回顾伪阿诺索夫映射类的概念。曲面 Σ 上的保定向同胚 $f\colon \Sigma \to \Sigma$ 若存在一对测度叶状结构 $((F_f^+,\mu_f^+),(F_f^-,\mu_f^-))$，满足以下条件，则称为伪阿诺索夫映射类：

- 对于由 F_f^+ 和 F_f^- 的相应叶构成的任意一对，如果它们相交，则这两条叶彼此横截，且
- 存在一个数 $\lambda_f > 1$ 使得经由推前 $f_*(F_f^\pm,\mu_f^\pm)$ 得到的测度叶状结构[6] 满足 f 等于 $(F_f^\pm,\lambda_f^{\pm 1}\mu_f^\pm)$。

特别地，如果测度叶状结构 $\mathcal{F}_f^\pm$ 仅有一叉或三叉奇点，那么伪阿诺索夫同胚 f 就是泛型的。若映射类由一个（泛型）伪阿诺索夫同胚表示，则称其为（泛型）伪阿诺索夫映射类。

注 6.1. 根据伪阿诺索夫同胚 f 的测度叶状结构对 (F_f^+,F_f^-) 的第一条条件，F_f^+ 和 F_f^- 的奇点集合

[6]对于测度叶状结构 (F,μ) 和同胚 f，将 (F,μ) 经 f 推前所得的 $f_*(F,\mu)$ 是测度叶状结构 $(f(F)\ f_*\mu)$，其中 $f_*\mu(\alpha) := \mu(f^{-1}(\alpha))$。

相同。此外，F_f^+ 和 F_f^- 的奇点集合不一定包含穿孔点集合。在测度叶状结构空间 $\mathcal{MF}(\Sigma)$ 中，奇点的阶数定义不明确，因为怀特海德移动不保持其阶数；但这些数据对符号稳定性很重要。

首先，我们回顾 [IK20a] 的主要结果：

定理 6.2 ([IK20a，定理 7.1 和注 7。8])。设 ϕ 是带 puncture 曲面 Σ上的一个映射类。则 ϕ 是一般伪阿诺索夫，当且仅当任意表示路径 $\gamma\colon(\triangle,\ell)\to\phi^{-1}(\triangle,\ell)$ 在 $\mathbb{T}\mathrm{ri}(\Sigma)$ 上关于 $\mathbb{R}_{>0}\cdot\mathcal{X}_\Sigma(\mathbb{Z}^{\mathrm{trop}})$是符号稳定的。

对于伪阿诺索夫映射类 ϕ 的表示路径 γ，我们将其在 $\mathbb{R}_{>0}\cdot\mathcal{X}_\Sigma(\mathbb{Z}^{\mathrm{trop}})$ 上的稳定符号简记为 $\boldsymbol{\epsilon}_\gamma^{\mathrm{stab}}$。

6.2. 通过轨道分裂实现一般伪阿诺索夫映射类的符号稳定性。在这里，我们讨论“通常”伪阿诺索夫映射类的符号稳定性。下面的定理在本小节中起着关键作用：

定理 6.3（[PH，定理 2.4.1]）。若双递归轨道 τ 和 τ' 满足 $\tau\succ\tau'$，则对于每个横截测度 $\nu\in\mathrm{relint}\ V(\tau)$ 和 $\nu'\in\mathrm{relint}\ V(\tau')$，只要它们对应于同一个无理点 $\mathcal{F}\in\mathcal{MF}(\Sigma)$，就存在一个轨道序列 $\tau=\tau_0\succ\tau_1\succ\cdots\succ\tau_h=\tau'$，使得对于每个 $t=0,\ \ldots,\ h-1$，$\tau_t\succ\tau_{t+1}$ 都是带有转移矩阵 M_i 的分裂或移位，并且满足 $M_{h-1}\cdots M_1M_0\nu=\nu'$。

这个轨道序列称为RLS 词，对应于 $\mathcal{F}\in\mathcal{MF}(\Sigma)$，属于[PP87]。为便于后续讨论，我们回顾定理6.3中分裂与平移序列的构造。

根据假设 $\tau\succ\tau'$，我们可以通过同伦变形 τ'，使得 $\tau'\subset$包含于 N_τ，且 τ 与 N_τ 的横带横截。此外，我们可以取 τ' 的一个纤维化邻域$N_{\tau'}$，使得 $N_{\tau'}\subset$包含于 N_τ，并且 $N_{\tau'}$ 的每条横带都是 N_τ 中某条横带的限制。由于 $\mathcal{F}\in\mathcal{V}(\tau)$，我们可以取一个部分测度叶状结构 (F,μ)，使得 $|F|\subset N_\tau$，且它与横带横截。特别地，由于 $\mathcal{F}\in$相对于 $\mathcal{V}(\tau)$ 的相对内部（参见 [PH，构造 1.7.7]），我们可以取满足 $|F|=N_\tau$ 的部分测度叶状结构 (F,μ)。考虑 F 的一条奇异叶 ς，它从 N_τ 的一个尖点 s 出发，参数化为$\alpha\colon[0,\infty)\to\varsigma$；再考虑包含 $N_{\tau'}$的某个尖点的 N_τ 的横带集合 T。通过某种论证可知，叶 ς 首先碰到的横带 $t\in T$ 中所含的 $N_{\tau'}$ 的尖点 s'，与尖点 s 朝向相同的方向张开，见图 20。对于满足$\alpha(u)\in t$ 的 $u\in[0,\infty)$，令 $N_1:=N_\tau\setminus\alpha([0,u])$，并令 τ_1 为将 N_1的每条横带压缩为一点后得到的轨道。这个过程称为沿奇异叶 ς 解拉链。已知存在一个从 τ 到 τ' 的解拉链序列，并且很容易验证，解拉链就是分裂或移位。因此，通过解拉链，我们得到由分裂和平移组成的序列，这就是所需的序列。

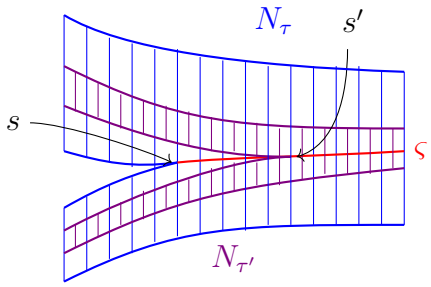


FIGURE 20. N_τ 和 $N_{\tau'}$纤维化邻域的相对位置。

定理 6.4 ([BH95])。 对于伪阿诺索夫映射类 $\phi \in MC(\Sigma)$，若其具有一个不稳定的测度叶状结构 $(F^+_\phi,\ \mu^+_\phi)$，则存在一个双递归轨道 τ^+_ϕ，使得 $[F^+_\phi, \mu^+_\phi]$ ∈属于相对内部 $\mathcal{V}(\tau^+_\phi)$，且 $\phi(\tau^+_\phi) \prec \tau^+_\phi$。

满足这一性质的轨道称为 ϕ的不变轨道。

证明。对于伪阿诺索夫映射类 ϕ，存在满足 $\phi(\tau^+_\phi) \prec \tau^+_\phi$的轨道$\tau^+_\phi$，这一点已在 [BH95] 中证明，但双递归性尚不明确。若 τ^+_ϕ 不是递归的，则某些分支 $b \in B(\tau^+_\phi)$满足 $\nu^+_\phi(b) = 0$，其中 ν^+_ϕ 是与 $[F^+_\phi, \mu^+_\phi]$对应的τ^+_ϕ 的测度。因此，在这种情况下，我们将 τ^+_ϕ替换为通过切除这些分支而得到的子轨道。τ^+_ϕ 的横截递归性可由 τ^+_ϕ 的对偶轨道的递归性推出（见 [PH，第3.4]节）。■

结合定理6.3 和6.4，我们知道存在一个分裂与平移序列

$$\tau^+_\phi = \tau_0 \succ \tau_1 \succ \cdots \succ \tau_h = \phi(\tau^+_\phi) \tag{6.1}$$

对于伪阿诺索夫映射类 ϕ，不变轨道 τ^+_ϕ 通常并不适合理想三角剖分。因此，我们必须变形不变轨道，使其适用于理想三角剖分。

首先，我们简要回顾不变轨道的构造。伪阿诺索夫映射类 ϕ 的不变轨道 τ^+_ϕ 由一个与 $\Sigma \setminus P$ 同伦的图 G 以及一个由 ϕ 诱导的图映射 $f\colon G \to G$ 构成，后者称为轨道映射，具体如下：对于 G 的每个顶点 v，我们在从 v 出发的边的集合 $E(v)$ 上定义一个等价类：若对于某个 $r > 0$，$f^r(e_1)$ 与 $f^r(e_2)$ 有非平凡的公共初始线段，则 e_1、$e_2 \in E(v)$ 等价。这个等价类称为 v 处的门。对 G 的每个顶点 v，我们赋予一个小圆盘，其边界上有标记点，标记点以 v 处的门命名。若两条边 e_1、$e_2 \in E(v)$ 满足 $e_1 \not\sim e_2$，且存在边 e 和 $r > 0$，使得 $f^r(e)$ 包含 e_2e_1 或 e_1e_2 作为子路径，那么我们就用一条称为无穷小分支的边，将圆盘上分别以包含 e_1 和 e_2 的门命名的标记点连接起来。最终，每个小圆盘中都会画出一个无穷小 k 边形，或一个缺少一条边的无穷小 k 边形（见图 21）。最后，对于每条边 e，我们连接包含 e 的门，并将得到的图平滑处理；每个门都视为一个转换点，因为唯一的切向量与小圆盘的边界横截。

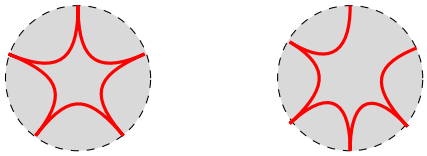


FIGURE 21. 左：无穷小五边形；右：缺少一侧的无穷小六边形。

接下来，我们变形不变轨道，使其适用于某个理想三角剖分。显然，适用于理想三角剖分的轨道不含任何无穷小（$k > 3$）边形，因此我们必须在（$k > 3$）边形中添入一些无穷小分支，将它们删去。经过这种变形，每个无穷小（$k > 3$）边形都会分裂成相连的（$k-2$）个三角区域。具体而言，我们按以下过程进行变形：对于不变轨道 $\tau = \tau_\phi^+$，取一个与用于构造 τ 的图 G 对偶的理想多边形分解 $\triangle'(\tau)$。在 τ 的无穷小 k 边形周围，$\triangle'(\tau)$ 形成理想k边形。取一个包含 $\triangle'(\tau)$ 的理想三角剖分 $\triangle = \triangle(\tau)$，并取一个轨道$s_\triangle(\tau)$，使其

- 适用于 $\triangle$,
- 对于 $\triangle$ 中的理想（$k > 3$）边形，去掉 τ 后也是如此，并且
- 在 $\triangle'$的理想（$k > 3$）边形中所包含的 $\triangle$ 的每个理想三角形内均为 III 型（τ）。

那么，锥 $\mathcal{V}$（τ）是锥 $\mathcal{V}$（$s_\triangle$（τ））的子集。

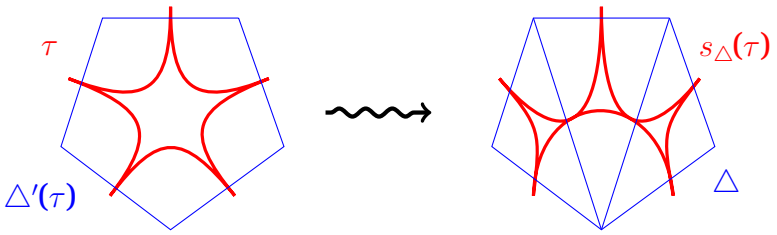


FIGURE 22. 无穷小五边形变形为 3 个无穷小三角形

设 ϕ 是带 puncture 曲面 Σ 的一个伪阿诺索夫映射类。

Lemma 6.5. 存在一条水平路径 $\gamma : (\triangle, \ell) \to (\triangle', \ell')$，位于 Tri($\Sigma$) 中，使得

- $\triangle$ 和 $\triangle'$ 分别包含理想多边形分解 $\triangle'(\tau_\phi^+)$ 和 $\triangle'(\phi(\tau_\phi^+))$
- 符号 $\boldsymbol{\epsilon}_\gamma^+ = \boldsymbol{\epsilon}_\gamma([F_\phi^+, \mu_\phi^+])$ 是严格的，即 $\boldsymbol{\epsilon}_\gamma^+ \in \{+,-\}^{h(\gamma)}$。

证明。 我们回顾一下，序列 (6.1) 是通过沿着 F_ϕ^+ 的某些奇异叶解拉链得到的。取这些奇异叶的子弧 $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_m$，使得通过沿这些子弧解拉链得到不变轨道 τ_ϕ^+ 的轨道 $\phi(\tau_\phi^+)$。对于 $i = 1, 2, \ldots, m$，令 $\boldsymbol{k}(\varsigma_i) = (k_1, k_2, \ldots, k_s)$ 为指标元组，使得弧 ς_i 与理想弧相交

$\ell(k_1)\ \ell(k_2)\dots,\ell(k_s)\ \in \triangle$ 按此顺序对应于从 F_ϕ^+ 的相应尖点出发的 ς_i 的一种参数化。接下来我们将看到，沿着指标元组 $(\boldsymbol{k}(\varsigma_1)\ \boldsymbol{k}(\varsigma_2)\dots,\boldsymbol{k}(\varsigma_m))$ 的水平路径 γ 正是所需的路径。由于奇异叶彼此不相交，沿不同奇异叶进行的解拉链操作彼此可交换。因此，只需证明情形 $m=1$。我们用 ς 表示一条奇异叶的子弧。

对于 τ_ϕ^+，取一个如上所示的轨道 $s_\triangle(\tau_\phi^+) = \tau$。通过对 ς 的 τ 的纤维化邻域应用收缩映射$r\colon\ |F_\phi^+| \searrow \tau$，我们得到轨道 τ 上由分支构成的路径 $b_1b_2\cdots b_u$。显然，与 τ 的长分支相对应的序列 $(i(1)\ i(2)\dots,i(s))$（来自 $(1,2,\dots,u)$）满足 $b_{i(j)} \pitchfork \ell(k_j)$，其中 $j=1,\ \dots,s$，且 $\boldsymbol{k}(\varsigma) = (k_1,\dots,k_s)$。

如果路径 $b_1b_2\cdots b_u$ 不包含任何无穷小 $(k>3)$-边形的无穷小分支，那么沿着 ς 对于 τ_ϕ^+ 的解拉链是（非中心）分裂或移位，因此对于 τ 也是如此。因此，γ 的条件显然满足。

在其他情形中，弧 ς 包含一个无穷小（$k>3$）边形的无穷小分支。为简便起见，我们假设 ς 仅包含一个这样的无穷小分支，且子序列（$i(1)\dots,i(s)$)的长度为2。（也就是说，ς由2条大分支以及它们之间的一条无穷小分支组成。）解拉链后，包含于 ς 中的无穷小分支所属的无穷小（$k>3$）边形仍是无穷小（$k>3$）边形，而不包含在 ς 中的无穷小（$k>3$）边形的开关点与长分支之间的邻接关系保持不变。因此，包含 $\triangle'(\tau_\phi^+)$的理想三角剖分 $\triangle$ 自然诱导出包含 $\triangle'(\phi(\tau_\phi^+))$的理想三角剖分 $\triangle'$，如图23所示。此外，序列 $\boldsymbol{k}(\varsigma)$给出了从（$\triangle,\ell$）到（$\triangle',\ell'$）的路径，其符号根据表1是严格的。参见图23右侧。

由于其他情形都可由结合上述两种情形得到，因此该命题得证。■

我们注意到，引理 6.5 中出现的理想三角剖分 $\triangle'$ 并非 $\phi(\triangle)$，但它们包含理想多边形分解 $\tau'(\phi(\tau_\phi^+))$。因此，它们之间的差异仅在于理想 $(k>3)$ 边形的理想三角剖分。由于对于任意 $\alpha\in\triangle'\setminus\triangle'(\phi(\tau_\phi^+))$，坐标 $x_\alpha^{\triangle'}([F_\phi^+,\mu_\phi^+])$ 都为零，因此从 (τ',ℓ') 到 $\phi(\triangle,\ell)$、且仅在理想多边形内部变形的路径并非我们所需。尽管如此，在开始时，对于每个 $k>3$，将 $\triangle'(\tau_\phi^+)$ 中理想 k 边形的理想三角剖分取为相同的（相差一个旋转），它们的理想三角剖分之间的差异便仅是一些旋转。因此，重复这一过程数次后，我们得到理想三角剖分 $\phi^r(\triangle)$:

引理 6.6. 存在一个整数 $r\geq 1$，使得 $s_{\phi^r(\triangle)}(\phi^r(\tau_\phi^+)) = \phi^r(s_\triangle(\tau_\phi^+))$。

因此，引理 γ 6.5 中关于 ϕ^r 的 ϕ^r逆路径是一个符号稳定路径 ϕ^r。现在可以证明我们的主要结论了:

定理 6.7. 设 Σ 是带 puncture 曲面，且 ϕ 是 Σ 上的一个（一般）伪阿诺索夫映射类。那么，对于某个 $r\geq 1$，ϕ^r 有一条在 $\mathbb{R}_{>0}\cdot\mathcal{X}_\Sigma^{\mathrm{uf}}(\mathbb{Z}^{\mathrm{trop}})$ 上符号稳定的表示路径。

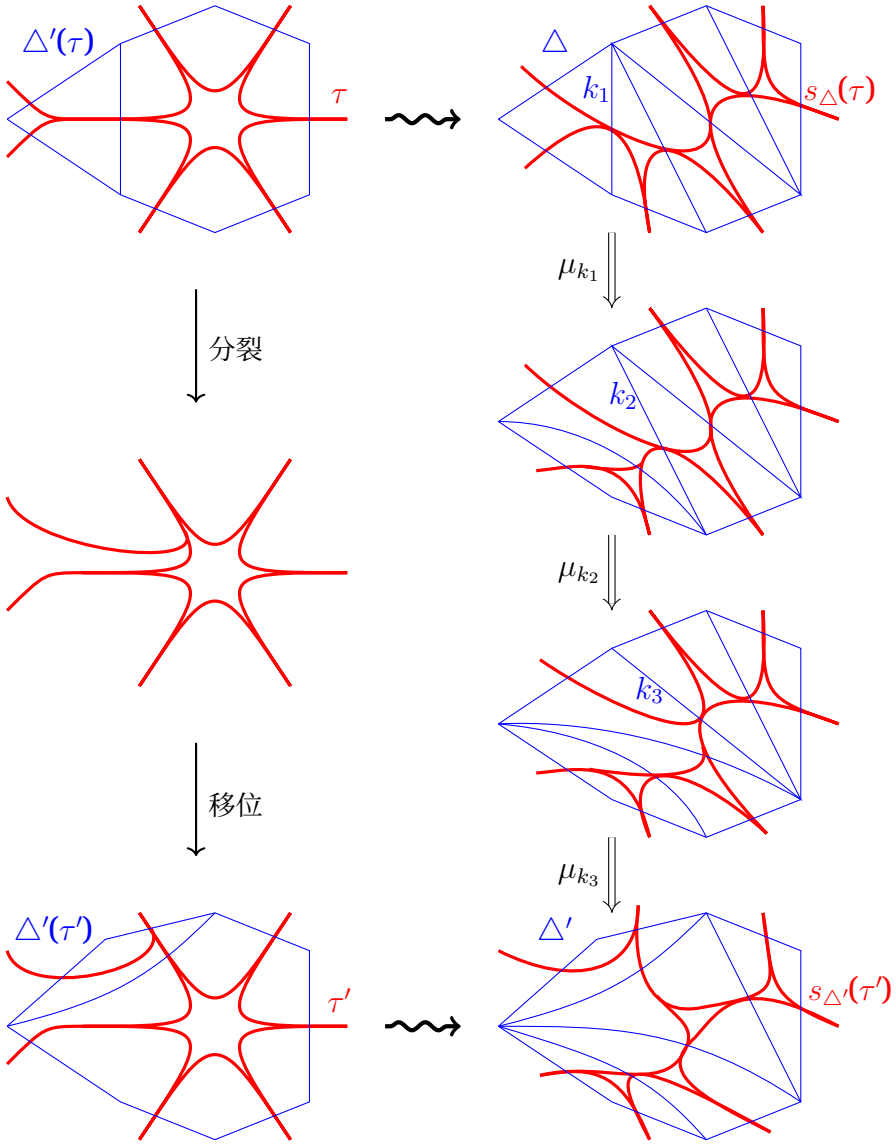


FIGURE 23. RLS 词与 τ 的无穷小六边形周围翻转序列的相容性。

证明。设 ϕ 是定义在 Σ上的一个伪阿诺索夫映射类。那么，根据引理 6.5，存在一条表示路径

$$\gamma : (\triangle, \ell) \to \phi^{-r}(\triangle, \ell)$$

的 ϕ^r对于某个 $r \geq 1$使得符号 $\boldsymbol{\epsilon}^+_\gamma$的 γ在 $[F^+_\phi, \mu^+_\phi]$处严格。因此，我们可以使用这条路径 γ 来进行 [IK20a 第 7 节中的讨论。1]也就是说，对于每个点 $\mathcal{F} \in \mathcal{X}_\Sigma(\mathbb{Z}^{\mathrm{trop}})$，都存在 $n_0 > 0$使得 $\phi^{nr}(\mathcal{F}) \in$内点 $\mathcal{C}^{\boldsymbol{\epsilon}^+_\gamma}_\gamma$对所有 $n \geq n_0$均成立。这里， $\mathcal{C}^{\boldsymbol{\epsilon}^+_\gamma}_\gamma$是一个满维锥，其定义为

$$\mathcal{C}^{\boldsymbol{\epsilon}^+_\gamma}_\gamma := \overline{\{\mathcal{F} \in \mathcal{X}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \mid \boldsymbol{\epsilon}_\gamma(\mathcal{F}) = \boldsymbol{\epsilon}^+_\gamma\}}.$$

这正是所要证明的结论。 ■

6.3. 关于伪阿诺索夫映射类的有界符号稳定性的评论。佩龙–弗罗贝尼乌斯理论是研究线性动力系统的一种有力方法。简而言之，该理论告诉我们，不可约非负矩阵的谱半径大于 1 且为单根，并且其特征向量的所有分量均为正。如今，佩龙–弗罗贝尼乌斯理论已推广到具有不变锥 $\mathcal{C}$的矩阵 M 。也就是说，与 M 对应的线性映射 f 满足 $f(\mathcal{C})$ $\subset \mathcal{C}$。经典理论是以非负锥为不变锥的非负矩阵的佩龙–弗罗贝尼乌斯理论。对于佩龙–弗罗贝尼乌斯理论的大多数定理，不变锥都是多面体的。

在突变环的符号稳定性理论中，该锥

$$\mathcal{C}_\gamma^{\mathrm{stab}} := \overline{\bigcap_{n\geq 0} \phi^{-n}(\mathcal{C}_\gamma^{\boldsymbol{\epsilon}_\gamma^{\mathrm{stab}}})}$$

对应于不变锥，但一般并非多面体的。这里， γ 是一个突变环的符号稳定表示路径 ϕ ，而 $\boldsymbol{\epsilon}_\gamma^{\mathrm{stab}}$是稳定符号。该锥为多面体的一个简单充分条件如下：

定义 6.8。若突变环 ϕ 的一个表示路径 γ 在 Ω 上具有稳定符号 $\boldsymbol{\epsilon}_\gamma^{\mathrm{stab}}$ 的符号稳定性，并且满足

$$\mathcal{C}_\gamma^{\mathrm{stab}} = \bigcap_{0\leq n\leq n_0} \phi^{-n}(\mathcal{C}_\gamma^{\boldsymbol{\epsilon}_\gamma^{\mathrm{stab}}}).$$

由于 $\mathcal{C}_\gamma^{\boldsymbol{\epsilon}}$ 是（有理）多面体的，因此当 γ 是有界符号稳定时， $\mathcal{C}_\gamma^{\mathrm{stab}}$也是如此。于是，我们可以使用佩龙–弗罗贝尼乌斯理论的一些技巧。例如，有界符号稳定性是北向动力学[Kan21，命题 3.14]的一个充分条件。

对于一个伪阿诺索夫映射类 ϕ，显然锥 $\mathcal{V}(\tau_\phi^+)$ 是（有理）多面体的，且它是 ϕ 的一个不变锥： $\phi(\mathcal{V}(\tau_\phi^+))$ $\subset \mathcal{V}(\tau_\phi^+)$。另一方面，作者所检查的一些伪阿诺索夫映射类具有有界符号稳定性。此外，这些例子满足以下条件：

$$\mathcal{C}_\gamma^{\mathrm{stab}} \cap \mathcal{U}_\Sigma(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) = p_\Sigma(\mathcal{V}(\tau_\phi^+)). \tag{6.2}$$

因此，我们猜想这一性质对每个伪阿诺索夫映射类都成立。

6.4.伪阿诺索夫映射类的代数熵与范畴熵。最后，作为定理 6.7 的直接推论，我们计算了一些双有理自同构的代数熵，以及由伪阿诺索夫映射类诱导的一些正合自等价的范畴熵。

设 ϕ 是带 puncture 曲面上的一个伪阿诺索夫映射类。那么，它会诱导出双有理映射

$$\phi_a : \mathcal{A}_\Sigma \to \mathcal{A}_\Sigma, \quad \phi_x : \mathcal{X}_\Sigma \to \mathcal{X}_\Sigma.$$

然后，我们可以将它们与正实数 $h^{\mathrm{alg}}(\phi_a)$ 和 $h^{\mathrm{alg}}(\phi_x)$ 联系起来，称为代数熵 ([BV99])。

另一方面，ϕ^r 存在一条符号稳定路径 $\gamma\colon (\triangle,\ell) \to \phi^{-r}(\triangle,\ell)$，作用于 $\mathcal{C}^+(\triangle,\ell)$ 上。因此，它诱导出一个自等价 $F_{\phi^r} = F(\triangle,\ell)_{\phi^r}\colon \mathsf{D}(\Gamma_{Q^{(\triangle,\ell)},W^{(\triangle,\ell)}}) \to \mathsf{D}(\Gamma_{Q^{(\triangle,\ell)},W^{(\triangle,\ell)}})$，其中 $\mathsf{D}(\Gamma_{Q^{(\triangle,\ell)},W^{(\triangle,\ell)}})$ 是带势箭图 $(\triangle,\ell)$ 的 Ginzburg dg 代数 $\Gamma_{Q^{(\triangle,\ell)},W^{(\triangle,\ell)}}$ 的导出范畴。我们注意到，诱导函子 F_{ϕ^r} 的存在取决于符号稳定性，这与双有理映射 ϕ_a 和 ϕ_x 不同。它限制在子范畴上

$$F_{\phi^r}|_{\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}}\colon \mathsf{D}_{\mathsf{fd}}^{(\triangle,\ell)} \to \mathsf{D}_{\mathsf{fd}}^{(\triangle,\ell)}, \quad F_{\phi^r}|_{\mathsf{per}}\colon \mathsf{per}^{(\triangle,\ell)} \to \mathsf{per}^{(\triangle,\ell)}.$$

这里，$\mathsf{D}^{(\triangle,\ell)}_{\mathsf{fd}}$ 和$\mathsf{per}^{(\triangle,\ell)}$ 分别称为有限维导出范畴和完美导出范畴。于是，我们可以为它们关联正实数$h^{\mathrm{cat}}_T(F_{\phi^r}|_{\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}})$ 和 $h^{\mathrm{cat}}_T(F_{\phi^r}|_{\mathsf{per}})$，对于 $T\in\mathbb{R}$，称为范畴熵([DHKK14])。详见[Kan21] 。

推论6.9。我们有

$$h^{\mathrm{alg}}(\phi_a) = h^{\mathrm{alg}}(\phi_x) = h^{\mathrm{cat}}_T(F_{\phi^r}|_{\mathsf{D}_{\mathsf{fd}}})/r = h^{\mathrm{cat}}_0(F_{\phi^r}|_{\mathsf{per}})/r = h^{\mathrm{top}}(\phi).$$

这里，$h^{\mathrm{top}}(\phi)$ 是 ϕ 的拓扑熵，其值为 $\log\lambda_\phi$。

证明。显然，γ 在 $\mathbb{R}\cdot\mathcal{X}_\Sigma(\mathbb{Z}^{\mathrm{trop}})$ 上的符号稳定性会导出其在 $\Omega^{\mathrm{can}}_{(\triangle,\ell)}$ 上的符号稳定性。此外，

- 回文性猜想 [IK21，猜想3。13]对于带 puncture 曲面上任意映射类的任意表示路径均成立 [IK20a，命题8。7] 并且
- 通过对锥 [IK20a第7节2] 采用相同论证，可得丛伸缩因子与伸缩因子一致 $V(\tau^+_\phi)$。

此外，我们回顾代数熵的基本性质：

- 对于一个有理映射 $\varphi\colon(\mathbb{G}_m)^n \to (\mathbb{G}_m)^n$ 以及一个整数 $N\geq 0$，我们有 $\mathcal{E}_{\varphi^N} = N\mathcal{E}_\varphi$。

因此，根据 [IK21，推论 1，2]以及 [Kan21，推论 12]，即可得到所需结论。 ■

AppendixA. Cluster ensembles

本节简要回顾丛簇的一些基本概念。这里我们采用简单的设定，以便将其应用于带 puncture 曲面的情形。

A.1. 突变类及其带标号交换图。固定一个有限指标集 I 以及域 $\mathcal{F}_A$，并令 $\mathcal{F}_X$ 为关于不定元 $|I|$的有理函数域。

定义 A.1. 带标号种子是一个三元组 $(B, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{X})$，满足

- $B = (b_{ij})_{i,\ j\in I}$ 是一个斜对称整数矩阵；
- $\boldsymbol{A} = (A_i)_{i\in I}$（分别地，$\boldsymbol{X} = (X_i)_{i\in I}$）是 $\mathcal{F}_A$（分别地，$\mathcal{F}_X$）的超越基。

矩阵 B 称为交换矩阵，变量 A_i （分别地， X_i）称为 $\mathcal{A}$-变量（分别地， $\mathcal{X}$-变量。

定义 A.2（种子变异）。设 $(B, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{X})$ 是一个种子。我们将新种子 $\mu_k(B, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}) = (B', \boldsymbol{A}', \boldsymbol{X}')$ 定义为 $k \in I$，其定义如下：

$$b'_{ij} := \begin{cases} -b_{ij} & \text{if } i = k \text{ or } j = k, \\ b_{ij} + \dfrac{1}{2}(|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$A'_i := \begin{cases} \dfrac{1}{A_k}\big(\prod_j A_j^{[b_{kj}]_+} + \prod_j A_j^{[-b_{kj}]_+}\big) & \text{if } i = k, \\ A_i & \text{if } i \neq k, \end{cases} \tag{A.1}$$

$$X'_i := \begin{cases} X_k^{-1} & \text{if } i = k, \\ X_i\big(1 + X_k^{-\mathrm{sgn}(b_{ik})}\big)^{-b_{ik}} & \text{if } i \neq k. \end{cases} \tag{A.2}$$

其中， $B = (b_{ij})_{i,\ j\in I}$、 $B' = (b'_{ij})_{i,\ j\in I}$、 $\boldsymbol{A} = (A_i)_{i\in I}$、 $\boldsymbol{A}' = (A'_i)_{i\in I}$、 $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i\in I}$和 $\boldsymbol{X}' = (X'_i)_{i\in I}$。

容易验证，种子变异 μ_k 是对合的。对于置换 $\sigma \in \mathfrak{S}_I$，我们类似地将 $\sigma.(B, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}) = (B', \boldsymbol{A}', \boldsymbol{X}')$ 定义如下：

$$b'_{ij} = b_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)}, \quad A'_i = A_{\sigma^{-1}(i)} \quad \text{and} \quad X'_i = X_{\sigma^{-1}(i)}.$$

定义 A.3。若两个带标签的种子 $(B, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{X})$、$(B', \boldsymbol{A}', \boldsymbol{X}')$ 之间存在由有限次种子变异和置换复合而成的映射，将 $(B, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{X})$ 映射到 $(B', \boldsymbol{A}', \boldsymbol{X}')$，则称它们变异等价。带标签种子的一个变异等价类 s 称为突变类。

带标签的种子的突变类是簇代数研究领域的基本研究对象。

定义 A.4. 给定突变类 s 中带标签的种子之间的关系，可以编码在（带标签的）交换图 $\mathbb{E}\mathrm{xch}_{\mathsf{s}}$ 中。它是一个图，其顶点 v 对应于 s 中的带标签种子 $\mathsf{s}^{(v)}$，并带有以下两种类型的带标签边：

- 形如 $v \overset{k}{\text{---}} v'$ 的带标签边，其中种子 $\mathsf{s}_{(v)}$ 和 $\mathsf{s}_{(v')}$ 通过变异 μ_k 相关联，且 $k \in I$ 满足相应条件；
- 形如 $v \overset{\sigma}{\text{---}} v'$ 的带标签边，其中种子 $\mathsf{s}_{(v)}$ 和 $\mathsf{s}_{(v')}$ 通过对换 $\sigma = (j\ k) \in \mathfrak{S}_I$ 相关联。

在不会引起混淆时，我们将带标号交换图的一个顶点简记为 $v \in \mathbb{E}\mathrm{xch}_{\mathsf{s}}$。对于每个顶点 $v \in \mathbb{E}\mathrm{xch}_{\mathsf{s}}$，我们将对应的带标号种子记为 $\mathsf{s}^{(v)} = (B^{(v)}, \boldsymbol{A}^{(v)}, \boldsymbol{X}^{(v)})$，$B^{(v)} = (b_{ij}^{(v)})_{i,\ j\in I}$，$\boldsymbol{A}^{(v)} = (A_i^{(v)})_{i\in I}$和 $\boldsymbol{X}_{(v)} = (X_i^{(v)})_{i\in I}$。

A.2. 簇系综。对于一个突变类 s，可以关联一对称为簇 $\mathcal{A}/\mathcal{X}$-簇的概形 $(\mathcal{A}_{\mathsf{s}}, \mathcal{X}_{\mathsf{s}})$，以及一个有理映射 $p_{\mathsf{s}}:\ \mathcal{A}_{\mathsf{s}} \to \mathcal{X}_{\mathsf{s}}$，称为系综映射。数据 $p_{\mathsf{s}} : \mathcal{A}_{\mathsf{s}} \to \mathcal{X}_{\mathsf{s}}$ 也称为簇系综。

设 s 是一个突变类。对于 $v \in \mathbb{E}\mathrm{xch}_{\mathsf{s}}$，我们考虑一个格 $N^{(v)}$，它具有固定的基 $\{e_i^{(v)}\}_{i\in I}$，以及其对偶格 $M(v)$，后者具有对偶基 $\{f(_i^{v}\}_{i\in I}$。定义两个秩为 $|I|$ 的代数环面 $\mathcal{A}_{(v)} := \mathrm{Hom}(M^{(v)}, \mathbb{G}_m)$ 和 $\mathcal{X}_{(v)} := \mathrm{Hom}(N(v)\,\mathbb{G}_m)$，其中 $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[u, u^{-1}]$。特征 $A_i^{(v)} := \mathrm{ch}^{f_i^{(v)}}:\ \mathcal{A}_{(v)} \to \mathbb{G}_m$ 和 $X_i^{(v)} := \mathrm{ch}^{e_i^{(v)}} : \mathcal{X}_{(v)} \to \mathbb{G}_m$ 分别定义了 $\mathcal{A}_{(v)}$ 和 $\mathcal{X}_{(v)}$ 的坐标系，它们称为簇坐标。变异规则 (A.1) 和 (A.2) 分别转化为有理映射 $\mu_{x,k} : \mathcal{X}_{(v)} \to \mathcal{X}_{(v')}$ 和 $\mu_{a,k} : \mathcal{A}_{(v)} \to \mathcal{A}_{(v')}$，称为簇变换。于是，簇 $\mathcal{A}$-簇和 $\mathcal{X}$-簇是由以下内容定义的概形：

$$\mathcal{A}_{\mathsf{s}} := \bigcup_{v\in\mathbb{E}\mathrm{xch}_{\mathsf{s}}} \mathcal{A}_{(v)}, \quad \mathcal{X}_{\mathsf{s}} := \bigcup_{v\in\mathbb{E}\mathrm{xch}_{\mathsf{s}}} \mathcal{X}_{(v)}.$$

这里，环面 $\{\mathcal{A}_{(v)}\}_{v\in\mathbb{E}\mathrm{xch}_{\mathsf{s}}}$（分别为 $\{\mathcal{X}_{(v)}\}_{v\in\mathbb{E}\mathrm{xch}_{\mathsf{s}}}$）通过簇变换 $\mu_{a,\ k}$（分别为 $\mu_{x,\ k}$）以及根据图 $\mathbb{E}\mathrm{xch}_{\mathsf{s}}$ 的置换进行识别。

A.3. 热带化簇系综。设 s 是一个突变类。由于丛簇 $\mathcal{A}_{\mathsf{s}}$、$\mathcal{X}_{\mathsf{s}}$ 的坐标变换可以表示为无减法形式，因此我们可以取半域 $\mathbb{P}$ 值点的集合 $\mathcal{A}_{\mathsf{s}}(\mathbb{P})$ $\mathcal{X}_{\mathsf{s}}(\mathbb{P})$。这里，我们针对热带半域 $\mathbb{R}^{\mathrm{trop}} = (\mathbb{R}, \min\ +)$ 给出其具体定义，即 $\mathbb{P}$。与 s 相关的热带化簇 $\mathcal{A}$-（分别为 $\mathcal{X}$-）簇是一个分片线性流形 $\mathcal{A}_{\mathsf{s}}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$（分别为 $\mathcal{X}_{\mathsf{s}}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$），同胚于 $\mathbb{R}^I$，并配备了一个由全局图组成的图册

$$\boldsymbol{a}^{(v)}:\ \mathcal{A}_{\mathsf{s}}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \to \mathcal{A}_{(v)}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) = N^{(v)} \otimes \mathbb{R} \qquad (\text{分别为 } \boldsymbol{x}^{(v)}:\ \mathcal{X}_{\mathsf{s}}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \to \mathcal{X}_{(v)}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) = M^{(v)} \otimes \mathbb{R})$$

对于 $v \in \mathbb{E}\mathrm{xch}_{\mathsf{s}}$，使得它们之间的坐标变换由热带化的簇变换和置换给出。在这里，热带化的簇变换表示为

$$\mu_{a,k}^* a_i' = \begin{cases} \min\left\{\sum_j [b_{kj}]_+ a_j,\ \sum_j [-b_{kj}]_+ a_j\right\} - a_k & \text{if } i = k, \\ a_i & \text{if } i \neq k, \end{cases}$$

$$\mu_{x,k}^* x_i' = \begin{cases} -x_k & \text{if } i = k, \\ x_i - b_{ik}\min\{0, -\mathrm{sgn}(b_{ik}) x_k\} & \text{if } i \neq k \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{a}^{(v)} = (a_i)_{i\in I}$、$\boldsymbol{x}^{(v)} = (x_i)_{i\in I}$、$\boldsymbol{a}^{(v')} = (a_i')_{i\in I}$、$\boldsymbol{x}^{(v')} = (x_i')_{i\in I}$、$B^{(v)} = (b_{ij})_{i,\ j\in I}$以及 $v \overset{k}{\text{——}} v'$ 属于 $\mathbb{E}\mathrm{xch}_{\mathsf{s}}$。我们将线性映射$p_{(v)}:\ \mathcal{A}_{(v)}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \to \mathcal{X}_{(v)}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}})$ 取为其表示矩阵，即 $(B^{(v)})^{\mathsf{T}}$。注意，我们有如下相容性：

$$\mu_{x,k} \circ p_{(v)} = p_{(v')} \circ \mu_{a,k}.$$

因此，存在唯一的分段线性映射

$$p_{\mathsf{s}} : \mathcal{A}_{\mathsf{s}}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}) \to \mathcal{X}_{\mathsf{s}}(\mathbb{R}^{\mathrm{trop}}),$$

称为（热带化的）系综映射，并且对所有 $v \in \mathbb{E}\mathbf{xch}_{\mathsf{s}}$ 均满足 $\boldsymbol{x}^{(v)} \circ p_{\mathsf{s}} \circ (\boldsymbol{a}^{(v)})^{-1} = p_{(v)} \circ$

A.4. 簇模群。令 $\mathbf{Mat}_{\mathsf{s}}$ 表示交换矩阵的突变类，它们构成突变类 s 的基础。于是有一个映射

$$B^{\bullet} : V(\mathbb{E}\mathrm{xch}_{\mathsf{s}}) \to \mathrm{Mat}_{\mathsf{s}}, \quad v \mapsto B^{(v)}.$$

定义 A.5。簇模群 $\Gamma_{\mathsf{s}} \subset \mathbf{Aut}(\mathbb{E}\mathbf{xch}_{\mathsf{s}})$ 由保留映射 $B^{\bullet}$ 的纤维及边上的标签（特别是水平/垂直属性）的图自同构 ϕ 组成。簇模群的一个元素称为变异环。

对于变异环 $\phi \in \Gamma_{\mathsf{s}}$，在 $\mathbb{E}\mathbf{xch}_{\mathsf{s}}$ 中，从顶点 v 到 $\phi^{-1}(v)$ 的边路径称为 ϕ 的表示路径。

簇模 模群 Γ_{s} 作用于簇系综 p_{s}： $\mathcal{A}_{\mathsf{s}} \to \mathcal{X}_{\mathsf{s}}$ 因此 at

$$\phi_a^* \boldsymbol{A}^{(v)} = \boldsymbol{A}^{(\phi^{-1}(v))} \quad \text{and} \quad \phi_x^* \boldsymbol{X}^{(v)} = \boldsymbol{X}^{(\phi^{-1}(v))}$$

对于 $\phi \in \Gamma_{\mathsf{s}}$。这里，$\phi_a$ ： $\mathcal{A}_{\mathsf{s}} \to \mathcal{A}_{\mathsf{s}}$ 和 ϕ_x ： $\mathcal{X}_{\mathsf{s}} \to \mathcal{X}_{\mathsf{s}}$ 是满足$p_{\mathsf{s}} \circ \phi_a = \phi_x \circ p_{\mathsf{s}}$ 的自同构。我们可以通过突变环的一条表示路径显式描述其作用。设 γ： $v \to \phi^{-1}(v)$ 是 ϕ的一条表示路径。我们将沿 γ 的热带化簇变换的复合记为 $\mu_{a,\,\gamma}$ 以及 $\mu_{x,\,\gamma}$。于是，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}_{\mathsf{s}} & & \xrightarrow{\qquad\qquad\phi_a\qquad\qquad} & & \mathcal{A}_{\mathsf{s}} \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ \mathcal{A}_{(v)} & \xrightarrow{\mu_{a,\gamma}} & \mathcal{A}_{(\phi^{-1}(v))} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{A}_{(v)}\,, \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathcal{X}_{\mathsf{s}} & & \xrightarrow{\qquad\qquad\phi_x\qquad\qquad} & & \mathcal{X}_{\mathsf{s}} \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ \mathcal{X}_{(v)} & \xrightarrow{\mu_{x,\gamma}} & \mathcal{X}_{(\phi^{-1}(v))} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{X}_{(v)}\,. \end{array}$$

这里，$\mathcal{A}_{(\phi^{-1}(v))} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{(v)}$（分别地，$\mathcal{X}_{(\phi^{-1}(v))} \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}_{(v)}$）是由$A^{(\phi^{-1}(}_{i} \quad v \quad \mapsto A_i^{(v)}))$（分别地，$X^{(\phi^{-1}}_{(i} \quad v \quad \mapsto X_i^{(v)}))$）给出的自然识别。

References

[AIR14] T. Adachi、O. Iyama 和 I. Reiten，τ-倾斜理论，Compos. Math. 150（2014），415–452。5[AY20] T. Aoki 和 T. Yurikusa，完备特殊双串代数是 g-温和的，预印本，arXiv:2003.09797。5[BH95] M. Bestvina 和 M. Handel，用于曲面同胚的轨道，Topology 34（1995），109–140。32[BV99] M. P. Bellon 和 C.-M. Viallet，代数熵，Comm. Math. Phys. 204（1999），425–437。37[CB] A. J. Casson 和 S. A. Bleiler，Nielsen 和 Thurston 之后的曲面自同构，伦敦数学会学生教材，第9卷。剑桥大学出版社，剑桥，1988。11[DHKK14] G. Dimitrov、F. Haiden、L. Katzarkov 和 M. Kontsevich，动力系统与范畴，当代数学，第621卷（2014），133–170。37[DS20] D. C. Douglas 和 Z. Sun，曲面上 SL_3-网的热带 Fock-Goncharov 坐标 I：构造，arXiv:2011.01768。5

[FG06] V. V. Fock 和 A. B. Goncharov，局部系统模空间与高阶 Teichm ¨uller 理论，Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci.，103（2006），1–211。2[FG07] V. V. Fock 和 A. B. Goncharov，对偶 Teichm ¨uller 理论与层叠空间，《Teichm ¨uller 理论手册》，第 I 卷，647–684；IRMA 数学理论物理讲义，第11卷，Eur. Math. Soc.，苏黎世，2007。2[FG09] V. V. Fock 和 A. B. Goncharov，簇系综、量子化与二重对数，Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er.，42（2009），第6期，865–930。2，4，25[FLP] A. Fathi、F. Laudenbach 和 V. Po´enaru，Thurston 的曲面研究，数学札记，第48卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿（新泽西州），2012。由 D. M. Kim 和 D. Margalit 从1979年法文原版译出。7[FST08] S. Fomin、M. Shapiro 和 D. Thurston，簇代数与三角剖分曲面 I：簇复形，数学学报 201（2008），83–146。24[FZ02] S. Fomin 和 A. Zelevinsky，簇代数 I：基础，美国数学会杂志 15（2002），497–529。2[GHKK18] M. Gross、P. Hacking、S. Keel 和 M. Kontsevich，簇代数的典范基，美国数学会杂志 31（2018），497–608。4[GS15] A. B. Goncharov 和 L. Shen，典范基与镜像对称的几何，数学发明 202（2015），487–633。1，3，5，25，26[GW17] S. Gupta 和 M. Wolf，具有复留数的亚纯二次微分与螺旋叶状结构，当代数学，696（2017），153–181。2[IK21] T. Ishibashi 和 S. Kano，符号稳定的突变环的代数熵，几何献礼 214（2021），79–118。1，29，37[IK20a] T. Ishibashi 和 S. Kano，标记曲面上映射类的符号稳定性 I：空边界情形，预印本，arXiv:2010.05214v3（在准备中）。3，24，31，35，37[IK20b] T. Ishibashi 和 S. Kano，标记曲面上映射类的符号稳定性 II：通过约化处理一般情形，预印本，arXiv:2011.14320。3[IK22] T. Ishibashi 和 S. Kano，无界 $\mathfrak{sl}_3$-层状结构及其剪切坐标，预印本，arXiv:2204.08947。5[Kan21] S. Kano，由符号稳定的突变环产生的范畴动力系统，预印本，arXiv:2105.08332。36，37[Nak21] T. Nakanishi，簇模式与散射图，第二部分：簇模式与散射图，arXiv:2103.16309。4[PP87] A. Papadopoulos 和 R. C. Penner，伪阿诺索夫叶状结构的刻画，太平洋数学杂志，130（1987），359–377。31[PP93] A. Papadopoulos 和 R. C. Penner，Thurston 边界处的 Weil-Petersson 辛结构，美国数学会汇刊 335（1993），891–904。5，8[Pen] R. C. Penner，装饰 Teichm ¨uller 理论，QGM 大师班丛书，欧洲数学会（EMS），苏黎世，2012。2，26[PH] R. C. Penner 和 J. L. Harer，轨道组合学，数学研究年刊，第125卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿（新泽西州），1992。11，12，13，17，31，32[PY23] P.-G. Plamondon 和 T. Yurikusa，附录由 B. Keller 撰写，温和代数具有稠密的$\boldsymbol{g}$-向量扇，国际数学研究通知，2023（2023），2701–2747。5[Rea14] N. Reading，泛几何簇代数，数学杂志 277（2014），499–547。4[Rea20] N. Reading，散射扇，国际数学研究通知，2020（2020），9640–9673。4[Th] W. P. Thurston，三维流形的几何与拓扑，油印讲义，普林斯顿大学，1976。1，11，24

[Yur20] T. Yurikusa，来自三角剖分曲面的 g-向量锥，国际数学研究通知，2020年（2020），8081–8119。4[Yur21] T. Yurikusa，具有稠密 g-向量扇的无环簇代数，预印本，arXiv:2107.13482。4

Shunsuke Kano、 Research Alliance Center for Mathematical Sciences、 Tohoku Uni-versity、 6-3 Aoba、 Aramaki、 Aoba-ku、 Sendai、 Miyagi 980-8578、 Japan.电子邮箱地址：s.kano@tohoku.ac.jp