arXiv:2303.03203v1 [math.FA] 6 Mar 2023

与 Collatz 映射相关的算子的线性动力学

´VINCENT BEHANI

ABSTRACT. 本文研究了一个 $\mathcal{T}$ 与所谓的 *Collatz map*自然相关的算子的动力学。该映射在整数 $n \geq 0$ 为偶数时将其映射到 $n/2$，在 n 为奇数时将其映射到 $3n+1$。该算子 $\mathcal{T}$ 定义在单位圆盘上解析函数的某些加权 Bergman 空间 $\mathcal{B}^2_\omega$ 上。在 Neklyudov 先前工作的基础上，我们证明了无论 Collatz 猜想是否成立，$\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{B}^2_\omega$上都是超循环的。在对权 ω作出某些假设的条件下，我们证明了 $\mathcal{T}$ 实际上关于具有全支撑的高斯测度是遍历的，因而也是频繁超循环的和混沌的。

1. INTRODUCTION

本文旨在从线性动力学的角度研究一个与所谓的 Collatz 映射自然相关的算子的性质。该映射T_0：$\mathsf{Z}_+ \to \mathsf{Z}_+$ 定义如下：

$$T_0(n) = \begin{cases} n/2 & \text{if } n \text{ is even;} \\ 3n+1 & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

这个看似简单的映射，其动力学仍然十分神秘。著名的 Collatz 猜想（也称为 $3n+1$猜想或 Syracuse猜想）指出，任意整数 $k \geq 1$ 在 T_0 的作用下，其轨道最终都会到达点 1。

本文将使用以下修正的 Collatz 映射 T：$\mathsf{Z}_+ \to \mathsf{Z}_+$，定义如下：

$$T(n) = \begin{cases} n/2 & \text{if } n \text{ is even;} \\ (3n+1)/2 & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

就 Collatz 猜想而言，其动力学与 T_0 相同。这里我们将介绍一些关于 Collatz 猜想的既有结果。关于这个问题的综述，请读者参阅 Lagarias 撰写的综述 [9] 。

该猜想已通过经验验证，适用于每个 $k \leq 20 \times 10^9$，而如今已知它对每个 $k \leq 20 \times 2^{58} \approx 5.764 \times 10^{18}$ 都成立（[12]）。

由于 $T(1) = 2$ 且 $T(2) = 1$，(1, 2) 被称为 T的平凡周期。Eliahou 在 [6] 中证明，T 的非平凡循环长度必定大于 10 439 860 591。

研究具有 T-轨道且最终到达 1 的正整数 k 所占比例，是研究 Collatz 猜想的一种可能途径。例如，Krasikov 和 Lagarias 证明，在

Date：2023年3月7日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 47A16、47A35、30H20、30B10、15A18。*Key words and phrases.* Collatz 猜想、超循环性、混沌算子、频繁超循环性、遍历性。本文部分研究工作由法国国家研究署 FRONT 项目（资助编号 ANR-17-CE40-0021）和 Labex CEMPI（ANR-11-LABX-0007-01）资助。感谢 Sophie Grivaux 与我讨论，并帮助校对本文。

[8] 如果 X 足够大，那么其 T-轨道到达 1 的整数 $1 \leq k \leq X$ 至少有 $X^{0.84}$ 个。

研究达到 1 所需的时间也很有意义。Ap- plegate 和 Lagarias 在 [1] 中证明，无穷多个正整数 k 的 T-轨道至少需要 6.143log(k) 步才能达到 1。

此外，Tao 在 [13] 中表明，“几乎所有” T-轨道都会达到几乎有界的值。也就是说，若固定一个函数 f: N $\to$ R，使得当 $k \to +\infty$时， $f(k) \to +\infty$，那么对于几乎每个整数 $k \geq 1$, k的 T-轨道的下确界都小于 $f(k)$；这里“几乎每个”是指对数密度意义下的几乎处处。

可以用一种自然的方式，将 T 与单位圆盘 D 上某些解析函数希尔伯特空间上的有界算子联系起来，并将 T 的动力学与这些算子的动力学联系起来。Berg 和 Meinardus 在 [5] 中首次提出了这类方法。考虑定义在单位圆盘 D 上全纯函数空间 Hol(D) 上的算子 $\mathcal{F}$，其定义如下：对于每个满足 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$的 $f \in Hol$(D),

$$\mathcal{F}f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{T(n)} z^n, \quad z \in \mathbf{D}.$$

Berg 和 Meinardus 用函数方程表述了 [5] Collatz 猜想，并得到它等价于 $\mathcal{F}$的特征值 1 的重数为 2。

随后，Neklyudov 采用了不同的视角，考察了 Hardy 空间 $\mathcal{H}^2$(D) 上算子 $\mathcal{F}$的伴随算子 $\mathcal{T}$：对于每个 $f \in \mathcal{H}^2$(D)，若 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$,

$$\mathcal{T}f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{T(n)}, \quad z \in \mathbf{D}.$$

该算子 $\mathcal{T}$被视为作用于 [11] 中的 Bergman 空间

$$\mathcal{B}^2 = \left\{ f\colon z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in Hol(\mathbf{D}); \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi |c_n|^2}{n+1} < +\infty \right\}$$

D 上。由于 T(0) $= 0$、 T(1) $= 2$ 且 T(2) $= 1$，向量空间 $\mathcal{H}_0 =$ span$[1, z, z^2]$ 在 $\mathcal{T}$ 的作用下是不变的，而 $\mathcal{T}$在商空间$\mathcal{X} = \mathcal{B}^2/\mathcal{H}_0$上诱导出一个有界算子，我们仍将其记为 $\mathcal{T}$。考察这个商空间可以避开 Collatz 映射的平凡周期 (1, 2) 和不动点 0，并简化对 $\mathcal{T}$动力学的研究。Neklyudov 在 [11] 中证明了若干关于 $\mathcal{T}$迭代算子行为的结果，这些结果与 Collatz 猜想有关。例如，他证明，如果 T 没有非平凡循环，那么 $\mathcal{T}$就是超循环的，即存在一个具有稠密轨道[11, 的向量（定理 2.2]）。他还研究了 $\mathcal{T}$的周期点，并证明 T 的每一个假设周期以及每一个假设发散 T-轨道，都可以与 $\mathcal{T}$的一个不动点相关联。他还构造了 $\mathcal{T}$的不动点，而不依赖于 T的任何周期或发散轨道。

Neklyudov 在 [11] 中询问，是否存在一种判据，能够区分这些不动点；他还询问 $\mathcal{T}$ 是否混沌（即超循环，且存在一个稠密的周期点集）。

本文继续研究与 Collatz 映射相关的解析函数希尔伯特空间上的算子，并对 Neklyudov 的这一问题给出肯定回答。我们将上文的算子 $\mathcal{T}$视为作用于加权 Bergman 空间上的全纯

函数，其定义域为 D，形式如下：

$$\mathcal{B}^2_\omega = \left\{ f\colon z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in Hol(\mathbf{D}); \|f\|^2_\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{\omega(n)} < +\infty \right\}$$

其中 $\omega\colon \mathbb{Z}_+ \to (0,+\infty)$ 是一个正权。与上文一样，研究 $\mathcal{T}$ 在商空间 $\mathcal{X}_\omega = \mathcal{B}^2_\omega/\mathcal{H}_0$ 上的作用会更加自然。设 $\omega_0(n) = (n+1)/\pi$ 对每个 $n \geq 0$ 都成立。那么 $\mathcal{B}^2_{\omega_0}$ 就是经典 Bergman 空间 $\mathcal{B}^2$。记作 $\mathcal{X}_{\omega_0} = \mathcal{X}$。

当权 ω 满足 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{X}_\omega$ 上定义了一个有界算子时，研究 $\mathcal{T}$ 的动力学便很有意义。我们将考察的主要性质包括超循环性（存在稠密轨道，或等价地，拓扑传递性）、混沌、频繁超循环性，以及相对于具有全支撑的不变测度的遍历性.....本文第 3 章节将简要综述这些概念；关于线性动力学的更多内容，读者可参阅文献 [3] 和 [7] 中的一篇。

我们的第一个主要结果表明，在对权 ω 作出一些温和假设的条件下，算子 $\mathcal{T}$ 是超循环的。

定理 1.1. 若 ω 有下界，且对每个 $k \geq 3$， $\omega(k2^n) \to +\infty$ 如 $n \to +\infty$，则 $\mathcal{T}$ 是超循环的。

定理 1.1 尤其适用于权 ω_0，也就是 $\mathcal{T}$ 作用于 Bergman 空间的情形，并表明 Neklyudov 的定理 2.2] 中的结果 [11, 实际上并不以 Collatz 映射不存在非平凡循环为前提。

我们的第二个主要结果表明，在对 ω 作出稍强一些的假设时，作用于 $\mathcal{X}_\omega$ 的 $\mathcal{T}$ 具有一些强动力学性质：

定理 1.2. 若 ω 有下界，且对每个 $k \geq 3$， $\sum_{n=0}^{\infty} 1/\omega(k2^n) < +\infty$，则 $\mathcal{T}$ 是混沌的、频繁超循环的，并且相对于具有全支撑的高斯不变测度是遍历的。

特别地，作用于 Bergman 空间 $\mathcal{X}$ 上的 $\mathcal{T}$是混沌的。这为 Neklyudov 的问题提供了肯定回答。

本文组织如下。我们首先在第 2 章节给出关于权 ω 的条件，以确保 $\mathcal{T}$在 $\mathcal{X}_\omega$ 上作为有界算子作用（命题 2.1）；基于 [11] 中对 $\mathcal{T}$的某些特征向量的描述，我们证明（仍在关于 ω的某些温和条件下）这些特征向量张成 $\mathcal{X}_\omega$ 的稠密子空间（定理 2.4），并且 $\mathcal{T}$在 $\mathcal{X}_\omega$ 上的伴随算子 $\mathcal{T}^*$ 的点谱为空（定理 2.7）。在第 3 章节回顾线性动力学的一些背景知识后，我们证明上述定理 1.1 和 1.2。这两个结果的证明在很大程度上依赖于第 2 章节中介绍的 $\mathcal{T}$ 的特征向量场的性质，尤其是定理 2.4。第 4 章节汇集了一些其他结果以及若干开放问题。

2. Boundedness of $\mathcal{T}$ and properties of its eigenvectors

设 ω 是 $\mathbb{Z}_+$上的一个正权。我们首先考虑作用于空间 $\mathbb{C}[\xi]$/张成空间$[1,\xi,\xi^2]$上的算子 $\mathcal{T}$，其定义如下：

$$\mathcal{T}\sum_{n=3}^{d} c_n\xi^n = \sum_{3\leq n\leq d, T(n)\geq 3} c_n\xi^{T(n)} \quad \text{for every } \sum_{n=3}^{d} c_n\xi^n \in \mathbf{C}[\xi]/\mathrm{span}[1,\xi,\xi^2],$$

and 给出关于 ω 的条件，使 $\mathcal{T}$ 能够扩展为作用在 $\mathcal{X}_\omega$ 上的有界算子 .

命题 2.1. 算子 $\mathcal{T}$ 对每个满足 $f(z) = \sum_{n=3}^{\infty} c_n z^n$ 的 $f \in \mathcal{X}_\omega$ 定义如下:

$$\mathcal{T} \sum_{n=3} c_n z^n = \sum_{T(j)\geq 3} c_j z^{T(j)}, \quad z \in \mathbf{D},$$

是作用于 $\mathcal{X}_\omega$ 的有界算子，当且仅当三个序列 $(\omega(6m)/\omega(3m))_{m\geq 1}$、$(\omega(6m+2)/\omega(3m+1))_{m\geq 1}$ 和 $((\omega(6m+4)+\omega(2m+1))/\omega(3m+2))_{m\geq 1}$ 有界。在这种情况下

$$\|\mathcal{T}\|_\omega^2 = \max\left\{ \sup_{m\geq 1} \frac{\omega(6m)}{\omega(3m)}, \sup_{m\geq 1} \frac{\omega(6m+2)}{\omega(3m+1)}, \sup_{m\geq 1} \frac{\omega(6m+4)+\omega(2m+1)}{\omega(3m+2)} \right\}.$$

此外，对于每个 $n \geq 0$

$$\|\mathcal{T}^n\|_\omega^2 = \sup_{k\geq 3} \sum_{T^n(j)=k} \frac{\omega(j)}{\omega(k)}.$$

取 $\omega = \omega_0$，我们特别得到 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{X}$ 上有界，并且 $\|\mathcal{T}\|^2 = 8/3$。

证明。假设上述三个序列有界，这意味着其最大值

$$\max\left\{ \sup_{m\geq 1} \frac{\omega(6m)}{\omega(3m)}, \sup_{m\geq 1} \frac{\omega(6m+2)}{\omega(3m+1)}, \sup_{m\geq 1} \frac{\omega(6m+4)+\omega(2m+1)}{\omega(3m+2)} \right\} = \sup_{k\geq 3} \sum_{T(j)=k} \frac{\omega(j)}{\omega(k)}$$

是有限的。设 $n \geq 0$ 和 $f \in \mathcal{X}_\omega$，其中 $f(z) = \sum_{k=3}^{\infty} c_k z^k$。我们有

$$\mathcal{T}^n f(z) = \sum_{T^n(j)\geq 3} c_j z^{T^n(j)} = \sum_{k=3}^{\infty} \sum_{T^n(j)=k} c_j z^k, \quad z \in \mathbf{D},$$

and

$$\|\mathcal{T}^n f\|_\omega^2 = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{\omega(k)} \left| \sum_{T^n(j)=k} c_j \right|^2 = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{\omega(k)} \left| \sum_{T^n(j)=k} \sqrt{\omega(j)} \frac{c_j}{\sqrt{\omega(j)}} \right|^2.$$

由柯西-施瓦茨不等式

$$\|\mathcal{T}^n f\|_\omega^2 \leq \sum_{k=3}^{\infty} \sum_{T^n(j)=k} \omega(j) \sum_{T^n(j)=k} \frac{|c_j|^2}{\omega(j)} \leq \left(\sup_{k\geq 3} \sum_{T^n(j)=k} \frac{\omega(j)}{\omega(k)} \right) \|f\|_\omega^2,$$

由此可得，若序列 $(\sum_{T(j)=k} \omega(j)/\omega(k))_{k\geq 3}$ 有界，则 $\mathcal{T}$有界，且 $\|\mathcal{T}^n\|_\omega^2 \leq \sup_{k\geq 3} \sum_{T^n(j)=k} \omega(j)/\omega(k)$。

反之，设 $n \geq 0$，并假定 $\mathcal{T}$是定义在 $\mathcal{X}_\omega$上的有界算子。令 $(k_p)_{p\geq 1}$ 满足当 $p \to +\infty$ 时，$\sum_{T^n(j)=k_p} \omega(j)/\omega(k_p) \to \sup_{k\geq 3} \sum_{T^n(j)=k} \omega(j)/\omega(k)$。考虑函数 $f_p \in \mathcal{X}_\omega$，其中 $f(z) = \sum_{T^n(j)=k_p} \omega(j) z^j$满足 $\|f_p\|_\omega^2 = \sum_{T^n(j)=k_p} |\omega(j)|^2 / \omega(j) = \sum_{T^n(j)=k_p} \omega(j)$，并且

$$\|\mathcal{T}^n f_p\|_\omega^2 = \frac{1}{\omega(k_p)} \left| \sum_{T^n(j)=k_p} \omega(j) \right|^2 = \left(\sum_{T^n(j)=k_p} \frac{\omega(j)}{\omega(k_p)} \right) \|f_p\|_\omega^2.$$

因此我们有 $\|\mathcal{T}^n f_p\|_\omega^2 / \|f_p\|_\omega^2 \to \sup_{k\geq 3} \sum_{T^n(j)=k} \omega(j)/\omega(k)$，因此 $\sup_{k\geq 3} \sum_{T^n(j)=k} \omega(j)/\omega(k) \leq \|\mathcal{T}^n\|_\omega^2 < +\infty$ 对每个 $n \geq 0$都成立，由此证明得证。 □

例如，由命题 2.1 可知，若 ω 具有多项式增长，则 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{X}_\omega$上的有界算子。

特征向量在线性动力学中扮演着非常重要的角色。因此，我们将关注 $\mathcal{T}$ 的特征值和特征向量，并给出关于权 ω 的一些条件，以确保 $\mathcal{T}$ 的特征向量张成 $\mathcal{X}_\omega$ 的一个稠密子空间。

定义 2.2. 对于每个 $\mu \in \mathbb{C}$ 和每个 $m \geq 1$，考虑定义在 $\mathbb{D}$ 上的解析函数

$$h_m(\mu,\cdot)\colon z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \left(z^{(6m+4)2^n} - z^{(2m+1)2^n}\right) \quad \text{and} \quad h_0(\mu,\cdot)\colon z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n z^{2^{n+2}}.$$

这些函数由 Neklyudov 在 [11, 定理 2.3] 中引入，是获得关于稠密子空间张成结果所需的唯一特征向量。

命题 2.3. 对于每个 $m \geq 0$ 和每个 $\mu \in \mathbb{C}$，向量 $h_m(\mu,\cdot)$ 属于 $\mathcal{X}_\omega$ 当且仅当级数 $\sum_{n\geq 0} |\mu|^{2n}/\omega((2m+1)2^n)$ 和 $\sum_{n\geq 0} |\mu|^{2n}/\omega((6m+4)2^n)$ 收敛。在这种情况下，$\mathcal{T}h_m(\mu,\cdot) = \mu h_m(\mu,\cdot)$。

特别地，若 ω 有下界，则对于每个 $m \geq 0$ 和每个 $\mu \in \mathbb{D}$，$h_m(\mu,\cdot)$ 属于 $\mathcal{X}_\omega$。此外，若 $\omega = \omega_0$，则对于每个 $m \geq 0$ 和满足 $|\mu| < \sqrt{2}$ 的每个 $\mu \in \mathbb{C}$，$h_m(\mu,\cdot)$ 属于 $\mathcal{X}$。

证明。设 $\mu \in \mathbb{C}$ 且 $m \geq 1$。函数 $h_m(\mu,\cdot)$ 属于 $\mathcal{X}_\omega$，当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty} |\mu|^{2n}/\omega((6m+4)2^n) + \sum_{n=0}^{\infty} |\mu|^{2n}/\omega((2m+1)2^n) < +\infty$。并且，$h_0(\mu,\cdot)$ 属于 $\mathcal{X}_\omega$，当且仅当级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |\mu|^{2n}/\omega(2^{n+2}) < +\infty$。

此外，对于每个 $m \geq 1$ 和每个 $z \in \mathbb{D}$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}h_m(\mu,\cdot)(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \left(z^{T((6m+4)2^n)} - z^{T((2m+1)2^n)}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \left(z^{(6m+4)2^{n-1}} - z^{(2m+1)2^{n-1}}\right) + z^{3m+2} - z^{3m+2} \\
&= \mu h_m(\mu, z)
\end{aligned}$$

and

$$\mathcal{T}h_0(\mu,\cdot)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n z^{T(2^{n+2})} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n z^{2^{n+1}} + z^2 = \mu h_0(\mu, z),$$

这表明，只要函数 $h_m(\mu,\cdot)$，$m \geq 0$ 属于 $\mathcal{X}_\omega$，它们就是与特征值 μ 对应的 $\mathcal{T}$ 的特征向量。□

我们现在的目标是证明，若权 ω 有下界，则特征向量$h_m(\mu,\cdot)$，$m \geq 0$, $\mu \in \mathbb{D}$ 张成 $\mathcal{X}_\omega$ 的一个稠密子空间。

定理 2.4. 若 ω 有下界，则 $\operatorname{span}[h_m(\mu,\cdot);\ m \geq 0, \mu \in \mathbb{D}]$ 在 $\mathcal{X}_\omega$ 中稠密。

特别地，若 $\omega = \omega_0$，则 $\{h_m(\mu,\cdot);\ m \geq 0, \mu \in \mathbb{D}\}$ 张成 $\mathcal{X}$ 的一个稠密子空间。

定理 2.4 的证明依赖于以下引理：

引理 2.5. 设 $f \in \mathcal{X}_\omega$，其中 $f(z) = \sum_{k=3}^{\infty} c_k z^k$，使得对每个 $n \geq 0$ 和每个$m \geq 1$

$$\frac{c_{(6m+4)2^n}}{\omega((6m+4)2^n)} = \frac{c_{(2m+1)2^n}}{\omega((2m+1)2^n)} \quad \text{and} \quad c_{2^{n+2}} = 0.$$

那么，对每个满足 $k \notin \{2^i;\ i \geq 2\}$ 的 $k \geq 3$，都存在依赖于 k 的整数序列 $(m_n)_{n\geq 1}$、$(p_n)_{n\geq 1}$ 和 $(j_n)_{n\geq 1}$，使得：

(i) $c_k = (\omega((2m_1+1)2^{p_1})/\omega((6m_n+4)2^{p_n}))c_{(6m_n+4)2^{p_n}}$ 对每个 $n \geq 1$ 都成立；(ii) $m_n \geq 1$ 对每个 $n \geq 1$ 都成立；(iii) $3m_n + 2 = T^{j_n}(k)$ 对每个 $n \geq 1$ 都成立；(iv) $j_{n+1} > j_n$ 当且仅当 $3m_n + 2 \notin \{2^i;\ i \geq 2\}$ 对每个 $n \geq 1$ 都成立；(v) $(j_n)_{n\geq 1}$ 和 $((6m_n + 4)2^{p_n})_{n\geq 1}$ 要么都严格递增，要么都保持不变。

证明。由于 $k \geq 3$ 和 $k \notin \{2^i;\ i \geq 2\}$，存在 $m_1 \geq 1$ 和 $p_1 \geq 0$ 使得$k = (2m_1 + 1)2^{p_1}$。于是

$$c_k = c_{(2m_1+1)2^{p_1}} = \frac{\omega((2m_1+1)2^{p_1})}{\omega((6m_1+4)2^{p_1})} c_{(6m_1+4)2^{p_1}}$$

and

$$3m_1 + 2 = T(2m_1 + 1) = T^{p_1+1}((2m_1 + 1)2^{p_1}) = T^{p_1+1}(k).$$

于是我们设定 $j_1 = p_1 + 1$。

现在假设 $(m_i)_{1\leq i\leq n}$、$(p_i)_{1\leq i\leq n}$ 和 $(j_i)_{1\leq i\leq n}$ 已定义，并满足以下性质：

(i) $c_k = (\omega((2m_1+1)2^{p_1})/\omega((6m_i+4)2^{p_i}))c_{(6m_i+4)2^{p_i}}$ 对每个 $1 \leq i \leq n$ 都成立；(ii) 对每个 $1 \leq i \leq n$，$m_i \geq 1$；(iii) 对每个 $1 \leq i \leq n$，$3m_i + 2 = T^{j_i}(k)$；(iv) $j_{i+1} > j_i$ 当且仅当 $3m_i + 2 \notin \{2^p;$ 对每个 $1 \leq i \leq n-1,\ p \geq 2\}$。

我们来构造 m_{n+1}、p_{n+1} 和 j_{n+1}。

如果 $3m_n + 2 \in \{2^i; i \geq 2\}$，那么我们设定 $m_{n+1} = m_n$、$p_{n+1} = p_n$ 和 $j_{n+1} = j_n$。否则，存在 $m_{n+1} \geq 1$ 和 $q_{n+1} \geq 0$，使得 $3m_n + 2 = (2m_{n+1} + 1)2^{q_{n+1}}$.。因此

$$(6m_n + 4)2^{p_n} = (3m_n + 2)2^{p_n+1} = (2m_{n+1} + 1)2^{q_{n+1}+p_n+1}.$$

于是我们设定 $p_{n+1} = q_{n+1} + p_n + 1 > p_n$。此外

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{\omega((2m_1+1)2^{p_1})}{\omega((2m_{n+1}+1)2^{p_{n+1}})} c_{(2m_{n+1}+1)2^{p_{n+1}}} \\ &= \frac{\omega((2m_1+1)2^{p_1})}{\omega((2m_{n+1}+1)2^{p_{n+1}})} \frac{\omega((2m_{n+1}+1)2^{p_{n+1}})}{\omega((6m_{n+1}+4)2^{p_{n+1}})} c_{(6m_{n+1}+4)2^{p_{n+1}}} \\ &= \frac{\omega((2m_1+1)2^{p_1})}{\omega((6m_{n+1}+4)2^{p_{n+1}})} c_{(6m_{n+1}+4)2^{p_{n+1}}}. \end{aligned}$$

注意，

$$3m_{n+1}+2 = T^{p_{n+1}+1}((2m_{n+1}+1)2^{p_{n+1}}) = T^{p_{n+1}+1}((6m_n+4)2^{p_n}) = T^{p_{n+1}}((3m_n+2)2^{p_n}).$$

因此 $3m_{n+1}+2 = T^{p_{n+1}-p_n}(3m_n+2) = T^{p_{n+1}-p_n+j_n}(k)$，并设定 $j_{n+1} = p_{n+1}-p_n+j_n > j_n$。我们还有 $(6m_{n+1} + 4)2^{p_{n+1}} > (2m_{n+1} + 1)2^{p_{n+1}} = (6m_n + 4)2^{p_n}$.

按此方式定义后，序列 $(m_n)_{n\geq 1}$、$(p_n)_{n\geq 1}$ 和$(j_n)_{n\geq 1}$ 满足前四个性质，因此只需证明最后一个性质。一方面，若存在 $n_0 \geq 1$使得 $3m_{n_0} + 2 \in \{2^i;\ i \geq 2\}$，则根据构造，序列$(j_n)_{n\geq 1}$和$((6m_n + 4)2^{p_n})_{n\geq 1}$是平稳的。另一方面，若对于每个 $n \geq 1$都有 $3m_n + 2 \notin \{2^i;\ i \geq 2\}$，则根据构造，序列$(j_n)_{n\geq 1}$和$((6m_n + 4)2^{p_n})_{n\geq 1}$严格递增，这就证明了第五个性质成立。□

定理 2.4 的证明。根据命题 2.3，对于每个 $m \geq 0$ 以及每个 $\mu \in \mathbb{D}$，$h_m(\mu,\cdot)$属于 $\mathcal{X}_\omega$，因为 ω 有下界。令 $f \in$ 张成空间$[h_m(\mu,\cdot); m \geq 0, \mu \in \mathbb{D}]^\perp$，其中$\mathcal{X}_\omega$ 满足 $f(z) = \sum_{k=3}^{\infty} c_k z^k$。我们的目标是证明 $f = 0$。对于每个 $\mu \in \mathbb{D}$以及每个$m \geq 1$

$$\varphi_m(\mu) \colon = \langle h_m(\mu,\cdot), f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\overline{c_{(6m+4)2^n}}}{\omega((6m+4)2^n)} - \frac{\overline{c_{(2m+1)2^n}}}{\omega((2m+1)2^n)}\right)\mu^n = 0,$$

$$\varphi_0(\mu) \colon = \langle h_0(\mu,\cdot), f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{c_{2^{n+2}}}}{\omega(2^{n+2})}\mu^n = 0.$$

对于每个 $k \geq 3$，幂级数 $\sum_{n\geq 0}(\overline{c_{k2^n}}/\omega(k2^n))z^n$的收敛半径都大于 1。事实上，根据柯西-施瓦茨不等式

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\overline{c_{k2^n}}}{\omega(k2^n)}z^n\right|\right)^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|c_{k2^n}|^2}{\omega(k2^n)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{\omega(k2^n)} < +\infty$$

对于每个 $z \in \mathbb{D}$，因为 f 属于 $\mathcal{X}_\omega$，且假设 ω 有下界。因此，函数 φ_m 和 φ_0 都是全纯的，并且对于每个$m \geq 1$，它们在 $\mathbb{D}$ 上恒等于零。因此，对于每个 $m \geq 1$

$$\frac{c_{(6m+4)2^n}}{\omega((6m+4)2^n)} = \frac{c_{(2m+1)2^n}}{\omega((2m+1)2^n)} \quad \text{and} \quad c_{2^{n+2}} = 0 \quad \text{for every } n \geq 0.$$

断言 2.6. 设 ω 是 $\mathbb{Z}_+$ 上的一个有下界的权，并设 $f \in \mathcal{X}_\omega$ 满足$f(z) = \sum_{k=3}^{\infty} c_k z^k$。假设对于每个 $m \geq 1$

$$\frac{c_{(6m+4)2^n}}{\omega((6m+4)2^n)} = \frac{c_{(2m+1)2^n}}{\omega((2m+1)2^n)} \quad \text{and} \quad c_{2^{n+2}} = 0 \quad \text{for every } n \geq 0,$$

那么对于每个 $k \geq 3$，$c_k = 0$。

证明。固定 $k \geq 3$。如果 $k \in \{2^i;\ i \geq 2\}$，那么 $c_k = 0$。否则，考虑由引理 2.5 与 k 相关联的序列 $(m_n)_{n\geq 1}$、$(p_n)_{n\geq 1}$ 和 $(j_n)_{n\geq 1}$。

一方面，假设 $\{T^n(k);\ n \geq 0\} \cap \{2^i;\ i \geq 0\} = \emptyset$，那么特别地，$3m_n + 2 \notin \{2^i;\ i \geq 2\}$ 对每个 $n \geq 1$ 都成立，这由 (iii) 得出。因此，由 (iv)，$(j_n)_{n\geq 1}$ 严格递增，进而由 (v)，$((6m_n+4)2^{p_n})_{n\geq 1}$ 也严格递增。因此，由 (i)

$$\|f\|_\omega^2 = \sum_{j=3}^{\infty}\frac{|c_j|^2}{\omega(j)} \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|c_{(6m_n+4)2^{p_n}}\right|^2}{\omega((6m_n+4)2^{p_n})} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega((6m_n+4)2^{p_n})}{\omega((2m_1+1)2^{p_1})^2}|c_k|^2.$$

由于 ω 有下界，前述级数只有在 $c_k = 0$ 的情况下才能收敛。

另一方面，假设 $\{T^n(k);\ n \geq 0\} \cap \{2^i;\ i \geq 0\} \neq \emptyset$，那么 $(j_n)_{n\geq 1}$ 是平稳的。事实上，假设 $(j_n)_{n\geq 1}$ 不是平稳的，也就是说，由 (v) 可知它严格递增。存在 $N \geq 1$ 使得 $T^N(k) \in \{2^i;\ i \geq 0\}$，因此对每个 $n \geq N$，都有 $T^n(k) \in \{2^i;\ i \geq 0\}$，并且 $T^{j_N}(k) \in \{2^i;\ i \geq 0\}$，因为 $j_N \geq N$。于是，由 (ii) 和 (iii)，$T^{j_N}(k) = 3m_N + 2 \in \{2^i;\ i \geq 2\}$，这意味着 $j_{N+1} = j_N$。这是不可能的，因此 $(j_n)_{n\geq 1}$ 确实是平稳的。因此，存在 $N \geq 1$ 使得 $3m_N + 2 \in \{2^i;\ i \geq 2\}$，由 (iv) 得出；进而由 (i) 可知

$$c_k = \frac{\omega((2m_1+1)2^{p_1})}{\omega((6m_N+4)2^{p_N})}c_{(6m_N+4)2^{p_N}} = 0$$

因为 $(6m_N+4)2^{p_N} = (3m_N+2)2^{p_N+1} \in \{2^i;\ i \geq 2\}$。

我们已经证明，对于每个 $k \geq 3$，都有 $c_k = 0$。 □

因此，断言 2.6 得出 $f = 0$，从而完成定理 2.4 的证明。 □

我们通过证明作用于 $\mathcal{X}_\omega$ 的 $\mathcal{T}$ 的伴随算子 $\mathcal{T}^*$ 不存在任何特征值，来结束本章节。我们将用 $\sigma_p(\mathcal{T}^*)$ 表示其特征值集合。

定理 2.7. 若 ω 有下界，则 $\sigma_p(\mathcal{T}^*) = \emptyset$。

特别地，若 $\omega = \omega_0$，则 $\sigma_p(\mathcal{T}^*) = \emptyset$。

证明过程与定理 2.4 的证明类似。我们首先需要以下引理，其证明与引理 2.5 的证明类似，此处略去。

引理 2.8. 设 $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$，并令 $f \in \mathcal{X}_\omega$ 满足 $f(z) = \sum_{k=3}^{\infty} c_k z^k \in \mathcal{X}_\omega$。假设对每个 $m \geq 1$ 以及每个 $n \geq 0$

$$\frac{\mu^{-1} c_{(3m+2)2^n}}{\omega((3m+2)2^n)} = \frac{c_{(2m+1)2^n}}{\omega((2m+1)2^n)} \quad \text{and} \quad c_{2^{n+2}} = 0.$$

那么，对每个满足 $k \notin \{2^i; i \geq 2\}$ 的 $k \geq 3$，都存在整数序列 $(m_n)_{n\geq 1}$、$(p_n)_{n\geq 1}$ 和 $(j_n)_{n\geq 1}$，使得：

(i) 对每个 $n \geq 1$，$c_k = (\mu^{-n}\omega((2m_1+1)2^{p_1})/\omega((3m_n+2)2^{p_n}))c_{(3m_n+2)2^{p_n}}$；(ii) 对每个 $n \geq 1$，$m_n \geq 1$；(iii) 对每个 $n \geq 1$，$3m_n + 2 = T^{j_n}(k)$；(iv) 对每个 $n \geq 1$，$j_{n+1} > j_n$ 当且仅当 $3m_n + 2 \notin \{2^i;\ i \geq 2\}$；(v) $(j_n)_{n\geq 1}$ 和 $((3m_n+2)2^{p_n})_{n\geq 1}$ 要么都严格递增，要么都保持不变。

定理 2.7 的证明。对于每个 $f, g \in \mathcal{X}_\omega$，若满足 $f(z) = \sum_{n=3}^{\infty} c_n(f) z^n$，且满足 $g(z) = \sum_{n=3}^{\infty} c_n(g) z^n$，则有

$$\langle \mathcal{T} f \mid g \rangle = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{c_n(\mathcal{T}f)\overline{c_n(g)}}{\omega(n)} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sum_{T(j)=n} c_j(f)\overline{c_n(g)}}{\omega(n)} = \sum_{j\in\{k\geq 3; T(k)\geq 3\}} \frac{c_j(f)\overline{c_{T(j)}(g)}}{\omega(T(j))},$$

so

$$\langle \mathcal{T} f \mid g \rangle = \frac{c_3(f)\overline{c_5(g)}}{\omega(5)} + \sum_{k=5}^{\infty} \frac{c_k(f)\overline{c_{T(k)}(g)}}{\omega(T(k))}.$$

那么 $\mathcal{T}^*$ 按以下方式定义：

$$\mathcal{T}^* \sum_{n=3}^{\infty} c_n z^n = \frac{\omega(3)}{\omega(5)} c_5 z^3 + \sum_{k=5}^{\infty} \frac{\omega(k)}{\omega(T(k))} c_{T(k)} z^k \quad \text{for every } f\colon z \mapsto \sum_{n=3}^{\infty} c_n z^n \in \mathcal{X}_\omega.$$

令 $\mu \in \mathbb{C}$，令 $f \in \mathcal{X}_\omega$ 满足 $f(z) = \sum_{n=3}^{\infty} c_n z^n$，并假设 $\mathcal{T}^* f = \mu f$。我们有 ave

$$\begin{cases} (\omega(3)/\omega(5))c_5 = \mu c_3 \\ (\omega(k)/\omega(T(k)))c_{T(k)} = \mu c_k, \quad k \geq 5 \\ 0 = \mu c_4, \end{cases}$$

这等价于

$$\begin{cases} (\omega(2m)/\omega(m))c_m = \mu c_{2m}, & m \geq 3 \\ (\omega(2m+1)/\omega(3m+2))c_{3m+2} = \mu c_{2m+1}, & m \geq 1 \\ 0 = \mu c_4. \end{cases}$$

首先，如果 $\mu = 0$，那么对于每个 $m \geq 3$ 都有 $c_m = 0$。因此，0 不属于 $\sigma_p(\mathcal{T}^*)$。

现在假设 $\mu \neq 0$。那么，当且仅当有 $\mathcal{T}^* f = \mu f$

$$\begin{cases} c_{m2^n} = \mu^{-n}(\omega(m2^n)/\omega(m))c_m, & m \geq 3, n \geq 0 \\ \mu^{-1}c_{(3m+2)2^n}/\omega((3m+2)2^n) = c_{(2m+1)2^n}/\omega((2m+1)2^n), & m \geq 1, n \geq 0 \\ c_{2^{n+2}} = 0, & n \geq 0 \end{cases}$$

因为对于每个 $m \geq 1$ 和每个 $n \geq 0$

$$c_{(2m+1)2^n} = \frac{\mu^{-1}\omega((2m+1)2^n)}{\omega((2m+1)2^{n-1})}c_{(2m+1)2^{n-1}} = \ldots = \frac{\mu^{-n}\omega((2m+1)2^n)}{\omega(2m+1)}c_{2m+1},$$

so

$$c_{(2m+1)2^n} = \frac{\mu^{-n-1}\omega((2m+1)2^n)}{\omega(3m+2)}c_{3m+2} = \ldots = \frac{\mu^{-n-1+n}\omega((2m+1)2^n)}{\omega((3m+2)2^n)}c_{(3m+2)2^n}.$$

固定 $k \geq 3$。若 $k \in \{2^i;\ i \geq 2\}$，则 $c_k = 0$。现在假设 $k \notin \{2^i;\ i \geq 2\}$。若 $|\mu| \leq 1$，我们可以注意到

$$\|f\|_\omega^2 = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{|c_j|^2}{\omega(j)} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_{k2^n}|^2}{\omega(k2^n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mu|^{-2n}\,\omega(k2^n)}{\omega(k)^2}\,|c_k|^2\,.$$

由于 ω 有下界，前述级数只有在 $c_k = 0$ 的情况下才能收敛，由此可得 $f = 0$。因此， μ 不属于 σ_p（$\mathcal{T}^*$）。若 $|\mu| > 1$，考虑由引理 2.8 给出的、与 k 相关联的序列 $(m_n)_{n\geq 1}$、$(p_n)_{n\geq 1}$ 和 $(j_n)_{n\geq 1}$。

一方面，假设 $\{T^n(k);\ n \geq 0\} \cap \{2^i;\ i \geq 0\} = \emptyset$，那么特别地，根据 (iii)，对于每个 $n \geq 1$ 都有 $3m_n + 2 \notin \{2^i;\ i \geq 2\}$。因此，根据 (iv)，$(j_n)_{n\geq 1}$ 严格递增，进而根据 (v)，$((3m_n+2)2^{p_n})_{n\geq 1}$ 也严格递增。因此，根据 (i)

$$\|f\|_\omega^2 = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{|c_j|^2}{\omega(j)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|c_{(3m_n+2)2^{p_n}}\right|^2}{\omega((3m_n+2)2^{p_n})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu|^{2n}\,\omega((3m_n+2)2^{p_n})}{\omega((2m_1+1)2^{p_1})^2}\,|c_k|^2\,.$$

由于 ω 有下界，前述级数仅在 $c_k = 0$ 的情况下收敛。另一方面，假设 $\{T^n(k);\ n \geq 0\} \cap \{2^i;\ i \geq 0\} \neq \emptyset$，我们将沿用定理 2.4 的证明思路，并断言 $(j_n)_{n\geq 1}$ 是稳定的。事实上，假设 $(j_n)_{n\geq 1}$ 不稳定，也就是说，根据 (v)，它严格递增。存在$N \geq 1$使得 $T^N(k) \in \{2^i;\ i \geq 0\}$，因此对每个 $n \geq N$，都有 $T^n(k) \in \{2^i;\ i \geq 0\}$，并且$T^{j_N}(k) \in \{2^i;\ i \geq 0\}$，因为 $j_N \geq N$。于是，根据 (ii) 和 (iii)， $T^{j_N}(k) = 3m_N + 2 \in \{2^i;\ i \geq 2\}$，这意味着 $j_{N+1} = j_N$。这是不可能的。因此 $(j_n)_{n\geq 1}$ 是稳定的，并且存在 $N \geq 1$ 使得 $3m_N + 2 \in \{2^i;\ i \geq 2\}$，由 (iv) 可知。由 (i) 可得

$$c_k = \frac{\mu^{-N}\omega((2m_1+1)2^{p_1})}{\omega((3m_N+2)2^{p_N})}c_{(3m_N+2)2^{p_N}} = 0$$

因为 $(3m_N + 2)\,2^{p_N} \in \{2^i;\ i \geq 2\}$。我们已经证明，对于每个 $k \geq 3$，都有 $c_k = 0$。因此，$f = 0$，所以 μ 也不属于 σ_p（$\mathcal{T}^*$）。□

3. Linear dynamics of the operator $\mathcal{T}$

我们现在的目标是理解 Collatz 映射的动力学与算子 $\mathcal{T}$ 的动力学之间的联系。我们先简要回顾线性动力学中一些重要性质的定义（超循环性、混沌、频繁超循环性和遍历性），然后探究作用于 $\mathcal{X}_\omega$ 上的算子 $\mathcal{T}$ 是否满足这些性质。

3.1. 超循环性。超循环性是一种受到广泛研究的动力学性质。关于这一概念的深入研究，请参阅著作 [3] 和 [7] 。设 X 是一个可分的无限维复 Banach（或 Fr´echet）空间。我们用$\mathcal{B}(X)$ 表示 X 上有界（或连续）的线性算子集合。

定义 3.1（[7, 定义 2.15]）。若存在 $x \in X$ 使得其在 $\mathcal{A}$ 下的轨道 $\{\mathcal{A}^n x; n \geq 0\}$ 在 $X.$ 中稠密，则称算子 $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X)$ 是超循环的。在这种情况下， x称为 $\mathcal{A}$的一个超循环向量。

回忆一下， X 中的一个 G_δ-集是 X的开集的可数交。下述定理表明，算子 $\mathcal{A} \in \mathcal{B}($ $X)$ 的超循环向量要么在 X 中构成一个稠密的G_δ-集，要么 $\mathcal{A}$ 不具有任何超循环向量。

定理 3.2（伯克霍夫传递性定理， [7, 定理 1.16 和 2.19]）。算子$\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X)$ 是超循环的，当且仅当对于 X中的每一对非空开集 U 和 V，存在 $n \geq 0$ 使得 $\mathcal{A}^n(U) \cap V \neq \emptyset.$。在这种情况下， $\mathcal{A}$ 的超循环向量在 X中构成一个稠密的 G_δ-集。

文献中有许多超循环算子的典型例子。在赋予由$\|f\|_{n,\infty} =\sup\{|f(z)|;\ |z| \leq n\}$ for $n \geq 1$定义的半范数的整函数 Fr´echet 空间 $Hol(\mathbb{C})$ 上，伯克霍夫算子 $T_{(a)}\colon\ f \mapsto f($ $\cdot + a)$ 超循环，当且仅当 $a \neq 0$。作用于 $Hol(\mathbb{C})$ 上的求导算子 D 也是超循环的。在巴拿赫空间的情形下，最简单的超循环算子例子是罗莱维奇算子 λB for $|\lambda| > 1$，其中 B 是定义在 $\ell^2(\mathbb{N})$上的后移算子，其定义为$B(x_n)_{n\geq 1} =(x_{n+1})_{n\geq 1}$。

以下判据为证明算子的超循环性提供了一种实用方法。

定理 3.3（超循环性判据， [7, 定理 3.12]）。设 $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X)$。假设存在 X的稠密子集 X_0 和 Y_0 、一个递增的整数序列 $(n_k)_{k\geq 1}$ ，以及一个映射序列 $(S_{n_k}\colon\ Y_0 \to X)_{k\geq 1}$ ，使得：

(i) 对每个 $x \in X_0,\ \ \mathcal{A}^{n_k} x \to 0$ 如 $k \to +\infty$ ； (ii) 对每个 $y \in Y_0,\ \ S_{n_k} y \to 0$ 如 $k \to +\infty$ ； (iii) 对每个 $y \in Y_0.,\ \ \mathcal{A}^{n_k} S_{n_k} y \to y$ 如 $k \to +\infty$
那么算子 $\mathcal{A}$ 是超循环的。

在 $\omega = \omega_0$ 的情况下，并且假设映射 T 不存在任何非平凡循环，定理 2.2] 证明了 [11, ： $\mathcal{T}$ 满足超循环性判据，因此是超循环的。我们的第一个定理推广了这一结果，证明在对权 ω 作出相当温和的假设时， $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{X}_\omega$ 上是超循环的，而无需对 Collatz 映射是否存在循环作出任何假设。

定理 3.4. 若 ω 有下界，且对于每个 $k \geq 3,\ \ \omega(k2^n) \to +\infty$ 如 $n \to +\infty$ ，则 $\mathcal{T}$ 是超循环的。

特别是，如果 $\omega = \omega_0$ ，那么 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{X}$ 上是超循环的。

证明。只需证明 $\mathcal{T}$ 满足超循环性判据（定理 3.3）。考虑子空间 $X_0 =$张成空间$[h_m(\mu, \cdot);\ \mu \in \mathbb{D}$ $m \geq 0]$，根据定理 2.4，它在 $\mathcal{X}_\omega$中稠密。对于每个 $\mu \in \mathbb{D}$和每个 $m \geq 0$，我们有 $\mathcal{T}^n h_m(\mu, \cdot)$ $= \mu^n h_m(\mu, \cdot) \ \to 0$ as $n \to +\infty$。因此，对于 X_0中的任意线性组合，这一结论都成立。现在考虑 $\mathcal{X}_\omega$中的稠密子空间 $Y_0 =$张成空间$[z^k; k \geq 3]$ 以及映射 $S\colon\ Y_0 \to Y_0$，其定义如下

$Sz^k = z^{2k}$ 对于每个 $k \geq 3$。那么，由于 $n \to +\infty$， $\|S^n z^k\|_\omega^2 = \|z^{k2^n}\|_\omega^2 = 1/\omega(k2^n) \to 0$ as, 且对于每个 $k \geq 3$， $\mathcal{T}Sz^k = \mathcal{T}z^{2k} = z^{T(2k)} = z^k$。因此，对于 Y_0中的任意线性组合，这一结论仍然成立。于是 $\mathcal{T}$满足超循环性判据，因此 $\mathcal{T}$是超循环的。□

实际上，特征向量在算子的超循环性中所发挥的作用，明确体现在以下判据中。

定理 3.5（Godefroy-Shapiro 判据， [7, 定理 3.1]）。设 $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X)$。假设子空间

$$X_0 = \operatorname{span}[\ker(\mathcal{A} - \mu); |\mu| < 1] \quad \text{and} \quad Y_0 = \operatorname{span}[\ker(\mathcal{A} - \mu); |\mu| > 1]$$

在 X 中稠密。则 $\mathcal{A}$ 是超循环的。

只要存在足够多的复数 μ ，使得 $h_m(\mu, \cdot)$ 对每个 $m \geq 0$ 都属于 $\mathcal{X}_\omega$ ，该判据便得到满足。

定理 3.6。如果 ω 有下界，并且存在 $\rho > 1$ ，使得对于每个 $k \geq 3$ ，序列 $(\rho^n/\omega(k2^n))_{n\geq 0}$ 有界，则 $\mathcal{T}$ 满足 Godefroy-Shapiro 判据。

特别地，如果 $\omega = \omega_0$，那么取 $\rho = 2$ 可得， $\mathcal{T}$满足 Godefroy-Shapiro 判据。

证明。根据命题 2.3， $h_m(\mu, \cdot)$ 对于每个 $m \geq 0$ 以及满足 $|\mu| < \sqrt{\rho}$的每个 $\mu \in \mathbb{C}$, 都属于 $\mathcal{X}_\omega$ 。根据定理 2.4，只需证明子空间 Y_0 =张成空间$[h_m(\mu, \cdot);\ m \geq 0,$ $1 < |\mu| < \sqrt{\rho}]$ 在 $\mathcal{X}_\omega$中是稠密的。通过遵循定理 2.4 的证明步骤，并考虑定义在 $\{\mu \in \mathbb{C}$ 上的全纯函数 φ_m 和φ_0 ，而不是 $\mathbb{D}$，可以证明这一点。□

3.2. 频繁超循环性与遍历性。频繁超循环性的概念是对超循环性概念的强化。它量化了向量的轨道访问一个非空开集的频率。关于这一概念的更多内容，请参阅 [2]。

定义 3.7（[7, 定义 9.2]）。若存在一个向量 $x \in X$ ，使得对于 X 中的每个非空开集 U ，算子 $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X)$ 被称为频繁超循环算子，

$$\liminf_{N\to+\infty} \frac{\operatorname{card}\{0 \leq n \leq N; \mathcal{A}^n x \in U\}}{N+1} > 0.$$

在这种情况下， x 被称为 $\mathcal{A}$ 的频繁超循环向量。

超循环性判据有一个频繁超循环版本，即下面的定理。

定理 3.8（频繁超循环判据， [7, 定理 9.9]）。设 $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X)$。假设存在一个稠密集 X_0 和一个映射 S: $X_0 \to X_0$ ，使得对于每个 $x \in X_0$:

（1） $\sum_{n\geq 0} \mathcal{A}^n x$ 无条件收敛；（2） $\sum_{n\geq 0} S^n x$ 无条件收敛；（3） $\mathcal{A}Sx = x$。

则 $\mathcal{A}$ 是频繁超循环的。

之前介绍的三个超循环算子实际上都是频繁超循环的。如果 $|\lambda| > 1$ ，则算子 λB、D 和 $T^{(a)}$ 分别在 ℓ^2(N)和 H(C)上是频繁超循环的；如果 $a \neq 0$，同样如此。

为了证明 $\mathcal{T}$ 是频繁超循环的，我们实际上将证明 $\mathcal{T}$ 关于一个具有全支撑的高斯测度是遍历的。

设 H 是一个复希尔伯特空间， $\mathcal{B}$ 是 H 的博雷尔子集所成的 σ-代数，且m 是$(H,\mathcal{B})$上的一个概率测度。

定义 3.9（[2, 定义 3.9]）。若变换 $\mathcal{A}$: $(H,\mathcal{B},m) \to (H,\mathcal{B},m)$属于 $\mathcal{B}(H)$，且对每个 $B \in \mathcal{B}$ 都有 $m(\mathcal{A}^{-1}(B)) = m(B)$，则称其保持测度 m 。若一个保持测度的变换 $\mathcal{A}$: $(H,\mathcal{B},m) \to (H,\mathcal{B},m)$满足：对每个$B \in \mathcal{B}$， $\mathcal{A}^{-1}(B) = B$ 蕴含 $m(B) \in \{0,1\}$，则称其为遍历的。

算子的特征向量在研究其动力学时发挥着重要作用。 $\mathcal{T}$的特征向量张成了 $\mathcal{X}_\omega$ 的一个稠密子空间，这一事实使我们得以在对权 ω作出某些假设的条件下证明 $\mathcal{T}$是超循环的。为了证明 $\mathcal{T}$关于一个具有全支撑的高斯测度是遍历的，我们将借助 $\mathcal{T}$ 对应于模为一的特征值的特征向量的性质。我们先回顾几个相关的定义。

定义 3.10（[2, 定义 3.1]）。若存在单位圆 T 上的连续概率测度 σ ，使得对于 T 的每个满足 $\sigma(A) = 1$ 的 σ-可测子集 A ，与特征值 $\mu \in A$ 相关联的算子 $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(H)$ 的特征向量在 H 中张成稠密子空间，则称算子 $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(H)$ 具有与模为一的特征值相关联的完美张成的特征向量集。

定义 3.11（[2, 定义 3.13 和 3.14]）。设 $(\Omega\ \mathcal{F}, P)$ 为概率空间。若可测函数 f: $(\Omega\ \mathcal{F}, P) \to$ C 的 $\Re(f)$ 和 $\Im(f)$ 相互独立，且均服从具有相同方差的中心高斯分布，则称其服从复对称高斯分布。

若概率测度 m on $(H,\mathcal{B})$ 满足：对于每个 $x \in H$，函数$y \mapsto \langle y, x\rangle$ 均服从复对称高斯分布，则称其为高斯测度。

若对于每个开集$U \in \mathcal{B}$，都有 $m(U) > 0$，则称测度 m 在 $(H,\mathcal{B})$ 上具有全支撑。

定理 3.12（[2, 定理 3.22]）。若算子 $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(H)$ 存在一个与模为一的特征值相关联的完美张成的特征向量集，则存在一个在 H 上具有全支撑的高斯不变测度 m，使得 $\mathcal{A}$: $(H,\mathcal{B},m) \to (H,\mathcal{B},m)$ 是遍历的。

现在我们可以证明 $\mathcal{T}$ 的遍历性了。

定理 3.13。若 ω 有下界，且对于每个 $k \geq 3$ 都有 $\sum_{n=0}^{\infty} 1/\omega(k2^n) < +\infty$ ，则 $\mathcal{T}$ 关于 $\mathcal{X}_\omega$ 上具有全支撑的高斯不变测度是遍历的。

特别是，当 $\omega = \omega_0$ 时，情况就是如此。

证明。根据定理 3.12，只需证明 $\mathcal{T}$ 拥有一个由模为一的特征向量构成的完美张成集。由于对每个 $k \geq 3$， $\sum_{n=0}^{\infty} 1/\omega(k2^n) < +\infty$ ，根据命题 2.3，函数$h_m(\mu,\cdot)$ 对每个 $m \geq 0$ 以及每个满足 $|\mu| \leq 1$ 的 $\mu \in$ C 都属于 $\mathcal{X}_\omega$。我们将证明，对于每个满足 $\sigma(A) = 1$ 的博雷尔集 $A \subset$ T（其中 σ 是单位圆上的勒贝格测度），子空间 span$[h_m(\mu,\cdot);\ m \geq 0,\ \mu \in A]$ 在$\mathcal{X}_\omega$中稠密。

断言 3.14。设 ω 是 $\mathbb{Z}_+$ 上一个有下界的权，并且对每个 $k \geq 3$, $\sum_{n=0}^{\infty} 1/\omega(k2^n) < +\infty$。那么，对于 $\mathbb{T}$ 的每个稠密子集 D，子空间 $\operatorname{span}[h_m(\mu,\cdot); m \geq 0, \mu \in D]$ 在 $\mathcal{X}_\omega$ 中稠密。

证明。令 $f \in \operatorname{span}[h_m(\mu,\cdot);\ m \geq 0,\ \mu \in D]^{\perp}$ 属于 $\mathcal{X}_\omega$，其中 $f(z) = \sum_{k=3}^{\infty} c_k z^k$。我们的目标是证明 $f = 0$。对于每个 $\mu \in D$ 以及每个 $m \geq 1$

$$\varphi_m(\mu) \colon = \langle h_m(\mu,\cdot), f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\overline{c_{(6m+4)2^n}}}{\omega((6m+4)2^n)} - \frac{\overline{c_{(2m+1)2^n}}}{\omega((2m+1)2^n)} \right) \mu^n = 0$$

and

$$\varphi_0(\mu) \colon = \langle h_0(\mu,\cdot), f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{c_{2^{n+2}}}}{\omega(2^{n+2})} \mu^n = 0.$$

对于每个 $k \geq 3$，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (\overline{c_{k2^n}}/\omega(k2^n)) z^n$ 在闭圆盘 $\mathbb{D}$ 上一致收敛。事实上，对于每个 $n \geq 0$ 以及每个 $z \in \mathbb{D}$

$$\left| \frac{\overline{c_{k2^n}}}{\omega(k2^n)} z^n \right| \leq \frac{|c_{k2^n}|}{\sqrt{\omega(k2^n)}} \frac{1}{\sqrt{\omega(k2^n)}}$$

并根据柯西-施瓦茨不等式

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_{k2^n}|}{\sqrt{\omega(k2^n)}} \frac{1}{\sqrt{\omega(k2^n)}} \right)^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_{k2^n}|^2}{\omega(k2^n)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega(k2^n)} < +\infty$$

由于 f 属于 $\mathcal{X}_\omega$，并且根据关于 ω 的假设。因此，φ_m 和 φ_0 在 $\mathbb{D}$ 上全纯、在 $\mathbb{D}$ 上连续，并且对于每个 $m \geq 1$, 它们在 D 上均为零。由于 D 在单位圆 $\mathbb{T}$ 中稠密，根据连续性，函数 φ_m 和 φ_0 在 $\mathbb{T}$ 上为零。根据最大模原理，对于每个 $m \geq 1$ 和，φ_m 和 φ_0 在 $\mathbb{D}$ 上恒等为零

$$\frac{c_{(6m+4)2^n}}{\omega((6m+4)2^n)} = \frac{c_{(2m+1)2^n}}{\omega((2m+1)2^n)} \quad \text{and} \quad c_{2^{n+2}} = 0 \quad \text{for every } n \geq 0.$$

由断言 2.6 可得 $f = 0$, 这说明 $\operatorname{span}[h_m(\mu,\cdot); m \geq 0, \mu \in D]$ 在 $\mathcal{X}_\omega$ 中稠密。□

因此，由于满足 $\sigma(A) = 1$ 的博雷尔集 $A \subset \mathbb{T}$ 在 $\mathbb{T}$ 中稠密，断言 3.14 表明 $\mathcal{T}$ 拥有一个完美的模为一的特征向量张成集，从而证明完毕。□

现在我们将把算子的遍历性与其频繁超循环性联系起来。设 $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(H)$ 关于具有全支撑的不变测度是遍历的。首先，由伯克霍夫传递性定理可知，$\mathcal{A}$ 是超循环的。然后，由伯克霍夫点态遍历定理可得：

定理 3.15（[3, 命题 6.23]）。如果算子 $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(H)$ 关于定义在具有全支撑的 H 上的概率测度 m 是遍历的，那么 $\mathcal{A}$ 是频繁超循环的。此外，$\mathcal{A}$ 的频繁超循环向量构成 m 的一个全测度集。

由定理 3.13 和 3.15，我们得出以下结果：

定理 3.16. 若 ω 有下界，且对每个 $k \geq 3$, $\sum_{n=0}^{\infty} 1/\omega(k2^n) < +\infty$，则 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{X}_\omega$ 上是频繁超循环的。

特别地，若 $\omega = \omega_0$，则 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{X}$ 上是频繁超循环的。

我们通过证明在定理 3.13 的假设下，$\mathcal{T}$ 是混沌的，来结束本节。

定义 3.17（[7, 定义 2.29]）。如果算子 $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X)$ 是超循环的，且其周期点构成稠密集，则称其为混沌的。

定理 3.18。如果 ω 有下界，并且对于每个 $k \geq 3$， $\sum_{n=0}^{\infty} 1/\omega(k2^n) < +\infty$，那么 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{X}_\omega$ 上是混沌的。

特别地，如果 $\omega = \omega_0$，那么 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{X}$ 上是混沌的。

证明。由于对于每个 $k \geq 3$ 都有 $\sum_{n=0}^{\infty} 1/\omega(k2^n) < +\infty$，根据命题 2.3，对于每个 $m \geq 0$ 以及满足 $|\mu| \leq 1$ 的 $\mu \in \mathbb{C}$，函数 $h_m(\mu, \cdot)$ 都属于 $\mathcal{X}_\omega$。根据定理 3.4，$\mathcal{T}$ 是超循环的，因此只需证明其周期点集合 $\mathrm{Per}(\mathcal{T})$ 在 $\mathcal{X}_\omega$ 中稠密。由命题 2.33] 可知，$\mathrm{Per}(\mathcal{T}) =$ 张成空间$[h_m(\mu, \cdot);\ m \geq 0, \mu \in \{e^{\alpha i \pi};\ \alpha \in \mathbb{Q}\}]$，其稠密性由断言 3.14 给出。□

4. Open questions

我们通过提出一些与本文所展示结果相关的开放问题来结束本文。

问题 4.1. 在 $\omega = \omega_0$ 的情况下，由命题 2.1 和 2.3 可知

$$\{z \in \mathbf{C}; |z| < \sqrt{2}\} \subset \sigma_p(\mathcal{T}) \subset \sigma(\mathcal{T}) \subset \{z \in \mathbf{C}; |z| \leq 8/3\}.$$

$\mathcal{T}$ 的谱半径 $\rho(\mathcal{T})$ 的确切值是多少？是否有 $\rho(\mathcal{T}) = \sqrt{2}$ 成立？

为了回答这个问题，可以考虑以下命题；该命题给出了 $\mathcal{T}$ 的迭代算子 $\mathcal{T}^n$ 的范数的显式表达式：

命题 4.2. 如果 $\omega = \omega_0$，那么对于每个 $n \geq 1$

$$\|\mathcal{T}^n\|^2 = \max_{0 \leq r \leq 3^n - 1} \sum_{a\xi + b \in P_{n,r}^{(n)} \subset \mathbf{Q}[\xi]} \frac{a}{3^n}$$

其中 $P_{(n)\,0,\ r} = \{3^n \xi + r\}$ 且 $P_{k+1,\ r}^{(n)} = \{2P;\ P \in P_{(n)\,k,\ r}\} \cup \{(2P-1)/3;\ P \in P_{(n)\,k,\ r}, P(0) \equiv 2 \text{ 模 } 3\}$，对每个 $k \geq 0$ 和 $0 \leq r \leq 3^n - 1$ 均成立。

证明。根据命题 2.1

$$\|\mathcal{T}^n\|^2 = \max_{0 \leq r \leq 3^n - 1} \left\{ \sup_{m \geq \delta_r} \sum_{T^n(j) = 3^n m + r} \frac{j+1}{3^n m + r + 1} \right\}$$

其中 $\delta_r = 1$ 在 $r \leq 2$ 时成立，否则为 $\delta_r = 0$。由于 $T(j) = k$ 当且仅当 $j = 2k$ 或 $j = (2k-1)/3$ 在模 3 意义下满足 $k \equiv 2$，集合 $P_{n\,r,}^{(n)}$ 满足：对每个 $T^n(j) = 3^n m + r$ 当且仅当 $j \in \{P(m);\ P \in P_{n,\ r}^{(n)}\}$ 对每个 $0 \leq r \leq 3^n - 1$ 以及每个 $m \geq \delta_r$ 均成立。于是

$$\|\mathcal{T}^n\|^2 = \max_{0 \leq r \leq 3^n - 1} \left\{ \sup_{m \geq \delta_r} \sum_{a\xi + b \in P_{n,r}^{(n)}} \frac{am + b + 1}{3^n m + r + 1} \right\}.$$

固定 $0 \leq r \leq 3^n - 1$。若 $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$，可以注意到，序列 $((\alpha m + \beta)/(\gamma m + \delta))_{m \geq 0}$ 严格递增或为常数，当且仅当 $\alpha\delta \geq \beta\gamma$。我们将通过递归证明，对每个 $a\xi + b \in P_{(n)n,r}$，都有 $a(r+1) \geq 3^n(b+1)$。事实上，首先对 $P_{(n)\,0,r} = \{3^n \xi + r\}$ 成立。此外，若 $P_{k\,r}^{(n)}$ 满足这一性质，令 $P \in P_{k+1,r}^{(n)}$。要么 $P = 2a\xi + 2b$ 且 $a\xi + b \in P_{k\,r}^{(n)}$，，要么 $P = 2a\xi/3 + (2b-1)/3$ 且 $a\xi + b \in P_{k\,r}^{(n)}$，并且 $b \equiv 2$ 模 3。一方面，我们有 $2a(r+1) \geq 3^n(2b+2) > 3^n(2b+1)$；另一方面，我们有

$2a\ (r+1)\ /3 \geq 3^n\ (2b+2)\ /3 \geq 3^n\ (\ (2b-1)\ /3+1)$。于是对 $P_{(n)\,k+1,r}$ 成立，这证明了 $P_{n\,r}^{(n)}$, 满足这一性质。因此，对每个 $a\xi+b \in P_{(n)n,r}$

$$\sup_{m\geq\delta_r} \frac{am+b+1}{3^n m+r+1} = \lim_{m\to+\infty} \frac{am+b+1}{3^n m+r+1} = \frac{a}{3^n},$$

由此得证。 □

问题 4.3. 若 $\liminf_{n\to+\infty} \omega(n) = 0$, $\mathcal{T}$会有界、超循环或遍历吗? $\mathcal{T}^*$ 会有特征值吗?

算子 $\mathcal{T}$ 实际上也可以看作作用于序列空间 $(c_n)_{n\geq 3}$，而非作用于全纯函数空间 $f: z \mapsto \sum_{n=3}^{\infty} c_n z^n$。

问题 4.4. 如果将 $\mathcal{T}$ 视为作用于复数序列空间 $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$，这些结果还会有哪些成立?

References

[1] D. Applegate 和 J. C. Lagarias, *Lower bounds for the total stopping time of* $3x+1$ *iterates*, 《计算数学》（Math. of Comp.） **72** 2002 1035 1049 ↑2 ( ), -。F. Bayart 和 S. Grivaux, *Frequently hypercyclic operators*, 《美国数学会会刊》（Amer. Math. Soc.）358 (2006), 5083 - 5117。↑11, 12[3] F. Bayart 和 ´E. Matheron, *Dynamics of linear operators*, 剑桥数学专著丛书，第 179 卷，剑桥大学出版社, ´ 2009 ↑3 10 13。，，F. Bayart 和 E. Matheron, *Mixing operators and small subsets of the circle*, 预印本见 https://arxiv.org/abs/ 1112 1289 1 2011 ↑。v ( )。L. Berg 和 G. Meinardus, *Functional equations connected with the Collatz problem*, 《数学研究》（Res. in Math.） **25** 1994 1 12 ↑2 ( ), -。S. Eliahou, *The* $3x+1$ *problem: new lower bounds on nontrivial cycle lengths*, 《离散数学》（Disc. Math.）118 (1993), 45 56 ↑1-。K.-G. Grosse-Erdmann 和 A. Peris Manguillot, *Linear chaos*, Universitext，伦敦施普林格出版社，2011 年。 ↑3 10 11 13 14，，，，I. Krasikov 和 J. C. Lagarias, *Bounds for the* $3x+1$ *problem using difference inequalities*, 《算术学报》（Acta Arit.） **109** 2002 237 258 ↑2 ( ), -。J. C. Lagarias, *The* $3x+1$ *problem: an overview*, 《终极挑战：$3x+1$问题》。J. C. Lagarias 编，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（ 2010 3 29 ↑1），-。M. Murillo-Arcila 和 A. Peris, *Strong mixing measures for linear operators and frequent hypercyclicity*, 《数学分析与应用杂志》（J. Math. Anal. Appl.） **398** 2013 462 465 ↑( ), -。M. Neklyudov, *Functional analysis approach to the Collatz conjecture*, 预印本见 https://arxiv.org/abs/ 2106 11859 9 2021 ↑2 3 5 10。v ( )。，，，T. Oliveira e Silva, *Empirical verification of the* $3x+1$ *and related conjectures*, 《终极挑战：$3x+1$ 2010 189 207 ↑1问题》。J. C. Lagarias 编, *Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values* 2022 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（），-。T. Tao，，《数学论坛》（Forum of Math.），Pi ( )。↑2

Univ. Lille, CNRS, UMR 8524 - Laboratoire Paul Painlevé, F-59000 Lille, France*Email address*: vincent.behani@univ-lille.fr