arXiv:2303.03210v1 [math.FA] 6 Mar 2023

$\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{C}^n$中的范数不等式

STEFAN GERDJIKOV 和 NIKOLAI NIKOLOV

摘要。本文的主要结果是：对于复数或实数域上任意一个 n维线性空间中的任意范数，每个极值基都满足缩放因子为 2^n-1的反向三角不等式。此外，常数 2^n-1 是紧的。我们还证明，任意两个极值基的范数彼此可比，可比因子为2^n-1；直观而言，这意味着任意两个极值基在给定容差范围内定量等价。

1. 引言

极值基最初由 [7, 3], 引入，已被证明是研究所谓 $\mathbb{C}$-凸域性质的有用工具， D。一方面，它们在域 D内部的任意给定点 z 附近诱导出一种自然的正交归一坐标系。另一方面，在满足某些假设的条件下（见下文），点 z 处的每个极值基 B 都满足以下不等式：

$$\left(\sum_{b\in B}\frac{|\langle b,v\rangle|}{d_D(z;b)}\right)^{-1}\lesssim d_D(z;v)\lesssim\left(\sum_{b\in B}\frac{|\langle b,v\rangle|}{d_D(z;b)}\right)^{-1}, \tag{1}$$

其中， $d_D(z;v)$对应于从 z 沿 v方向到D 边界的距离，即：

$$d_D(z;v)=\sup\{r\in\mathbb{R}^+|\ z+\lambda v\in D \text{ whenever } |\lambda|<r\}.$$

这意味着，极值基为体 D 内部任意给定点 z 邻域中该体结构提供了一种方便的线性近似。

极值基的性质 1 有助于构造具有有界赫essian 的多重次调和函数，并用于获得伯格曼核的估计， [7, 8]。在 [3, 4], 中，作者陈述并运用估计 1，获得了光滑有界伪凸有限型域上 Cauchy-Riemann 方程解的 H¨older 估计和 L^p 估计。估计 1 也应用于 Kobayashi 度量和 Bergman 度量的研究， [7, 9, 11, 10] 并且

2010 数学主题分类。 52A40,52A21,32F17。关键词和短语。 范数，凸域。第二位署名作者得到保加利亚教育与科学部保加利亚国家科学基金项目的部分资助，合同编号为KP- 06-N52/3。

最近， [12]。关于极值基的几何及其应用的综述，请参阅 [2]。

极大基的构造可以描述为一个贪心过程。首先，在凸域 D 的内部任取一点 z ，并取一个空的向量/方向集合 B_0。接着，通过归纳地添加一个与 B_k 张成的子空间正交的极值 方向 v_{k+1} ，将当前集合 B_k 扩展为 B_{k+1} 。当集合 $B := B_n$ 张成整个空间时，过程终止，此时 B 就是所需的基。

极值性 可以具体定义为极大的 [7, 8], 或极小的 [3, 4], ，区别在于所选择的是:

$$\begin{aligned} v_{k+1} &\in \arg\max\{d_D(z;v) \,|\, v \perp span(B_k)\} \text{ or} \\ v_{k+1} &\in \arg\min\{d_D(z;v) \,|\, v \perp span(B_k)\}. \end{aligned}$$

尽管从几何或分析视角出发的估计 1 的证明对应用很重要，但它们依赖于域 D [7, 8, 10] 的某种光滑性条件，而且往往只能给出隐藏常数的隐式估计或粗略估计。特别是，该常数是否依赖于域 D, 以及如何依赖，并不显而易见。

本文通过证明估计 1 成立，回答了上述问题，其常数为 $2^n - 1$ ，其中 n 是（所谓的弱线性）凸域 D 所在空间的维数。从这个意义上说，该常数与 D无关。此外，常数 $2^n - 1$ 是最佳的，也就是说无法进一步改进。

我们采用代数方法。我们的出发点是这样的观察：对于弱线性凸域 D 以及 D内部的任意给定点 z ，函数:

$$f(v) = \frac{1}{d_D(z;v)}$$

是一个半范数。如果域 D 不包含复直线，那么 f 就是一个范数; 不过，参见注 1，其中指出这一假设并非必要，我们之所以将讨论范围限制在范数上，仅仅是出于技术上的考虑。因此，估计 1 可以改写为:

$$\sum_{b\in B} |\langle b, v\rangle| f(b) \gtrsim f(v) \gtrsim \sum_{b\in B} |\langle b, v\rangle| f(b) \tag{2}$$

并且，其中第一个不等式显然由三角不等式得出，且常数为 1; 第二个不等式则似乎更难处理。

为使提纲自成一体，我们在第2节证明，每个（在单位球面上有界的）范数都可以表示为:

$$f(v) = \sup_{u\in U} |\langle v, u\rangle|$$

其中 U为适当的向量集合。U 的几何解释是，向量 $u \in U$ 定义了以 z 为中心的区域 D 的支撑超平面。

在第3节中，我们陈述并证明，对于任意极值基 B:

$$(2^n - 1)f(v) \geq \sum_{b \in B} |\langle b, v \rangle| f(b).$$

我们应当强调，按照我们的记号，极大的和极小的定义（见定义2）与用于凸体的概念互为倒数。原因在于，使 $d_D(z;.)$最大化等价于使 f 最小化，反之亦然。因此，定理 4 证明了关于$d_D(z; .)$的极大基以及关于f的极小基的结论，而定理5证明了关于 $d_D(z;.)$的极小基以及关于 f的极大基的结论。

在第3节中，我们证明 $2^n - 1$是可能的最佳界。具体而言，我们证明，对于每个 $\varepsilon > 0$ ，都存在一些范数，使其极大基或极小基违反以下不等式:

$$(2^n - 1 - \varepsilon)f(v) \geq \sum_{b \in B} |\langle b, v \rangle| f(b)$$

至少对一个向量 v成立。由于每个范数都会导出一个凸体$D' = \{v \mid f(v) \leq 1\}$，满足 $d_{D'}(0; v) = \frac{1}{f(v)}$，因此这些结果~~可立~~即转化为关于凸体的结果。同样，命题 6 处理关于 $d_D(z; .)$的极大基和关于 f的极小基的情形，而命题 7 处理关于$d_D(z; .)$的极小基和关于 f的极大基的情形。

在第5节中，我们证明最小基与最大基在范数方面等价。尽管此前已有类似结果，但第5节中的界基于对代数结构更精确的分析，并将常数的估计从$2^n n!$改进为 2^n，从而减少了一个 $n!$的因子。

我们在第6节以一些开放问题作结。

2. 预备知识

下文假设 V 是 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或$\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 上的线性空间，并且 V配备了标量积 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$。我们分别用 $\|.\|: V \to \mathbb{R}^+$ 和 $\mathbb{S}_1$ 表示 V中的诱导范数和单位球面，即:

$$\begin{aligned} \|u\| &= \langle u, u \rangle \text{ for } u \in V \\ \mathbb{S}_1 &= \{u \in V \mid \langle u, u \rangle = 1\}. \end{aligned}$$

引理 1. 设 $f : V \to \mathbb{R}^+$ 是一个范数。假设 f 在单位球面 $\mathbb{S}_1 \subset V$上有界。

(1) 存在一组向量 $U \subseteq V$，使得:

$$f(v) = \sup_{u \in U} |\langle v, u \rangle|.$$

(2) 若 $v_0 \in V$ 是一个单位向量，满足 $f(v_0) = \sup_{v \in \mathbb{S}_1} f(v)$，则对所有 $u \in V$，均有:

$$f(u) \geq |\langle v, u \rangle| f(v).$$

证明。(1) 第一部分是 Hahn-Banach 定理的直接推论。事实上，令 $v \in V$。记 $V_0 = span(v)$，定义 $L_0 : V_0 \to \mathbb{F}$ 为 $L_0(\alpha v) = \alpha f(v)$。显然， L_0是 V_0 上的线性泛函，且 $|L_0(\alpha v)| = |\alpha| f(v) = f(\alpha v)$。由 Hahn-Banach 定理，由于 f 是一个范数，我们可以将 L_0 延拓为线性泛函 $L_v : V \to \mathbb{F}$，使得对所有$u \in V$，都有 $|L_v(u)| \leq f(u)$。由于 L_v 在 V上是线性的，且 $\sup_{u \in \mathbb{S}_1} L_v(u)$ 有上界 $\sup_{u \in \mathbb{S}_1} f(u) < \infty$，因此 L_v 是一个有界线性算子，故存在一个向量 $v^* \in V$，使得:

$$\langle u, v^* \rangle = L_v(u) \text{ for all } u \in V.$$

设 $U = \{v^* \,|\, v \in V\}$。显然，对于任意 $u \in V$和 $v^* \in U$、 $|\langle u$、$v^* \rangle| = |L_v(u)| \leq f(u)$。另一方面，$f(u) = L_u(u) = |\langle u, u^* \rangle|$。因此:

$$f(v) = \sup_{u \in U} |\langle v, u \rangle|.$$

（2）对于第二部分，考虑由 v_0诱导的线性泛函 $L = L_{v_0}$。由于 L 是线性的，它由其在 V的一组正交归一基上的取值所确定。不妨设且我们确实设 $(e_i)_{i \in I}$ 是这样一组基，其中 $e_1 = v_0$。假设对于某个 $i > 1$， $L(e_i) \neq 0$ 。于是我们考虑向量:

$$u = \overline{L(e_1)} v_0 + \overline{L(e_i)} e_i = f(v_0) v_0 + \overline{L(e_i)} e_i.$$

于是我们有 $\|u\| = \sqrt{f^2(v_0) + |L(e_i)|^2}$，并且:

$$L(u) = f(v_0) L(v_0) + \overline{L(e_i)} L(e_i) = f(v_0)^2 + |L(e_i)|^2.$$

因此 $u' = \frac{u}{\|u\|}$ 是一个单位向量，而 $L(u') = \sqrt{f(v_0)^2 + |L(e_i)|^2}$，从而 $L(u') > f(v_0)$，因为 $L(e_i) \neq 0$。然而， $f(u') \geq L(u') > f(v_0)$，这与 v_0的极大性矛盾。因此，对于任意 $i \neq 1$， $L(e_i) = 0$ 。这证明了 $L(u) = \langle u, e_1 \rangle L(e_1) = \langle u, v_0 \rangle f(v_0)$，因此:

$$|\langle u, v_0 \rangle| f(v_0) = |L(u)| \leq f(u)$$

如要求。

□

注 1。 我们可以将上述引理的第一部分视为对（半）范数的刻画。事实上，如果 $U \subseteq V$，那么 $f_U\colon\ V \to \mathbb{R}^+$ 定义为:

$$f_U(v) = \sup_{u\in U} |\langle v, u\rangle|$$

是一个半范数。事实上，它是范数当且仅当 $U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in U(\langle u, v\rangle = 0)\}$ 是平凡集 $\{0\}$。由于 $U^\perp$ 是 V的子空间，f_U 的性质完全由 f_U 在 $U^\perp$的正交子空间上的表现决定。确实，若 $v = v' + u$且 $u \in U^\perp$和 $v' \perp U^\perp$，则:

$f_U(v') \le f_U(v) + f_U(u) = f(v)$以及 $f_U(v) \le f_U(v') + f_U(-u) = f_U(v')$，也就是说，$f_U(v') = f_U(v)$。

3. 最小基与最大基

本节假设 n是正整数，且 V是一个配备标量积 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V \to \mathbb{F}$ 的 n维线性空间，其中 $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$。

定义2。 设 $f\colon\ V \to \mathbb{R}^+$ 为一个范数。我们归纳地定义 f-极小（f-极大，分别地） V 的（正交归一）基如下:

- $n = 1$，则对任意 $b \in \mathbb{S}_1$，(b) 是一个 f-极小（f-极大，分别地）基。
- $n > 1$，则令:

  $b_1 \in \arg\min\{f(b) \mid b \in \mathbb{S}_1\}(b_1 \in \arg\max\{f(b) \mid b \in \mathbb{S}_1\}$，分别地$)V_1 = \{u \in V \mid \langle u, v\rangle = 0\}f_1 = f \restriction V_1$ 为 f 限制到 V_1. 上的限制

  若$(b_2, b_3, \ldots, b_n)$ 是 V_1的一个 f_1-极小（f_1-极大，分别地）基，则$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ 是 V的一个 f-极小（f-极大，分别地）基。

定义 3. 如果对于任意 $i \le n\ b_i$， e_i 都与其共线，即存在一个元素 $\alpha_i \in \mathbb{F}$，使得 $|\alpha_i| = 1$，满足 $e_i = \alpha_i b_i$，那么我们称 V 的两个标准正交基 $(b_1, \ldots, b_n)$ 和 $(e_1, \ldots, e_n)$ 等价。

定理 4. 对于任意范数 $f\colon\ V \to \mathbb{R}^+$ 以及任意 f-极小基$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$，均有:

$$(2^n - 1)f(v) \ge \sum_{i=1}^{n} |\langle v, b_i\rangle| f(b_i).$$

证明。 首先注意，对于任意 $v \in V$，都存在唯一的 $\alpha \in \mathbb{F}$ 和向量 $u \in span$（$b_2, \ldots, b_n$），使得:

$$v = u + \alpha b_1.$$

由于当 $v = 0$ 时该命题显然成立，我们假设 $v \neq 0$ ，并令$v' = \frac{v}{\|v\|}$。于是 $v' \in \mathbb{S}_1$ ，根据 b_1 的定义可得:

$$f(v') \geq f(b_1) \geq \frac{|\langle v, b_1 \rangle|}{\|v\|} f(b_1) = \frac{|\alpha|}{\|v\|} f(b_1),$$

其中使用了柯西-施瓦茨不等式。因此，到目前为止我们得到:

$$f(v) = \|v\| f(v') \geq |\alpha| f(b_1).$$

这就解决了 $n = 1$ 的情形。或者说，对于 $n \geq 2$，我们使用 $u = v - \alpha b_1$ 的三角不等式，从而得到:

$$f(u) = f(v - \alpha b_1) \leq f(v) + |\alpha| f(b_1) \leq f(v) + f(v) = 2f(v).$$

利用这一不等式，我们可以通过对 n 进行归纳法来完成证明。正如我们所注意到的， $n = 1$ 的情形已经解决。假设对于任意（$n - 1$）维向量空间 V' ，引理的结论都成立，并考虑维数为 n 的向量空间 V 。令 $V' = span\,(b_2, \ldots, b_n)$ 且 $f' = f \restriction V'$。根据定义可知，（$b_2, \ldots, b_n$）是 V' 的 f'-极小基，因此由归纳假设:

$$(2^{n-1} - 1) f'(u) \geq \sum_{i=2}^{n} |\langle u, b_i \rangle| f(b_i) \text{ for any } u \in V'.$$

最后，对于满足 $\alpha \in \mathbb{F}$ 和 $u \in V'$ 的任意非零 $v = u + \alpha b_1$ ，我们已经证明:

$$f(v) \geq 2f(u) = 2f(u') \text{ and } f(v) \geq |\alpha| f(b_1).$$

综上，并利用对于 $i \geq 2$ 有 $\langle v、\ b_i \rangle = \langle u、\ b_i \rangle$ ，我们得出:

$$\begin{aligned}
(2^n - 1) f(v) &= 2(2^{n-1} - 1) f(v) + f(v) \\
&\geq (2^{n-1} - 1) f(u) + |\alpha| f(b_1) \\
&\geq |\alpha| f(b_1) + \sum_{i=2}^{n} |\langle u, b_i \rangle| f(b_i) \\
&= |\langle v, b_1 \rangle| f(b_1) + \sum_{i=2}^{n} |\langle v, b_i \rangle| f(b_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\langle v, b_i \rangle| f(b_i).
\end{aligned}$$

□

定理5。 对于任意范数 $f:\ V \to \mathbb{R}^+$ 以及任意 f-极大的基（$b_1,\ b_2,$ ....., b_n），有:

$$(2^n - 1) f(v) \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle v, b_i \rangle| f(b_i).$$

证明。 我们对 $n = dimV$ 进行归纳。对于 $n = 1$ ，无需证明。假设该引理对于维数为 n 的向量空间成立。令 f： $V \to \mathbb{R}^+$ 为一个范数。由于$f(b_1)$ =最大值$_{v\in\mathbb{S}_1}$ $f(v)$，根据引理 1，我们有：

$$f(u) \geq |\langle u, b_1\rangle| f(b_1).$$

设 $V_1 = span(b_2, \ldots, b_n)$，并考虑任意向量 $u = \alpha b_1 + v$，满足 $v \in V_1$。那么，我们有：

$$f(u) \geq |\alpha| f(b_1).$$

此外，根据三角不等式，我们有：

$$f(u) + |\alpha| f(b_1) = f(\alpha b_1 + v) + f(-\alpha b_1) \geq f(v).$$

综上可得， $2f(u) \geq f(u) + |\alpha|f(b_1) \geq f(v)$。为完成归纳步骤，我们利用 $\langle u, b_i\rangle = \langle v, b_i\rangle$ （对 $i \geq 2$ 成立）以及关于 V_1 和 $f_1 = f \restriction V_1$的归纳假设。因此，我们计算得：

$$\begin{aligned}
(2^n - 1)f(u) &\geq f(u) + 2(2^{n-1} - 1)f(u) \\
&\geq |\alpha| f(b_1) + (2^{n-1} - 1)f(v) \\
&\geq |\alpha| f(b_1) + \sum_{i=2}^{n} |\langle v, b_i\rangle| f(b_i) \\
&= |\alpha| f(b_1) + \sum_{i=2}^{n} |\langle u, b_i\rangle| f(b_i)
\end{aligned}$$

其中，第二行由事实 $f(u) \geq |\alpha|f(b_1)$和 $2f(u) \geq f(v)$得出，第三行则由归纳假设得出。□

4. 下界

在本节中，我们证明定理 4 和定理 5 中的结果是尖锐的。我们的构造以引理 1 和注 1 中的刻画为基本工具来定义范数。在这两种情况下，给定一个 $\varepsilon > 0$，我们构造一个定义范数的有限集 $U \subseteq \mathbb{R}^n$：

$$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^+ \text{ s.t. } f(v) = \max_{u\in U} |\langle v, u\rangle|.$$

集合 U 经过精心设计，使其满足：

(1) 作为 f-极小的（分别为 f-极大的）一个正交[1] 基

$$(e_1, \ldots, e_n) \subset \mathbb{R}^n$$

and

（2）一个见证向量 $v_0 \in \mathbb{R}^n$，使得：

$$(2^n - 1 - \varepsilon)f(v_0) < \sum_{i=1}^{n} |\langle v_0, e_i\rangle| f(e_i).$$

[1]实际上，在等价意义下它是唯一的。

由于 $U \subseteq \mathbb{R}^n$、（e_1、.....、e_n）$\subseteq \mathbb{R}^n$ 和 $v_0 \in \mathbb{R}^n$，将 f限制 f_R 到 $\mathbb{R}^n$ 可得到一个范数：

$$f_R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \text{ with } f_R(v) = f(v)$$

使其具有 f_R-极小（分别为 f-极大）基，同样为 $(e_1, \dots, e_n)$，且 v_0 是一个见证向量，满足：

$$(2^n - 1 - \varepsilon) f_R(v_0) < \sum_{i=1}^{n} |\langle v_0, e_i \rangle| f_R(e_i).$$

命题 6. 设 $n \geq 1$是一个整数，且 $V = \mathbb{C}^n$。那么对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个范数 $f : V \to \mathbb{R}^+$ 和一个非零向量 $v \in \mathbb{R}^n$，使得：

(1) f 存在一个在等价意义下唯一的 f-极小基

$$(e_1, \dots, e_n) \subseteq \mathbb{R}^n$$

and

(2)

$$(2^n - 1 - \varepsilon) f(v) \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle v, e_i \rangle| f(e_i).$$

证明。令 $(e_1, e_2, \dots, e_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ 为 V和$\varepsilon > 0$的一个固定正交归一基。设 $V_i = span(e_i, \dots, e_n)$。最后，取 $s \in (0, 1)$，其值将在后文适当指定。我们将归纳构造集合 $U_i \subseteq V_i \cap \mathbb{R}^n$、范数 $f_i : V_i \to \mathbb{R}^+$ 以及见证向量 $v^{(i)} \in V_i \cap \mathbb{R}^n$，使其满足以下性质：

(1) $f_i(v) =$最大值$\{|\langle v, u \rangle| \mid u \in U_i\}$，(2) $f_i(e_i) = 1 =$最小值 $_{v \in \mathbb{S}_1 \cap V_i} f_i(v)$，(3) 对所有 $v \in V_{i+1}$，$f_i(v) = {}_{s^2}{}^{1}{}_{(2s+1)} f_{i+1}(v)$，
(4) $\left\langle v^{(i)}, e_j \right\rangle = (2s^2)^{j-i}$满足 $f_i(v^{(i)}) \in [1, 1 + 2s)$，并且：

$$(2^{n-i} - 1) f(v^{(i)}) < \sum_{j=i}^{n} |\left\langle v^{(i)}, e_j \right\rangle| (1 + 2s)^{2(j-i)+1} f_i(e_j))$$

我们从 $U_n = \{e_n\}$和 $f_n(\alpha e_n) = |\alpha|$, $v^{(n)} = e_n$开始。显然，这些对象满足上述假设。假设对于某个 $i > 1$，集合 U_i、范数 f_i 和见证向量 $v^{(i)}$ 均已定义，并且满足上述假设。我们按如下方式定义 U_{i-1}, f_{i-1} 和$v^{(i-1)}$。令

$$U_i^+ = \{u \in U_i \mid \left\langle v^{(i)}, u \right\rangle \geq 0\} \text{ and } U_i^- = \{u \in U_i \mid \left\langle v^{(i)}, u \right\rangle < 0\}.$$

接下来我们定义：

$$\begin{aligned} U_{i-1} &= \left\{ e_{i-1} + \tfrac{1}{s(2s+1)} u \mid u \in U_i^+ \right\} \cup \left\{ e_{i-1} - \tfrac{1}{s^2(2s+1)} u \mid u \in U_i^+ \right\} \\ &\cup \left\{ e_{i-1} - \tfrac{1}{s(2s+1)} u \mid u \in U_i^- \right\} \cup \left\{ e_{i-1} + \tfrac{1}{s^2(2s+1)} u \mid u \in U_i^- \right\}. \end{aligned}$$

现在，我们将 f_{i-1} 和 v_{i-1} 定义为:

$$\begin{aligned} f_{i-1} &= \max\{|\langle v,u\rangle| \mid u \in U_{i-1}\} \\ v^{(i-1)} &= e_{i-1} + 2s^2 v^{(i)}. \end{aligned}$$

注意，由于假设 $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ 和 $v^{(i)} \in \mathbb{R}^n$，集合 U_i^+ 和 U_i^-是定义良好的。因此，显然 $U_{i-1} \subseteq \mathbb{R}^n$和 $v^{(i-1)} \in \mathbb{R}^n$。

现在我们验证 U_{i-1}、 f_{i-1} 和 $v^{(i-1)}$ 具有所需的性质:

(1) 第一性质由定义满足。(2) 对于 $s \in (0,1)$，第三性质也显而易见。(3) 为了证明第二性质成立，首先注意:

$$\langle e_{i-1}, u\rangle = 1 \text{ for all } u \in U_{i-1}.$$

接下来，考虑任意元素 $v \in U_{i-1} \cap \mathbb{S}_1$。它有唯一表示 $v = \alpha e_{i-1} + v'$，其中 $|\alpha|^2 + \|v'\|^2 = 1$ 满足$v' \in V_i$。由归纳假设可知 $f_i(v') \geq \|v'\|$。由于 U_i是有限的，值 $f_i(v') = |\langle v',\ u'\rangle|$ 在某个$u' \in U_i$处取得。令这样的 u' 固定，并设 a、 $b \in \mathbb{R}$ 使得:

$$\langle v', u'\rangle = a + ib.$$

我们还令 $c, d \in \mathbb{R}$ 满足 $\alpha = c + id$。因此，如果 $\sigma \in \{s^{-1}, s^{-2}, -s^{-1}, -s^{-2}\}$，我们有:

$$\langle v, e_{i-1} + \sigma u'\rangle = c + id + \sigma(a + ib) = (c + \sigma a) + i(d + \sigma b).$$

因此:

$$\begin{aligned} |\langle v, e_{i-1} + \sigma u'\rangle| &= (c+\sigma a)^2 + (d+\sigma b)^2 \\ &= c^2 + d^2 + \sigma^2(a^2+b^2) + 2\sigma(ac+bd) \\ &= |\alpha|^2 + \sigma^2 |\langle v', u'\rangle|^2 + 2\sigma(ac+bd) \\ &= |\alpha|^2 + \sigma^2 f_i^2(v') + 2\sigma(ac+bd) \\ &\geq |\alpha|^2 + \sigma^2\|v'\|^2 + 2\sigma(ac+bd). \end{aligned}$$

根据构造，我们总能选择 σ 的符号，也就是说，我们可以选择 $\sigma \in \{s^{-1}, -s^{-2}\}$ 或 $\sigma \in \{-s^{-1}, s^{-2}\}$。现在，选择 σ，使其符号与 σ 的符号相同（$ac+bd$），由此可得:

$$\begin{aligned} |\langle v, e_{i-1} + \sigma u'\rangle| &\geq |\alpha|^2 + \sigma^2\|v'\|^2 + 2\sigma(ac+bd) \\ &\geq |\alpha|^2 + \sigma^2\|v\|^2 \\ &\geq |\alpha|^2 + \|v'\|^2 \\ &= 1, \end{aligned}$$

其中，第一个不等式由 σ 的选取得出，第二个不等式则基于 $|\sigma| > 1$这一事实。此外，最后一个不等式当且仅当 $v' = 0$时取等号。这证明了对于

任意不与 e_{i-1}共线的向量 $v \in \mathbb{S}_1 \cap V_{i-1}$，都有 $f_i(v) > 1$。因此：

$$f_{i-1}(e_{i-1}) = \min_{v \in V_{i-1} \cap \mathbb{S}_1} f_{i-1}(v)$$

并且，只有当向量具有以下形式 αe_{i-1}且满足 $|\alpha| = 1$时，才能取到最小值。因此，不失一般性， e_1 属于极小基。

(4) 最后，我们检查最后一个条件。设 $v^{(i-1)} \in V_{i-1}$ 满足：

$$v^{(i-1)} = e_{i-1} + 2s^2 v^{(i)}$$

首先，设 $u \in U_i^+$。特别地，$\langle u, v^{(i)} \rangle \geq 0$。因此：

$$\begin{aligned}
\left\langle v^{(i-1)}, e_{i-1} - \frac{1}{s^2(2s+1)} u \right\rangle &= \left\langle e_{i-1} + 2s^2 v^{(i)}, e_{i-1} - \frac{1}{s^2(2s+1)} u \right\rangle \\
&= 1 - \frac{2}{2s+1} \langle v^{(i)}, u' \rangle \\
&= 1 - \frac{2}{2s+1} |\langle v^{(i)}, u \rangle| \leq 1.
\end{aligned}$$

由于 $u \in U_i$，我们有 $f_i(v^{(i)}) \geq |\langle v^{(i)}, u \rangle|$；又根据假设，$f_i(v^{(i)}) \leq 1 + 2s$，由此得出：

$$\left\langle v^{(i-1)}, e_{i-1} - \frac{1}{s^2(2s+1)} u \right\rangle = 1 - \frac{2}{2s+1} |\langle v^{(i)}, u \rangle| > 1 - 2 = -1.$$

因此，对于所有 $u \in U_i^+$，都有 $|\langle v^{(i-1)}, e_{i-1} - \frac{1}{s^2(2s+1)} u \rangle| \leq 1$。另一方面：

$$\begin{aligned}
\left\langle v^{(i-1)}, e_{i-1} + \frac{1}{s(2s+1)} u \right\rangle &= 1 + \frac{2s^2}{s(2s+1)} \langle v^{(i)}, u \rangle \\
&= 1 + \frac{2s}{1+2s} |\langle v^{(i)}, u \rangle| \in [1, 1+2s).
\end{aligned}$$

类似地，对于 $u \in U_i^-$，我们有：

$$\begin{aligned}
\left\langle v^{(i-1)}, e_{i-1} + \frac{1}{s^2(2s+1)} u \right\rangle &= 1 - \frac{2}{2s+1} |\langle v^{(i)}, u \rangle| \in (-1, 1] \\
\left\langle v^{(i-1)}, e_{i-1} - \frac{1}{s(2s+1)} u \right\rangle &= 1 + \frac{2s}{2s+1} |\langle v^{(i)}, u \rangle| \in [1, 1+2s).
\end{aligned}$$

因此，当 $u' \in U_{i-1}$ 时，$\langle v^{(i-1)}, u' \rangle$ 的最大值在某个形式为 u' 的情况下取得

$$\begin{aligned}
u' &= e_{i-1} + \frac{1}{s(2s+1)} u \text{ with } u \in U_i^+ \text{ or} \\
u' &= e_{i-1} - \frac{1}{s(2s+1)} u \text{ with } u \in U_i^-
\end{aligned}$$

使得 $|\langle v^{(i)}, u\rangle|$ 达到最大值。这表明

$$f_{i-1}(v^{(i-1)}) = 1 + \frac{2s}{2s+1} f_i(v^{(i)}).$$

到目前为止，我们有 $f_{i-1}(v^{(i-1)}) \in [1, 1+2s)$ 。

我们继续证明最后一个不等式成立。为此，首先注意：

$$\begin{aligned} \langle v^{(i-1)}, e_{i-1}\rangle &= 1 \\ \langle v^{(i-1)}, e_j\rangle &= 2s^2 \langle v^{(i)}, e_j\rangle \text{ for } j \geq i. \end{aligned}$$

回顾 $f_{i-1}(e_{i-1}) = 1$ 以及 $f_{i-1}(e_j) = s^2(2s+1)f_i(e_j)$ 对于$j \geq i$，我们得出：

$$(1+2s)|\langle v^{(i-1)}, e_j\rangle| f_{i-1}(e_j) = 2|\langle v^{(i)}, e_j\rangle| f_i(e_j) \text{ for } j \geq i.$$

因此，利用 $f_{i-1}(v^{(i-1)}) < 1+2s \leq (1+2s)f_i(v^{(i)})$，我们计算得：

$$\begin{aligned} (2^{n-i+1}-1)f_{i-1}(v^{(i-1)}) &= f_{i-1}(v^{(i-1)}) + 2(2^{n-i}-1)f_{i-1}(v^{(i-1)}) \\ &< 1 + 2s + 2(2^{n-i}-1)f_{i-1}(v^{(i-1)}) \\ &\leq (1+2s)(1+2f_i(v^{(i)})(2^{n-i}-1)) \\ \text{（归纳假设）} \quad &\leq (1+2s)\,(1+ \\ &\qquad 2\sum_{j=i}^{n} |\langle v^{(i)}, e_j\rangle| (1+2s)^{2(j-i)+1} f_i(e_j)\Big) \\ &\leq (1+2s)(|\langle v^{(i-1)}, e_{i-1}\rangle| f(e_{i-1}) + \\ &\qquad \sum_{j=i}^{n} (1+2s)^{2(j-i)+3} |\langle v^{(i-1)}, e_j\rangle| f_{i-1}(e_j)) \\ (\text{ setting } i' = i-1) \quad &= \sum_{j=i'}^{n} (1+2s)^{2(j-i')+1} \left|\left\langle v^{(i')}, e_j\right\rangle\right| f_{i'}(e_j) \end{aligned}$$

如所需。

现在令 s 趋于零，可见 $f_1(v^{(1)})$ 满足该引理的结论。□

命题 7. 设 $n \geq 1$ 是一个整数，且 $V = \mathbb{C}^n$。对于任意实数 $\varepsilon > 0$，存在一个范数 $f: V \to \mathbb{R}^+$ 以及一个非零向量$v \in \mathbb{R}^n$，使得：

(1) f 在等价意义下存在唯一的 f-极大的基

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

(2)

$$(2^n - 1 - \varepsilon) f(v) < \sum_{i=1}^{n} |\langle v, e_i\rangle| f(e_i).$$

证明。 固定 $\varepsilon > 0$，并令 $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ 为 V的一组正交归一基。我们将构造一个范数 $f\colon V \to \mathbb{R}^+$，使其唯一的 f-极大的基为 $(e_1, \dots, e_n)$，并满足引理的结论。为此，考虑一个实数 $c \in (0, 1)$ 和一个角 $\alpha \in (0, \pi)$，其具体取值将适当确定。

给定常数 c 和 α，我们定义向量 $u'_k \in V$，其中 $k = 1, 2 \dots, n$，如下:

$$\begin{aligned} u'_1 &= e_1 \\ u'_{k+1} &= \sum_{j=1}^{k} e_j \sin^{j-1}\alpha \cos\alpha + e_{k+1}\sin^k\alpha. \end{aligned}$$

令 $u_k = c^{k-1}u'_k$，并将范数 $f : V \to \mathbb{R}^+$ 定义为:

$$f(v) = \sup\{|\langle v, u_k\rangle| \mid k \le n\}.$$

由注 1 可知，f是一个半范数。由于 $f(e_k) \ge |\langle e_k, u_k\rangle| > 0$，我们再次由注 1 得知，$f$ 是一个范数。此外，由引理 1 可知，$f(v)$ 在 $\mathbb{S}_1$ 上的最大值可在一个与向量 u_k 中的某个向量共线的向量处取得，且等于 $f(v) = \|u_k\|$。由于 $\|u_k\| = c_k$，我们得出结论：极大基的第一个向量是 $e_1 = u_1$。接下来，与 e_1 正交的 V 的子空间 V_1由 $(e_2, \dots, e_n)$ 张成，因此 $f_1 = f \restriction V_1$ 实际上是:

$$f_1(v) = \sup\{|\langle v, u_k - u_1\cos\alpha\rangle| \mid k \le n\}.$$

由于 $\|u_k - u_1 \cos\alpha| = c^{k-1}\sin\alpha$，再次应用引理 1，我们得出 f_1 在 $\mathbb{S}_1$ 上的极大值在 e_2 处取得。通过归纳法，我们可以证明，$(e_1, \dots, e_n)$ 是在等价意义下唯一的 f-极大基。注意:

$$f(e_i) = \langle e_i, u_i\rangle = c^{i-1}\sin^{i-1}\alpha.$$

令 $w_1 > 0$ and $w_i = w_1 \operatorname{tg}^{i-1}\frac{\alpha}{2}$。显然:

$$\begin{aligned} w_i\cos\alpha + w_{i+1}\sin\alpha &= w_i(\cos\alpha + \sin\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}) \\ &= w_i(2\cos^2\alpha/2 - 1 + 2\sin^2\alpha/2) = w_i. \end{aligned}$$

因此，令 $w = \sum_{i=1}^n w_i e_i$，可得

$$\langle w, u_k\rangle = c^{k-1}\langle w, u'_k\rangle = c^{k-1}w_1$$

从而 $|\langle w, u_k\rangle| = c^{k-1}w_1 \le w_1$，当且仅当 $k = 1$ 时等号成立。因此 $f(w) = w_1$。

另一方面:

$$\begin{aligned} w_i f(e_i) &= c^{i-1}w_1 \operatorname{tg}^{i-1}\frac{\alpha}{2}\sin^{i-1}\alpha \\ &= c^{i-1}w_1\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^{i-1} \\ &= 2^{i-1}c^{i-1}w_1\sin^{(2(i-1))}\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

由此可得:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i f(e_i) \geq w_1 \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}[c^{i-1}\sin^{2(i-1)}\frac{\alpha}{2}].$$

显然，当 c 趋于1且 α 趋于 $\pi - 0$时，右侧趋于 $w_1 \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = (2^n - 1) w_1 = (2^n - 1)f(w)$。因此，对于任意$\varepsilon > 0$，我们都可以找到适当的 $c \in (0, 1)$和 $\alpha \in (0, \pi)$，使得$(2^n - 1 - \varepsilon)f(w) < \sum_{i=1}^{n} w_i f(e_i)$。□

5. 基的等价性

定义8。设 f: $V \to \mathbb{R}^+$ 为一个范数。设$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ 为 V 的一个正交归一基，按 f递增排列，即:

$$f(e_1) \leq f(e_2) \leq \cdots \leq f(e_n).$$

(1) 对于常数 $c \in \mathbb{R}^+$，我们称$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ 满足性质 $P_f(c)$，如果对每个 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$，都有:

$$cf\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| f(e_i).$$

(2) 更一般地，对于常数 c_1、c_2、……、$c_n \in \mathbb{R}^+$，我们称$(e_1$、……、$e_n)$ 满足性质 $HP_f(c_1$，c_2，……，$c_n)$，如果对于每个i 以及每个 β_i、β_{i+1}、……、β_n，都有:

$$c_i f\left(\sum_{j=i}^{n} \beta_i e_i\right) \geq \sum_{j=i}^{n} |\beta_i| f(e_i).$$

备注 2. 根据这些概念，引理5指出，存在一个满足 $P_f(2^n - 1)$ 的 f-极大基。此外，由于 f-极大基的每个前缀 $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ 都是其线性张成空间的极大基，因此引理5中的 f-极大基实际上满足 $HP_f(2^n - 1, 2^{n-1} - 1, \ldots, 1)$。

另一方面，引理4指出，每个 f-极小基都满足 $P_f(2^n - 1)$。

显然，如果一个基 $(e_1, \ldots, e_n)$ 满足 $P_f(c)$，那么它也满足 $HP_f(c, c, \ldots, c)$。反之，如果一个正交归一基 $(e_1, \ldots, e_n)$ 满足 $HP_f(c_1, \ldots, c_n)$，那么它满足 $P_f(c_1)$。

引理9。令$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ 和$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ 为 V和 f 上的标准正交基:
$V \to \mathbb{R}^+$ 为满足以下条件的范数:

$$f(b_1) \leq f(b_2) \leq \cdots \leq f(b_n) \quad and$$
$$f(e_1) \leq f(e_2) \leq \cdots \leq f(e_n).$$

那么:

(1) 如果$(b_1, \ldots, b_n)$ 是 f-极小的，那么对于任意 $i \leq n$, $f(b_i) \leq \sqrt{i} f(e_i)$,

(2) 如果$(e_1, e_2, \dots, e_n)$满足 $HP_f(c_1, c_2, \dots, c_n)$，那么对于任意 $i \leq n$，都有 $f(e_i) \leq c_i \sqrt{i} f(b_i)$。

证明。令 $i \leq n$，并注意到 $(b_1, b_2, \dots, b_{i-1})$ 张成 V 中一个 i 维子空间，而 $(e_1, e_2, \dots, e_i)$ 张成 V 中一个 i 维子空间。因此，存在一个非零向量 $b' \in span(e_1, \dots, e_i)$，它与所有向量 $b_1, b_2, \dots, b_{i-1}$ 正交。事实上，显然该方程组：

$$\sum_{j=1}^{i} \alpha_j \langle e_j, b_k \rangle = 0 \text{ for } k \leq i-1$$

这是一个超定方程组。因此它有一个非零解 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i)$，且由于 $e_1, \dots, e_i$ 线性无关，$b' = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j e_j$ 非零。接下来，不失一般性，我们可以且确实假设 $\|b'\| = 1$。于是 $b' \in \mathbb{S}_1$，且 b' 与所有向量 $b_1, \dots, b_{i-1}$ 正交。根据 b_i 的定义，可得：

$$f(b_i) \leq f(b') = f\left(\sum_{j=1}^{i} \alpha_j e_j\right) \leq \sum_{j=1}^{i} |\alpha_j| f(e_j),$$

其中，最后一个不等式由三角不等式得出。最后，根据向量 $e_1, \dots, e_i$ 的排列，对每个 $j \leq i$，都有 $f(e_j) \leq f(e_i)$；由柯西-施瓦茨不等式可得 $\sum_{j=1}^{i} |\alpha_j| \leq \sqrt{i} \sqrt{\sum_{j=1}^{i} |\alpha_j|^2} = \sqrt{i}$。综上可得：

$$f(b_i) \leq \sum_{j=1}^{i} |\alpha_j| f(e_j) \leq \sum_{j=1}^{i} |\alpha_j| f(e_i) \leq \sqrt{i} f(e_i).$$

对于命题的第二部分，我们采用类似的方法。设 $i \leq n$。那么 $(b_1, \dots, b_i)$ 张成一个维数为 i 的线性空间，而 $(e_1, \dots, e_{i-1})$ 张成一个维数为 $i-1$ 的线性空间。因此，如上所述，存在一个非零向量 $v \in span(b_1, \dots, b_i)$，它与所有向量 $e_1, \dots, e_{i-1}$ 正交。不失一般性，我们可以并且确实假设 v 是一个单位向量。由于 v 与 $e_1, \dots, e_{i-1}$ 正交，它属于由 $(e_i, \dots, e_n)$ 张成的线性空间。因此，v 可以写成 $v = \sum_{j=i}^{n} \alpha_j e_j$。根据基 $(e_1, \dots, e_n)$ 的 $HP_f(c_1, \dots, c_n)$，我们得出：

$$c_i f(v) = c_i f\left(\sum_{j=i}^{n} \alpha_j e_j\right) \geq \sum_{j=i}^{n} |\alpha_j| f(e_j) \geq \sum_{j=i}^{n} |\alpha_j| f(e_i) \geq f(e_i),$$

其中，倒数第二个不等式由向量 $(e_1, \dots, e_n)$ 的排序得出，最后一个不等式则由 $\sum_{j=i}^{n} |\alpha_j|^2 = 1$ 这一事实得出，因为 v 是单位向量。

另一方面， $v \in span(b_1, \ldots, b_i)$，因此 $v = \sum_{j=1}^{i} \beta_j b_j$。由于 $\|v\| = 1$，我们有 $\sum_{j=1}^{i} |\beta_j|^2 = 1$。因此，应用三角不等式可得:

$$f(v) = f\left(\sum_{j=1}^{i} \beta_j b_j\right) \leq \sum_{j=1}^{i} |\beta_j| f(b_j) \leq \sum_{j=1}^{i} |\beta_j| f(b_i) \leq \sqrt{i} f(b_i),$$

倒数第二个不等式由（b_1，...，b_n）的顺序得到，最后一个不等式则是柯西-施瓦茨不等式的直接应用。

求和可得:

$$f(e_i) \leq c_i f(v) \leq c_i \sqrt{i} f(b_i)$$

如需证明。 □

推论10。设 f: $V \to \mathbb{R}^+$ 为一个范数，且（b_1，b_2，...，b_n）和（e_1，e_2，...，e_n）为标准正交基，满足:

$$f(b_1) \leq f(b_2) \leq \cdots \leq f(b_n) \quad and$$
$$f(e_1) \leq f(e_2) \leq \cdots \leq f(e_n).$$

（1）若（b_1，...，b_n）和（e_1，...，e_n）是 f-极小的，则

$$\frac{1}{\sqrt{i}} \leq \frac{f(b_i)}{f(e_i)} \leq \sqrt{i}.$$

(2) 如果$(b_1, \ldots, b_n)$是 f-极小且 f-极大的基$(e_1, \ldots, e_n)$，那么$\frac{\sqrt{i}}{(2^{n-i+1}-1)} \leq \frac{f(b_i)}{f(e_i)} \leq \sqrt{i}$。[1]

(3) 如果$(b_1, \ldots, b_n)$和$(e_1, \ldots, e_n)$都是 f-极大的，那么

$$\frac{1}{\sqrt{i}(2^{n-i+1}-1)} \leq \frac{f(b_i)}{f(e_i)} \leq \sqrt{i}(2^{n-i+1}-1).$$

在某些附加假设下，引理9可以反过来表述如下:

命题11. 假设 f: $V \to \mathbb{R}^+$ 是一个范数，且$(b_1, \ldots, b_n)$、$(e_1, \ldots, e_n)$和 $c \geq 1$ 是 V的标准正交基，使得:

$$f(b_1) \leq f(b_2) \leq \cdots \leq f(b_n)$$
$$f(e_1) \leq f(e_2) \leq \cdots \leq f(e_n)$$
$$\forall i (f(e_i)/c \leq f(b_i) \leq c f(e_i)).$$

如果$(b_1, \ldots, b_n)$满足 $H_f(c_1)$，并且还存在 $\alpha \geq 1$ 使得:

$$\forall i \neq j \exists \alpha_{i,j} (|\alpha_{i,j}| < \alpha \ and \ \langle e_i - b_i, e_j - \alpha_{i,j} b_j \rangle = 0),$$

那么$(e_1, \ldots, e_n)$满足 $H_f(\alpha c^2 c_1)$。

证明。由于 $(b_1, \ldots, b_n)$ 满足 $H_f(c_1)$，因此:

$$c_1 f(e_i) \geq \sum_{j=1}^{n} |\langle e_i, b_j \rangle| f(b_j).$$

因此：

$$\begin{aligned} f(b_i) &\geq f(e_i)/c \\ &\geq c_1 f(e_i)/(cc_1) \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} |\langle e_i, b_j\rangle| f(b_j)/c \\ &\geq \frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{n} |\langle e_i, b_j\rangle| f(e_j). \end{aligned}$$

注意，条件 $\langle e_i - b_i, e_j - \alpha_{i,\ j} b_j\rangle = 0$ 可改写为：

$$\langle e_i, e_j\rangle + \overline{\alpha_{i,j}}\langle b_i, b_j\rangle - \langle b_i, e_j\rangle - \overline{\alpha_{i,j}}\langle e_i, b_j\rangle = 0.$$

对于 $i \neq j$，有 $\langle b_i, b_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = 0$，因此对于 $i \neq j$，我们有：

$$|\langle b_i, e_j\rangle| = |\alpha_{i,j}||\langle e_i, b_j\rangle| \leq \alpha|\langle e_i, b_j\rangle|.$$

因此，上述不等式意味着：

$$f(b_i) \geq \frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{n} |\langle e_i, b_j\rangle| f(e_j) \geq \frac{1}{\alpha c^2}\sum_{j=1}^{n} |\langle b_i, e_j\rangle| f(e_j).$$

因此：

$$\alpha c^2 f(b_i) \geq \sum_{j=1}^{n} |\langle b_i, e_j\rangle| f(e_j).$$

最后，对于任意 v，上述不等式以及基 $(b_1, \ldots, b_n)$ 满足 $H_f(c_1)$，意味着：

$$\begin{aligned} \alpha c^2 c_1 f(v) &\geq \alpha c^2 \sum_{i=1}^{n} |\langle v, b_i\rangle| f(b_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\langle v, b_i\rangle||\langle b_i, e_j\rangle| f(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} f(e_j)\sum_{i=1}^{n} |\langle v, b_i\rangle\langle b_i, e_j\rangle| \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} f(e_j)\left|\sum_{i=1}^{n}\langle v, b_i\rangle\langle b_i, e_j\rangle\right| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |\langle v, e_j\rangle| f(e_j). \end{aligned}$$

这证明了 $(e_1, \ldots, e_n)$ 满足 $H_f(\alpha c^2 c_1)$。

□

6. 开放问题

范数的 f-极小基和 f-极大基的定义表明，可以采用一种简单的贪心策略来寻找满足下列不等式的正交归一基 $(e_1, \ldots, e_n)$:

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) \geq \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| f(e_i).$$

当然，这种方法是否可行，取决于能否高效地求解这个优化问题:

$$\max_{v \in \mathbb{S}_1} f(v) \text{ or } \min_{v \in \mathbb{S}_1} f(v).$$

然而，由于每个（半）范数 f 都是凸的，且 $\mathbb{S}_1$ 是紧的，尤其是第二个问题已经得到了充分研究，而且有现成的高效方法可供求解。

然而，贪心方法的问题在于，常数 $2^n - 1$ 会随 n 呈指数增长，而且通常很难证明精确的界限。正如我们在引理 6 和引理 7 中所证明的，在所提出的贪心策略下，常数 $2^n - 1$ 无法进一步改进。因此，自然会产生这样一个问题：如何在保留其所蕴含的基的清晰结构的同时改进这个常数? 在这方面，我们考虑以下理论问题。

首先，对于一个自然数 $n \geq 1$，以及一个带内积的线性向量空间 V，其中 $V = \mathbb{C}^n$ 或 $V = \mathbb{R}^n$。我们定义 $c_n^{\perp} := c_n^{\perp}(V)$为满足以下条件的最小实数: 对于每个范数 $f: \ V \to \mathbb{R}^+$，都存在一个正交归一基（$b_1, \ldots, b_n$），使得:

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i) \geq \frac{1}{c_n^{\perp}} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| f(b_i) \text{ for all } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}.$$

已知，对于 $V = \mathbb{R}^2$、 $c_2^{\perp} = 2$、 [6]。 [6]中的构造依赖于定义适当的面积，并利用连续性原理证明其存在。是否有更明确的方法来定义这样的基? 据作者所知， $n = 2$ 中的技巧无法推广到更高维的情形。

其次，对于自然数 $n \geq 1$，以及带内积的线性向量空间 V，其中 $V = \mathbb{C}^n$ 或 $V = \mathbb{R}^n$。我们将 $c_n^{\angle} = c_n^{\angle}(V)$ 定义为满足以下条件的最小实数: 对于每个范数 $f: \ V \to \mathbb{R}^+$，都存在由单位向量组成的基 $(b_1, \ldots, b_n)$，使得:

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i) \geq \frac{1}{c_n^{\angle}} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| f(b_i) \text{ for all } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}.$$

已知，对于 $V = \mathbb{R}^2, c_2^{\angle} = \frac{3}{2}$, [1]。这个问题与约翰定理 [5] 密切相关，而约翰定理依赖于体积优化。

这两个问题可以统一表述如下。设 $n \geq 1$，并且 $V = \mathbb{C}^n$ 或 $V = \mathbb{R}^n$ 和 $\alpha \in [0, 1]$。定义 $c_n^{\alpha} := c_n^{\alpha}(V)$ 为满足以下条件的最小实数：对于每个范数 $f : V \to \mathbb{R}^+$，都存在一组由单位向量组成的基 $(b_1, \ldots, b_n)$，使得：

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\right) \geq \frac{1}{c_n^{\alpha}} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| f(b_i) \text{ for all } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$$

满足：$|\langle b_i, b_j \rangle| \leq \alpha$ 对所有 $i \neq j$.

在此框架下，$c_n^{\perp}(V) = c_n^0(V)$ 和 $c_n^{\angle}(V) = c_n^1(V)$。我们认为，改变 α 的自由度在某些应用中可能很有用；在这些应用中，这类不等式需要与其他经典不等式结合使用，而后者要求控制基向量的标量积。

参考文献

[1] 埃德加·阿斯普隆德。平面对称凸体与平行四边形的比较。*Marh. Scand.*, 8:171–180，1960。[2] 菲利普·沙朗捷和伊夫·迪潘。极值基、几何分离域及其应用。*Algebra and Analysis*，26(1):196–269，2014。[3] 托斯滕·赫费尔。关于依赖卡特林多重型的有限型凸域上 $\overline{\partial}$ 的 H¨older 估计。*Mathematische Zeitschrift*, 242:367– 398，2002。[4] 托斯滕·赫费尔。关于有限型凸域上 $\overline{\partial}$ 的极值基与 H¨older 估计。*Michigan Math. J.*，52:573–602，2004。[5] 弗里茨·约翰。带有不等式辅助条件的极值问题。载于为纪念 *R. Courant* 六十寿辰而编的研究与论文集，第 187–204 页。Interscience Publishers Inc.，1948。[6] 马雷克·拉萨克。用轴对称体逼近平面凸体。*Proceedings of the American Mathematical Society*, 130(10):3075–3084，2002。[7] 杰弗里·D. 麦克尼尔。有限型凸域。*Journal of FunctionalAnalysis*，108:361–373，1992。[8] 杰弗里·D. 麦克尼尔。凸域伯格曼核的估计。*Advances in Mathematics*，109:108–139，1994。[9] NIKOLAI NIKOLOV 和彼得·普弗卢格。$\mathbb{C}^n$中凸域的伯格曼核与度量估计。*Annales Polonici Mathematici*，81(1):73–78，2003。[10] NIKOLAI NIKOLOV、彼得·普弗卢格和帕斯卡尔·J. 托马。关于 $\mathbb{C}$-凸域的不同极值基。***Proceedings of the American Mathematical Society***，141(9):3223–3230，2013。[11] NIKOLAI NIKOLOV、彼得·普弗卢格和弗沃济米日·兹沃内克。关于 $\mathbb{C}$-凸域上不变度量的估计。*Transactions of the American MathematicalSociety*，363(12):6245–6256，2011。[12] 王洪宇。有限型凸域上的小林度量估计与格罗莫夫双曲性，2022年。

S. Gerdjikov，索非亚大学数学与信息学学院，詹姆斯·布尔切尔大道5号，1164 索非亚，保加利亚，

信息与通信技术研究所，保加利亚科学院，Acad. G. Bonchev 2，1113 索非亚，保加利亚

N. Nikolov，保加利亚科学院数学与信息学研究所，Acad. G. Bonchev 8，1113 索非亚，保加利亚；国家图书馆学与信息技术大学信息科学学院，Shipchenski prohod 69A，1574 索非亚，保加利亚

电子邮箱地址：nik@math.bas.bg