arXiv:2303.03213v1 [math.QA] 6 Mar 2023

可因子化霍普夫代数的构造

KUN ZHOU

Abstract. 我们关注如何从霍普夫代数构造新的模张量范畴这一问题。为此，我们首先给出一种构造可因子化霍普夫代数的一般方法。随后，我们运用该方法构造两族既非量子群也非 Drinfel'd 双的带状可因子化霍普夫代数。其中一族是点霍普夫代数，它们给出非半单模张量范畴；另一族是 C^*-霍普夫代数，它们给出新的酉模张量范畴。最后，我们确定这些酉模张量范畴的融合环。

1. Introduction

模张量范畴（MTC）是一种编织有限范畴，带有一些额外的代数结构（对偶性、扭结和非退化公理，参见[4, 21]）。它提供了一个三维拓扑量子场论，尤其能给出纽结和三维流形的不变量（参见[18, 21]）。过去几十年来，Freedman 和 Kitaev 提出了将酉模张量范畴应用于量子计算的设想，并通过一系列论文加以发展（参见 [14, 15]）。因此，近年来模张量范畴受到深入研究。模张量范畴可分为半单情形和非半单情形，两者均有许多作者研究（例如[21, 11, 8, 16, 23]）。众所周知，模张量范畴这一概念可以视为带状可因子化霍普夫代数的范畴化推广。更确切地说，半单模张量范畴可视为半单带状可因子化霍普夫代数的范畴化推广，而非半单模张量范畴则可视为非半单带状可因子化霍普夫代数的范畴化推广。关于模张量范畴的许多开放问题以及模张量范畴的分类，使得构造模张量范畴至关重要。许多作者研究了模张量范畴的构造（例如 [8, 6, 5]）。据我们所知，已知由霍普夫代数产生的模张量范畴均来自 Drinfel'd 双或小量子群。因此，构造并非来自 Drinfel'd 双或小量子群的模张量范畴，或许能为模张量范畴的研究提供新思路。为此，我们首先给出一种构造可因子化霍普夫代数的一般方法。利用该方法，我们构造了大量可因子化

2020 *Mathematics Subject Classification.* 16T05, 18M20, 16T25.*Key words and phrases.* 可因子化霍普夫代数，模张量范畴，阿贝尔扩张，Drinfel'd 双，n-秩 Taft 代数，C^*-霍普夫代数。Kun Zhou：北京雁栖湖应用数学研究院，中国北京 101408。电子邮箱：kzhou@bimsa.cn。

既非量子群也非 Drinfel'd 双的带状霍普夫代数。特别地，我们构造了半单模张量范畴（尤其是酉模张量范畴）和非半单模张量范畴。

我们关于可因子化霍普夫代数构造的想法如下。给定一个有限维霍普夫代数 H，我们考察 $D(H)$ 的商，使其成为可因子化霍普夫代数。困难之处在于如何选择霍普夫理想 I（分别为霍普夫

$*$ 理想 I） $D(H)$。为克服这一困难，我们考察 $D(H)$ 的中心群样元，并利用霍普夫代数扩张来实现这一点。众所周知，每个可因子化霍普夫代数都是某个 Drinfel'd 双的商，因此从这个意义上说，我们的构造方法是自然的。

本文的组织如下。第 2 节介绍一些记号和预备结果。随后，我们在第 3 节给出一种获得可因子化霍普夫代数的一般方法。第 4 节分为两个小节。在第 4.1 小节中，我们应用该方法构造两族带状可因子化霍普夫代数。在第 4.2 小节中，我们确定一族由 C^*-霍普夫代数产生的新酉模张量范畴的融合环。

约定 1.1。 除非另有说明，本文均在$\Bbbk$ 特征为 0 的代数闭域上工作。本文中的所有霍普夫代数均为有限维。符号 δ表示经典的克罗内克符号。关于霍普夫代数（分别为张量范畴）理论，我们参考 [20, 7] （分别为 [4]）。对于霍普夫代数 H， H 的对径记为 S。对于霍普夫代数 H， H 中的群样元构成的群记为 $G(H)$。

2. Preliminaries

本节汇集一些必要的概念和结果。

2.1. 模张量范畴与可因子化Hopf代数。模张量范畴是一个带状且有限阿贝尔的 $\Bbbk$-线性范畴 $\mathcal{C}$，满足非退化条件，即若对任意对象 W 有 $c_{V,\,W}\circ c_{W,\,V}=\mathrm{Id}_{W\otimes V}$ $V\cong\mathbb{I}^n$，则存在某个 $n\in\mathbb{N}$ （见 [11, 21]）。若此外 $\mathcal{C}$ 是半单且酉的，这里酉是指存在共轭 $*\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}$，使得对任意两个对象 $X,Y\in\mathcal{C}$，厄米型 $(f,g)=tr(fg^*)$ 在 Hom空间(X,Y) 上正定，则称 $\mathcal{C}$ 为酉模张量范畴（见 [8]）。

可因子化霍普夫代数是拟三角霍普夫代数中的一个特殊类别。回顾一下，拟三角霍普夫代数是一个有序对 (H,R)，其中 H 是一个定义在 $\Bbbk$ 上的霍普夫代数，而 $R=\sum R^{(1)}\otimes R^{(2)}$ 是 $H\otimes H$ 中的一个可逆元，使得

$$(\Delta\otimes\mathrm{Id})(R)=R_{13}R_{23},\ (\mathrm{Id}\otimes\Delta)(R)=R_{13}R_{12},\ \Delta^{op}(h)R=R\Delta(h),$$

对于 $h\in H$。根据定义， $R_{12}=\sum R^{(1)}\otimes R^{(2)}\otimes 1$，类似地， R_{13} 和R_{23}。对于拟三角霍普夫代数 (H,R)，存在霍普夫代数映射 $f_{R_{21}R}\colon H^{*cop}\to H$ 和 $g_{R_{21}R}\colon H^{*op}\to H$，分别定义为

$$f_{R_{21}R}(a):=(a\otimes\mathrm{Id})(R_{21}R),\ \ g_{R_{21}R}(a):=(\mathrm{Id}\otimes a)(R_{21}R),\ f\in H^*.$$

可因子化Hopf代数是满足 $f_{R_{21}R}$（或等价地， $g_{R_{21}R}$）为线性同构的拟三角霍普夫代数（H, R）。

2.2. 霍普夫正合序列与 Drinfel'd 双。

定义 2.1. 霍普夫代数的短正合序列是由霍普夫代数及霍普夫代数映射组成的序列

$$K \xrightarrow{\iota} H \xrightarrow{\pi} \overline{H} \tag{2.1}$$

使得

(i) ι是单射，(ii) π 是满射，(iii) Ker(π) $= HK^+$,
K^+ 是 K的余单位的核。

取一个正合列（2.1），则 K 是 H的正规霍普夫子代数。反之，若 K 是霍普夫代数 H的正规霍普夫子代数，则商余代数$H = H/HK^+ = H/K^+H$ 是一个商霍普夫代数，且 H 构成一个扩张（2.1），其中 ι 和 π 是典范映射。若 H 构成一个扩张（2.1），且H 是有限维的，则由霍普夫子代数的著名"正规基"定理（参见 H），有 dim($=$)=dim(K)dim($\overline{H}$)。 [10]

上文的扩张（2.1）若满足 K 是交换的，且 $\overline{H}$ 是余交换的，则称其为阿贝尔扩张。在这种情况下，我们知道扩张（2.1）可以写成如下形式：

$$\Bbbk^G \xrightarrow{\iota} H \xrightarrow{\pi} \Bbbk F,$$

其中 G, F 是有限群。Masuoka 对阿贝尔扩张进行了分类（见[2, 命题 1.5]），上述 H 可表示为 $\Bbbk^G\#_\sigma\ {}_\tau\Bbbk F$。为描述 $\Bbbk^G\#_\sigma\ {}_\tau\Bbbk F$，我们需要以下数据

(i) 群的匹配对，即四元组（$F, G, \triangleleft, \triangleright$），其中 $G \xleftarrow{\triangleleft} G\times F \xrightarrow{\triangleright} F$ 是群在集合上的作用，并满足以下条件

$$g \triangleright (ff') = (g \triangleright f)((g \triangleleft f) \triangleright f'), \quad (gg') \triangleleft f = (g \triangleleft (g' \triangleright f))(g' \triangleleft f),$$

对于 $g, g' \in G$ 和 $f, f' \in F$。

(ii) σ： $G \times F \times F \to \Bbbk^\times$ 是一个映射，满足

$$\sigma(g \triangleleft f, f', f'')\sigma(g, f, f'f'') = \sigma(g, f, f')\sigma(g, ff', f'')$$

并且 $\sigma(1, f, f') = \sigma(g, 1, f') = \sigma(g, f, 1) = 1$，其中 $g \in G$ 和 $f, f', f'' \in F$。

(iii) τ： $G \times G \times F \to \Bbbk^\times$ 是一个满足以下条件的映射

$$\tau(gg', g'', f)\tau(g, g', g'' \triangleright f) = \tau(g', g'', f)\tau(g, g'g'', f)$$

且对 g、g'、$g'' \in G$和 $f \in F$，有 $\tau(g, g', 1) = \tau(g, 1, f) = \tau(1, g', f)$。此外， σ 和 τ 满足以下相容条件

$$\sigma(gg', f, f')\tau(g, g', ff') = \sigma(g, g' \triangleright f, (g' \triangleleft f) \triangleright f')\sigma(g', f, f')$$
$$\tau(g, g', f)\tau(g \triangleleft (g' \triangleleft f), g' \triangleleft f, f'),$$

对于 $g, g', g'' \in G$和 $f, f', f'' \in F$。

定义 2.2. [3, 第 2 节。2] 霍普夫代数 $\Bbbk^G\#_\sigma\,{}_\tau\Bbbk F$ 作为向量空间等于 $\Bbbk^G\otimes\Bbbk F$，我们将 $a\otimes x$ 写作 $a\#x$。乘法、余乘法由下式给出

$$(e_g\#f).(e_{g'}\#f')=\delta_{g\triangleleft f,g'}\;\sigma(g,f,f')\;e_g\#(ff'),$$
$$\Delta(e_g\#f)=\sum_{g'g''=g}\tau(g',g'',f)\;e_{g'}\#g''\triangleright f\otimes e_{g''}\#f,$$

单位元为 $\sum_{g\in G}e_g\#1$，余单位为 $\epsilon(e_g\#f)=\delta_{g,\,1}$，对径为

$$S(e_g\#f)=\sigma(g^{-1},g\triangleright f,(g\triangleright f)^{-1})^{-1}\;\tau(g^{-1},g,f)^{-1}\;e_{(g\triangleleft f)^{-1}}\#(g\triangleright f)^{-1}.$$

回顾一下，C^*-霍普夫代数是一个半单的 $*$-霍普夫代数 H 在 $\mathbb{C}$ 上，满足H，其底层的 $*$-代数结构是一个 C^*-代数。此外，如果 (H,R) 是可因子化霍普夫代数，那么 H 在有限维希尔伯特空间上的 $*$表示所构成的张量范畴是一个幺正模张量范畴。对于阿贝尔扩张 $\mathbb{C}^G\#_\sigma\,{}_\tau\mathbb{C}F$，已知 $\mathbb{C}^G\#_\sigma\,{}_\tau\mathbb{C}F$ 是带有如下对合的 C^*-霍普夫代数

$$(e_g\#f)^*=\sigma(g,f,f^{-1})e_{g\triangleleft f}\#f^{-1}$$

如果 $|\sigma|=1$ 且 $|\tau|=1$ ([9, 定理 3])。下面的例子将用于构造幺正模张量范畴。

例 2.3。设 $n\in\mathbb{N}$。属于 $\Bbbk^G\#_\sigma\,{}_\tau\Bbbk F$ 的霍普夫代数 H 记作$A(G,\sigma,n)$，如果 H 的数据 $(\triangleright,\tau)$ 是平凡的，即 $g\triangleright f=1$ 和 $\tau=1$，其中 $g\in G$、$f\in F$，并且满足以下条件:

(i) $F=\mathbb{Z}_n=\langle x|\;x^n=1\rangle$; (ii) 存在一个阶为 n 的 $b\in G$，使得 $g\triangleleft x=bgb^{-1}$。

$A(G,\sigma,n)$ 的一个特殊情形如下:

例2.4. 设 p、q 是两个奇素数，满足 $p\equiv1$（模 q），并设ω 是 $\Bbbk$ 中的一个本原 q 次单位根。假设 $t\in\mathbb{N}$ 满足 $t^q\equiv1$（模 p）且$t\not\equiv1$（模 p）。令 $0\le l\le(q-1)$，则霍普夫代数 $\mathscr{A}_l$ [19, 引理1.3.9]属于 $\Bbbk^G\#_\sigma\,{}_\tau\Bbbk F$。根据定义，$\mathscr{A}_l$ 的数据 $(G,F,\triangleleft,\triangleright,\sigma,\tau)$ 如下给出

(i) $G=\mathbb{Z}_p\rtimes\mathbb{Z}_q=\langle a,b|\;a^p=b^q=1,bab^{-1}=a^t\rangle$, $F=\mathbb{Z}_q=\langle g|\;g^q=1\rangle$。作用 $\triangleright$ 是平凡的，且 $a\triangleleft g^i=a^{t^i},b\triangleleft g^i=b$，其中 $0\le i\le q-1$。(ii) $\sigma(a^ib^j,g^m,g^n)=w^{jlq_{mn}}$，其中 q_{mn} 是 $m+n$ 除以 q 时的商，且 $1\le i\le p-1,0\le j,m,n\le q-1$。(iii) 对于 $g,g'\in G$ 和 $f\in F$，$\tau(g,g',f)=1$。

为了构造非半单模张量范畴，我们回顾 n-秩 Taft 代数的定义，该定义见于[17, 第 5]节。设 $n\in\mathbb{N}^*$，并令 $M=\{(i,j)|\;1\le i,j\le n\}$。令 $\theta\colon M\times M\longrightarrow\Bbbk$ 为如下定义的映射:

$$\theta(i,j)=\begin{cases}q & i>j\\ 1 & i=j\\ q^{-1} & i<j\end{cases}.$$

设 q 是一个本原 l 次单位根。那么， n-秩 Taft 代数 $\overline{\mathscr{A}}_q(n)$ 作为代数由 $x_1,...,x_n$ 和 $g_1,...,g_n$ 生成，其关系为

$$g_ig_j = g_jg_i,\ g_i^l = 1,\ g_ix_j = \theta(i,j)q^{\delta_{i,j}}x_jg_i,\ x_ix_j = \theta(i,j)x_jx_i,\ x_i^l = 0.$$

余乘法、余单位和对径分别定义为

$$\Delta(g_i) = g_i \otimes g_i,\ \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + g_i \otimes x_i,$$
$$\epsilon(g_i) = 1,\ \epsilon(x_i) = 0,$$
$$S(g_i) = g_i^{-1}, S(x_i) = -g_i^{-1}x_i,$$

其中 $1 \le i$、 $j \le n$。当 $n = 1$、 $\overline{\mathscr{A}}_q$ (1) 是 Taft 代数。

设 H 是域 $\Bbbk$ 上的霍普夫代数。回顾 H 的 Drinfel'd 双的定义，它作为余代数为 $D(H) = (H^*)^{cop} \otimes H$。 $D(H)$ 的乘法由 $(f \otimes h)(g \otimes k) = f[h_{(1)} \rightharpoonup g \leftharpoonup S^{-1}(h_{(3)})] \otimes h_{(2)}k$ 给出，其中对于 a、 b、 $c \in H$，有 f、 $g \in H^*$、 h、 $k \in H$ 和 $\langle a \rightharpoonup g \leftharpoonup b$、 $c\rangle = \langle g$、 $bca\rangle$。为方便起见，在下文中我们将 fh 记作 $f \otimes h$。设 $\mathcal{R}$ 是 $D(H)$ 的标准通用 $\mathcal{R}$- 矩阵。以下结果见 [13, 定理 3]。

定理 2.5. 设 g 和 α 分别是 H 和 H^*的特征类群状元。那么，$(D(H)$ $\mathcal{R})$ 有缎带元，当且仅当存在 $a \in G(H)$ 和 $\beta \in G(H^*)$，使得

(i) $a^2 = g$ *and* $\beta^2 = \alpha$;
(ii) $S^2(h) = a(\beta \rightharpoonup h \leftharpoonup \beta^{-1})a^{-1},\ h \in H$.

3. A way to construct factorizable Hopf algebras

本节旨在给出一种构造可因子化霍普夫代数的一般方法。以下内容中，假设 H 是有限维霍普夫代数。若 $g \in G(H)$，我们将 $|g|$ 记为 g 的阶，并将 $\langle g\rangle$ 记为由 g生成的群代数。令 S_n 为 n次对称群。设 (H, R) 是拟三角霍普夫代数，且 $\pi: H \to K$ 是满射霍普夫映射。那么，$(K, (\pi \otimes \pi)(R))$ 也是拟三角霍普夫代数。特别地，若 I 是 H 的霍普夫理想，则 $(H/I, \overline{R})$ 也是拟三角霍普夫代数，其中 $\overline{R}$ 通过自然商映射 $\pi(h) = h + I$ 对 $h \in H$定义。为方便起见，对于霍普夫代数 K，我们将 K^+ 记作 $\mathrm{Ker}\,\epsilon$。以下定理是本节的主要结果。

定理 3.1。假设 n 是奇数，且 $x \in G(H)$ 的阶为 n。如果 $\{a_i|\ 1 \le i \le m\} \subseteq H$ 且 $\chi \in G(H^*)$ σ，则存在 $\tau \in S_m$ 使得

(i) $xa_i = a_{\sigma(i)}x$ *and* $\{a_ix^j|\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$ *is linear basis of* H;
(ii) $a_i \leftharpoonup \chi = a_{\tau^{-1}(i)}$ *and* $\chi \rightharpoonup a_i = a_{\tau^{-1}\circ\sigma^{-1}(i)}$;
(iii) $\chi(x)$ *is primitive* n*-th root of unity and* $|\chi|$=n;

$\langle\chi x\rangle \subseteq D(H)$ 是正规子 Hopf 代数，且 $(D(H)/I, \overline{\mathcal{R}})$ 是可因子化Hopf代数，其中 $I = D(H)\langle\chi x\rangle^+$ 和 $\mathcal{R}$ 是 $D(H)$ 的标准通用 $\mathcal{R}$-矩阵。

我们将引入以下引理来证明上述定理。

引理 3.2。 假设 H 满足定理 3.1的条件。记 $\{E_{a_ix^j} | \ 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n\}$ 为 $\{a_ix^j | \ 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n\}$的对偶基。则有以下等式成立：

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma, \quad \text{(ii)} \\ &\chi E_{a_ix^j} = \chi(x)^j E_{a_{\tau(i)}x^j}, \quad \text{(iii)} \\ &E_{a_ix^j}\chi = \chi(x)^j E_{a_{\sigma\circ\tau(i)}x^j}, \end{aligned}$$

其中 $1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$。

证明。由于 $(\chi \rightharpoonup a_i) \leftharpoonup \chi = \chi \rightharpoonup (a_i \leftharpoonup \chi)$，我们知道（i）。直接地，我们有

$$\begin{aligned} \chi E_{a_ix^j}(a_kx^l) &= E_{a_ix^j}[(a_kx^l) \leftharpoonup \chi] \\ &= E_{a_ix^j}[(a_k \leftharpoonup \chi)x^l]\chi(x)^l \\ &= \chi(x)^j \delta_{\tau(i),k}\delta_{j,l}, \end{aligned}$$

我们有（ii）。由于

$$\begin{aligned} E_{a_ix^j}\chi &= E_{a_ix^j}[\chi \rightharpoonup (a_kx^l)] \\ &= E_{a_ix^j}[(\chi \rightharpoonup a_k)x^l]\chi(x)^l \\ &= \chi(x)^j \delta_{\sigma\circ\tau(i),k}\delta_{j,l}, \end{aligned}$$

我们得到（iii）。 □

假设 I 是 $D(H)$和 $a \in D(H)$的霍普夫理想。为简便起见，我们将 a 记作 $a + I$ 在$D(H)/I$ 中。

引理 3.3。 假设 H 满足定理 3.1的条件。那么

(i) $\chi x \in Z(D(H))$，其中 $Z(D(H))$是 $D(H)$的中心。(ii) $\{a_iE_{a_jx^k} | \ 1 \leq i, j \leq m, \ 1 \leq k \leq n\}$ 是 $D(H)/I$的线性基；(iii) $\{E_{a_ix^j}a_k | \ 1 \leq i, k \leq m, \ 1 \leq j \leq n\}$ 是 $D(H)/I$的线性基。

证明。为证明(i)，我们只需证明对于 $1 \leq i \leq m$、 $1 \leq j \leq n$， $a_i(\chi x) = (\chi x)a_i$ 以及 $E_{a_ix^j}(\chi x) = (\chi x)E_{a_ix^j}$。直接可得

$$\begin{aligned} a_i(\chi x) &= \chi(\chi^{-1} \rightharpoonup a_i \leftharpoonup \chi)x \\ &= \chi(a_{\sigma\circ\tau(i)} \leftharpoonup \chi)x \\ &= \chi a_{\sigma(i)}x = (\chi x)a_i. \end{aligned}$$

由引理 3.2 的 (ii)-(iii)，我们得到 $E_{a_ix^j}(\chi x) = \chi(x)^j E_{a_{\sigma\circ\tau(i)}x^j}x$ 以及 $(\chi x)E_{a_ix^j} = \chi(x)^j xE_{a_{\tau(i)}x^j}$。接下来，我们证明 $E_{a_{\sigma\circ\tau(i)}x^j}x = xE_{a_{\tau(i)}x^j}$。根据定义，我们知道 $xE_{a_{\tau(i)}x^j} = (x \rightharpoonup E_{a_{\tau(i)}x^j} \leftharpoonup x^{-1})x$。注意到 $x^{-1}a_k = a_{\sigma^{-1}(k)}x^{-1}$ ，因此 $(x \rightharpoonup E_{a_{\tau(i)}x^j} \leftharpoonup x^{-1}) = E_{a_{\sigma\circ\tau(i)}x^j}$。这意味着 $E_{a_{\sigma\circ\tau(i)}x^j}x = xE_{a_{\tau(i)}x^j}$。

由于我们已证明 $\chi x \in Z(D(H))$，因此我们知道 $\langle \chi x \rangle \xrightarrow{\iota} D(H) \xrightarrow{\pi} D(H)/I$ 是正合列。因此 $\dim(D(H)/I) = \dim(D(H))n$。记 V 为由 $\{a_iE_{a_jx^k} | \ 1 \leq i, j \leq m, \ 1 \leq k \leq n\}$张成的线性子空间。于是 $\dim(V) \leq \dim(D(H))n$。

注意， $a_i x^j E_{a_k x^l} = \chi(x)^{-jl} a_i E_{a_k x^l}$ 属于 $D(H)/I$ 由引理 3.2可知，因此 $V = D(H)/I$。由维数关系可知 (ii)。类似地，我们有 (iii)。□

定理 **3.1** 的证明。 由引理3.3，我们知道 $\langle \chi x \rangle$ 是正规子 Hopf 代数。为了完成证明，我们将证明 $g_{\overline{\mathcal{R}_{21}\mathcal{R}}}$ 是满射。根据定义，我们知道

$$\mathcal{R}_{21}\mathcal{R} = \sum_{1\le i,k\le m} \sum_{1\le j,l\le n} E_{a_k x^l} a_i x^j \otimes a_k x^l E_{a_i x^j}.$$

记 ω 为 $\chi(x)$。由于 $x = \chi^{-1}$ 属于 $D(H)/I$ 且 $\chi^{-l} E_{a_i x^j} = w^{-jl} E_{a_{\tau^{-l}(i)} x^j}$ 根据引理3.2，可得

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{R}_{21}\mathcal{R}} &= \sum_{1\le i,k\le m} \sum_{1\le j,l\le n} E_{a_k x^l} a_i x^j \otimes \omega^{-jl} a_k E_{a_{\tau^{-l}(i)} x^j} \\ &= \sum_{1\le i,k\le m} \sum_{1\le j,l\le n} (E_{a_k x^{-l}})(a_{\tau^{-l}(i)}) x^j \otimes \omega^{jl} a_k E_{a_i x^j}.\end{aligned}$$

由引理 3.3 的 (ii)， $\{a_i E_{a_j x^k} |\ 1 \le i,j \le m,\ 1 \le k \le n\}$ 是 $D(H)/I$的线性基。记其对偶基为 $\{A(i,j,k) |\ 1 \le i,j \le m,\ 1 \le k \le n\}$。根据定义， $g_{\overline{\mathcal{R}_{21}\mathcal{R}}}(A(k,i,j)) = \sum_{1\le l\le n} \omega^{jl}(E_{a_k x^{-l}})(a_{\tau^{-l}(i)}) x^j$。由于对于 $1 \le i \le m$， $x a_i = a_{\sigma(i)} x$ ，我们有$a_{\tau^{-l}(i)} x^j = x^j a_{\sigma^{-j}\circ\tau^{-l}(i)}$。因此

$$\begin{aligned} g_{\overline{\mathcal{R}_{21}\mathcal{R}}}(A(k,i,j)) &= \sum_{1\le l\le n} \omega^{jl}(E_{a_k x^{-l}}) x^j (a_{\sigma^{-j}\circ\tau^{-l}(i)}) \\ &= \sum_{1\le l\le n} \omega^{jl}(E_{a_k x^{-l}}) \chi^{-j}(a_{\sigma^{-j}\circ\tau^{-l}(i)}) \\ &= \sum_{1\le l\le n} \omega^{jl}[\omega^{jl} E_{a_{(\tau\circ\sigma)^{-j}(k)} x^{-l}}](a_{\sigma^{-j}\circ\tau^{-l}(i)}) \quad \text{(Lemma 3.2)} \\ &= \sum_{1\le l\le n} \omega^{2jl}[E_{a_{(\tau\circ\sigma)^{-j}(k)} x^{-l}}](a_{\sigma^{-j}\circ\tau^{-l}(i)}). \end{aligned}$$

注意到 $\sigma\tau = \tau\sigma$ 由引理 3.2，我们知道

$$g_{\overline{\mathcal{R}_{21}\mathcal{R}}}(A((\tau\circ\sigma)^j(k), \sigma^j(i), j)) = \sum_{1\le l\le n} \omega^{2jl}[E_{a_k x^{-l}}](a_{\tau^{-l}(i)}).$$

由于 n 是奇数，我们知道 ω^2 是 n 次本原单位根。这意味着

$$\sum_{1\le j\le n} \omega^{-2jl'} g_{\overline{\mathcal{R}_{21}\mathcal{R}}}(A((\tau\circ\sigma)^j(k), \sigma^j(i), j)) = n[E_{a_k x^{-l'}}](a_{\tau^{-l'}(i)}),$$

其中 $1 \le l' \le n$。由于引理 3.3 以及上述 $i \in \{1, ..., m\}$ 是任意的，我们知道 $g_{\overline{\mathcal{R}_{21}\mathcal{R}}}$ 是满射。□

为了更灵活地运用定理 3.1 ，我们给出以下结果。

推论 3.4. 假设 n 是奇数且 $x \in G(H)$ 的阶为 n。若 $\{a_i |\ 1 \le i \le m\} \subseteq H$ 且 $\chi \in G(H^*)$ σ，则存在 $\tau \in S_m$ 使得

(i) $x a_i = a_{\sigma(i)} x$ *and* $\{a_i x^j |\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$ *is linear basis of* H*;*

(ii) $\chi E_{a_i x^j} = \chi(x)^j E_{a_{\tau(i)} x^j}$且 $E_{a_i x^j}\chi = \chi(x)^j E_{a_{\sigma\circ\tau(i)} x^j}$，(iii) $\chi(x)$ 是 n 次本原单位根且 $|\chi|=n$;

那么 $\langle \chi x\rangle \subseteq D(H)$ 是正规子 Hopf 代数，而 $(D(H)/I,\overline{\mathcal{R}})$ 是可因子化Hopf代数，其中 $I = D(H)\langle x\rangle^+$ 和 $\mathcal{R}$ 是 $D(H)$ 的标准通用 $\mathcal{R}$-矩阵。

证明。 注意到，条件 (ii) 等价于定理 3.1的条件 (ii)，这由引理 3.2的证明可知。 □

4. Some applications

本节中，我们首先应用定理 3.1 构造两个族的带状可因子化霍普夫代数，然后确定由其中一族产生的酉模张量范畴的融合环。

4.1. 两族可因子化霍普夫代数。回顾一下，我们已在例 2.3 中定义了霍普夫代数 $A(G,\sigma,n)$。令 $\chi: A(G,\sigma,n) \to \Bbbk$ 为由 $\chi(e_g) = \delta_{g,b}$ 和 $\chi(x) = \omega$确定的代数映射，其中 ω 是 n 次单位根。于是我们有

命题 4.1. 假设 n 是奇数。那么，霍普夫代数 $D(A(G,\sigma,n))/I$ 是可因子化霍普夫代数，其维数为 $n|G|^2$，其中 $I = D(A(G,\sigma,n))\langle \chi x\rangle^+$。

证明. 我们只需证明 $A(G,\sigma,n)$ 满足定理 3.1 的条件。由于 $\{e_g x^j |\ g\in G, 1\le j\le q\}$ 是 $A(G,\sigma,n)$ 和 $xe_g = e_{g\triangleleft x^{-1}}x$ 的线性基，定理 3.1 的条件 (i) 成立。定义 σ,τ: $G\longrightarrow G$，使得 $\sigma(g) = g\triangleleft x^{-1}$ 且 $\tau(g) = bg$，其中 $g\in G$。由此可见，对于 $g\in G$，$e_g \leftharpoonup \chi = e_{\tau^{-1}}(g)$ 且 $\chi \rightharpoonup e_g = e_{\tau^{-1}\circ\sigma^{-1}}(g)$，因此定理 3.1 的条件 (ii) 成立。直接可得 $|\chi| = n$，因此定理 3.1 的条件 (iii) 成立。□

由于 $\mathscr{A}_l$ 属于 $A(G,\sigma,n)$，且 $\mathscr{A}_l$ 在 $\mathbb{C}$ 上是 C^*-霍普夫代数，因此我们有

推论 4.2. $\mathbb{C}$上的霍普夫代数 $D(\mathscr{A}_l)/I$ 是维数为 p^2q^3的可因子分解的 C^*-霍普夫代数，其中 $I = D(\mathscr{A}_l)\langle \chi x\rangle^+$。

证明。 由于 I 是霍普夫 $*$-理想，并且命题 4.1，我们便得到所需结论。 □

利用 n秩 Taft 代数$\overline{\mathscr{A}}_q(n)$构造了另一族缎带可因子化 Hopf 代数。设 $\chi: \overline{\mathscr{A}}_q(n) \longrightarrow \Bbbk$ 为由 $\chi(x_i) = 0$、$\chi(g_i) = q$所确定的代数映射，其中 $1\le i\le n$。为使用定理3.1，我们定义$e_{(i_1,\dots,i_n),\ (j_1,\ \dots,\ j_{n-1})} \in \overline{\mathscr{A}}_q(n)$如下:

$$e_{(i_1,\dots i_n),(j_1,\dots j_{n-1})} = \frac{1}{l^{2n-1}} \sum_{\substack{0\le k_1,\dots,k_n\le l-1\\ 0\le t_1,\dots,t_{n-1}\le l-1}} (\prod_{u=1}^{n} q^{i_u k_u})(\prod_{v=1}^{n-1} q^{j_v t_v})(\prod_{w=1}^{n} x_w^{k_w})(\prod_{s=1}^{n-1} g_s^{t_s}),$$

其中 $0 \le i_1, \ldots, i_n \le l-1$ 以及 $0 \le j_1, \ldots, j_{n-1} \le l-1$。由于 q 是本原 l 次单位根，我们有

$$(\prod_{w=1}^{n} x_w^{k_w})(\prod_{s=1}^{n-1} g_s^{t_s}) = \sum_{\substack{0\le i_1,\ldots,i_n\le l-1 \\ 0\le j_1,\ldots,j_{n-1}\le l-1}} (\prod_{u=1}^{n} q^{-i_u k_u})(\prod_{v=1}^{n-1} q^{-j_v t_v}) e_{(i_1,\ldots i_n),(j_1,\ldots j_{n-1})}.$$

因此，$\{(e_{(i_1,\ldots i_n),\ (j_1,\ \ldots j_{n-1})})g_n^{j_n} |\ 0 \le i_1, \ldots, i_n \le l-1$ 以及 $0 \le j_1, \ldots, j_n \le l-1\}$ 是 $\overline{\mathscr{A}}_q(n)$ 的线性基。定义 $M := \{((i_1,\ldots i_n),(j_1,\ldots j_{n-1}))|\ 0 \le i_1, \ldots, i_n \trianglelefteq l-1,\ 0 \le j_1, \ldots, j_{n-1} \le l-1\}$。

命题 4.3. 若 l 为奇数，则霍普夫代数 $D(\overline{\mathscr{A}}_q(n))/I$ 是可因子化霍普夫代数，其维数为 l^{4n-1}，其中 $I = D(\overline{\mathscr{A}}_q(n))\langle \chi g_n \rangle^+$。

证明。我们只需证明 $\overline{\mathscr{A}}_q(n)$ 满足定理 3.1 的条件。定义σ, τ: $M \longrightarrow M$，令 $\sigma(((i_1,\ldots i_n),(j_1,\ldots j_{n-1})) = ((i_1+1,\ldots i_n+1),(j_1,\ldots j_{n-1}))$ 且 $\tau(((i_1,\ldots i_n),(j_1,\ldots j_{n-1}))) = ((i_1-1,\ldots i_n-1),(j_1-1,\ldots j_{n-1}-1))$，其中 $0 \le i_1, \ldots, i_n \trianglelefteq l-1,\ 0 \le j_1, \ldots, j_{n-1} \le l-1$；在此我们约定 $-1 = l-1$ 和 $l = 0$。于是可见，$g_n(e_{(i_1,\ldots i_n),(j_1,\ldots j_{n-1})}) = e_{\sigma((i_1,\ldots i_n),(j_1,\ldots j_{n-1}))}$。此外，我们有

$$(e_{(i_1,\ldots i_n),(j_1,\ldots j_{n-1})}) \leftharpoonup \chi = e_{\tau^{-1}((i_1,\ldots i_n),(j_1,\ldots j_{n-1}))}$$

and

$$\chi \rightharpoonup (e_{(i_1,\ldots i_n),(j_1,\ldots j_{n-1})}) = e_{\tau^{-1}\circ\sigma^{-1}((i_1,\ldots i_n),(j_1,\ldots j_{n-1}))},$$

其中 $0 \le i_1,\ldots, i_n \le l-1,\ 0 \le j_1, \ldots, j_{n-1} \le l-1$。因此，定理 3.1 的条件 (ii) 成立。根据定义，我们有 $|\chi| = l$ 且 $\chi(g_n)$ 是本原 l 次单位根。因此，定理 3.1 的条件 (iii) 成立。□

注释 4.4. 如果 $n = 1$，那么 $D(\overline{\mathscr{A}}_q(n))/I$ 恰好是小量子群 $u_q(sl_2)$。如果我们调整参数 l，使 n，那么由于维数原因，$D(\overline{\mathscr{A}}_q(n))/I$ 将不同于 Drinfel'd 双和小量子群。因此，我们得到了大量新的有向可因子化霍普夫代数 $D(\overline{\mathscr{A}}_q(n))/I$。

为了构造模张量范畴，我们引入以下结果。

定理 4.5. 如果 l 是奇数，那么 $D(\overline{\mathscr{A}}_q(n))/I$ 的表示范畴是非半单模张量范畴。

证明。记 H 为 $\overline{\mathscr{A}}_q(n)$。根据命题 4.3，我们只需证明 $(D(H)\ \mathcal{R})$ 是带状霍普夫代数。令 $\Lambda = (\sum_{s\in G(H)} s)(x_1^{l-1}\ldots x_n^{l-1})$。根据定义，$\Lambda$ 是 H 的左积分。这意味着 α（H^* 的特征群状元）由 $\alpha(g_i) = q^{-n+2i}$ 和 $\alpha(x_i) = 0$（对 $1 \le i \le n$）确定。类似地，可以得到 $g = g_1^{-1}\ldots g_n^{-1}$（$H$ 的特征群状元）。假设 $l = 2m-1$。令 $a = g^m$ 和 $\beta = \alpha^m$。根据定义，我们知道 a、β 满足定理 2.5 的条件。因此，$(D(H)\ \mathcal{R})$ 是带状霍普夫代数。□

4.2. 一族酉模张量范畴。 在本小节中，我们将确定由一族 C^*-霍普夫代数产生的酉模张量范畴的融合环。我们假设 $\Bbbk = \mathbb{C}$ 在本小节中。回顾一下， C^*-霍普夫代数 $\mathscr{A}_l$ 由例 2.4 给出。由于推论 4.2，我们知道霍普夫代数 $D(\mathscr{A}_l)/I$ 是可分解的 C^*-霍普夫代数，其维数为 p^2q^3，其中 $I = D(\mathscr{A}_l)\langle\chi x\rangle^+$。由于维数的原因，这些霍普夫代数不是 Drinfel'd 双。因此，得到了大量新的酉模张量范畴。接下来，我们只考虑 $D(\mathscr{A}_0)/I$ 的情形，因为其他情形可以用类似方式处理。为简单起见，记 $A_{p,q}$ 为 $D(\mathscr{A}_0)/I$。接下来我们研究由 $A_{p,q}$ 产生的酉模张量范畴。为此，我们首先如下描述 $A_{p,q}$:

定理 4.6。 C^*-霍普夫代数 $A_{p,\ q}$ 由 $\{x, y, z_i, e_g |\ 1 \le i \le q,\ g \in G\}$作为代数生成，其关系为

$$yx = xy^t,\ z_i x = x z_i,\ e_g x = x e_{g \triangleleft x},\ z_i y = y z_i,$$

$$e_g y = y \sum_{1 \le i \le q} z_i (e_{a^{-1} \triangleleft x^i g a}),\ e_g z_i = z_i e_g,\ x^q = y^p = 1,\ z_i z_j = \delta_{i,j} z_i,\ e_g e_h = \delta_{g,h} e_g.$$

余乘法、余单位、对合和对径定义如下

$$\Delta(x) = x \otimes x,\ \Delta(y) = \sum_{1 \le i \le q} y^{t^i} \otimes y z_i,$$

$$\Delta(z_i) = \sum_{1 \le j \le q} z_j \otimes z_{i-j},\ \Delta(e_g) = \sum_{h \in G} e_h \otimes e_{h^{-1}g},$$

$$\epsilon(x) = \epsilon(y) = 1,\ \epsilon(z_i) = \delta_{i,0},\ \epsilon(e_g) = \delta_{g,1},$$

$$x^* = x^{-1},\ y^* = y^{-1},\ z_i^* = z_i,\ e_g^* = e_g.$$

$$S(x) = x^{-1},\ S(y) = \sum_{1 \le i \le q} y^{-t^{-i}} z_i,\ S(z_i) = z_{-i},\ S(e_g) = e_{g^{-1}}.$$

为证明上述定理，我们引入以下一些引理。设 $\{E_{g;x^i} |\ g \in G, 1 \le i \le q\}$ 是 $\mathscr{A}_0^*$的对偶基，即 $E_{g;x^i}(e_h x^j) = \delta_{g,\ h}\delta_{i,\ j}$对 $g, h \in G$和 $1 \le i, j \le q$成立。令 ω为一个 q次单位根。为了求出 $\mathscr{A}_0^*$的代数生成元，我们定义 Y, $Z_i (1 \le i \le q)$ χ 如下:

$$Y = \sum_{1 \le j \le q} E_{a;x^j},\ Z_i = E_{1,x^i},\ \chi = \sum_{1 \le j \le q} \omega^j E_{b;x^j}.$$

引理 4.7。以下陈述对于 $\mathscr{A}_0^*$ 成立

(i) $(E_{g;x^i})(E_{h;x^j}) = \delta_{i,j} E_{gh;x^i}$,
(ii) $\Delta(E_{g;x^i}) = \sum_{1 \le j \le q} E_{g;x^j} \otimes E_{g \triangleleft x^j; x^{i-j}}$,

(iii) $(E_{g;x^i})^* = E_{g^{-1};x^i}$，其中 $*$ 是对合。(iv) $E_{a^ib^j;x^k} = \omega^{-jk}Y^i\chi^jZ_k$。

证明。根据 $\mathscr{A}_0$ 的定义，我们有 $\Delta(e_kx^l) = \sum_{u\in G} e_ux^l \otimes e_{u^{-1}k}x^l$。这意味着 $(E_{g;x^i}E_{h;x^j})(e_kx^l) = \delta_{i,\ j}\delta_{gh,\ k}\delta_{i,\ l}$。因此，(i) 成立。

由于 $(e_hx^j)(e_kx^l) = (\delta_{h,\ k\triangleleft x^{-j}}e_hx^{j+l})$，我们得到 $E_{g;x^i}[(e_hx^j)(e_kx^l)] = \delta_{h,\ k\triangleleft x^{-j}}\delta_{g,\ h}\delta_{i,\ j+l}$。这意味着 (ii)。

根据定义，我们有 $E^*_{g;\ x^i}(e_hx^j) = E_{g;x^i}\overline{[S(e_hx^j)^*]}$。由于 $S(e_hx^j)^* = e_{h^{-1}}x^j$，我们得到 (iii)。

由 (i) 可知 $Y^i\chi^jZ_k = \omega^{jk}E_{a^ib^j;\ x^k}$。因此 (iv) 成立。 □

由引理 4.7可得如下推论：

推论 4.8. C^*-霍普夫代数 $\mathscr{A}_0^*$作为代数由 $\{Y, Z_i, \chi |\ 1 \le i \le q\}$ 生成，其关系为

$$Z_iY = YZ_i,\ \chi Y = Y^t\chi,\ \chi Z_i = Z_i\chi,\ Y^p = \chi^q = 1,\ Z_iZ_j = \delta_{i,j}Z_i,$$

余乘法、余单位、对合和对径定义如下

$$\Delta(Y) = \sum_{1\le i\le q} YZ_i \otimes Y^{t^i},\ \Delta(Z_i) = \sum_{1\le j\le q} Z_j \otimes Z_{i-j},\ \Delta(\chi) = \chi\otimes\chi,$$

$$\epsilon(Y) = \epsilon(\chi) = 1,\ \epsilon(Z_i) = \delta_{i,0},$$

$$Y^* = Y^{-1},\ Z_i^* = Z_i,\ \chi^* = \chi^{-1},$$

$$S(Y) = \sum_{1\le i\le q} Y^{-t^{-i}}Z_i,\ S(Z_i) = Z_{-i},\ S(\chi) = \chi^{-1}.$$

证明。 由引理 4.7，唯一需要验证的非平凡等式如下：

$$\chi Y = Y^t\chi,\ \Delta(Y) = \sum_{1\le i\le q} YZ_i\otimes Y^{t^i},\ S(Y) = \sum_{1\le i\le q} Y^{-t^{-i}}Z_i.$$

由引理 4.7，我们有 $\chi Y = \sum_{1\le i\le q}\omega^i E_{ba;x^i}$ 和 $Y^t\chi = \sum_{1\le i\le q}\omega^i E_{a^tb;\ x^i}$。根据 G的定义，$ba = a^tb$，因此 $\chi Y = Y^t\chi$。

再次利用引理 4.7，我们有 $\Delta(Y) = \sum_{1\le i,\ j\le q} E_{a;x^j}\otimes E_{a^{tj};\ x^{i-j}}$。注意，由引理 4.7，$E_{a;x^j} = YZ_j$且 $E_{a^{tj};\ x^{i-j}} = Y^{tj}Z_{i-j}$，因此 $\Delta(Y) = \sum_{1\le i,\ j\le q} YZ_j\otimes Y^{tj}Z_{i-j}$。由于 $\sum_{1\le j\le q} Z_{i-j} = 1$，我们知道 $\Delta(Y) = \sum_{1\le i\le q} YZ_i\otimes Y^{t^i}$。

根据定义，$E_{a;x^i}(S(e_gx^j)) = E_{a;x^i}(e_{g\triangleleft x^j}x^{-j}) = \delta_{g,\ a\triangleleft x^i}\delta_{j,\ -i}$。因此，$S(E_{a;x^i}) = E_{a\triangleleft x^i;\ x^{-i}}$。注意，$E_{a\triangleleft x^i;\ x^{-i}} = Y^{t^i}Z_{-i}$，因此 $S(Y) = \sum_{1\le i\le q} Y^{-t^{-i}}Z_i$。 □

接下来，我们证明定理 4.6。为简便起见，我们在 $A_{p,\ q}$ 中将 a 记作 $a+I$。

定理的证明 **4.6**。 记 $y=Y$ 和 $z_i=Z_i$。根据 A_p 的定义，$_q$，我们有 $\chi=x^{-1}$。结合推论 4.8，可知 $A_{p,\ q}$ 由$\{x,y,z_i,e_g|\ 1\leq i\leq q,\ g\in G\}$ 作为代数生成。由于推论 4.8 以及$\mathscr{A}_0$的定义，我们只需证明以下等式：

$$yx=xy^t,\ z_ix=xz_i,\ e_gy=y\sum_{1\leq i\leq q}z_i(e_{a^{-1}\triangleleft x^iga}),\ e_gz_i=z_ie_g.$$

根据推论 4.8，我们有 $\chi Y=Y^t\chi$ 和 $Z_i\chi=\chi Z_i$。由于 $\chi=x^{-1}$ 属于$A_{p,\ q}$，可得 $yx=xy^t$，$z_ix=xz_i$。根据A_p的定义，$_q$，可得

$$e_gY=\sum_{1\leq i\leq q}\sum_{hkl=g}(e_h\rightharpoonup E_{a;x^i}\leftharpoonup e_{l-1})e_k.$$

由于 $(e_h\rightharpoonup E_{a;x^i}\leftharpoonup e_{l-1})(e_sx^r)=\delta_{s,\ a}\delta_{r,\ i}\delta_{l,\ a^{-1}}\delta_{h,\ a\triangleleft x^i}$，可得 $(e_h\rightharpoonup E_{a;x^i}\leftharpoonup e_{l-1})=\delta_{l,\ a^{-1}}\delta_{h,\ a\triangleleft x^i}E_{a;x^i}$。注意到 $E_{a;x^i}=YZ_i$，因此 $e_gy=y\sum_{1\leq i\leq q}z_i(e_{a^{-1}\triangleleft x^iga})$。同理，我们有 $e_gZ_i=Z_ie_g$。因此$e_gz_i=z_ie_g$。□

接下来，我们确定 $Rep(A_{p,\ q})$ 的融合环；它是 $A_{p,\ q}$ 在有限维希尔伯特空间上的表示所构成的 C^*-张量范畴。定义 $B=\langle e_g,z_i|\ g\in G,1\leq i\leq q\rangle$ 为代数。注意到 B 实际上是对角代数，因此 B 的表示范畴非常简单。为了确定 $A_{p,\ q}$ 的表示，我们的思路是利用 B 的表示范畴，并添加一些额外条件。

在下文中，假设 ω（分别地，η）是 q 次（分别地，p 次）本原单位根。根据 $\mathscr{A}_0$ 的定义，我们可以假设 $p-1=mq$ 和 $\mathbb{Z}_p^\times=\langle\beta\rangle$ 为群，其中 $\mathbb{Z}_p^\times$ 是乘法子群。回想 $t^q=1$，因此我们可以假设 $t=\beta^m$。这意味着 $\mathbb{Z}_p^\times=\cup_{i=1}^m\beta^i\langle t\rangle$，其中 $\langle t\rangle$ 是 $\mathbb{Z}_p^\times$ 的乘法子群。接下来，我们在希尔伯特空间上构造四类简单表示如下：

(1) $T_{i,\ j}=\langle u\rangle$、$1\leq i$、$j\leq q$ 作为希尔伯特空间：$A_{p,\ q}$ 的作用由以下内容确定

$$x.u=\omega^ju,\ y.u=u,$$

$$z_k.u=\delta_{k,i}u,\ e_g.u=\delta_{g,b^i}u,\ 0\leq k\leq q-1;$$

(2) $U_{i',\ j'}=\langle u_k|\ 0\leq k\leq q-1\rangle$ 作为希尔伯特空间 $1\leq i'\leq q$、$j'\in\{\beta^1,\dots,\beta^m\}$：$A_{p,\ q}$ 的作用由以下内容确定

$$x.u_k=u_{k+1},\ y.u_k=\eta^{j't^k}u_k,$$

$$z_l.u_k=\delta_{l,i'}u_k,\ e_g.u_k=\delta_{g,b^{i'}}u_k,\ 0\leq k,l\leq q-1;$$

(3) $V_{(i'',j'',k')}=\langle u_l|\ 0\leq l\leq q-1\rangle$ 作为希尔伯特空间，其中 $i''\in\{\beta^1,\dots,\beta^m\}$、$1\leq j''\leq q$、$1\leq k'\leq p$：$A_p$的作用，$_q$ 由下式确定

$$x.u_l=u_{l-1},\ y.u_l=\eta^{k't^{-l}}u_l,$$

$$z_s.u_l=\delta_{s,j''}u_l,\ e_g.u_l=\delta_{g,a^{i''t^l}b^{j''}}u_l,\ 0\leq l,s\leq q-1;$$

(4) $W_{(i''',j''',k'')} = \langle v_l |\ 0 \le l \le p-1\rangle$ 作为希尔伯特空间，其中 $1 \le i''' \ne j''' \le q$、$1 \le k'' \le q$：$A_p$的作用，$q$ 由下式确定

$$x.v_l = \omega^{k''} v_{t^{-1}l},\ y.v_l = v_{l+1},\ 0 \le l \le p-1$$

$$z_s.v_l = \delta_{s,j'''} v_l,\ e_g.v_l = \delta_{g,a^{l(t^{j'''}-t^{i'''})}b^{i'''}} v_l,\ 0 \le s \le q-1;$$

假定上述希尔伯特空间上的内积均为标准内积，例如$W_{(i''',j''',k'')} = \langle v_l |\ 0 \le l \le p-1\rangle$和 $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{i,j}$对应 $0 \le i,j \le p-1$。为汇集上述模，我们定义 $M = \{T_{i,j},\ U_{i',j'},\ V_{(i'',j'',k')}\ \ W_{(i''',j''',k'')} |\ 1 \le i,j,i',j'',k'' \le q,\ 1 \le i''' \ne j''' \le q,\ j', i'' \in \{\beta^1, \dots, \beta^m\}\}$。将 $Rep(A_{p,q})$的融合环记为$K(p,q)$。于是我们有

定理 4.9。 $K(p,q)$ 的秩为 $q^2(p^2+q-1)$，且 M是 $K(p,q)$ 的一组基。此外， $K(p,q)$ 的维数函数如下：

$$\dim(T_{i,j}) = 1,\ \dim(U_{i',j'}) = \dim(V_{(i'',j'',k')}) = q,\ \dim(W_{(i''',j''',k'')}) = p,$$

且单位元为 $T_{0,\ 0}$， $K(p,q)$ 的乘法如下所示：

$$T_{i,j}.T_{i',j'} = T_{i+i',j+j'},\ T_{i,j}.U_{i'',j''} = U_{i+i'',j''},$$
$$T_{i,j}.V_{(k,l,s)} = V_{(k,i+l,t^i s)},\ T_{i,j}.W_{(k',l',s')} = W_{(i+k',i+l',j+s')},$$
$$U_{i'',j''}.U_{i''',j'''} = \sum_{s=0}^{q-1} U(i''+i''', \alpha_s),\ if\ j''' \notin -j''\langle t\rangle, here$$
$$j''t^{i'''} + j'''t^s = \alpha_s t^{\beta_s} for\ 0 \le s \le q-1\ and\ \alpha_s \in \{\beta^1, \dots, \beta^m\},$$
$$U_{i'',j''}.U_{i''',j'''} = \sum_{s=0, s\ne i_0}^{q-1} U(i''+i''', \alpha_s) + \sum_{s=0}^{q-1} T(i''+i''', s),\ where$$
$$j''t^{i'''} + j'''t^{i_0} = 0\ for\ some\ 0 \le i_0 \le q-1,$$
$$U_{i'',j''}.V_{(i''',j''',k'')} = \sum_{s=0}^{q-1} V_{(i''',i''+j''',t^{i''}(k''+j''t^{j'''+s}))},$$
$$U_{i'',j''}.W_{(i''',j''',k'')} = \sum_{s=0}^{q-1} W_{(i''+i''',i''+j''',s)},$$
$$V_{(i'',j'',k')}.V_{(i''',j''',k'')} = \sum_{s=0}^{q-1} V_{(\alpha'_s, j''+j''', t^{\beta'_s}(k't^{j'''}+k''t^{-s}))}\ if\ i'' \notin -i'''\langle t\rangle\ and$$
$$i'' + i'''t^{s+j''} = \alpha'_s t^{\beta'_s}\ where\ \alpha'_s \in \{\beta^1 \dots \beta^m\}.$$

$$V_{(i'',j'',k')}.V_{(i''',j''',k'')} = \sum_{s=0, s\ne s_0}^{q-1} V_{(\alpha'_s, j''+j''', t^{\beta'_s}(k't^{j'''}+k''t^{-s}))} + \sum_{s=0}^{q-1} T_{j''+j''',s},\ if$$
$$i'' + i'''t^{s_0+j''} = 0\ for\ some\ 0 \le s_0 \le q-1\ and\ k't^{j'''} + k''t^{-s_0} = 0,$$

$$V_{(i'',j'',k')}.V_{(i''',j''',k'')} = \sum_{s=0,s\neq s_0}^{q-1} V_{(\alpha'_s,j''+j''',t^{\beta'_s}(k't^{j'''}+k''t^{-s}))} + U_{j''+j''',\alpha''_{s_0}} \text{ if } i''+i'''t^{s_0+j''}=0 \text{ for some } 0\leq s_0\leq q-1 \text{ and } k't^{j'''}+k''t^{-s_0}=\alpha''_{s_0}t^{\beta''_{s_0}}, \text{ where } \alpha''_s\in\{\beta^1\dots\beta^m\}.$$

$$V_{(i'',j'',k')}.W_{(i''',j''',k'')} = \sum_{s=0}^{q-1} W_{(j''+i''',j''+j''',s)},$$

$$W_{(i,j,k)}.W_{(i',j',k')} = \sum_{s=0}^{q-1} mW_{(i+i',j+j',s)} + W_{(i+i',j+j',k+k')} \text{ if } i+i'\neq j+j',$$

$$W_{(i,j,k)}.W_{(i',j',k')} = T_{i+i',k+k'} + \sum_{s=1}^{m} U_{i+i',\beta^s} + \sum_{l=0}^{p-1}\sum_{s=0}^{q-1} V_{(l,i+i',s)} \text{ if } i+i'=j+j'.$$

接下来，我们介绍一些引理来证明上述定理。

引理 4.10。 M 是 $K(p,q)$的一个基。

证明。首先，我们证明它们是简单对象。我们选择 $W_{(i''',j''',k'')}$ 进行检查，因为另一种情况可以用类似的方法处理。为了证明 $W_{(i''',j''',k'')}$ 是 $*$-表示的 $A_{p,q}$，我们需要证明代数关系成立，并且它保持对合。唯一非平凡的情形如下:

$$e_g x = xe_{g\triangleleft x},\ e_g y = y\sum_{1\leq i\leq q} z_i(e_{a^{-1}\triangleleft x^i ga}).$$

根据定义，$(e_g x).v_l = \omega^{k''}(\delta_{g,a^{lt^{-1}d}b^{i'''}})v_{t^{-1}l}$ 以及 $(xe_{g\triangleleft x}).v_l = \omega^{k''}(\delta_{g\triangleleft x,a^{ld}b^{i'''}})v_{t^{-1}l}$，其中 $d = t^{j'''}-t^{i'''}$。由于 $a\triangleleft x^{-1}=a^{t^{-1}}$ 和 $b\triangleleft x^{-1}=b$，我们得到 $\delta_{g,a^{lt^{-1}d}b^{i'''}} = \delta_{g\triangleleft x,a^{ld}b^{i'''}}$。因此 $(e_g x).v_l = (xe_{g\triangleleft x}).v_l$。类似地，我们有 $(e_g y).v_l = (\delta_{g,a^{(l+1)d}b^{i'''}})v_{l+1}$以及 $[y\sum_{1\leq i\leq q} z_i(e_{a^{-1}\triangleleft x^i ga})].v_l = (\delta_{a^{-1}\triangleleft x^{j'''}ga,a^{ld}b^{i'''}})v_{l+1}$，其中 $d = t^{j'''}-t^{i'''}$。由于$a\triangleleft x^{-1}=a^{t^{-1}}$和 $b\triangleleft x^{-1}=b$，我们得到 $\delta_{g,a^{(l+1)d}b^{i'''}} = \delta_{a^{-1}\triangleleft x^{j'''}ga,a^{ld}b^{i'''}}$。这意味着 $(e_g y).v_l = [y\sum_{1\leq i\leq q} z_i(e_{a^{-1}\triangleleft x^i ga})].v_l$。接下来，我们证明 $W_{(i''',j''',k'')}$ 是简单的。假设$0\neq W_0\subseteq W_{(i''',j''',k'')}$。那么我们可以找到 $v=\sum_{j=0}^{p-1}\lambda_j v_j\in W_0$ 和某个 $0\neq\lambda_{i_0}\in\Bbbk$。令 $g_{i_0}=a^{di_0}b'''$，其中 $d=t^{j'''}-t^{i'''}$。根据定义，我们有 $e_{g_{i_0}}.v=\lambda_{i_0}v_{i_0}$。因此$v_{i_0}\in W_0$。由于对于 $0\leq j\leq p-1$，$y^{j-i_0}.v_{i_0}=v_j$，我们知道 $v_j\in W_0$。因此 $W_0=W$。这意味着 W 是简单的。

接下来我们证明 M 的元素彼此不同构。回顾一下，由 $B=\langle e_g、\ z_i|\ g\in G、\ 1\leq i\leq q\rangle$ 定义的子代数 B 是一个代数。显然可以看出，$T_{i,\ j}、\ U_{i',\ j'}、\ V_{(i'',j'',k')}$ $W_{(i''',j''',k'')}$ 是彼此不同构的 B 模，因此 M 的元素作为 $A_{p,\ q}$ 模也彼此不同构。

定义 $T=\sum_{a\in M}\dim(a)a$。注意，$\dim(T)=p^2q^3=\dim(A_{p,\ q})$。因此，$M$ 是 $K(p,q)$ 的一组基。□

引理 4.11。 定理 $K(p,\ q)$ 中的融合规则 *4.9* 成立。

证明。(1): $T_{i,\ j}.T_{i',\ j'} = T_{i+i',\ j+j'}$。假设 $T_{i,\ j} = \langle u\rangle$ 和 $T_{i',\ j'} = \langle u'\rangle$。根据定义，我们得到

$$e_g.(u\otimes u') = \delta_{g,b^{i+i'}}(u\otimes u'),\ z_k.(u\otimes u') = \delta_{k,j+j'}(u\otimes u').$$

因此，$T_{i,\ j}\otimes T_{i',\ j'}\cong T_{i+i',\ j+j'}$。

(2): $T_{i,\ j}.U_{i'',\ j''} = U_{i+i'',\ j''}$。假设 $T_{i,\ j} = \langle u\rangle$ 和 $U_{i'',\ j''} = \langle u'_k|\ 0\le k\le q-1\rangle$。令$\lambda_k = \omega^{jk}$和 $u''_k = u\otimes\lambda_k u'_k$，其中 $0\le k\le q-1$。那么我们有

$$x.u'_k = u'_{k+1},\ y.u'_k = \eta^{j''t^k}u'_k,$$
$$z_l.u'_k = \delta_{l,i+i'}u'_k,\ e_g.u'_k = \delta_{g,b^{i+i'}}u'_k.$$

因此，$T_{i,\ j}\otimes U_{i'',\ j''}\cong U_{i+i'',\ j''}$。

(3): $T_{i,\ j}.V_{(i'',j'',k')} = V_{(i'',i+j'',k't^i)}$。假设 $T_{i,\ j} = \langle u\rangle$ 和 $V_{(i'',j'',k')} = \langle u_l|\ 0\le l\le q-1\rangle$。令 $\lambda_k = \omega^{-jk}$和 $u'_l = u\otimes\lambda_l u_{l-i}$，其中 $0\le l\le q-1$。那么我们有

$$x.u'_l = u'_{l-1},\ y.u'_k = \eta^{(k't^i)t^{-l}}u'_l,$$
$$z_k.u'_l = \delta_{k,i+j''}u'_l,\ e_g.u'_l = \delta_{g,a^{i''t^l}}u'_l.$$

因此$T_{i,j}\otimes V_{(i'',j'',k')}\cong V_{(i'',i+j'',k't^i)}$。

(4):$T_{i,j}.W_{(i''',j''',k'')} = W_{(i+i''',i+j''',j+k'')}$。假设$T_{i,j} = \langle u\rangle$ 且$W_{(i''',j''',k'')} = \langle v_l|\ 0\le l\le q-1\rangle$。令 $v'_l = u\otimes v_l$，其中 $0\le l\le p-1$。于是我们有

$$x.v'_l = \omega^{j+k''}v'_{t^{-1}l},\ y.v'_l = v'_{l+1},$$

$$z_k.v'_l = \delta_{k,i+j'''}v'_l,\ e_g.v'_l = \delta_{g,a^{l(t^i+j'''-t^{i+i'''})}}v'_l.$$

因此$T_{i,j}.W_{(i''',j''',k'')}\cong W_{(i+i''',i+j''',j+k'')}$。

(5.1): $U_{i'',j''}.U_{i''',j'''} = \sum_{s=0}^{q-1}U(i''+i''',\alpha_s)$，若 $j'''\notin -j''\langle t\rangle$，其中 $j''t^{i'''}+j'''t^s = \alpha_s t^{\beta_s}$对 $0\le s\le q-1$和 $\alpha_s\in\{\beta^1,\dots,\beta^m\}$成立。设$U_{i'',j''} = \langle u_k|\ 0\le k\le q-1\rangle$ 且$U_{i''',j'''} = \langle u'_k|\ 0\le k\le q-1\rangle$。令 $u^s_l = u_{l-\beta_s}\otimes u'_{s+l-\beta_s}$和 $U_s = \langle u^s_l|\ 0\le l\le q-1\rangle$，其中 $0\le s\le q-1$。于是我们有

$$x.u^s_l = u^s_{l+1},\ y.u^s_l = \eta^{\alpha_s t^l}u^s_l,$$

$$z_k.u^s_l = \delta_{k,i''+i'''}u^s_l,\ e_g.u^s_l = \delta_{g,b^{i''+i'''}}u^s_l.$$

因此 $U_s\cong U_{i''+i''',\ \alpha_s}$，其中 $j't^{i''}+j''t^s = \alpha_s t^{\beta_s}$ 且 $\alpha_s\in\{\beta^1,\dots,\beta^m\}$。根据 $U_{i'',\ j''}\otimes U_{i''',\ j'''}$ 的定义，我们知道 $U_{i'',\ j''}\otimes U_{i''',\ j'''} = \oplus_{s=0}^{q-1}U(i''+i''',\alpha_s)$。

(5.2): $U_{i'',j''}.U_{i''',j'''} = \sum_{s=0,s\neq i_0}^{q-1}U(i''+i''',\alpha_s)+\sum_{s=0}^{q-1}T(i''+i''',s)$，其中 $j''t^{i'''}+j'''t^{i_0}=0$ 对某个 $0\le i_0\le q-1$ 成立。设 $U_{i'',j''} = \langle u_k|\ 0\le k\le q-1\rangle$ 且 $U_{i''',j'''} = \langle u'_k|\ 0\le k\le q-1\rangle$。假设 $s\neq i_0$ 且 $0\le s\le q-1$。令 $u^s_l = u_{l-\beta_s}\otimes u'_{s+l-\beta_s}$ 和 $U_s = \langle u^s_l|\ 0\le l\le q-1\rangle$。令 $v_k = \sum_{r=0}^{q-1}\omega^{rk}(u_r\otimes u'_{r+i_0})$，其中 $0\le k\le q-1$。记作

$T=\langle v_r|\ 0\leq r\leq q-1\rangle$ 为向量空间。假设 $s\neq i_0$ 且 $0\leq s\leq q-1$。于是有

$$x.u_l^s=u_{l+1}^s,\ y.u_l^s=\eta^{\alpha_s t^l}u_l^s,$$

$$z_k.u_l^s=\delta_{k,i''+i'''}u_l^s,\ e_g.u_l^s=\delta_{g,b^{i''+i'''}}u_l^s,$$

and

$$x.v_k=\omega^{-k}v_k,\ y.v_k=v_k,$$

$$z_s.v_k=\delta_{s,i''+i'''}v_k,\ e_g.v_k=\delta_{g,b^{i''+i'''}}v_k.$$

因此，$T\cong\oplus_{r=0}T(i''+i''',r)$ 和 $U_s\cong U_{i''+i''',\alpha_s}$，其中 $j't^{i''}+j''t^s=\alpha_s t^{\beta_s}$ 和 $\alpha_s\in\{\beta^1,\dots,\beta^m\}$。根据 $U_{i''}$ 的定义，$j''\otimes U_{i''',j'''}$，我们知道 $U_{i'',j''}\otimes U_{i''',j'''}\cong[\oplus_{r=0}T(i''+i''',r)]\oplus[\oplus_{s=0,s\neq i_0}^{q-1}U(i''+i''',\alpha_s)]$。

(6): $U_{i'',j''}.V_{(i''',j''',k'')}=\sum_{s=0}^{q-1}V_{(i''',i''+j''',t^{i''}(k''+j''t^{j'''+s}))}$。设 $U_{i'',j''}=\langle u_k|\ 0\leq k\leq q-1\rangle$ 且 $V_{(i''',j''',k'')}=\langle u'_k|\ 0\leq k\leq q-1\rangle$。令 $u_l^s=u_{s+i''-l}\otimes u'_{l-i''}$ 和 $V_s=\langle u_l^s|\ 0\leq l\leq q-1\rangle$，其中 $0\leq s\leq q-1$。于是有

$$x.u_l^s=u_{l-1}^s,\ y.u_l^s=\eta^{[t^{i''}(k''+j''t^{j'''+s})]t^l}u_l^s,$$

$$z_k.u_l^s=\delta_{k,i''+j'''}u_l^s,\ e_g.u_l^s=\delta_{g,a^{i'''}b^{i''+j'''}}u_l^s.$$

因此 $V_s\cong V_{(i''',i''+j''',t^{i''}(k''+j''t^{j'''+s}))}$，其中 $0\leq s\leq q-1$。根据$U_{i'',j''}\otimes V_{(i''',j''',k'')}$ 的定义，我们知道 $U_{i'',j''}\otimes V_{(i''',j''',k'')}\cong\oplus_{s=0}^{q-1}V_{(i''',i''+j''',t^{i''}(k''+j''t^{j'''+s}))}$。

(7): $U_{i'',j''}.W_{(i''',j''',k'')}=\sum_{s=0}^{q-1}W_{(i''+i''',i''+j''',s)}$。假设 $U_{i'',j''}=\langle u_k|\ 0\leq k\leq q-1\rangle$且 $W_{(i''',j''',k'')}=\langle v_l|\ 0\leq l\leq p-1\rangle$。令 $v_l^s=y^l.(\sum_{r=0}^{q-1}\omega^{rs}u_r\otimes v_0)$ 和 $W_s=\langle u_l^s|\ 0\leq l\leq p-1\rangle$，其中 $0\leq s\leq q-1$。那么我们有

$$x.v_l^s=\omega^{k''-s}v_{lt^{-1}}^s,\ y.v_l^s=v_{l+1}^s,$$

$$z_k.u_l^s=\delta_{k,i''+j'''}u_l^s,\ e_g.u_l^s=\delta_{g,a^{l(t^{i''+j'''}-t^{i''+i'''})}b^{i''+i'''}}u_l^s.$$

因此 $W_s\cong W_{(i''+i''',i''+j''',k''-s)}$，其中 $0\leq s\leq q-1$。根据 $U_{i'',j''}\otimes W_{(i''',j''',k'')}$ 的定义，我们知道 $U_{i'',j''}\otimes W_{(i''',j''',k'')}\cong\oplus_{s=0}^{q-1}W_{(i''+i''',i''+j''',s)}$。

(8.1): $V_{(i'',j'',k')}.V_{(i''',j''',k'')}=\sum_{s=0}^{q-1}V_{(\alpha'_s,j''+j''',t^{\beta'_s}(k't^{j'''}+k''t^{-s}))}$ 如果 $i''\notin -i'''\langle t\rangle$ 且 $i''+i'''t^{s+j''}=\alpha'_s t^{\beta'_s}$，其中 $\alpha'_s\in\{\beta^1\dots\beta^m\}$。设 $V_{(i'',j'',k')}=\langle u_k|\ 0\leq k\leq q-1\rangle$ 且 $V_{(i''',j''',k'')}=\langle u'_k|\ 0\leq k\leq q-1\rangle$。令 $u_k^s=x^{\beta'_s-k}.(u_0\otimes u'_s)$ 和 $V_s=\langle u_k^s|\ 0\leq k\leq q-1\rangle$，其中 $0\leq s\leq q-1$。于是我们有

$$x.u_k^s=u_{k-1}^s,\ y.u_k^s=\eta^{t^{\beta'_s}(k't^{j'''}+k''t^{-s})t^{-k}}u_k^s,$$

$$z_l.u_k^s=\delta_{l,j''+j'''}u_k^s,\ e_g.u_k^s=\delta_{g,a^{\alpha'_s t^k}b^{j''+j'''}}u_k^s.$$

因此$V_s \cong V_{(\alpha'_s,j''+j''',t^{\beta'_s}(k't^{j'''}+k''t^{-s}))}$，其中 $0 \leq s \leq q-1$。根据$V_{(i'',j'',k')}$ $\otimes V_{(i''',j''',k'')}$的定义，我们得到$V_{(i'',j'',k')} \otimes V_{(i''',j''',k'')} \cong \oplus_{s=0}^{q-1} V_{(\alpha'_s,j''+j''',t^{\beta'_s}(k't^{j'''}+k''t^{-s}))}$，其中 α'_s, β'_s 由 $i''+i'''t^{s+j''}=\alpha'_s t^{\beta'_s}$ 和 $\alpha'_s \in \{\beta^1 \dots \beta^m\}$确定。

(8.2)：$V_{(i'',j'',k')}.V_{(i''',j''',k'')} = \sum_{s=0}^{q-1},\ _{s\neq s_0} V_{(\alpha'_s,j''+j''',t^{\beta'_s}(k't^{j'''}+k''t^{-s}))} + \sum_{s=0}^{q-1} T_{j''+j'''},\ _s$ 若$i''+i'''t^{s_0+j''}=0$对于某些 $0 \leq s_0 \leq q-1$和 $k't^{j'''}+k''t^{-s_0}=0$成立。设$V_{(i'',j'',k')}$ $=\langle u_k |\ 0 \leq k \leq q-1\rangle$ 且$V_{(i''',j''',k'')} = \langle u'_k |\ 0 \leq k \leq q-1\rangle$。令 $u_k^s = x^{\beta'_s-k}.(u_0 \otimes u'_s)$ 和 $V_s = \langle u_k^s |\ 0 \leq k \leq q-1\rangle$，其中 $0 \leq s \leq q-1$。与之前类似，我们有

$$x.u_k^s = u_{k-1}^s,\ y.u_k^s = \eta^{t^{\beta'_s}(k't^{j'''}+k''t^{-s})t^{-k}} u_k^s,$$

$$z_l.u_k^s = \delta_{l,j''+j'''} u_k^s,\ e_g.u_k^s = \delta_{g,a^{\alpha'_s t^k} b^{j''+j'''}} u_k^s.$$

若 $s \neq s_0$，则$V_s \cong V_{(\alpha'_s,j''+j''',t^{\beta'_s}(k't^{j'''}+k''t^{-s}))}$，其中 $0 \leq s \leq q-1$。对于情形 $s=s_0$，我们定义 $v_k = \sum_{r=0}^{q-1} \omega^{kr} u_r^{s_0}$和 $T = \langle v_k |\ 0 \leq k \leq q-1\rangle$。由于 $k't^{j'''}+k''t^{-s_0}=0$，可以得到

$$x.v_k = \omega^k v_k,\ y.v_k = v_k,$$

$$z_l.u_k^s = \delta_{l,j''+j'''} v_k,\ e_g.v_k = \delta_{g,b^{j''+j'''}} v_k.$$

因此$T \cong \oplus_{s=0}^{q-1} T_{j''+j'''},\ _s$。根据$V_{(i'',j'',k')} \otimes V_{(i''',j''',k'')}$的定义，可得$V_{(i'',j'',k')}$ $.V_{(i''',j''',k'')} = \oplus_{s=0}^{q-1},\ _{s\neq s_0} V_{(\alpha'_s,j''+j''',t^{\beta'_s}(k't^{j'''}+k''t^{-s}))} \oplus (\oplus_{s=0}^{q-1} T_{j''+j'''},\ _s)$。

(8.3)：$V_{(i'',j'',k')}.V_{(i''',j''',k'')} = \sum_{s=0,s\neq s_0}^{q-1} V_{(\alpha'_s,j''+j''',t^{\beta'_s}(k't^{j'''}+k''t^{-s}))} + U_{j''+j''',\alpha''_{s_0}}$ 若对于某些 $0 \leq s_0 \leq q-1$ 和 $k't^{j'''}+k''t^{-s_0}=\alpha''_{s_0}t^{\beta''_{s_0}}$，有 $i''+i'''t^{s_0+j''}=0$，其中 $\alpha''_s \in \{\beta^1 \dots \beta^m\}$。设$V_{(i'',j'',k')} = \langle u_k |\ 0 \leq k \leq q-1\rangle$ 且$V_{(i''',j''',k'')} = \langle u'_k |\ 0 \leq k \leq q-1\rangle$。令 $u_k^s = x^{\beta'_s-k}.(u_0 \otimes u'_s)$ 和 $V_s = \langle u_k^s |\ 0 \leq k \leq q-1\rangle$，其中 $0 \leq s \leq q-1$。与之前类似，我们有

$$x.u_k^s = u_{k-1}^s,\ y.u_k^s = \eta^{t^{\beta'_s}(k't^{j'''}+k''t^{-s})t^{-k}} u_k^s,$$

$$z_l.u_k^s = \delta_{l,j''+j'''} u_k^s,\ e_g.u_k^s = \delta_{g,a^{\alpha'_s t^k} b^{j''+j'''}} u_k^s.$$

若 $s \neq s_0$，则$V_s \cong V_{(\alpha'_s,j''+j''',t^{\beta'_s}(k't^{j'''}+k''t^{-s}))}$，其中 $0 \leq s \leq q-1$。对于情形 $s=s_0$，我们定义 $\overline{u_k} = u_{\beta''_s-k}^{s_0}$和 $U = \langle \overline{u_k} |\ 0 \leq k \leq q-1\rangle$。于是有

$$x.\overline{u_k} = \overline{u_{k+1}},\ y.\overline{u_k} = \eta^{\alpha''_s t^k} \overline{u_k},$$

$$z_l.\overline{u_k} = \delta_{l,j''+j'''} \overline{u_k},\ e_g.\overline{u_k} = \delta_{g,b^{j''+j'''}} \overline{u_k}.$$

因此$U \cong U_{j''+j''',\alpha''_{s_0}}$。根据$V_{(i'',j'',k')} \otimes V_{(i''',j''',k'')}$的定义，我们有

$$V_{(i'',j'',k')}.V_{(i''',j''',k'')} = \oplus_{s=0,s\neq s_0}^{q-1} V_{(\alpha'_s,j''+j''',t^{\beta'_s}(k't^{j'''}+k''t^{-s}))} \oplus U_{j''+j''',\alpha''_{s_0}}.$$

(9)：$V_{(i'',j'',k')}.W_{(i''',j''',k'')} = \sum_{s=0}^{q-1} W_{(j''+i''',j''+j''',s)}$。设$V_{(i'',j'',k')} = \langle u_k |\ 0 \leq k \leq q-1\rangle$ 且$W_{(i''',j''',k'')} = \langle v_l |\ 0 \leq l \leq p-1\rangle$。为方便起见，记 $l_0 = -i''d^{-1}t^{j''}$，

其中 $d=t^{j'''}-t^{i'''}$。令 $v_l^s=y^l.(\sum_{j=0}^{q-1}\omega^{js}u_j\otimes v_{l_0t^j})$ 和 $W_s=\langle v_l^s|\ 0\leq l\leq p-1\rangle$, 其中 $0\leq s\leq q-1$。于是有

$$x.v_l^s=\omega^{k''+s}v_l^s,\ y.v_l^s=v_{l+1}^s,$$

$$z_k.v_l^s=\delta_{k,j''+j'''}v_l^s,\ e_g.v_l^s=\delta_{g,a^{l(t^{j''+j'''}-t^{j''+i'''})}b^{j''+i'''}}v_l^s.$$

因此 $W_s\cong W_{(j''+i''',j''+j''',k''+s)}$, 其中 $0\leq s\leq q-1$。根据 $V_{(i'',j'',k')}\otimes W_{(i''',j''',k'')}$ 的定义, 我们得到 $V_{(i'',j'',k')}.W_{(i''',j''',k'')}=\oplus_{s=0}^{q-1}W_{(j''+i''',j''+j''',s)}$。

(10.1): $W_{(i,j,k)}.W_{(i',j',k')}=\sum_{s=0}^{q-1}mW_{(i+i',j+j',s)}+W_{(i+i',j+j',k+k')}$, 若 $i+i'\neq j+j'$。设 $W_{(i,j,k)}=\langle v_l|\ 0\leq l\leq p-1\rangle$ 且 $W_{(i',j',k')}=\langle v_l'|\ 0\leq l\leq p-1\rangle$。定义 $M=\{(l,r)|\ (l,r)\in\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q$, 使得 $ld+rd't^i=0\}$, 其中 $d=t^j-t^i$ 且 $d'=t^{j'}-t^{i'}$。假设 $(0,0)\neq(l_0,r_0)\in M$ 且 $0\leq s_0\leq q-1$。令 $\overline{v_l}=y^l.[\sum_{r=0}^{q-1}\omega^{s_0r}x^r.(v_{l_0}\otimes v'_{r_0})]$ 且 $W_{(l_0,s_0)}=\langle\overline{v_l}|\ 0\leq l\leq p-1\rangle$。那么我们有

$$x.\overline{v_l}=\omega^{-s_0}\overline{v_{t^{-1}l}},\ y.\overline{v_l}=\overline{v_{l+1}},$$

$$z_s.\overline{v_l}=\delta_{s,j+j'}\overline{v_l},\ e_g.\overline{v_l}=\delta_{g,a^{l(t^{j+j'}-t^{i+i'})}b^{i+i'}}\overline{v_l}.$$

因此 $W_{(l_0,s_0)}\cong W_{(i+i',j+j',-s_0)}$。对于情形 $(l,r)=(0,0)\in M$, 我们为 $0\leq l\leq p-1$ 和 $W=\langle v_l'|\ 0\leq l\leq p-1\rangle$ 定义 $v_l'=y^l.(v_0\otimes v_0')$。于是我们有

$$x.v_l'=\omega^{k+k'}v'_{t^{-1}l},\ y.v_l'=v'_{l+1},$$

$$z_s.v_l'=\delta_{s,j+j'}v_l',\ e_g.v_l'=\delta_{g,a^{l(t^{j+j'}-t^{i+i'})}b^{i+i'}}v_l'.$$

因此$W\cong W_{(i+i',j+j',k+k')}$。注意到 $\mathbb{Z}_p^\times=\cup_{i=1}^m\beta^i\langle t\rangle$, 并且由于$W_{(i,j,k)}\otimes W_{(i',j',k')}$ 的定义, 我们得到 $W_{(i,j,k)}\otimes W_{(i',j',k')}=\oplus_{s=0}^{q-1}W^{\oplus m}{}_{(i+i',j+j',s)}\oplus W_{(i+i',j+j',k+k')}$。

(10.2): $W_{(i,j,k)}.W_{(i',j',k')}=T_{i+i',\ k+k'}+\sum_{s=1}^m U_{i+i',\ \beta^s}+\sum_{l=0}^{p-1}\sum_{s=0}^{q-1}V_{(l,i+i',s)}$ 若 $i+i'=j+j'$。设 $W_{(i,j,k)}=\langle v_l|\ 0\leq l\leq p-1\rangle$ 且 $W_{(i',j',k')}=\langle v_l'|\ 0\leq l\leq p-1\rangle$。令$u_0=\sum_{s=0}^{p-1}y^s.(v_0\otimes v_0')$ 且 $T=\langle u_0\rangle$。于是我们有

$$x.u_0=\omega^{k+k'}u_0,\ y.u_0=u_0,$$

$$z_s.u_0=\delta_{s,i+i'}u_0,\ e_g.u_0=\delta_{g,b^{i+i'}}u_0.$$

因此 $T\cong T(i+i',k+k')$。令 $1\leq s\leq p-1$。定义 $v_r^s=x^r.(\sum_{l=0}^{p-1}\eta^{-ls}v_0\otimes v_0')$ 且 $U_s=\langle v_r^s|\ 0\leq r\leq q-1\rangle$。于是我们有

$$x.v_r^s=v_{r+1}^s,\ y.v_r^s=\eta^{st^r}v_r^s,$$

$$z_l.v_r^s=\delta_{l,i+i'}v_r^s,\ e_g.v_r^s=\delta_{g,b^{i+i'}}v_r^s.$$

因此 $U_s\cong U_{i+i',\ s}$。定义 $M=\{(l,r)|(l,r)\in\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q$ 使得 $ld+rd't^i=0\}$, 其中 $d=t^j-t^i$和 $d'=t^{j'}-t^{i'}$。令 $(l_1,r_1)\in\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q$以及 $(l_1,r_1)\notin M$。则根据定义有 $l_1d+r_1d't^i\neq 0$。为简单起见, 我们定义 $f(l_1,r_1)=l_1d+r_1d't^i$。令

$\overline{v_l^s} = x^{-l}.(\sum_{r=0}\eta^{-rs}y^r.(v_{l_1}\otimes v_{r_1})')$，并令 $V_{(s,f(l_1,r_1))} = \langle\overline{v_l^s}|\ 0\le l\le q-1\rangle$，其中 $0\le s\le p-1$ 和 $0\le l\le q-1$。于是我们有

$$x.\overline{v_l^s} = \overline{v_{l-1}^s},\ y.\overline{v_l^s} = \eta^{s.t^{-l}}\overline{v_l^s},$$

$$z_r.\overline{v_l^s} = \delta_{r,i+i'}\overline{v_l^s},\ e_g.\overline{v_l^s} = \delta_{g,a^{f(l_1,r_1)t^l}b^{i+i'}}\overline{v_l^s}.$$

因此$V_{(s,f(l_1,r_1))} \cong V_{(f(l_1,r_1)\ i+i',\ s)}$。利用定义，可得 $U_s = U_{ts}$ 且$V_{(s,f(l_1,r_1))} = V_{(s,f(tl_1,tr_1))}$，其中 $0\le s\le p-1$ 且 $(l_1,\ r_1)\notin M$。根据$W_{(i,j,k)}\otimes W_{(i',j',k')}$ 的定义，我们得到 $W_{(i,j,k)}\otimes W_{(i',j',k')} = T_{i+i',\ k+k'}\oplus_{r=1}^m U_{i+i',\ \beta^r}\oplus\ (\oplus_{s=0}^{p-1}\oplus_{r=1}^m V\ (\beta^r,\ i+i',\ s))$。□

定理 **4.9** 的证明。 由引理 4.10-4.11，即得所需结论。 □

References

[1] Masuoka, Akira。《霍普夫代数与李双代数的扩张》。美国数学会会刊 352.8（2000）：3837-3879。[2] Masuoka, Akira。《霍普夫代数扩张与上同调》。数学科学研究所出版物 43（2002）：167-209。[3] Abella, Andr´es。《关于半单霍普夫代数中紧致对合存在性的一些进展》。S˜ao Paulo 数学科学杂志 13.2（2019）：628-651。[4] Bakalov, Bojko，和 Alexander A. Kirillov。《张量范畴与模函子讲义》。第21卷。美国数学学会，2001。[5] Gui, Bin。《与酉顶点算子代数相关的模张量范畴的酉性，I》。数学物理通讯 366.1（2019）：333-396。[6] Blanchet, Christian。《赫克代数、模范畴与三维流形量子不变量》。《拓扑学》39.1（2000）：193-223。[7] Radford, David E。《霍普夫代数》。第49卷。世界科学出版社，2011。[8] Rowell, Eric C。《从量子群到酉模张量范畴》。当代数学 413（2006）：215-230。[9] Kac, G. I。《群向环群的扩张》。《苏联数学汇刊》5.3（1968）：451。[10] Schneider, Hans-J¨urgen。《霍普夫代数交叉积的正规基与传递性》。《代数杂志》152.2（1992）：289-312。[11] Shimizu, Kenichi。《编织有限张量范畴的非退化条件》。《数学进展》355（2019）：106778。[12] Kauffman, Louis H。《霍普夫代数与三维流形不变量》。《纯粹与应用代数》100.1-3（1995）：73-92。[13] Kauffman, Louis H.，和 David E. Radford。《有限维 Drinfel'd 双成为带状霍普夫代数的充要条件》。《代数杂志》159.1（1993）：98-114。[14] Freedman, Michael H.、Alexei Kitaev 和 Zhenghan Wang。《利用量子计算机模拟拓扑场论》。《数学物理通讯》227（2002）：587-603。[15] Freedman, Michael，等。《拓扑量子计算》。《美国数学会通报》40.1（2003）：31-38。[16] M¨uger, Michael。《模范畴的结构》。《伦敦数学学会学报》87.2（2003）：291-308。[17] Hu, Naihong。《与量子仿射空间相关的量子群结构》。《代数评论》11.4（2004）。[18] Reshetikhin, Nicolai，和 Vladimir G. Turaev。《通过链环多项式与量子群得到的三维流形不变量》。《数学创获》103.1（1991）：547-597。

[19] Natale, Sonia。《维数为 pq^2 的半单霍普夫代数》。《代数杂志》221.1（1999）：242-278。[20] Montgomery, Susan。《霍普夫代数及其在环上的作用》。第82卷。美国数学学会，1993。[21] Kerler, Thomas，和 Volodymyr V. Lyubashenko。《带角三维流形的非半单拓扑量子场论》。第1765卷。施普林格科学与商业媒体，2001。[22] Drinfel'd, Vladimir G。《量子群》。《苏联数学杂志》41（1988）：898-915。[23] Liu, Zhengwei，和徐峰。《模张量范畴的琼斯-瓦瑟曼子因子》。《数学进展》355（2019）：106775。