arXiv:2303.03219v1 [physics.geo-ph] 6 Mar 2023

恒向线多边形的面积

Charles F. F. Karney *

SRI International，美国新泽西州普林斯顿，邮编 08540-6449

（日期：2023年3月6日）

本文推导了恒向线多边形的面积公式，其中恒向线多边形是指边为旋转椭球体上恒向线的多边形，并给出了一种精确计算其面积的方法。本文还指出，计算恒向线的标准方法在处理近乎向东或向西的航线时会产生不准确的结果；通过系统地使用差商，可以解决这一问题。

关键词：等角航线、多边形面积、高偏心率椭球、差商

1. 引言

恒向线（也称等角航线）是椭球表面上方位角恒定的曲线，见图1和2。由于历史原因，恒向线十分重要：保持罗盘航向航行，比沿较短的测地线航线航行更为简单；墨卡托投影的显著特点是，恒向线在该投影中呈直线。Wright 于 1599 年给出了球面上恒向线的计算方法，随后 Lambert（1772）将其扩展至旋转椭球体，并推导出墨卡托投影的椭球推广形式。沿恒向线的距离则可用第二类不完全椭圆积分表示（Legendre，1811）。此后有关恒向线的论文大多着眼于简化计算方法，以便航海员在海上轻松使用。

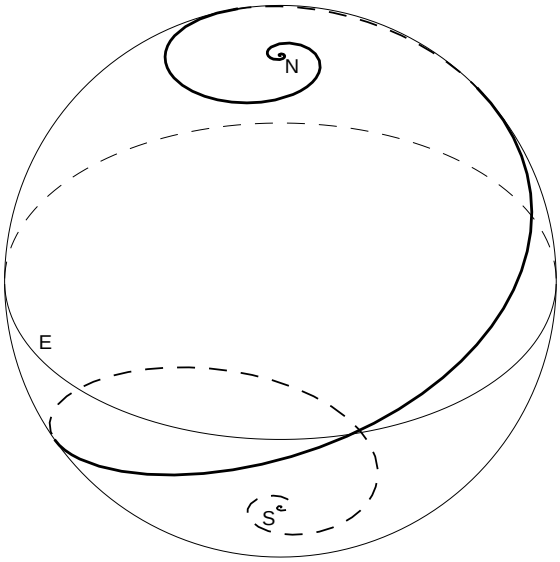

图1 球面上的一条恒向线，展示了其独特特征：它会绕着每个极点无限次螺旋延伸（在极地立体投影中，恒向线映射为对数螺线）。然而，两极之间的恒向线距离有限；在此例中，恒定方位角取为 $\sec^{-1} 3 = 70.5°$ ，因此该距离为沿子午线距离的 3 倍。图中从纬度35°处的一点以正射投影观察恒向线；两极和赤道分别标记为“N”“S”和“E”。

本文讨论两个问题：

1. 如何在航向接近 $\pm 90°$ 时准确计算恒向线。标准方法会导致有效位严重损失。使用差商可以避免这一问题。

2.求恒向线线段“下方”的面积，即由该线段、两段子午线弧和一段赤道弧围成的四边形的面积。这样，即使对于高偏心率椭球，也能准确计算恒向线多边形的面积。

我们考虑一个旋转椭球体，其赤道半径为 a ，极半轴为 b。椭球的形状可用扁率 $f = (a-b)/a$、第三扁率 $n = (a-b)/(a+b)$、偏心率平方 $e^2 = (a^2-b^2)/a^2$或第二偏心率平方 $e'^2 = (a^2-b^2)/b^2$来表征。（地理）纬度和经度分别记为 ϕ 和 λ。方位角从北方向顺时针测量的恒向线方位角记为 α。

2. 恒向线问题的表述

由于墨卡托投影是保角的，并且能将子午线映射为相互平行的直线，等角航线在墨卡托投影中会映射为直线。通过使用各种辅助纬度，可以简单地引入椭球效应，包括保角纬度 χ、等距纬度μ、参数纬度 β 和等积纬度 ξ。

*电子邮箱：charles.karney@sri.com

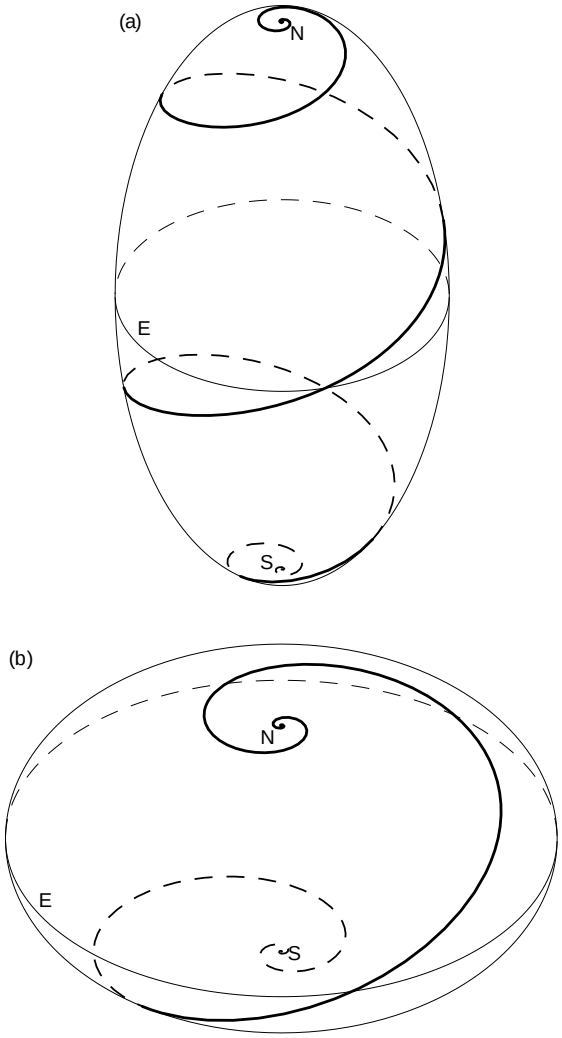

图2 扁长椭球上的恒向线（a），$b/a = 2$，以及扁椭球上的恒向线（b），$b/a = \frac{1}{2}$。恒向线的方位角及其投影与图1中的相同。

在球面极限下，这四种辅助纬度会还原为地理纬度 ϕ。

可以准确地在这些不同的纬度之间进行转换（Karney，2022b）；本文将此视为一个已解决的问题。为简化记号，例如我们写作 μ_1，而不是 $\mu(\phi_1)$。

墨卡托投影将地球上经度为 λ、纬度为 ϕ 的点映射到平面上的点（λ，ψ），其中 ψ 为等角纬度

$$\psi = \operatorname{lam}\chi = \operatorname{gd}^{-1}\chi = \sinh^{-1}\tan\chi, \tag{1}$$

$\operatorname{lam}\chi$ 是朗伯函数，其反函数 $\operatorname{gd}\psi = \tan^{-1}\sinh\psi$，是古德曼函数（Olver 等人，2010，§4.23(viii)）。

首先处理等角航线反解问题，即求出两点之间恒向线的航向 α_{12} 和长度 s_{12} 这两点的坐标分别为 (ϕ_1, λ_1) 和 (ϕ_2, λ_2)，我们只需

$$\alpha_{12} = \tan^{-1}\frac{\lambda_{12}}{\psi_{12}}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{s_{12}}{R} &= \mu_{12}\sec\alpha_{12} \\ &= \frac{\mu_{12}}{\psi_{12}}\sqrt{\lambda_{12}^2 + \psi_{12}^2},\end{aligned} \tag{3}$$

其中 R 是椭球的整流半径，$\psi_{12} = \psi_2 - \psi_1$，$\mu_{12} = \mu_2 - \mu_1$，$\lambda_{12} = \lambda_2 - \lambda_1$；通常，$\lambda_{12}$ 会缩减到范围 $[-\pi, \pi]$（从而得到最短恒向线的航向）。式（2）中的粗比线表示反正切的象限由比值的分子和分母的符号决定。从赤道到极点的距离可用 表示为如下

$$\frac{\pi}{2}R = aE(e) = bE(ie') = 2R_G(0, a^2, b^2), \tag{4}$$

其中 $E(k)$ 是第二类完全椭圆积分（Olver 等，2010，§19.2(ii)），而 $R_G(x, y, z)$ 是一种对称椭圆积分（Olver 等，2010，§19.16(ii)）。对于较小的扁率，可以使用（Ivory，1798）

$$\begin{aligned}R &= \frac{a}{1+n}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}\right)^2 n^{2j} \\ &= \frac{a}{1+n}\left(1 + \tfrac{1}{4}n^2 + \tfrac{1}{64}n^4 + \tfrac{1}{256}n^6 + O(n^8)\right).\end{aligned} \tag{5}$$

正解问题的处理方式类似。已知起点（ϕ_1, λ_1）、航向 α_{12}以及沿恒向线的距离 s_{12}，求终点（ϕ_2, λ_2）。我们可以写成

$$\mu_{12} = \frac{s_{12}}{R}\cos\alpha_{12}, \tag{6}$$

由此可以求得 μ_2, ϕ_2 和 ψ_2。然后有

$$\begin{aligned}\lambda_{12} &= \psi_{12}\tan\alpha_{12} \\ &= \frac{s_{12}}{R}\frac{\psi_{12}}{\mu_{12}}\sin\alpha_{12}.\end{aligned} \tag{7}$$

在此表述中，我们不限制 s_{12} 的符号；正解问题中允许距离为负。如果 $\mu_2 = \mu_1 + \mu_{12}$ 的值超出纬度的正常范围，$[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$则应将其替换为补角。由于在这种情况下，恒向线已绕极点无限螺旋多圈，见图1 和2，λ_{12} 此时是不定的。如果 $\mu_2 = \pm\frac{1}{2}\pi$，结果也同样如此，因为此时 $\psi_{12} = \pm\infty$，且式（7）给出不定结果。

方程（3）和（7）在极限$\phi_2 \to \phi_1$下均为不定式，因为 ψ_{12} 和 μ_{12} 均趋于零。然而，我们可以应用洛必达法则，写出

$$\frac{\mu_{12}}{\psi_{12}} \to \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\psi_1} = \frac{a\cos\beta_1}{R}, \tag{8}$$

其中，导数公式由 ψ 和 μ的定义微分方程推导而来。注意，$a\cos\beta_1$ 是纬度为 ϕ_1的纬圈半径。

这为恒向线的航向提供了完整的解。我们可以看到，利用辅助纬度，球面解很容易推广到椭球；图2 展示了长扁椭球和扁椭球上的恒向线。实现此类解时，我们可以选择使用级数展开来转换辅助纬度（$|f| \lesssim \frac{1}{100}$推荐采用此方法），也可以直接计算辅助纬度公式。两种方法的详情见 Karney (2022b)。

使用方程（3）和（7）时，如果 $\phi_2 \approx \phi_1$，我们会面临严重的精度损失，因为 μ_{12} 和 ψ_{12}都涉及两个近似相等的量之差，从而导致灾难性舍入误差。

例如，Meyer 和 Rollins（2011）提出了一种简单的解法：将沿纬线行进的恒向线的处理方法扩展到 $\phi_2 \approx \phi_1$的情况，即用导数 d μ_{12}/ψ_{12} dμ/ψ替换比值；该导数按方程（8）在中点$\phi = \frac{1}{2}$（$\phi_1 + \phi_2$）处计算。然而，这并不完全令人满意：你必须选择导数取代差值比的转换点；而在转换点附近，精度会损失许多位。

图 3 生动地展示了这一难题。图中显示了 δs_{12} 在计算距离时产生的误差如何随 $\phi_{12} = \phi_2 - \phi_1$ 变化。这里，加号和叉号分别表示计算 δs_{12}时的误差，其中 μ_{12}/ψ_{12} 分别使用差值之比和中点导数。仅有这两种计算方法可选时，$0.000\,01° < \phi_{12} < 1°$的精度不可避免地会下降。若将 $\phi_{12} = 0.001°$ 选作转换点，距离的最大误差约为 0.1 毫米。在某些应用中，这种精度损失或许无关紧要；但如果可能，我们希望避免这种折中。

事实证明，我们可以显著改进计算，同时保持完整的双精度精度。事实上，Botnev 和 Ustinov（2014）给出了能够准确计算μ_{12}/ψ_{12} 的公式；不过，他们对 ψ_{12} 的处理有些临时拼凑，而且他们关于μ_{12} 的公式仅适用于较小的扁率。使用差商的代数可以更简单地解决这个问题（Kahan 和 Fateman，1999）。这种方法可用于减少广泛应用中的舍入误差。附录A详细说明了如何将其应用于计算 μ_{12}/ψ_{12} 。图3 中的菱形展示了结果：在 ϕ_{12}的整个范围内，使用双精度差商时，误差均在 1 纳米左右。这表明，传统的距离计算方法（加号和叉号）会造成不必要的精度损失；在某些情况下，浮点数的精度位损失略多于四分之一。使用差商可以采用单一的计算方法，避免棘手的转换点选择问题，并保持完整的精度。

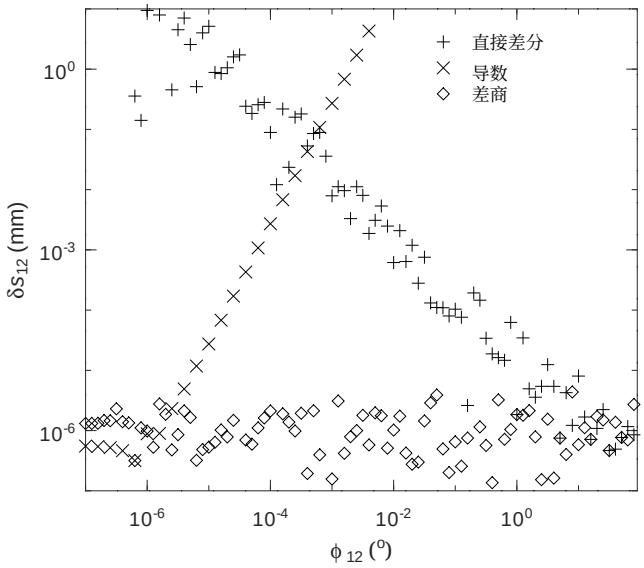

图 3　在计算球面上半径为 $a = 6400$ 千米的恒向线时得到的绝对误差 δs_{12}，其中平均纬度$_{1\,2}(\phi_1 + \phi_2) = 45°$、经度差为 $\bar{\lambda}_{12} = 90°$，且 $\phi_{12} = \phi_2 - \phi_1$ 取不同值。比较了计算 μ_{12}/ψ_{12} 的三种方法：对差值直接取比值，见式（3）（加号）；用导数近似该比值，见式（8）（叉号）；用差商计算该比值，见式（A3）（菱形）。导数近似法的误差呈现系统性变化，这表明误差（主要）来自截断误差。其他情况下的随机变化则是由舍入误差造成的。三种情况下，计算均采用双精度（浮点表示的尾数部分为 53 位）；并与高精度（256 位）计算结果进行比较，后者视为“精确值”。

3. 恒向线下方的面积

政治实体的边界有时被定义为斜向的“直线”，例如加利福尼亚州与内华达州之间的边界、阿尔及利亚与其南部邻国毛里塔尼亚和马里之间的边界，以及约旦与沙特阿拉伯之间曲折的边界。这些线究竟如何定义，往往并不明确。合理的选择包括测地线（在椭球上为直线）、恒向线（在墨卡托投影上为直线），或在某种其他约定投影中的直线。边界也可以指定为纬圈（当然，这同样是一条恒向线），例如分隔美国和加拿大的北纬49度线。假设某个实体的边界由恒向线定义，我们或许会想计算由此围成的面积。

Karney（2013）针对测地多边形进行了这项计算，其中依据 Danielsen（1989）的方法，确定了测地线段与赤道之间的面积。多边形的面积由以下方式得出：

将各多边形边的贡献代数相加（对于环绕极点的多边形，还需进行调整）。

这里，我们再次进行这一计算，求出 S_{12}：顶点为 $(0,\lambda_1)$、$(0,\lambda_2)$、(ϕ_2,λ_2) 和 (ϕ_1,λ_1) 的等航线四边形的面积。它由两段子午线弧、一段赤道线段和一段一般恒向线线段组成。由此结果，我们可以计算任意恒向线多边形的面积。特定线段下方的面积为

$$S_{12} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} c^2 \sin\xi \,\mathrm{d}\lambda, \tag{9}$$

其中 ξ 是等积纬度，而

$$c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\frac{\tanh^{-1} e}{e} \tag{10}$$

是等积半径的平方。我们首先将式（9）中的积分变量从 λ 换为 ψ，使用 $\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\psi = \lambda_{12}/\psi_{12}$，然后换为 χ，使用 $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\chi = \sec\chi$，得到

$$S_{12} = c^2\lambda_{12}\frac{p_{12}}{\psi_{12}}, \tag{11}$$

其中 $p_{12} = p(\chi_2) - p(\chi_1)$，并且

$$p(\chi) = \int \sin\xi \sec\chi \,\mathrm{d}\chi. \tag{12}$$

在极限情况下，$\chi_2 \to \chi_1$，我们有（再次应用洛必达法则）

$$S_{12} \to c^2\lambda_{12}\frac{\mathrm{d}p(\chi_1)/\mathrm{d}\chi_1}{\mathrm{d}\psi_1/\mathrm{d}\chi_1} = c^2\lambda_{12}\sin\xi_1, \tag{13}$$

这是纬线圆弧线段下方面积的著名结果。

在球面极限下，有 $\sin\xi \to \sin\chi$，方程（12）中的被积函数变为 $\tan\chi$。这提示我们将 $p(\chi)$ 拆分为球面贡献和椭球修正，写作

$$p(\chi) = p_0(\chi) + p_\chi(\chi), \tag{14}$$

$$p_0(\chi) = \int \tan\chi \,\mathrm{d}\chi = \log\sec\chi = \sinh^{-1}\frac{\tan\chi\sin\chi}{2}, \tag{15}$$

$$p_\chi(\chi) = \int q_\chi(\chi)\,\mathrm{d}\chi, \tag{16}$$

$$q_\chi(\chi) = \frac{\sin\xi - \sin\chi}{\cos\chi}. \tag{17}$$

球面项 $p_0(\chi)$ 在 $\chi \to \frac{1}{2}\pi$ 处是奇异的；这只是反映了恒向线在接近极点时会快速绕极点旋转。方程（15）中积分的第二种表达式可避免较小 χ 时出现舍入误差。

现在我们需要计算 $p_\chi(\chi)$，即方程（16）。几乎可以肯定，无法将该积分

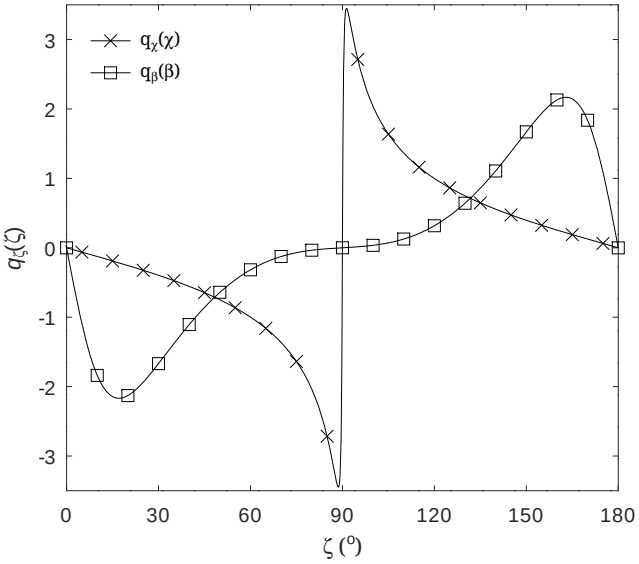

图 4 面积积分中椭球修正项的被积函数 $q_\chi(\chi)$ 和 $q_\beta(\beta)$，即方程（17）和（19），分别用叉号和方块标记。图示情形为长椭球，且 $n = -\frac{5}{8}$。注意，$\int_0^{\pi/2} q_\chi(\chi)\,\mathrm{d}\chi = \int_0^{\pi/2} q_\beta(\beta)\,\mathrm{d}\beta$。

以闭合形式求出。然而，由于 $q_\chi(\chi)$是周期函数（周期为 π），自然可以将其展开为傅里叶级数，从而轻松计算该积分。不幸的是，尽管被积函数 $q_\chi(\chi)$，即方程（17），是 χ的良态函数，但它可能变化很大，尤其是对于长椭球；例如，图4 中带叉号的曲线展示了 $q_\chi(\chi)$，其中 $n = -\frac{5}{8}$ 或 $b/a = 13/3$。因此，傅里叶级数收敛缓慢，需要许多项才能得到准确结果。

我们通过改变式（16）中的积分变量 χ 为参数纬度 β，来解决这个问题。因此，我们将式（16）替换为

$$p_\beta(\beta) = \int q_\beta(\beta)\,\mathrm{d}\beta, \tag{18}$$

with

$$q_\beta(\beta) = q_\chi(\chi)\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\beta} = (1-f)\frac{\sin\xi - \sin\chi}{\cos\phi}, \tag{19}$$

其中我们使用了

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\beta} = (1-f)\frac{\cos\chi}{\cos\phi}. \tag{20}$$

这里的记号约定如下：$p_\beta(\beta) = p_\beta\big(\beta(\chi)\big) = p_\chi(\chi)$。图 4 中方块标记的曲线显示了 $q_\beta(\beta)$，其中 $n = -\frac{5}{8}$ 这证实它比 $q_\chi(\chi)$变化得更平滑。最后，我们写作

$$p_\beta(\beta) = \sum_{l=1}^{L} P_l \cos 2l\beta, \tag{21}$$

其中， P_l 是 $p_\beta(\beta)$的傅里叶级数系数， L 取足够大的值，使我们可以对 $l > L$范围内的 $P_l = 0$ 进行近似。对于图 4 所示的情况，$n = -\frac{5}{8}$，取 $L = 50$后， $q_\beta(\beta)$的计算可达到完整的双精度精度；相比之下，如果拟合$q_\chi(\chi)$，则需要包含 $L = L_\chi = 3993$项。由于 $p_\beta(\beta)$是不定积分（式 (18)），我们选择积分常数，使得 $P_0 = 0$，且傅里叶级数（式 (21)）以 $l = 1$ 项开头。

如果椭球的扁率较小，我们可以将$q_\beta(\beta)$展开为关于 n的泰勒级数；这样便可解析地求出积分，从而得到 P_l 的以下级数近似：

$$\mathbf{P}^{(L)} = \mathsf{Q}^{(L)} \cdot \mathbf{N}^{(L)} + O(n^{L+1}), \tag{22}$$

其中

$$\mathbf{P}^{(L)} = [P_1, P_2, P_3, \ldots, P_L]^\mathsf{T}, \tag{23}$$

$$\mathbf{N}^{(L)} = [n, n^2, n^3, \ldots, n^L]^\mathsf{T} \tag{24}$$

是长度为 L 的列向量，而对于 $L = 6$,

$$\mathsf{Q}^{(6)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{22}{45} & -\frac{398}{945} & \frac{596}{2025} & -\frac{102614}{467775} & \frac{138734126}{638512875} \\ & \frac{1}{5} & -\frac{118}{315} & \frac{1543}{4725} & -\frac{24562}{155925} & \frac{17749373}{425675250} \\ & & -\frac{17}{315} & \frac{152}{945} & -\frac{38068}{155925} & \frac{1882432}{8513505} \\ & & & \frac{5}{252} & -\frac{752}{10395} & \frac{268864}{2027025} \\ & & & & -\frac{101}{17325} & \frac{62464}{2027025} \\ & & & & & \frac{11537}{4054050} \end{bmatrix} \tag{25}$$

是一个 $L \times L$ 上三角矩阵。（注意， $P_l = O(n^l)$，因此，傅里叶级数中 $p_\beta(\beta)$所有被忽略的 $l > L$项均为 $O(n^{L+1})$。）这里，执行泰勒展开及后续积分所需的代数运算由 Maxima（2022）完成。如上所示，将展开截断于 $L = 6$，即可使$|f| \leq \frac{1}{100}$达到完整的双精度精度。

通过考察系数 $\mathsf{Q}^{(40)}$，可以估算该级数的收敛半径；结果表明该级数在 $|n| \lesssim 1$时收敛，即对所有偏心率均收敛。尽管如此，仍宜将级数方法限制在扁率相当小的范围内，例如 $|f| \leq \frac{1}{10}$ （此时 $L = 12$ 可达到完整精度）。

至此，我们完成了小扁率情况下恒向线下方面积的公式推导。对于较大的偏心率，我们采用 Karney (2022a) 提出的方法，即在运行时对一组等间距采样点进行离散傅里叶变换（DFT），以计算 P_l 式（21）中出现的傅里叶系数。关于该方法的详细说明见附录 C。这里仅指出，只需少量傅里叶系数，就能以完整的双精度精度计算面积（见附录 C中的表 1 ）。

术语 p_{12}/ψ_{12} 在式（11）中出现，其问题与 μ_{12}/ψ_{12} 在式（3）中出现的问题完全相同，即取两个差值之比，这可能导致精度出现不可接受的损失。如果 $\phi_2 = \phi_1$，我们可以使用式（13）；但在一般情况下，我们仍需使用差商，具体说明见附录C。

值得将这一结果，即式（11）和式（14），与测地线问题中的相应结果进行比较，即 Karney (2013) 中的式（58）、（59）和（61）。在这两种情况下，我们都将面积分为球面部分和椭球修正两部分；对于经过极点附近的路径，球面部分会呈现奇异行为。

然而，与测地线问题不同，经度在面积公式（11）中作为乘数出现， λ_{12}；这体现了恒向线简单的几何特性。因此， p_{12} 仅取决于端点的纬度和椭球的扁率。这样一来，只要指定扁率，就能计算出公式（ P_l 21）中的系数。对于测地线问题，这一点无法做到，因为 Karney (2013) 中的椭球修正公式（61）同时涉及扁率和测地线的赤道方位角，二者紧密交织在一起。

4. 结论

我们提出了一种计算恒向线一段下方面积的方法。构成恒向线多边形的所有线段的有符号贡献之和，便是该多边形的面积。与测地多边形（Karney，2013）一样，如果多边形包含极点，则需要对总和作简单调整。这一面积结果是新的。Freire 和 de Vasconcello（2010）也研究过恒向线多边形的面积，但他们的方法需要将边细分为足够短的线段，以便应用辛普森法：因此，面积计算的成本与多边形的周长成正比。相比之下，本文所述方法的成本与多边形的顶点数成正比。值得注意的是，球面上相对简单的结果也是新的：此时公式（14）和（15）可化简为 $p(\chi) =$对数割线 χ。

本研究中保持精度的关键在于使用差商。尽管这些技术早已成熟（Kahan 和 Fateman，1999），但在大地测量应用中却一直鲜少受到关注。将差商应用于 Clenshaw 求和也是一项新进展。

这里介绍的方法于 2014 年作为 GeographicLib（Karney，2023）的一部分实现；不过，面积计算基于$p_\chi(\chi)$的泰勒展开，因此仅适用于扁率较小的情况。本文对相关程序进行了重新实现，采用 Karney (2022b) 给出的辅助纬度展开方法，通过将变量从 β 代换为 χ 来改进面积积分的处理，并使用离散傅里叶变换计算面积积分的系数，从而为高偏心率椭球的面积计算提供了精确结果。其接口由以下部分组成：

- C++ 类 Rhumb 和 RhumbLine，用于求解恒向线反算和正算问题；

- 命令行工具 RhumbSolve，可为这些类提供便捷的前端；

- 一个用于计算测地线多边形和恒向线多边形面积的命令行工具 Planimeter；

•这些工具也提供在线版本，网址为 https://geographiclib.sourceforge.io/cgi-bin/RhumbSolve 和https://geographiclib.sourceforge.io/cgi-bin/Planimeter。

此重新实现已包含在 GeographicLib 2.2 版中。

补充数据

以下文件提供于

> 计算恒向线面积的级数展开，
> doi:10.5281/zenodo.7685484，

作为本文的补充数据：

- `rhumbarea.mac`：用于求得 $\mathbf{P}_{(L)}$，式（22）中级数展开的 Maxima 代码。文件中包含使用此代码的说明。

•auxlvals40.mac：辅助纬度之间转换所需的级数，该级数由 rhumbarea.mac 使用。此文件是 Karney（2022c）提供文件的副本。

•rhumbvals40.mac：rhumbarea.mac 生成的矩阵 Q，$L = 40$ 格式适用于加载到 Maxima。

•`rhumbvals{6,16,40}.m`：矩阵 Q 采用 Octave/MATLAB 记法，分别对应 $L = 6$ 和 16（使用精确分数），以及 $L = 40$（以浮点数表示）。`rhumbvals6.m`以“机器可读”形式重现式（25）。`rhumbvals40.m`可用于估算式（22）的收敛半径。这些文件的格式足够简单，可以轻松改编为任何计算机语言。

参考文献

V. A. Botnev 和 S. M. Ustinov，2014，*Metody resheniya pryamoy i obratnoy geodezicheskikh zadach s vysokoy tochnost'yu (Methods for direct and inverse geodesic problems solving with high precision)*，圣彼得堡国立理工大学学报，**3**（198），49–58，https://ntv.spbstu.ru/fulltext/T3.198.2014 05.PDF。C. W. Clenshaw，1955 *A note on the summation of Chebyshev series*，，《数学计算》，（），–doi:10.1090/S0025-5718-1955-0071856-0。J. S. Danielsen，1989，*The area under the geodesic*，《测量评论》，**30**（232），61–66，doi:10.1179/003962689791474267。

R. R. Freire 和 J. C. P. de Vasconcello，2010，*Geodetic or rhumb line polygon area calculation over the WGS-84 datum ellipsoid XXIV FIG International*，载于，*Congress* https://www.fig.net/resources/proceedings/ fig proceedings/fig2010/papers/fs02c/fs02c freire vasconcellos 3868.pdf。J. Ivory，1798 *A new series for the rectification of the ellipsis*，**4** 2《爱丁堡皇家学会汇刊》，（），177–190，doi:10.1017/S0080456800030817，https://books. google.com/books?id=FaUaqZZYYPAC&pg=PA177。W. M. Kahan 和 R. J. Fateman，1999 *Symbolic computation of divided differences*，**33** 2 7 28，《SIGSAM简报》，（），– doi:10.1145/334714.334716。C. F. F. Karney，2013，*Algorithms for geodesics*，《大地测量学杂志》，87(1)，43–55，doi:10.1007/s00190-012-0578-z。—，2022a，*Geodesics on an arbitrary ellipsoid of revolution*，技术报告，SRI International，电子预印本：arxiv:2208.00492。—，2022b，*On auxiliary latitudes*，技术报告，SRI International，电子预印本：arxiv:2212.05818。—，2022 *Series expansions for converting between auxiliary latitudes* 10 5281 7382666 c，doi: 。/zenodo. 。—，2023，*GeographicLib version 2.2*，https://geographiclib. sourceforge.io/C++/2.2。J. H. Lambert，1772 *Notes and comments on the composition of terrestrial and celestial maps*，载于 R. Caddeo 和 A. Papadopoulos 编，*Mathematical Geography in the Eighteenth Century: Euler， Lagrange and Lambert (2022)*，第367–422页（Springer），doi:10.1007/978-3-031-09570-2 16，由 A. A’ Campo-Neuen 从德文翻译，https:// books.google.com/books?id=ō s MR3NUD4C。A. M. Legendre，1811，*Exercices de Calcul Intégral sur Divers Ordres de Transcendantes et sur les Quadratures*，第1卷（Courcier出版社，巴黎），https://iris.univ-lille.fr/handle/ 1908/1541。Maxima，2022，*A computer algebra system version 5.46.0*，https://maxima.sourceforge.io。T. H. Meyer 和 C. Rollins，2011，*The direct and in-direct problem for loxodromes*，《导航》，58(1)，1–6，doi:10.1002/j.2161-4296.2011.tb01787.x。F. W. J. Olver、D. W. Lozier、R. F. Boisvert 和 C. W. Clark 编，2010，*NIST Handbook of Mathematical Functions*（剑桥大学出版社），https://dlmf.nist.gov。

附录 A：差商的使用

这里我将探讨如何以保持精度的方式计算如下表达式μ_{12}/ψ_{12}，它出现在方程（3）和（7）中。使用差商代数可以系统地处理这类表达式；Kahan 和 Fateman（1999，以下称为KF）对这一主题进行了详细讨论。对于 $f(x)$ 的差商，定义如下：

$$\Delta[f](x,y) = \begin{cases} df(x)/dx, & \text{if } x = y, \\ \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{A1}$$

只要 x 和 y 相距足够远，就可以在计算中使用上面的第二种形式。关键是将这个表达式改写为一种形式，使其在 $y \approx x$ 时避免产生过大的舍入误差。

许多读者可能已经熟悉某些情况下适用的代换，例如：

$$\mathbin{\triangle\!\!\!+}[\sin](x,y) = \cos\tfrac{1}{2}(x+y)\frac{\sin\frac{1}{2}(y-x)}{\frac{1}{2}(y-x)}, \tag{A2}$$

如果 $y \approx x$ ，即使 $y-x$ 中的相对误差很大，也能准确求值；由于上面的最后一个因子在 $y-x=0$附近变化缓慢，差商中的误差只取决于$y-x$的绝对误差。KF中的第1.4节给出了一组规则，使该技术能够应用于广泛的问题。特别是，针对所有初等函数都给出了合适的差商公式。

若将 μ 和 ψ 视为 χ的函数，我们可以写成

$$\frac{\mu_{12}}{\psi_{12}} = \frac{\mathbin{\triangle\!\!\!+}[\mu](\chi_1,\chi_2)}{\mathbin{\triangle\!\!\!+}[\psi](\chi_1,\chi_2)}. \tag{A3}$$

在球面极限下， $\mu=\chi$，分子化为1。因此，我们先考虑分母，它可以表示为

$$\mathbin{\triangle\!\!\!+}[\psi](\chi_1,\chi_2) = \mathbin{\triangle\!\!\!+}[\sinh^{-1}](\tan\chi_1,\tan\chi_2) \times \mathbin{\triangle\!\!\!+}[\tan](\chi_1,\chi_2), \tag{A4}$$

其中我应用了链式法则

$$\mathbin{\triangle\!\!\!+}[f\circ g](x,y) = \mathbin{\triangle\!\!\!+}[f]\big(g(x),g(y)\big)\,\mathbin{\triangle\!\!\!+}[g](x,y) \tag{A5}$$

(此处 $f\circ g$ 指函数复合)应用于式(1)。将 $\tan\chi$ 作为自变量（而非 χ），可以准确表示 χ 接近0时的值以及 $\pm\frac{1}{2}\pi$；因此我们使用反函数法则，

$$\mathbin{\triangle\!\!\!+}[f^{-1}](x,y) = 1/\mathbin{\triangle\!\!\!+}[f]\big(f^{-1}(x),f^{-1}(y)\big), \tag{A6}$$

将式（A4）改写为

$$\mathbin{\triangle\!\!\!+}[\psi](\chi_1,\chi_2) = \frac{\mathbin{\triangle\!\!\!+}[\sinh^{-1}](\tan\chi_1,\tan\chi_2)}{\mathbin{\triangle\!\!\!+}[\tan^{-1}](\tan\chi_1,\tan\chi_2)}. \tag{A7}$$

注意，链式法则和反函数法则（式（A5）和（A6））是导数相应法则的直接类比。式（A7）可使用*KF*中的公式求值：

$$\mathbin{\triangle\!\!\!+}[\sinh^{-1}](x,y) = \sinh^{-1}\left(\frac{(y-x)(x+y)}{x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{1}{y-x}, \tag{A8}$$

$$\mathbin{\triangle\!\!\!+}[\tan^{-1}](x,y) = \frac{1}{y-x}\tan^{-1}\frac{y-x}{1+xy}. \tag{A9}$$

对于球面，当 $\mathbin{\triangle\!\!\!+}[\mu](\chi_1,\ \chi_2)=1$时，方程（3）现在可以利用方程（A3）和（A7）求值。重复图（3）中的数值实验，使用差商得到的舍入误差以菱形表示；这证实了该方法能够有效地大幅降低数值误差。

我这里只列出了方程（A8）和（A9）中的基本结果；*KF* 会在 $y-x$ 为零时补充导数，或在 x 和 y 符号相反时补充直接比值。另外，最好确保在“边界情况”下也能返回正确结果，例如 $x=0$ 和 $y=\infty$。

现在来看式（A3）的分子，$\mathbin{\triangle\!\!\!+}[\mu]$（$\chi_1$，$\chi_2$）。我们区分两种情况：如果椭球的扁率较小，例如$|f|\le\frac{1}{100}$，则可以使用六阶三角级数在$\chi$ 和 μ之间进行转换。该计算可使用 Clenshaw 求和完成；而要计算差商，则需要扩展 Clenshaw 求和。由于这种方法具有普遍用途，我们将在附录 B中单独讨论。

对于任意扁率，将式（A3）重新写为

$$\frac{\mu_{12}}{\psi_{12}} = \frac{\mathbin{\triangle\!\!\!+}[\mu](\beta_1,\beta_2)\,\mathbin{\triangle\!\!\!+}[\beta](\phi_1,\phi_2)}{\mathbin{\triangle\!\!\!+}[\psi](\phi_1,\phi_2)}, \tag{A10}$$

并对其应用差商

$$\beta(\phi) = \tan^{-1}\big((1-f)\tan\phi\big), \tag{A11}$$

$$\mu(\beta) = \frac{bE(\beta,ie')}{R}, \tag{A12}$$

$$\psi(\phi) = \operatorname{lam}\phi - e\tanh^{-1}(e\sin\phi), \tag{A13}$$

其中 E（x，k）是不完全第二类完全椭圆积分（Olver 等，2010，§19.2(ii)）。对于式（A11）和（A13），只需应用*KF*的结果进行常规计算即可。

*KF*没有给出 $\mathbin{\triangle\!\!\!+}[E]$（$x$，$y$；$k$）的公式；不过，他们指出：“考察‘加法公式’或许能为其他特殊函数的差商提供一些启示。”事实上，所需的加法公式见 Olver 等人（2010 年，公式 19.11.2）。通过代入 $\theta=y$，$\phi=-x$，$\psi=z$，可将其转换为如下差商公式：

$$\mathbin{\triangle\!\!\!+}[E](x,y;k) = \begin{cases} \sqrt{1-k^2\sin^2 x}, & \text{if } x=y,\\ \dfrac{E(y,k)-E(x,k)}{y-x}, & \text{if } xy\le 0,\\ \left(\dfrac{E(z,k)}{\sin z} - k^2\sin x\sin y\right) \times \dfrac{\sin z}{y-x}, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{A14}$$

其中角 z 由下式给出

$$z = \tan^{-1}\frac{2t}{(1-t)(1+t)}, \tag{A15}$$

$$t = \frac{(y-x)\mathbin{\triangle\!\!\!+}[\sin](x,y)}{\sin x\sqrt{1-k^2\sin^2 y}+\sin y\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \times \frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}. \tag{A16}$$

（注意，量 t 恰为 $\tan\frac{1}{2}z$。）该公式仅限于 $|x|\le\frac{1}{2}\pi$ 和 $|y|\le\frac{1}{2}\pi$的情况。最好将其用于 $k^2<0$，以便大括号中的两项

具有相同的符号；对于扁椭球（$e'^2 > 0$），情况正是如此，因为 $k^2 = -e'^2 < 0$。对于长椭球（$e^2 < 0$），我们可以对 $\mu'(\beta')$ 应用有限差分（撇号表示余角），其中

$$\Delta[\mu](\beta_1, \beta_2) = \Delta[\mu'](\beta'_1, \beta'_2), \tag{A17}$$

$$\mu'(\beta') = \frac{aE(\beta', e)}{R}, \tag{A18}$$

我们又一次得到 $k^2 = e^2 < 0$。

这里简要考察了如何对扁率任意的椭球使用差商。详细内容请参见第 4 节所述的实现。

附录B：Clenshaw 求和的差商

式（A3）的分子为 $\Delta[\mu](\chi_1, \chi_2)$。这里，我们考察在扁率较小的极限下，如何计算任意两个辅助纬度 $\Delta[\eta](\zeta_1, \zeta_2)$ 对应的 ζ 和 η。在这种情况下，我们可以近似为（Karney, 2022b）

$$\eta(\zeta) = \zeta + \Delta\eta(\zeta) + O(n^{L+1}), \tag{B1}$$

$$\Delta\eta(\zeta) = \sum_{l=1}^{L} C_l \sin 2l\zeta, \tag{B2}$$

其中，取 $L = 6$ 足以为 $|f| \le \frac{1}{150}$ 提供准确结果。差商的可加性使我们可以写成

$$\Delta[\eta](\zeta_1, \zeta_2) = 1 + \Delta[\Delta\eta](\zeta_1, \zeta_2). \tag{B3}$$

由于计算恒向线下方的面积时还需要计算余弦和，因此我们考虑更一般的求和

$$p(\zeta) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k f_k(\zeta), \tag{B4}$$

其中

$$f_k(\zeta) = \sin\bigl(2(k + k_0)\zeta + \zeta_0\bigr). \tag{B5}$$

对于辅助纬度之间的转换，式（B2）中，我们有 $k_0 = 1$ 和 $\zeta_0 = 0$，$f_k(\zeta) = \sin 2(k+1)\zeta$；对于计算面积，式（21）中，我们有 $k_0 = 1$ 和 $\zeta_0 = \frac{1}{2}\pi$，$f_k(\zeta) = \cos 2(k+1)\zeta$。

Clenshaw（1955）求和可应用于式（B4）和（B5），如下所示：注意到 $f_k(\zeta)$ 满足递推关系

$$f_{k-1}(\zeta) + f_{k+1}(\zeta) = 2x f_k(\zeta), \tag{B6}$$

其中

$$x = \cos 2\zeta = (\cos\zeta + \sin\zeta)(\cos\zeta - \sin\zeta), \tag{B7}$$

我们有

$$u_k = \begin{cases} 0, & \text{for } k \ge K, \\ 2x u_{k+1} - u_{k+2} + c_k, & \text{for } k < K, \end{cases} \tag{B8}$$

$$p(\zeta) = u_0 f_0(\zeta) - u_1 f_{-1}(\zeta). \tag{B9}$$

这种求和方法有以下优点：（1）只需少量计算三角函数；（2）代码在读取系数数组时执行紧凑的循环；（3）各项按逆序求和（通常意味着从最小项到最大项）。

将差商式（A1）应用于式，得 (B4)

$$\Delta[p](\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k \Delta[f_k](\zeta_1, \zeta_2), \tag{B10}$$

with

$$\Delta[f_k](\zeta_1, \zeta_2) = 2\cos\bigl((k + k_0)\zeta_+ + \zeta_0\bigr)\frac{\sin(k + k_0)\zeta_-}{\zeta_-}, \tag{B11}$$

其中 $\zeta_- = \zeta_2 - \zeta_1$、$\zeta_+ = \zeta_2 + \zeta_1$，并且在极限 $\zeta_- \to 0$ 时，我们有 $(\sin(k + k_0)\zeta_-)/\zeta_- \to k + k_0$。虽然这种形式避免了在 $\zeta_2 \approx \zeta_1$ 时精度损失，但我们失去了上述 Clenshaw 求和的前两项优点。

这里我们给出 Clenshaw 求和的一种推广，它允许同时计算 $p(\zeta_1, \zeta_2)$ 的和与差。我们写作

$$\mathbf{P}(\zeta_1, \zeta_2) = \begin{bmatrix} p(\zeta_2) + p(\zeta_1) \\ \dfrac{p(\zeta_2) - p(\zeta_1)}{\Delta} \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{F}_k(\zeta_1, \zeta_2), \tag{B12}$$

其中

$$\mathbf{F}_k(\zeta_1, \zeta_2) = \begin{bmatrix} f_k(\zeta_2) + f_k(\zeta_1) \\ \dfrac{f_k(\zeta_2) - f_k(\zeta_1)}{\Delta} \end{bmatrix}, \tag{B13}$$

我们考虑 $\Delta = 1$，其中 $\mathbf{P}(\zeta_1, \zeta_2)$ 的第二个分量是普通差；或者考虑 $\Delta = \zeta_2 - \zeta_1$，其中第二个分量是差商，$\Delta[p](\zeta_1, \zeta_2)$。

方程（B6）和（B7）推广为

$$\mathbf{F}_{k-1}(\zeta_1, \zeta_2) + \mathbf{F}_{k+1}(\zeta_1, \zeta_2) = 2\mathsf{X} \cdot \mathbf{F}_k(\zeta_1, \zeta_2), \tag{B14}$$

其中

$$\mathsf{X} = \begin{bmatrix} \cos\zeta_- \cos\zeta_+ & -\Delta \sin\zeta_- \sin\zeta_+ \\ -\dfrac{\sin\zeta_-}{\Delta}\sin\zeta_+ & \cos\zeta_- \cos\zeta_+ \end{bmatrix}. \tag{B15}$$

最后，式（B8）和（B9）被替换为 by

$$\mathsf{U}_k = \begin{cases} 0, & \text{for } k \ge K, \\ 2\mathsf{X} \cdot \mathsf{U}_{k+1} - \mathsf{U}_{k+2} + c_k \mathsf{I}, & \text{for } k < K, \end{cases} \tag{B16}$$

$$\mathbf{P}(\zeta_1,\zeta_2)=\mathsf{U}_0\cdot\mathbf{F}_0(\zeta_1,\zeta_2)-\mathsf{U}_1\cdot\mathbf{F}_{-1}(\zeta_1,\zeta_2). \quad \text{(B17)}$$

为计算式（B2）中辅助纬度的级数，我们令 $f_k(\zeta)=\sin 2(k+1)\zeta$，并得到

$$\mathbf{F}_{-1}(\zeta_1,\zeta_2)=\mathbf{0},\quad \mathbf{F}_0(\zeta_1,\zeta_2)=2\begin{bmatrix}\sin\zeta_+\cos\zeta_-\\ \cos\zeta_+\dfrac{\sin\zeta_-}{\Delta}\end{bmatrix}. \quad \text{(B18)}$$

同样，对于面积级数公式（21），我们设 $f_k(\zeta)=\cos 2(k+1)\zeta$ 由此得到

$$\mathbf{F}_{-1}(\zeta_1,\zeta_2)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}_0(\zeta_1,\zeta_2)=2\begin{bmatrix}\cos\zeta_+\cos\zeta_-\\ -\sin\zeta_+\dfrac{\sin\zeta_-}{\Delta}\end{bmatrix}. \quad \text{(B19)}$$

2×2 矩阵 X 和 U_k 的形式为

$$\begin{bmatrix}x & \Delta^2 y\\ y & x\end{bmatrix}. \quad \text{(B20)}$$

这类矩阵相乘或相加后，所得矩阵仍具有相同形式。因此，在计算机上执行矩阵运算时，只需计算并存储矩阵的第一列。采用这种更精确的方法计算差商 $\Delta[p](\zeta_1,\zeta_2)$，其成本仅略高于分别计算 $p(\zeta_1)$ 和 $p(\zeta_2)$ 的成本。

附录 C：计算面积积分

这里讨论计算面积时的两个问题 S_{12}：如何利用公式（11）中的差商来 p_{12}/ψ_{12}，以及在偏心率较大时如何计算公式（P_l 21）中出现的 。

针对第一个问题，我们对 $p(\chi)=p_0(\chi)+p_\beta(\beta(\chi))$ 应用差商，得到

$$\frac{p_{12}}{\psi_{12}}=\frac{\Delta[p_0](\chi_1,\chi_2)}{\Delta[\psi](\chi_1,\chi_2)}+\Delta[p_\beta](\beta_1,\beta_2)\frac{\Delta[\beta](\chi_1,\chi_2)}{\Delta[\psi](\chi_1,\chi_2)}. \quad \text{(C1)}$$

对于公式（C1）中的第一项（球面项），我们将公式（15）重写为

$$p_0(\chi)=\sinh^{-1}h(\tan\chi), \quad \text{(C2)}$$

$$h(x)=\frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}. \quad \text{(C3)}$$

现在我们有

$$\frac{\Delta[p_0](\chi_1,\chi_2)}{\Delta[\psi](\chi_1,\chi_2)}=\frac{\Delta[\sinh^{-1}]\big(h(\tan\chi_1),h(\tan\chi_2)\big)}{\Delta[\sinh^{-1}](\tan\chi_1,\tan\chi_2)}\times\Delta[h](\tan\chi_1,\tan\chi_2), \quad \text{(C4)}$$

经过直接的代数化简可得

$$\Delta[h](x,y)=\frac{(x+y)(x^2+y^2+x^2y^2)}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}\big(x^2\sqrt{1+y^2}+y^2\sqrt{1+x^2}\big)}. \quad \text{(C5)}$$

现在转到公式（C1）中的第二项（椭球项），其中第一个因子 $\Delta[p_\beta](\beta_1,\beta_2)$ 可以使用 Clenshaw求和的差商方法直接计算（见附录 B），因为我们将 $p_\beta(\beta)$ 表示为余弦级数，即公式（21）；对于扁率较小和偏心率任意的情况，我们的方法均适用。

对于公式（C1）中椭球项的第二个因子 $\Delta[\beta](\chi_1,\chi_2)/\Delta[\psi](\chi_1,\chi_2)$，我们再次区分两种情况。如果扁率较小，可以将 $\beta(\chi)$ 表示为公式（B1）和（B2）所给形式的级数，并使用公式（A7）和（B3）计算该项。如果扁率较大，则应将 β 和 ψ 视为 ϕ 的函数，从而得到

$$\frac{\Delta[\beta](\chi_1,\chi_2)}{\Delta[\psi](\chi_1,\chi_2)}=\frac{\Delta[\beta](\phi_1,\phi_2)}{\Delta[\psi](\phi_1,\phi_2)}, \quad \text{(C6)}$$

可通过对方程（A11）和（A13）应用差商来计算。

剩下的任务是规定如何在大偏心率情况下计算方程（P_l（21）中的系数。Karney (2022a) 指出，可通过对被积函数 $q_\beta(\beta)$——方程（19）——等间隔采样值进行离散傅里叶变换来计算这些系数；这为数值计算周期函数的不定积分提供了一种精确方法。

当然，在数值计算 $q_\beta(\beta)$ 时，我们应将方程（19）替换为

$$q_\beta(\beta)=(1-f)\frac{\cos\chi-\cos\xi}{\cos\phi}\frac{\cos\xi+\cos\chi}{\sin\xi+\sin\chi}, \quad \text{(C7)}$$

当 $|\sin\chi|>|\cos\chi|$ 时，以尽量减小舍入误差。此处将 χ 和 ξ 视为 β 的函数，并且必须以这样一种方式实现这些函数，使 $\cos\chi$ 和 $\cos\xi$ 的相对误差较小；Karney (2022b) 给出的转换公式满足这一条件。

函数 $q_\beta(\beta)$ 是关于 β 的奇周期函数，周期为 π，因此可写为

$$q_\beta(\beta)=\sum_{l=1}^{\infty}b_l\sin 2l\beta. \quad \text{(C8)}$$

然而，由于 Karney (2022a) 中用于计算测地线面积积分的离散傅里叶变换（DFT）的例程专门针对第三型离散正弦变换和第四型离散正弦变换进行了设计，我们选择使用

$$\frac{q_\beta(\beta)}{\cos\beta}=\sum_{l=1}^{\infty}c_l\sin(2l-1)\beta, \quad \text{(C9)}$$

表 1 椭球贡献面积的傅里叶级数所需项数 $p_\beta(\beta)$（式 (21)）与第三扁率 n 的关系。 L 是满足完整双精度精度所需的最少系数数目。L' 是根据一种可在双精度下实现的简单规则估算的系数数目。 L_χ 是准确表示 $q_\chi(\chi)$ 所需的最少系数数目；此处记号“–”表示 $L_\chi > 2^{14}$。

n	L	L'	L_χ	n	L	L'	L_χ
±0.01	6	7	7				
±0.02	7	8	9				
0.05	9	11	12	−0.05	8	10	13
0.10	11	13	17	−0.10	12	14	18
0.20	16	19	28	−0.20	16	19	35
0.30	21	24	44	−0.30	21	24	69
0.40	27	30	68	−0.40	27	31	158
0.50	34	38	107	−0.50	35	39	473
0.60	44	50	179	−0.60	46	51	2352
0.70	60	66	326	−0.70	63	69	–
0.80	89	95	712	−0.80	97	108	–
0.90	164	167	2383	−0.90	205	222	–
0.95	288	276	7096	−0.95	421	446	–
0.99	942	688	–	−0.99	2146	2163	–

其中

$$c_l = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{q_\beta(\beta)}{\cos\beta}\sin(2l-1)\beta\,\mathrm{d}\beta. \tag{C10}$$

现在，方程 $q_\beta(\beta)$ 和 $p_\beta(\beta)$ 中的傅里叶系数（见方程 C8) 和（21) 为

$$b_l = \frac{c_l + c_{l+1}}{2}, \tag{C11}$$

$$P_l = -\frac{c_l + c_{l+1}}{4l}. \tag{C12}$$

为了计算 c_l 的积分方程 (C10)，我们在一个四分之一周期内选取 L 个等间距点，对这些点上的 $q_\beta(\beta)/\cos\beta$ 进行采样，并对这些值执行离散正弦变换。由此可估算出前 L 个系数 c_l，并根据方程 (C12) 得到 P_l。我们面临的问题是如何选取合适的 L 值，以确保 $p_\beta(\beta)$ 中的绝对误差不超过 2^{-53} （双精度的舍入误差极限）。使用高精度（256 位）算术即可轻松求得 L 的值；对于若干选定的第三扁率 n，结果列于表 1 中标为 L 的列。这些结果与测地线面积问题中相应的值 N（Karney，2022a，图 5）惊人地接近。

我们希望在无法使用高精度算术时，也能在运行时估算 L。在这种情况下，舍入误差会干扰误差的计算。因此，我们改为确定 L'，即满足以下条件的 L 的最小值：最后的系数 $-P_l$ 中有一部分小于 $1\ 8$ 于 2^{-53} （按绝对值计）。所得的 L' 值也列于表 1中。对 L 的这一近似略偏保守（L' 稍大于 L），适用于 $n \le 0.92$ 或 $a/b \le 24$，也就是说，除极扁的扁椭球外均适用。

确定 L' 的计算成本很低，因为将用于计算离散傅里叶变换的采样点数从 L 增加到 $2L$，可以通过结合L 阶傅里叶系数与使用交错采样点进行的独立 L 阶计算来实现。这样，在指定椭球的扁率后，就可以计算出 P_l。

表格中标题为 L_χ 的列1 显示了：如果我们计算 q_χ (χ的傅里叶级数，需要多少个傅里叶系数。较大的 L_χ 值反映了 q_χ(χ在图4 中所呈现的近奇异行为，这表明将变量从 χ 代换为 β所带来的显著益处。

对于给定的 L，比较两种近似 P_l 的方法很有启发性：使用截断至 n^L 阶的泰勒级数，或对$q_\beta(\beta)$的 L 个采样点进行离散傅里叶变换。

- 使用离散傅里叶变换方法时，各个系数的误差更小。
- 采用泰勒级数方法需要存储上三角矩阵 $\mathsf{Q}_{(L)}$，即约 $\frac{1}{2}L^2$ 个数字。相比之下，离散傅里叶变换方法只需存储系数 P_l，即 L 个值。
- 离散傅里叶变换需要 L 次计算 $q_\beta(\beta)$，随后进行一次离散傅里叶变换，以计算 c_l 和 P_l，其计算量为$O(L\log L)$。使用泰勒级数方法计算 P_l需要进行矩阵-向量乘积，见式（22），计算量为 $\frac{1}{2}L^2$；当然，与例如计算 $q_\beta(\beta)$ 的单个值相比，这些运算都非常简单。
- 泰勒级数方法的编程非常简单，而离散傅里叶变换方法则需要复杂的快速傅里叶变换算法。

这些考量进一步印证了这一结论：对于较小的扁率，采用泰勒级数的方法是合适的，此时较小的值 L 就足够了；而对于较大的偏心率，则优先采用离散傅里叶变换方法。

最后，我们给出一个面积计算的数值示例：考虑一个具有 $a = 6400$千米和 $f = \frac{1}{5}$ 的椭球，以及一条从赤道上的 $\phi_1 = 0°$出发、 $\lambda_1 = 0°$方位角为 $\alpha_{12} = 45°$ 、长度为 $s_{12} = 2000$千米的恒向线段。该线段的端点 $\phi_2 = 19.380\,181\,12°$， $\lambda_2 = 12.823\,427\,61°$ 而它与赤道之间的面积为 $S_{12} = 1\,012\,834.108\,565$平方千米^2。读者可以使用第 RhumbSolve节末提到的在线工具 4生成更多示例。