arXiv:2303.03225v1 [cs.DM] 6 Mar 2023

图类的奇色数

Rémy Belmonte
古斯塔夫·埃菲尔大学，法国国家科学研究中心，LIGM，F-77454 马恩-拉瓦莱，法国 remy.belmonte@u-pem.fr
Ararat Harutyunyan
巴黎多芬大学，巴黎文理研究大学，法国国家科学研究中心联合研究单位7243，LAMSADE，巴黎，法国 ararat.harutyunyan@lamsade.dauphine.fr
Noleen Köhler
巴黎多芬大学、巴黎文理研究大学、法国国家科学研究中心联合研究单位7243、LAMSADE，法国巴黎 noleen.kohler@dauphine.psl.eu
Nikolaos Melissinos
理论计算机科学系，信息技术学院，布拉格捷克技术大学，捷克共和国
nik.melissinos@gmail.com

摘要

若图中每个顶点的度均为奇数（分别地，均为偶数），则称该图为奇（分别地，偶）图。Gallai 证明，每个图都可以划分为两个偶诱导子图，或一个奇诱导子图和一个偶诱导子图。我们将划分为奇子图称为对 G 的奇着色。Scott[在 Graphs and Combinatorics， 2001] 中证明，一个图存在奇着色，当且仅当其顶点数为偶数。若图 G 可以划分为至多 k 个奇诱导子图，则称其为 k-可奇着色。我们着手系统研究图类的奇着色和奇色数。具体而言，我们考察若干图类是否具有有界奇色数。我们的主要结果是：区间图、有界模宽图和有界最大度图的奇色数均有界。

2012年ACM主题分类 计算数学 → 图着色

关键词与短语 图类、顶点划分问题、奇着色、着色变体、上界

数字对象标识符 10.4230/LIPIcs.CVIT.2016.23

资助 *Ararat Harutyunyan*：获得法国国家研究署 JCJC 项目资助（DAGDigDec：ANR-21-CE48-0012）*Noleen Köhler*：获得法国国家研究署 JCJC 项目资助（ASSK：ANR-18-CE40-0025-01）。

1 引言

如果一个图的所有顶点的度都是奇数（分别地，偶数），则称该图为奇 （分别地，偶）图。Gallai 证明了以下定理（证明见 [11],问题 5.17）。

▶**定理 1.** 对于每个图 G，都存在：

- 一个划分 (V_1, V_2) 将 $V(G)$ 分为两部分，使得 $G[V_1]$ 和 $G[V_2]$ 均为偶；另
- 一个划分 (V_1', V_2') 将 $V(G)$ 分为两部分，使得 $G[V_1']$ 为奇且 $G[V_2']$ 为偶。

该定理有两个主要推论。首先，每个图都包含一个至少有 $|V(G)|/2$ 个顶点的诱导偶子图。其次，每个图都可以用至多两种颜色进行偶染色，也就是说，可以划分为两个（可能为空的）顶点集合，每个集合所诱导的都是 G 的偶子图。在这两种情形下，自然会想知道，考虑奇子图时是否也有类似结果。

© John Q. Public 和 Joan R. Public；依据知识共享许可协议 CC-BY 授权。第42届非常重要主题会议（CVIT 2016）。编辑：John Q. Open 和 Joan R. Access；文章编号 23；第 23:1–23:21 页。莱布尼茨国际信息学论文集，Dagstuhl 城堡——莱布尼茨信息学中心，Dagstuhl 出版社，德国

LIPICS

第一个问题称为奇子图猜想，Caro [4] 早已将其作为图论中的一个民间猜想提及。该问题询问，是否存在一个常数 $c > 0$，使得每个图 G 都包含一个至少有 $|V(G)|/c$ 个顶点的奇子图。在一篇近期的突破性论文中，Ferber 和 Krivelevich 证明了该猜想成立。

▶**定理 2** ([8])。 每个 G 没有孤立顶点的图都含有一个大小至少为 $|V(G)|/10000$ 的奇数诱导子图。

注意，要求 G 没有孤立顶点是必要的，因为这些顶点 e 无法属于任何奇子图。

第二个问题是，每个图是否都能划分为有界数量的奇数诱导子图。我们将这样的划分称为奇着色，并将对给定图 G进行奇着色所需的最少部分数 $\chi_{\text{odd}}(G)$称为其奇色数。这与真（顶点）着色相似，后者旨在将图的顶点划分为独立集。一个直接的观察是，图要可奇着色，其所有连通分量都必须具有偶数阶，这是握手引理的直接推论。Scott [14] 证明了这一必要条件也是充分条件。因此，除非另有说明，通常可以假设图的所有连通分量都具有偶数阶。

受这一结果启发，一个自然的问题是：将一个图划分为奇数诱导子图需要多少种颜色。正如 Scott 所证明的，[14], 存在奇色数任意大的图。在计算方面，Belmonte 和 Sau [2] 证明，当 $k \leq 2$ 时，判定一个图是否可用 k 种颜色可奇着色的问题可在多项式时间内求解；否则，该问题为 NP 完全，这与正常着色的情形类似。他们还表明，该问题可在 $2^{O(k \cdot rw)} \cdot n^{O(1)}$ 时间内求解，其中 k 是颜色数，rw 是输入图的秩宽度。随后，他们提出：能否仅以秩宽度为参数，在固定参数可处理时间内求解该问题？也就是说，对 k 的依赖是否不可或缺？若答案为肯定，这将与正常着色形成鲜明对比：目前最好的算法运行时间为 $n^{2^{O(rw)^2}}$（例如参见 [10]），而 Fomin 等人 [9] 证明，除非指数时间假设不成立，否则不存在运行时间为 $n^{2^{o(rw)}}$ 的算法。[1]

在组合学方面，Scott 证明了存在需要 $\Theta(\sqrt{n})$ 种颜色的图。特别地，细分团，也就是将一个有 n 个顶点的完全图的每条边都细分[2] 一次后得到的图，恰好需要 n 种颜色，因为由边细分得到的顶点会迫使它们的两个邻点使用不同的颜色。更一般地，利用同样的论证，对于任意图 G，将G 的每条边都细分一次后得到的图 H 具有 $\chi_{\text{odd}}(H) = \chi(G)$，并且 H 可奇着色，当且仅当 $|V(H)| = |V(G)| + |E(G)|$ 为偶数。注意，细分团可奇着色，当且仅当细分后的完全图 K_n 满足 $n \in \{k : k \equiv 0 \vee k \equiv 3 \mod 4\}$。令人惊讶的是，Scott 还证明了对图进行奇着色只需要次线性数量的颜色；也就是说，每个偶数阶为 G 的图都有 $\chi_{\text{odd}}(G) \leq cn(\log\log n)^{-1/2}$。正如 Scott 所指出的，这个界相当弱，因此他猜想由细分团得到的下界基本上是紧的：

▶ **猜想 3** (Scott，2001年)。 每个偶数阶 G 图的 $\chi_{\text{odd}}(G) \leq (1 + o(1))c\sqrt{n}$。 −

[1] 虽然 Fomin 等人证明了团宽度的下界，但该下界同样适用于秩宽度，因为秩宽度始终不超过团宽度。[2] 边细分 uv 包括移除 uv、添加一个新顶点 w，并使其恰好与 u和 v相邻。

理解猜想 3 的一种方式是注意到，细分团似乎本质上是需要最多颜色才能进行奇数着色的图。更具体地说，考虑以下图族 B ={G'：从一个图 G 出发，对于每一对顶点$u, v \in V(G)$，添加一个顶点 w_{uv} 以及边 uw_{uv} 和 vw_{uv}，且 G' 具有偶数阶}。注意，偶数阶的细分团恰好是 B 中图 G 为无边图的那些图，并且 B 中的图具有 $\chi_{\text{odd}}(G') = |V(G)| \in \Theta(\sqrt{|V(G')|})$。一个与猜想 3 密切相关的问题是：如果一个图类 G ~~不包~~含任意大的 B 中图作为诱导子图，那么 G 是否具有奇色数 O($\sqrt{n}$)，也就是说，它们是否满足猜想 3？对于某些图类，这个问题已经得到肯定回答。事实上，所给出的界是常数。已有研究证明，每个余图都可以用至多三种颜色进行奇数着色，且树宽至多为 k 的图可以用至多 $k+1$ 种颜色进行奇数着色。事实上，这些结果可以分别轻易推广到所有可表示为联结的图，以及 H-小图自由图。利用类似论证，Aashtab 等人[1]证明平面图是可用 4 种颜色进行奇数着色的，而这已是最优的，因为细分 K_4 是平面图且可用 4 种颜色进行奇数着色，如上所述。他们还证明次三正则图可用 4 种颜色进行奇数着色；由于细分 K_4，这一结果同样是最优的。他们猜想这一结果可以推广到所有图，即 $\chi_{\text{odd}}(G) \leq \Delta + 1$，其中 Δ 表示 G的最大度。注意，这些图类都不包含任意大的 B 中图作为诱导子图。另一方面，二部图和分裂图包含任意大的 B 中图，因此猜想 3 的界是最优的。事实上，Scott 特别询问该猜想是否适用于二部图这一特定情形。

我们的贡献。 受这些初步且零散的结果以及猜想 3 的启发，我们旨在开启对图类中奇色数的系统研究，并确定哪些图类具有有界奇色数。我们关注那些不以 $\mathcal{B}$ 中的大图作为诱导子图的图类。我们的主要结果是：最大度有界的图、区间图以及模宽有界的图都具有有界奇色数。

在第 3 节中，我们证明每个偶数阶且最大度为 Δ 的图 G χ_{odd} 有 $\leq 2\Delta - 1$ G，从而推广了 Aashtab 等人关于次三正则图的结果。事实上，我们证明了一个更一般的结果，并由此得到围长较大的图的其他推论。特别地，我们证明围长为 11 的平面图是 3-可奇着色的。我们还证明围长至少为 7 的图是 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$-可奇着色的。尽管这个界不是常数，但它尤其值得关注，因为细分团的围长恰好为 6。

在第 4 节中，我们证明，所有连通分量均为偶数阶的每个图都满足$\chi_{\text{odd}}(G) \leq 3 \cdot mw(G)$，其中 $mw(G)$ 表示 G 的模宽度。这一结果大幅推广了 [2] 中关于余图的结论，并为证明有界秩宽的图具有有界奇色数迈出了重要一步；而这将进一步意味着，仅以秩宽度为参数时，奇色数问题是固定参数可解的。

最后，我们在第 5 节中证明，所有连通分支均为偶数阶的每个区间图都可进行 6-奇着色。此外，所有连通分支均为偶数阶的每个真区间图都可进行 3-奇着色，而且这一界是紧的。

我们还想指出，我们所有的证明都是构造性的，而且可以在多项式时间内计算出一个（不一定是最优的）奇染色，其颜色数与上界相符。特别是，我们在很大程度上依赖的 [11] 定理 1 的证明是构造性的，并且可以轻易地在多项式时间内计算出这两个划分。已知结果和开放情形的概览见下方图 1。

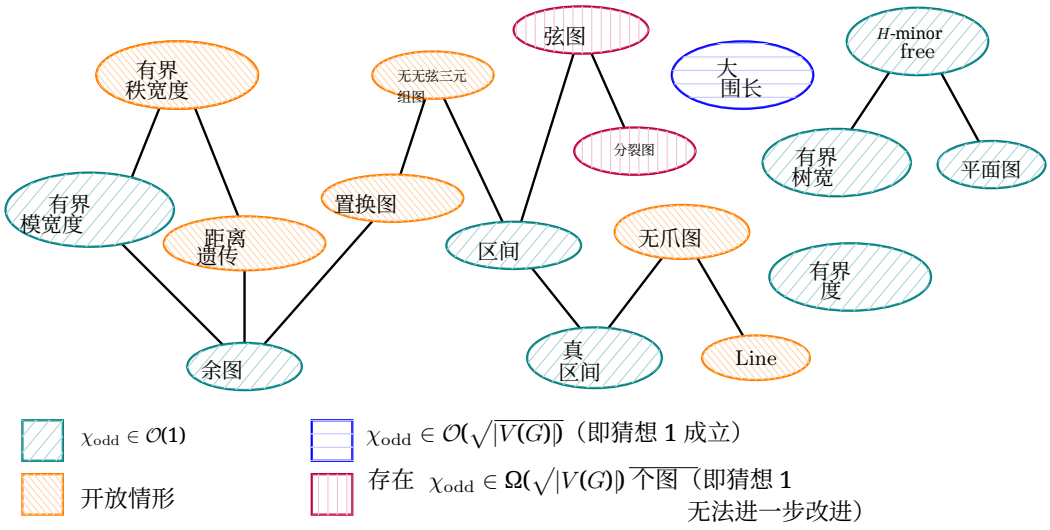


图 1 已知情形与开放情形概览。

2 预备知识

对于正整数 i，我们用 $[i]$ 表示包含所有满足$1 \le j \le i$的整数 j 的集合。我们将集合 X 的一个划分视为由子集组成的元组 $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_k)$，其中这些子集属于$X$，且满足 $X = \bigcup_{i\in[k]} P_i$ 和 $P_i \cap P_j = \emptyset$；也就是说，我们允许部分为空集。设$\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_k)$ 是 X的一个划分，且 $Y \subseteq X$。我们将通过从 $(P_1 \cap Y, \ldots, P_k \cap Y)$ 中删除所有空部分而得到的 Y的划分记为 $\mathcal{P}|_Y$。若对于每个 P_i 和每个 Q_j，均有 $P_i \cap Q_j = \emptyset$ 或 $P_i \cap Q_j = P_i$，则 X的划分 $(Q_1, \ldots, Q_\ell)$ 是 X的划分 $(P_1, \ldots, P_k)$ 的粗化；也就是说，每个 Q_j 都是若干个 P_i 的并集。

本文中的所有图都是简单、无向、无环且有限的。我们使用标准的图论记号，未定义的记号请参阅 [6] 。对于图 G，我们用 $V(G)$ 表示 G 的顶点集，用 $E(G)$ 表示其边集。设 G 是一个图，且 $S \subseteq V(G)$。我们用 uv 表示 u 与 v 之间的一条边。G 的阶为 $|V(G)|$。顶点 $v \in V$ 的度（分别为开邻域）记作 $d_G(v)$（分别记作 $N_G(v)$）。我们用 $G[S]$ 表示由 S 诱导的子图。$G \setminus S = G[V(G) \setminus S]$。$G$ 中任一顶点的最大度记作 Δ。我们用顶点元组表示路径和圈。G 的围长是 G 中最短圈的长度。对于同处于 G 同一连通分支中的两个顶点 u 和 v，若它们位于 $G \setminus \{e\}$ 的不同连通分量中，则称边 e 将 u 与 v 分隔开。

如果每个顶点的度都为奇数（分别为偶数），则称图为奇图（分别为偶图）。$V(G)$的一个划分（$V_1, \ldots\ldots, V_k$）称为 k-奇着色[3]，如果对于每个 $1 \le i \le k$，$G[V_i]$ 诱导出 G 的奇子图。若一个图存在 k-奇着色，则称其为 k-可奇着色。G的奇色数记为 $\chi_{\text{odd}}(G)$，它是满足 G 为 k-可奇着色的最小整数 k。空图（即满足 $V(G) = \emptyset$的图）被视为既是偶图也是奇图。由于奇着色只存在于每个连通分量都具有偶数阶的图中，且每个连通分量的着色不会影响其他连通分量的着色

[3] 请勿将此处奇着色的定义与 Petrusevski 和 Skrekovski 提出的定义混淆， [13], 后者是一种特定类型的正常着色。

，因此我们可以分别考虑每个连通分量。因此，只需对偶数阶的连通图证明这些结论。

模宽度 一组 S 顶点称为模，如果对于所有 u，$v \in S$，$N_G(u) \cap S = N(v)_G \cap S$。$V(G)$ 的一个划分 $\mathcal{M} = (M_1, \ldots\ldots, M_k)$ 称为 G 的模划分，如果 $\mathcal{M}$ 至少有两个非空部分，并且每个 M_i 都是 G 中的一个模。给定两个顶点集合 X 和 Y，如果对于每个 $u \in X$，$v \in Y$，X 和 Y $uv \in E(G)$（分别为 $uv \notin E(G)$），则称它们彼此完全邻接（分别彼此完全不邻接）。

▶ 注4。给定 G 中的任意两个模 M 和 N，则 M 和 N 要么不相邻，要么彼此完全邻接。

我们将 $G_{\mathcal{M}}$ 定义为 $\mathcal{M}$ 的模图，即其顶点集为 $\mathcal{M}$ 的图；当且仅当 M_i 和 M_j 彼此完全邻接时，M_i 与 M_j 之间有一条边（$G_{\mathcal{M}}$ 中模 M_i、M_j 之间的不相邻对应于 M_i 和 M_j 在 G 中不相邻）。我们递归地定义图 G 的模宽，记为 $\mathrm{mw}(G)$，如下。$\mathrm{mw}(K_1) = 1$；G 的一个模划分（M_1，……，M_k）的宽度是 k 与所有 $i \in [k]$ 的 $\mathrm{mw}(G[M_i])$ 中的最大值，而 G 的 mw 是其所有模划分的最小宽度。

3 有界度和大围长的图

在本节中，我们研究 Scott 猜想（猜想 3）以及 Aashtab 等人提出的猜想。[1] 该猜想指出，对于任意图 G，$\chi_{\mathrm{odd}}(G) \leq \Delta + 1$。我们证明了围长至少为 7 的图满足猜想 3，并证明对于任意图 G，$\chi_{\mathrm{odd}}(G) \leq 2\Delta - 1$，从而得到了 Aashtab 等人猜想的一个较弱版本。为此，我们证明以下更一般的定理，该定理同时推出上述两个结果。

▶**定理 5**。设 H 是一个图类，满足：

- $K_2 \in H$ H 在顶点删除下封闭，并且存在一个 $k \geq 2$，使得任意属于 $G \in H$ 的连通图都满足以下性质之一：*(I)* G 有两个悬挂顶点 u、v，使得 $N_G(u) = N_G(v)$；或 *(II)* G 有两个相邻顶点 u、v，使得 $d_G(u) + d_G(v) \leq k$。

那么，任何偶数阶连通图 $G \in H$ 都有 $\chi_{\mathrm{odd}}(G) \leq k - 1$。

证明。首先注意到 $\mathcal{H}$ 定义良好，因为 K_2 具有所需的性质。证明对顶点数进行归纳。令 $|V(G)| = 2n$。

对于 $n = 1$，由于 G 是连通的，我们有 $G = K_2$，它是奇数。因此，$\chi_{\mathrm{odd}}(G) = 1 \leq k - 1$（回忆一下 $k \geq 2$）。令 G 为一个阶为 $2n$ 的图。首先假设 G 有两个悬挂顶点 u, v，使得 $N_G(u) = N_G(v) = \{w\}$。那么，由于 $G - \{u, v\}$ 连通且属于 H，根据归纳法，存在 $G - \{u, v\}$ 的一个奇着色，至多使用 $k - 1$ 种颜色。令 $(V_1, \ldots, V_{k-1})$ 为 $V(G) \setminus \{u, v\}$ 的一个划分，使得对于所有 $i \in [k - 1]$，$G[V_i]$ 都是奇数。我们可以假设 $w \in V_1$。我们通过令 $V_1' = V_1 \cup \{u, v\}$ 且对所有 $i \in [k] \setminus \{1\}$ 令 $V_i' = V_i$，给出 V 的一个划分 $V_1', \ldots, V_{k-1}'$。注意，对所有 $i \in [k]$，$G[V_i']$ 都是奇数。因此，$\chi_{\mathrm{odd}}(G) \leq k - 1$。

因此，我们假设 G 有一条边 $vu \in E(G)$，使得 $d_G(v) + d_G(u) \leq k$。注意，我们可以假设 $k \geq 3$，否则该定理即可得证。我们分两种情形讨论；$G[V(G) \setminus \{v, u\}]$ 是连通的，而 $G[V(G) \setminus \{v, u\}]$ 是不连通的。

假设 $G[V(G) \setminus \{v, u\}]$ 是连通的。由于 $G[V(G) \setminus \{v, u\}]$ 具有 $|V(G) \setminus \{v, u\}| = 2n - 2$，且属于 $\mathcal{H}$，根据归纳法，它存在一种奇着色，至多使用 $k - 1$

种颜色。设 $(V_1,\dots,V_{k-1})$ 是 $V\setminus\{u,v\}$ 的一个划分，使得 $G[V_i]$ 对所有 $i\in[k-1]$ 都是奇的。我们如下将 G 划分为 $k-1$ 个奇图。由于 $|N_G(\{u,v\})|\le k-2$，存在 $\ell\in[k-1]$ 使得 $V_\ell\cap N_G(\{u,v\})=\emptyset$。我们如下定义 V 的一个划分 $U_1,\dots,U_{k-1}$。对于所有 $i\in[k-1]$，若 $i\neq\ell$，则定义 $U_i=V_i$；否则令 $U_i=V_i\cup\{u,v\}$。注意，对于所有 $i\neq\ell$，$G[U_i]$ 都是奇的，因为 $U_i=V_i$。此外，由于 $N_{G[U_\ell]}[v]=N_{G[U_\ell]}[u]=\{u,v\}$ 且 $G[V_\ell]$ 是奇的，我们得出 $G[U_\ell]$ 是奇的。因此 $\chi_{\text{odd}}(G)\le k-1$。

现在，我们考虑 $G[V\setminus\{v,u\}]$ 不连通的情形。首先，假设 $G[V\setminus\{v,u\}]$ 中至少有一个偶数阶连通分量。令 U 为该连通分量的顶点集。根据归纳法，$\chi_{\text{odd}}(G[U])\le k-1$ 且 $\chi_{\text{odd}}(G[V\setminus U])\le k-1$。此外，$|N_G(\{v,u\})\cap U|\le k-3$，因为 $G[V\setminus\{v,u\}]$ 至少有两个连通分量。令 $(U_1,\dots,U_{k-1})$ 为 U 的一个划分，使得对所有 $i\in[k-1]$，$G[U_i]$ 均为奇数。再令 $(V_1,\dots,V_{k-1})$ 为 $V\setminus U$ 的一个划分，使得对所有 $i\in[k-1]$，$G[V_i]$ 均为奇数。我们可以假设，对所有 $i\in[k-3]$，$V_i\cap\{u,v\}=\emptyset$。由于 $|N_G(\{v,u\})\cap U|\le k-3$，存在至少两个指标 $l,l'\in[k-1]$，使得 $U_l\cap N_G(\{u,v\})=U_{l'}\cap N_G(\{u,v\})=\emptyset$。我们可以假设 $l=k-2$ 且 $l'=k-1$。我们按如下方式定义 V 的一个划分 $(V'_1,\dots,V'_{k-1})$。对所有 $i\in[k-1]$，定义 $V'_i=V_i\cup U_i$。我们声称，对所有 $i\in[k-1]$，$G[V'_i]$ 都是奇数。为证明这一断言，我们分两种情形讨论：$V'_i\cap\{u,v\}=\emptyset$ 成立或不成立。若 $V'_i\cap\{u,v\}=\emptyset$，由于 $V\setminus U$ 中可能与 U 相邻的顶点只有 v 和 u，因此 $G[V'_i]$ 是奇数。事实上，这是因为 $N_G(V_i)\cap U_i=\emptyset$，且 $G[V_i]$ 和 $G[U_i]$ 都是奇数。若 $V'_i\cap\{u,v\}\neq\emptyset$，则 $i=k-2$ 或 $i=k-1$。在这两种情形下，我们知道 $N_G(V_i)\cap U_i=\emptyset$，因为 $V\setminus U$ 中可能与 U 相邻的顶点只有 v 和 u，并且我们假设 u,v 与 $U_{k-2}\cup U_{k-1}$ 不相邻。因此，$G[V'_i]$ 是奇数，因为 $N_G(V_i)\cap U_i=\emptyset$，且 $G[V_i]$ 和 $G[U_i]$ 都是奇数。

因此，我们可以假设 $G[V\setminus\{v,u\}]$ 的所有连通分量都是奇数阶。设 $\ell>0$ 为 $G[V\setminus\{v,u\}]$ 的连通分量数，记这些连通分量为 $V_1,...,V_\ell$，并注意到 ℓ 必须是偶数。我们分两种情形讨论：对于所有 $i\in[\ell]$，$G[V_i\cup\{v\}]$ 和 $G[V_i\cup\{u\}]$ 中有一个是不连通的；或者至少存在一个 $i\in[\ell]$，使得 $G[V_i\cup\{v\}]$ 和 $G[V_i\cup\{u\}]$ 都是连通的。

在第一种情形下，对每个 $V_i,i\in[\ell]$，我们将 $\{v,u\}$ 中使 $G[V_i\cup\{w_i\}]$ 连通的那个顶点称为 w_i。注意，w_i 是唯一确定的，也就是说，对于每个 $i\in[\ell]$，v 和 u 中只有一个可以是 w_i。现在，根据归纳法，对于所有 $i\in[\ell]$，$G[V_i\cup\{w_i\}]$ 都有 $\chi_{\text{odd}}(G[V_i\cup\{w_i\}])\le k-1$。对于每个 $i\in[\ell]$，设 $(V_1^i,\dots,V_{k-1}^i)$ 表示 $V_i\cup\{w_i\}$ 的一个划分，使得对所有 $j\in[k-1]$，$G[V_j^i]$ 都是奇数。此外，我们可以假设，对于每个 $i\in[\ell]$，如果 $v\in V_i\cup\{w_i\}$，那么 $v\in V_{k-2}^i$。同样，我们可以假设，对于每个 $i\in[\ell]$，如果 $u\in V_i\cup\{w_i\}$，那么 $u\in V_{k-1}^i$。最后，令 $I=\{i\in[\ell]\mid w_i=v\}$ 和 $J=\{i\in[\ell]\mid w_i=u\}$。

我们考虑两种情形。若 $|I|$ 是奇数，则 $|J|$ 是奇数，因为 $\ell=|I|+|J|$ 是偶数。接着，我们声称，对于 V 的划分 $(U_1,\dots,U_{k-1})$，其中 $U_i=\bigcup_{j\in[\ell]}V_i^j$，对所有 $i\in[k-1]$，$G[U_i]$ 都是奇数。首先注意，$(U_1,\dots,U_{k-1})$ 确实是 V 的一个划分。事实上，可能同时属于多个集合的顶点只有 v 和 u。然而，v 只属于某些集合 V_{k-2}^i，因此它不属于任何集合 U_i，除非 U_{k-2}。类似地，u 不属于任何集合 U_i，除非 U_{k-2}。因此，只需证明对所有 $i\in[k-1]$，$G[U_i]$ 都是奇数。我们将证明，对于任意 $i\in[k-1]$ 和任意 $x\in U_i$，$|N_G(x)\cap U_i|$ 都是奇数。令 $x\in U_i\setminus\{v,u\}$，其中 $i\in[k-1]$。那么我们知道，对于某个 $j\in[\ell]$，$N_G(x)\cap U_i=N_G(x)\cap V_i^j$。由于对所有 $i\in[k-1]$ 和 $j\in[\ell]$，$G[V_i^j]$ 都是奇数，因此 $|N_G(x)\cap U_i|=|N_G(x)\cap V_i^j|$ 是奇数。因此，我们只需考虑 v 和 u。注意到 $v\in U_{k-2}=\bigcup_{j\in[\ell]}V_{k-2}^j$（分别为 $u\in U_{k-1}=\bigcup_{j\in[\ell]}V_{k-1}^j$）。此外，只有当 $j\in I$（分别为 $j\in J$）时，v（分别为 u）才包含于 V_{k-2}^j（分别为 V_{k-1}^j）中。由于对于任意 $j\in[\ell]$，$G[V_{k-2}^j]$（分别为 $G[V_{k-1}^j]$）都是奇数，因此对于任意 $j\in I$（分别为 $j\in J$），$|N(v)\cap V_{k-2}^j|$（分别为 $|N(u)\cap V_{k-1}^j|$）是奇数。

最后，由于 $|I|$ 和 $|J|$ 都是奇数，因此 $|N_G(v) \cap U_{k-2}| = \sum_{j\in I} |N(v) \cap V^j_{k-2}|$ 和 $|N_G(u) \cap U_{k-1}| = \sum_{j\in I} |N(u) \cap V^j_{k-1}|$ 都是奇数。因此，对于任意 $i \in [k-1]$，$G[U_i]$ 是奇数，且 $\chi_{\text{odd}}(G) \leq k-1$。

现在，假设 $|I|$ 和 $|J|$ 都是偶数。我们考虑 V 的划分 $(U_1, \ldots, U_{k-1})$，其中对所有 $i \in [k-3]$ $U_i = \bigcup_{j\in[\ell]} V^j_i$，$U_{k-2} = \bigcup_{j\in J} V^j_{k-2} \cup \bigcup_{j\in I} V^j_{k-1}$ 和 $U_{k-1} = \bigcup_{j\in I} V^j_{k-2} \cup \bigcup_{j\in J} V^j_{k-1}$。我们声称，对于这个划分，对所有 $i \in [k-1]$，$G[U_i]$ 都是奇数。首先注意到，$(U_1, \ldots, U_{k-1})$ 确实是 V 的一个划分。事实上，除了 v 和 u 以外，这对所有顶点都显而易见。然而，对于 $i \in I$，v 只属于类型为 V^i_{k-2} 的集合，而对于 $i \in J$，u 只属于类型为 V^i_{k-1} 的集合。因此，u 或 v 除了 U_{k-1} 之外，不属于任何集合 U_i。我们将证明，对于任意 $i \in [k-1]$ 和 $x \in U_i$，$|N_G(x) \cap U_i|$ 是奇数。设 $x \in U_i \setminus \{v, u\}$，其中某个 $i \in [k-1]$。那么我们知道，对于某个 $j \in [\ell]$，$N_G(x) \cap U_i = N_G(x) \cap V^j_i$。由于对所有 $i \in [k-1]$ 和 $j \in [\ell]$，$G[V^j_i]$ 都是奇数，因此我们有 $|N_G(x) \cap U_i| = |N_G(x) \cap V^j_i|$ 是奇数。因此，我们只需考虑 v 和 u。注意，$u, v \in U_{k-1}$。由于 $|I|$ 和 $|J|$ 都是偶数，且 $U_{k-1} = \bigcup_{j\in I} V^j_{k-2} \cup \bigcup_{j\in J} V^j_{k-1}$，我们得到 $|N_G(v) \cap U_{k-1} \setminus \{u\}|$ 和 $|N_G(u) \cap U_{k-1} \setminus \{v\}|$ 都是偶数。最后，由于 $uv \in E(G)$，我们得到 $|N_G(v) \cap U_{k-1}|$ 和 $|N_G(u) \cap U_{k-1}|$ 都是奇数。因此，$\chi_{\text{odd}}(G) \leq k-1$。

现在考虑存在至少一个 $i \in [\ell]$，使得 $G[V_i \cup \{v\}]$ 和 $G[V_i \cup \{u\}]$ 都连通的情形。我们定义以下集合 I 和 J。对于每个 $i \in [\ell]$

- $i \in J$，如果 $G[V_i \cup \{v\}]$ 不连通；以及
- $i \in I$，如果 $G[V_i \cup \{u\}]$ 不连通。

最后，对于其余不属于 $I \cup J$ 的指标 $i \in [\ell]$，$G[V_i \cup \{v\}]$ 和 $G[V_i \cup \{u\}]$ 都是连通的。将这个指标集合记为 X，并注意，根据假设 $|X| \geq 1$。容易看出，存在一个将 X 划分为两个集合 X_1 和 X_2 的划分，使得 $I' := I \cup X_1$ 和 $J' := J \cup X_2$ 的大小都是奇数。令 $V_I = \bigcup_{i\in I'} V_i$ 和 $V_J = \bigcup_{i\in J'} V_i$。现在，由归纳法可得 $\chi_{\text{odd}}(G[V_I \cup \{v\}]) \leq k-1$ 以及 $\chi_{\text{odd}}(G[V_J \cup \{u\}]) \leq k-1$。假设 $(V^I_1, \ldots, V^I_{k-1})$ 是 V_I 的一个划分，且 $(V^J_1, \ldots, V^J_{k-1})$ 是 V_J 的一个划分，使得对于任意 $i \in [k-1]$，$G[V^I_i]$ 和 $G[V^J_i]$ 都是奇数。不失一般性，我们可以假设 $v \in V^I_1$ 和 $u \in V^J_{k-1}$。注意，$d_G(u)$ 和 $d_G(v)$ 都至少为二，这意味着 $d_G(u) \leq k-2$ 且 $d_G(v) \leq k-2$。因此，存在 $i_0 \in [k-2]$ 使得 $N_G(v) \cap V^J_{i_0} = \emptyset$，并存在 $j_0 \in [k-1] \setminus \{1\}$ 使得 $N_G(v) \cap V^I_{j_0} = \emptyset$。我们重新排列集合 V^J_i、$i \in [k-2]$，使得 $i_0 = 1$；并重新排列集合 V^I_i、$i \in [k-1] \setminus \{1\}$，使得 $j_0 = k-1$。注意，这种重新排列不会改变 $v \in V^I_1$ 和 $u \in V^J_{k-1}$ 这一事实。考虑 V 的划分 $(U_1, \ldots, U_{k-1})$，其中 $U_i = V^I_i \cup V^J_i$。我们断言，对于所有 $i \in [k-1]$，$G[U_i]$ 都是奇数。注意，对于任意 $x \in U_i$，有 $N_G(x) \cap U_i = N_G(x) \cap V^I_i$ 或 $N_G(x) \cap U_i = N_G(x) \cap V^J_i$。由于对于任意 $i \in [k-1]$，$G[V^I_i]$ 和 $G[V^J_i]$ 都是奇数，因此我们得出结论：对于任意 $i \in [k-1]$，$G[U_i]$ 都是奇数。

◀

注意，最大度为 Δ 的图类 G 满足定理 5 的要求。事实上，该图类在顶点删除下封闭，并且其中的任何连通图都有至少两个相邻顶点 u、v，使得 $d_G(u) + d_G(v) \leq 2\Delta$。因此，有如下推论。

▶ **推论 6**。 任何 G 偶数阶且最大度为 Δ 的图都有 $\chi_{\text{odd}}(G) \leq 2\Delta - 1$。

接下来，我们证明围长至少为七的图满足猜想 3。

▶ **推论7**。 任何围长至少为7 的图 $\chi_{\text{odd}}(G) \leq \frac{3\sqrt{n}}{2} + 1$ 其中 $n = |V(G)|$。

证明。 令 $\mathcal{G}_7$ 为围长至少为7的图类。注意，$\mathcal{G}_7$ 在顶点删除下封闭。因此，我们需要证明，任何偶数阶且不满足定理 5 的性质 (I) 的连通图 $G \in \mathcal{G}_7$ 至少有两个相邻顶点 u， v 使得 $d_G(u) + d_G(v) \leq 3\sqrt{n}/2 \pm 2$。于是，推论由定理 5 得出

▷ 断言 8。设 G 是 $\mathcal{G}_7$ 中的一个阶为 n的图。如果 G 没有两个悬挂顶点 u、 v，使得 $N_G(u) = N_G(v)$，那么它有两个相邻顶点 u'、 v'，使得 $d_G(u')+d_G(v') \leq \frac{3\sqrt{n}}{2} + 2$。

证明。假设对于任意两个相邻顶点 u、 v，都有 $d_G(u) + d_G(v) \geq 3\sqrt{n}/2+3$。设 G' 是删除 G的所有悬挂顶点后得到的图。由于 G 的每个顶点至多有一个悬挂顶点，因此对于任意一条边 $uv \in E(G')$、$d_{G'}(u)$，都有 $+ d_{G'}(v) \geq 3/2\sqrt{n} + 1$。此外注意到， G' 不包含任何悬挂顶点；否则该顶点就与 G 的一个悬挂顶点相连，从而得到一条边$uv \in E$，使得 $d_G(u) + d_G(v) = 3 \leq 3\sqrt{n}/2 + 2$。

令 w 为一个顶点，使得 $d_{G'}(w) \geq 3\sqrt{n}/4 + 1$。我们考虑 G' 中与 w 距离至多为 3 的所有顶点。令 V_1 为与 w距离为 1 的顶点集合， V_2 为与 w 距离为 2 的顶点集合， V_3 为与 w距离为 3 的顶点集合。注意，由于 G 的围长至少为 7，因此 V_1 和 V_2 都是独立集，V_1 中任意两个顶点在 V_2中都没有公共邻点，且 V_2 中任意两个顶点在 V_3中都没有公共邻点。

我们将计算这些集合中的最少顶点数。对任意 $j \in \{1, 2\}$，令 $|V_j| = m_j$、 $v_{j,i}$、 $i \in [m_j]$为 V_j 的顶点，并令 $d_{j,i} = d_{G'}(v_{j,i})$ 对所有 $i \in [m_j]$成立。对于每个顶点 v_1，选取 $i' \in [m_2]$ 使得 $_i$、 $i \in m_1$满足 $v_{2,i'} \in N_G(v_{1,i}) \setminus \{w\}$。我们注意到，对每个顶点 v_1，所选顶点 i' 必然各不相同。我们有$|N_{G'}[\{v_{1,i}, v_{2,i'}\}] \setminus \{w\}| = d_{1,i}+d_{2,i'}-1 \geq 3\sqrt{n}/2$。由此可得 $|V(G)| \geq \sum_{i\in[m_1]}(3\sqrt{n}/2) = m_1(3\sqrt{n}/2) \geq 9n/8 + 3\sqrt{n}/2 > n$。这是矛盾的，因为 G 有 n 个顶点。◁

◀

人们或许会想，围长足够大的图是否可能具有有界的奇色数。事实上，情况远非如此，我们将在下一个命题中证明这一点。回顾一下，图 G 的色数 $\chi(G)$是满足以下条件的最小整数 k： $V(G)$ 可以划分为 k 个独立集合。

▶**命题 9**。 对于任意整数 g 和 k，存在偶数阶且围长至少为 g 的图，使得 $\chi_{\text{odd}}(G) \geq k$。

证明。我们使用厄尔多斯的一项经典结果 [7], ，该结果指出，对于所有充分大的 n，存在一个 n 阶图 G，其围长至少为 g，且 $\chi(G) \geq k$。设 G 为这样的一个图，且 n 为偶数。我们可以假设 G 没有奇数阶的连通分量（否则，可以在任意两个奇数阶连通分量之间添加一条边，而不会影响围长或降低色数）。令 H 为由 G 得到的图：将 G 的每条边细分一次。我们断言，$\chi_{\text{odd}}(H) \geq k$。假设 $\chi_{\text{odd}}(H) \leq k-1$，并令 U_1、 $\ldots U_{k-1}$为 $V(H)$ 的一个划分，使得每个 $i \in [k-1]$对应的 $G[U_i]$ 都是奇数。由于 $\chi(G) \geq k$，必定存在两个相邻顶点 u、 $v \in V(G)$，使得对于某个 $i \in [k-1]$，$\{u, v\}$ 两者都属于 $\in U_i$。但我们知道，在 H 中存在一个顶点 w_{uv}，满足 $N_H(w_{uv}) = \{u, v\}$。令 U_j 为包含 w_{uv} 的集合。那么 U_j 不是奇数，矛盾。◀

▶注 10. 事实上，利用鲍洛巴什的一个更强结果 [3], ，可以证明，对于每个 g，都存在 $\epsilon > 0$，使得对于所有充分大的偶 n，存在阶为 n、围长至少为 g，且满足 $\chi_{\text{odd}}(G) > n^{\epsilon}$ 的连通图 G。

接下来，我们将得到关于稀疏平面图的以下结果。

▶ **推论 11**。 任何 G 围长至少为11 的平面图 $\chi_{\text{odd}}(G) \leq 3$。

证明。 设 $\mathcal{G}$ 是围长至少为11的平面图类。注意，该类在顶点删除下封闭。我们将证明，任意图 $G \in \mathcal{G}$ 至少满足以下性质之一：

(I) G 有两个悬挂顶点 u， $v \in V(G)$，使得 $N_G(u) = N_G(v)$；或
(II) G 有一条边 $uv \in E(G)$，使得 $d_G(u) + d_G(v) \leq 4$

假设 G 不满足性质（I）。我们通过删除 G的所有悬挂顶点来构造 G' 。如果 G' 的最小度为 1，则性质（II）对 G成立。事实上，如果 G' 有一个悬挂顶点 u ，那么 G中必有一个悬挂顶点 v 。因此，$d_G(u) + d_G(v) = 2 + 1 \leq 4$。

假设 G' 的最小度为 2。由于 G' 也是平面图，且围长至少为 11，因此我们可以应用定理 4.11（Chang, Duh [5]） ，该定理指出，存在一条边$uv \in E(G')$，使得 $d_{G'}(u) = d_{G'}(v) = 2$。我们考虑两种情形： u 和 v中有一个连接到 G 中的悬挂顶点 v ，或者它们都没有连接到 G的悬挂顶点。在第一种情形下，我们可以假设 u 连接到 G的悬挂顶点 w 。于是有 $d_G(u) + d_G(w) = 3 + 1 \leq 4$，因此 G 满足性质（II）。在后一种情形下， u 和 v 都满足 $d_G(u) = d_G(v) = 2$。于是 G 满足性质（II）。

现在，将定理 5 应用于类$\mathcal{G}$ ，即可得出该推论。 ◀

▶ 注 12. 推论 11 中给出的上界是紧的，因为 C_{14} 具有 $\chi_{\text{odd}}(C_{14}) = 3$.

▶注 13. 设 G 是由 K_4 通过将每条边细分一次得到的图。那么 $\chi_{\text{odd}}(G) = 4$ ，且 G 的围长为 6。这意味着推论中的围长条件不能降低到 7 以下。

4 有界模宽图

本节讨论有界模宽度图，并证明图的奇色数可以用其模宽度作为上界。

▶ **定理 14.** 对于每个所有连通分量均为偶数阶的图 G $\chi(G) \leq 3\text{mw}(G)$。

以下结论是定理 1 的一个简单推论；当模的大小为偶数时，它有助于为模着色，并控制各部分的奇偶性。

▶ 注 15. 对于每个非空的偶数阶图 G ，存在一个划分 (V_1, V_2, V_3)，使得 $|V_2|$、 $|V_3|$ 为奇数， $V[G_1]$ 为奇数，而 $G[V_2]$、 $G[V_3]$ 为偶数。由定理 1 可得此结论：任取一个顶点 $v \in V(G)$，令 $V_3 := \{v\}$，然后利用存在一个划分 (V_1, V_2) 的结论，其中 $V(G) \setminus \{v\}$ 满足 $G[V_1]$ 为奇数且$G[V_2]$ 为偶数。

为了证明定理 14，我们首先说明如何对具有如下模划分 $\mathcal{M}$ 的图进行 3-奇着色：其模图 $G_{\mathcal{M}}$ 呈现特定结构（即为星（引理16）或某种特殊类型的树（引理19））。

▶ **引理16**。 对于每个具有模划分 $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots\ldots, M_k\}$ 的偶数阶连通图 G ，其中 $G_{\mathcal{M}}$ 是星， $\chi_{\text{odd}}(G) \leq 3$。

证明。 假设在 $G_{\mathcal{M}}$ 顶点 $M_2, \ldots\ldots, M_k$ 的度为 1。我们将 M_1 称为中心，并将 $M_2, \ldots\ldots, M_k$ 称为 $G_{\mathcal{M}}$的叶。我们进一步假设，对于某个 $|M_2|, \ldots\ldots, |M_\ell|$ 为奇数，而 $|M_{\ell+1}|, \ldots\ldots, |M_k|$ 为偶数。我们使用以下两个断言。 $\ell \in [k]$。

23:10 图类的奇色数

▷ 断言 17. 如果 $W \subseteq V(G)$ 满足对于每个 $i \in [k]$， $G[W \cap M_i]$ 都是奇数，那么 $G[W]$ 是奇数 .

证明。首先注意， $v \in W \cap M_1$ 中任意顶点的度为 $d_{G[W\cap M_1]}(v) + \sum_{i=2}^{k} |W \cap M_i|$。由于对每个 $i \in \{2, \ldots, k\}$， $d_{G[W\cap M_1]}(v)$为奇数，而 $|W \cap M_i|$ 为偶数（这是由握手引理可知 $G[W \cap M_i]$ 为奇数得出的），因此我们得到 $d_{G[W]}(v)$为奇数。对于每个 $i \in \{2, \ldots, k\}$， $G[W]$ 中任意顶点 $v \in W \cap M_i$ 的度为 $d_{G[W\cap M_i]}(v) + |W \cap M_1|$，这是奇数（同样，因为 $|W \cap M_1|$ 必为偶数）。因此 $G[W]$ 为奇数。◁

▷ 断言 18。如果 $W \subseteq V(G)$ 使得对于每个 $i \in [k]$， $G[W \cap M_i]$ 都是偶数， $|W \cap M_1|$ 是奇数，并且 $|\{i \in \{2, \ldots, k\} : |W \cap M_i| \text{ 是奇数}\}|$ 是奇数，那么 $G[W]$ 是奇数。

证明。由于 $G_{\mathcal{M}}$ 是一颗星且 M_1 是其中心，我们得到，对于任意顶点 $v \in W \cap M_i$ 以及任意 $i \in \{2, \ldots, k\}$，其度为 $d_{G[W\cap M_i]}(v) + |W \cap M_1|$。由于 $|W \cap M_1|$ 是奇数且 $d_{G[W\cap M_i]}(v)$ 是偶数，我们得到，对于每个 $v \in W \cap M_i$ 以及任意 $i \in \{2, \ldots, k\}$，其在 $G[W]$ 中具有奇度。另一方面，$v \in W \cap M_1$ 的度为 $d_{G[W\cap M_1]}(v) + \sum_{i=2}^{k} |W \cap M_i|$。由于 $d_{G[W\cap M_1]}(v)$ 是偶数且 $|\{i \in \{2, \ldots, k\} : |W \cap M_i| \text{ 是奇数}\}|$ 是奇数， $d_{G[W]}(v)$ 是奇数。我们得出 $G[W]$ 是奇数。◁

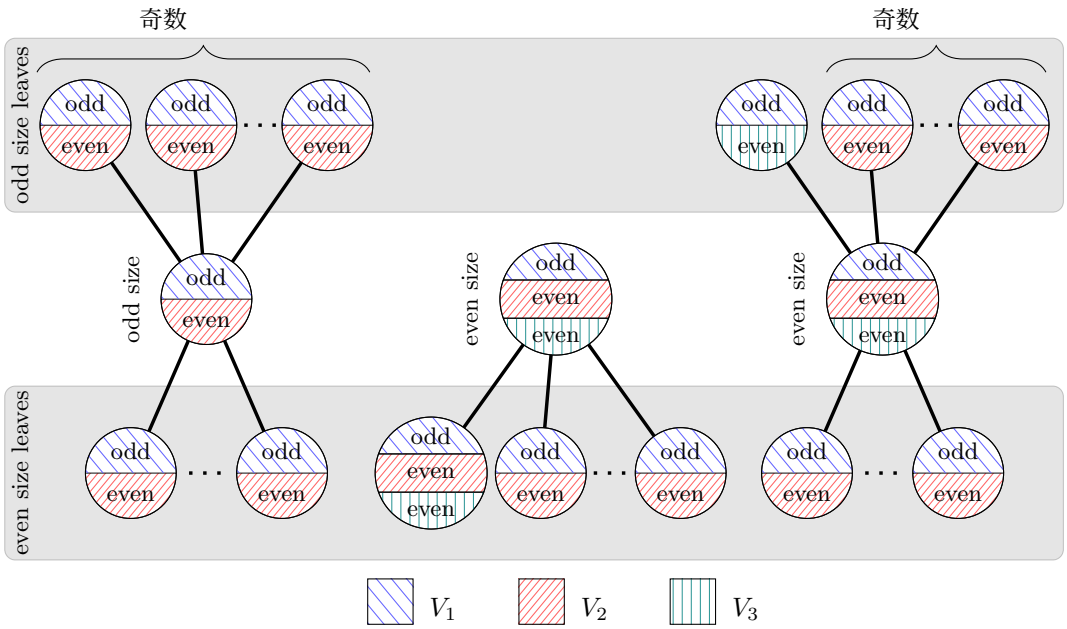
首先考虑 $|M_1|$ 为奇的情形。由于 G 是偶数阶，因此 $G_{\mathcal{M}}$ 中奇数大小的叶必有奇数个，从而 ℓ 为偶。根据定理 1，我们令 (W_1^i, W_2^i) 为 M_i 的一个划分，使得 $G[W_1^i]$ 为奇，且对每个 $i \in [k]$， $G[W_2^i]$ 均为偶。注意，由于 $G[W_1^i]$ 为奇， $|W_1^i|$ 必须为偶，因此 $|W_2^i|$ 为奇当且仅当 $i \in [\ell]$。我们定义 $V_1 := \bigcup_{i\in[k]} W_1^i$ 和 $V_2 := \bigcup_{i\in[k]} W_2^i$。注意，$(V_1, V_2)$ 是 G 的一个划分。此外，根据断言 17， $G[V_1]$ 为奇；根据断言 18， $G[V_2]$ 为奇。图示请参见图 2a。

现在考虑 $|M_1|$ 为偶的情形。我们先考虑特殊情形 $\ell = 1$，即不存在这样的 $i \in [k]$ 使得 $|M_i|$ 为奇。在这种情形下，我们令 (W_1^i, W_2^i, W_3^i) 为 $i \in \{1, 2\}$ 的 M_i 划分，使得 $G[W_1^i]$ 为奇， $G[W_2^i]$、 $G[W_3^i]$ 为偶，且 $|W_2^i|$、 $|W_3^i|$ 为奇；根据注 15，这样的划分存在。对于 $i \in \{3, \ldots, k\}$，我们令 (W_1^i, W_2^i) 为 M_i 的一个划分，使得 $G[W_1^i]$ 为奇且 $G[W_2^i]$ 为偶；根据定理 1，这样的划分存在。我们定义 $V_1 := \bigcup_{i\in[k]} W_1^i$、$V_2 := \bigcup_{i\in[k]} W_2^i$ 和 $V_3 := W_3^1 \cup W_3^2$。如前所述，我们注意到 (V_1, V_2, V_3) 是 $V(G)$ 的一个划分；根据断言 17， $G[V_1]$ 为奇；根据断言 18， $G[V_2]$、 $G[V_3]$ 为偶。图示见图 2b。

最后，考虑 $|M_1|$ 为偶且 $\ell > 1$的情形。根据注 15，存在 M_1的一个划分 (W_1^1, W_2^1, W_3^1)，使得 $G[W_1^1]$为奇， $G[W_2^1]$、 $G[W_3^1]$为偶，而 $|W_2^1|$、 $|W_3^1|$为奇。对于 $i \in \{2, \ldots, k\}$，令 (W_1^i, W_2^i) 为 M_i的一个划分，使得 $G[W_1^i]$为奇且$G[W_2^i]$为偶；根据 1，这样的划分存在。定义 $V_1 := \bigcup_{i\in[k]} W_1^i$、 $V_2 := W_2^1 \cup \bigcup_{i=3}^{k} W_2^i$ 和 $V_3 := W_3^1 \cup W_2^2$。注意，(V_1, V_2, V_3) 是 $V(G)$ 的一个划分。此外，根据断言 17， $G[V_1]$为奇，而根据 18， $G[V_3]$ 为奇。另外，由于 $|M_1|$ 为偶，因此在 $i \in \{2, \ldots, k\}$ 中存在偶数个元素，使得 $|M_i|$为奇。由于对于每个 $i \in \{2, \ldots, k\}$，只要 $|M_i|$为奇， $|W_1^i|$就必须为奇，因此我们得到 $|\{i \in \{2, \ldots, k\} : |V_1 \cap M_i| \text{ 为奇}\}|$为奇（注意 $V_1 \cap M_2 = \emptyset$，因为 $W_2^2 \subseteq V_3$）。因此，我们可以利用 18 得出 $G[V_2]$ 为奇。示意见图 2c。◀

设 G 是一个偶数阶连通图，其模划分为 $\mathcal{M} = (M_1, \ldots, M_k)$，且 $G_{\mathcal{M}}$ 是一棵树。对于 $G_{\mathcal{M}}$ 的一条边 e，令 X_e 和 Y_e 分别为从 $G_{\mathcal{M}}$ 中删除 e 后得到的图的两个连通分量。若树 $G_{\mathcal{M}}$ 满足以下性质，则称其为颜色传播的。

(i) $\mathcal{M}$ 中至少有一个模不是 $G_{\mathcal{M}}$ 中的叶。



(a) 情形：中心的大小为奇数。**(b)** 情形：中心的大小为偶数，且不存在奇数大小的叶。**(c)** 情形：中心的大小为偶数，且至少存在一个奇数大小的叶。

图2 引理16证明中三种情形的示意图。图中展示了模图 $G_{\mathcal{M}}$，以及将这些模划分为集合 V_1、V_2 和 V_3，使得对于 $i \in [3]$，$G[V_i]$ 为奇数。

(ii) 每个非叶模的大小均为一。(iii) 对于 $G_{\mathcal{M}}$ 中任一不与任何叶相 incident 的边 $e \in E(G_{\mathcal{M}})$，$|\bigcup_{M \in V(X_e)} M|$ 都是奇数。

▶ **引理19.** 对于每个具有模划分 $\mathcal{M} = (M_1, \ldots, M_k)$ 且 $G_{\mathcal{M}}$ 为颜色传播树的偶数阶连通图 G，$\chi_{\text{odd}}(G) \leq 2$。

证明。为了找到 G的奇着色 (V_1, V_2)，我们首先令 (W_1^i, W_2^i) 为 M_i的一个划分，使得对于每个 $i \in [k]$，$G[W_1^i]$ 为奇数阶且 $G[W_2^i]$为偶数阶。由于定理 1，划分 (W_1^i, W_2^i) 存在。注意，(ii)意味着，对于每个不是叶的模 M_i，$|W_2^i| = 1$ 和$W_1^i = \emptyset$。我们定义 $V_1 := \bigcup_{i \in [k]} W_1^i$和 $V_2 := \bigcup_{i \in [k]} W_2^i$。

为了论证 (V_1, V_2) 是 G 的一个奇着色，首先考虑任意 $v \in V(G)$，使得对于 $G_{\mathcal{M}}$的某个叶 M_i 有 $v \in M_i$。条件(i)意味着 $G_{\mathcal{M}}$ 必须至少有三个顶点，因此，由于 $G_{\mathcal{M}}$ 是一棵树，M_i 的邻接点 M_j 不可能是叶。因此，根据(ii)，$|M_j| = 1$。于是，如果 $v \in W_1^i$，则 $d_{G[V_1]}(v) = d_{G[W_1^i]}(v)$，因为 $W_1^j = \emptyset$，所以$d_{G[V_1]}(v)$是奇数。此外，如果 $v \in W_2^i$，则 $d_{G[V_2]}(v) = d_{G[W_2^i]}(v) + 1$，因为 $|W_2^j| = 1$，因此$d_{G[V_2]}(v)$是奇数。因此，在 $G[V_1]$和 $G[V_2]$ 中，任意顶点 $v \in M_i$ 的度分别为奇数。

现在考虑任意顶点 $v \in V(G)$，使得对于 $G_{\mathcal{M}}$ 中某个非叶 M_i，$M_i = \{v\}$。令 $M_{i_1}, \ldots, M_{i_\ell}$为 $G_{\mathcal{M}}$ 中与 M_i 邻接的顶点。对每个 $j \in [\ell]$，令 e_j为边 $M_i M_{i_j} \in E(G_{\mathcal{M}})$。不失一般性，假设对每个 $j \in [\ell]$，$M_i \notin V(X_{e_j})$。根据 (iii)，当 M_{i_j}不是 $G_{\mathcal{M}}$ 中的叶时，$|\bigcup_{M \in V(X_{e_j})} M|$ 为奇数。因此，对于每个满足 M_{i_j}不是 $G_{\mathcal{M}}$ 中的叶的 $j \in [\ell]$，都有$|X_{e_j}| \equiv |M_{e_j}|$模 2。另一方面，根据握手引理可知，当且仅当 $|M_{i_j}|$ 为奇数时，$|W_2^{i_j}|$为奇数

为奇数。因此， v 在 $G[V_2]$ 中的度的奇偶性满足以下结论。

$$d_{G[V_2]}(v) = |\{j \in [m] : d_{G_{\mathcal{M}}}(M_{i_j}) = 1\}| + \bigcup_{\substack{j\in[m] \\ d_{G_{\mathcal{M}}}(M_{i_j})\geq 2}} |W_2^{i_j}| \equiv |V(G) \setminus M_i| \mod 2.$$

由于 G 的阶为偶数，我们得出 $d_{G[V_2]}(v)$ 为奇数，因此 (V_1, V_2) 是 G的奇着色。◀

现在我们证明，给定一个带有模划分 $\mathcal{M}$ 的图 G ，我们可以对该图进行分解，使得相对于限制在分解部分上的模划分 $\mathcal{M}$ ，分解中任意部分的模图要么是星，要么是颜色传播树。为得到该分解，我们使用一棵生成树 $G_{\mathcal{M}}$ ，并通过归纳找到一个非分离星或一棵颜色传播树。为了在这一过程中处理奇偶性，我们可能会将一个模拆分到分解的两个部分中。

▶ **引理 20**。 对于每个偶数阶图 G 及其模划分 $M = (M_1, \dots, M_k)$，存在 $V(G)$ 的一个划分 $\hat{}M$，至多包含 $2k$ 个部分，并且存在 $\hat{}M$ 的一个粗化 P，满足以下性质。对于 P 的每个部分 P， $|P|$ 都是偶数。此外，对于 P 的每个部分 P，$\hat{}M|_P$是 $G[P]$ 的一个模划分，且 $G[P]_{\hat{}\mathcal{M}|_P}$要么是星（至少含两个顶点），要么是颜色传播树。

证明。 在整个证明过程中，我们将广泛使用以下内容。

▷ 断言 21. 若$\mathcal{N}$是图 H 的一个模划分，且 $W \subseteq V(G)$，并且$\mathcal{N}|_W$至少有两个部分，则$\mathcal{N}|_W$是 $G[W]$的一个模划分。

证明。假设结论不成立，且 $\mathcal{N}|_W$ 的某个部分 N 不是 $G[W]$中的一个模。根据构造，$\mathcal{N}$ 的某个部分 N' 满足 $N \subseteq N'$。由于 N不是 $G[W]$ 中的一个模，因此存在顶点 u、 $v \in N$、 $w \in W \setminus N$，使得 $uw \in E(G[W])$且$vw \notin E(G[W])$。由于 $N \subseteq N'$，这意味着 N'不可能是 G中的一个模，矛盾。

◁

$\hat{}$ 我们对$\mathcal{M}$ 中的模的数量进行归纳，以找到划分$\mathcal{M}$ 和$\mathcal{P}$。注意，在 $G_{\mathcal{M}}$ 是星或颜色传播树的情形下，我们可以令$\hat{}\mathcal{M} := \mathcal{M}$ 且$\mathcal{P} := (V(G))$，这满足该命题的条件。因此，假设 $G_{\mathcal{M}}$ 既不是星，也不是颜色传播树。我们将使用以下两个断言来进行归纳论证。

▷ 断言 22. 设 H是一个具有模划分 $\mathcal{N} = (N_1, \dots, N_\ell)$ 的图，且 $H_{\mathcal{N}}$既不是星也不是颜色传播树。若 $H_{\mathcal{N}}$ 是树，则存在 $V(G)$ 的划分 $\hat{}\mathcal{N} = (\hat{}N_1, \dots, \hat{}N_{\hat{\ell}})$，满足 $\hat{}\ \ell \leq \ell + 1$；并存在 $\hat{}\mathcal{N}$ 的粗化 $\mathcal{Q} = (Q_1, Q_2)$，具有以下性质。 $|Q_i|$ 是偶数，且 $\hat{}\mathcal{N}|_{Q_i}$ 是 $H[Q_i]$ 关于 $i \in [2]$ 的模划分。此外， $H[Q_1]$ 是连通的，且 $H[Q_2]_{\hat{}\mathcal{N}|_{Q_2}}$ 或者是星，或者是颜色传播树。另外，对于任意固定的指标 $i \in [\ell]$ ，我们可以确保 $N_i \cap Q_1 \neq \emptyset$。

证明。 首先注意到，由于 $H_{\mathcal{N}}$ 是树，但既不是颜色传播树也不是星，因此我们知道以下情况至少有一种成立：

- 在 $H_{\mathcal{N}}$ 中存在一个非叶顶点 N，它具有 $|N| > 1$，且至少有一个非叶邻点；或者存在一条边 $e \in E(H_{\mathcal{N}})$，它不与 $H_{\mathcal{N}}$ 的任何叶相 incident，且 $|\bigcup_{N\in V(X_e)} N|$ 为偶数。
-

假设我们已固定 $i \in [\ell]$（N_i 将是保证部分包含于 Q_1 中的部分）。对于 N 的任意部分 $N \neq N_i$，令 e_N 为一条与 N 相 incident、并将 N 与 N_i 分隔开的边。令 X_N 为移除 e_N 后 $H_{\mathcal{N}}$ 中包含 N 的连通分量。令 Z 为 $H_{\mathcal{N}}$ 中满足以下条件之一的非叶部分 $N \neq N_i$ 的集合：$|N| > 1$ 或 e_N 不与叶相 incident，且 X_N 为偶数阶。注意，根据我们之前的观察可知，$Z \cup \{N_i\}$ 非空。最后，在 $Z \neq \emptyset$ 的情形下，我们令 $N \in Z$ 为 Z 中所有部分里 $|V(X_N)|$ 最小的部分。在 $Z = \emptyset$ 的情形下，我们定义 $N := N_i$。在此情形下，令 e_N 为一条与 N_i 及另一个非叶顶点相 incident 的边，并令 X_N 为移除 e_N 后包含 N_i 的连通分量。注意，在 $Z = \emptyset$ 的情形下，我们可立即得出 $|N_i| > 1$，且 $|X_N|$ 为奇数。现在注意，在任何情形下，我们对 N 的选择都保证：对于 X_N 的每个非叶部分 $N' \neq N$，以及每条不与 X_N 的任何叶相 incident 的边 $e \in E(X_N)$，都有 $|N'| = 1$，且 $|\bigcup_{N' \in V(x_e)} N'|$ 为奇数。此外，由于 N 不是叶，X_N 有多个顶点。

首先考虑 $|N| = 1$ 的情形。我们令 $\hat{\mathcal{N}} := \mathcal{N}$，$Q_2 := \bigcup_{N' \in V(X_N)} N'$，并令 $Q_1 := V(H) \setminus Q_2$。由于 $N \in Z$ 和 $|N| = 1$，我们知道 $|Q_1|$ 和 $|Q_2|$ 都是偶的。此外，断言 21 意味着 $\mathcal{N}|_{Q_i}$ 是 $H[Q_i]$ 关于 $i \in [2]$ 的模划分。根据构造，$H[Q_1]$ 是连通的，而 $H[Q_2]_{\hat{\mathcal{N}}|_{Q_2}}$ 是一棵颜色传播树。最后，注意到取 e_N 为一条将 N 与 N_i 分隔开的边（由于 $|N| = 1$，我们得到 $N \neq N_i$），可得 $N_i \subseteq Q_1$，正如所需。

现在考虑 $|N| > 1$ 的情形。首先假设 N 在 X_N 中的所有邻点都是叶。在此情形下，令 $N' \subseteq N$ 使得 $N' \neq \emptyset$ 且 $|N' \cup \bigcup_{N'' \in V(X_N)} N''|$ 是偶的。现在，我们将 $\hat{\mathbf{N}}$ 定义为从 N 中移除部分 N，并加入 N' 和 $N \setminus N'$ 后得到的划分。进一步令 $Q_2 := N' \cup \bigcup_{N'' \in V(X_N)} N''$，并令 $Q_1 := V(H) \setminus Q_2$。根据构造，$|Q_1|$、$|Q_2|$ 是偶的。此外，由于 $H_{\mathcal{N}}$ 不是星，$\hat{\mathbf{N}}|_{Q_1}$ 必须至少包含两个部分。因此，根据断言 21，$\hat{\mathbf{N}}|_{Q_i}$ 是 $H[Q_i]$ 关于 $i \in [2]$ 的模划分。此外，$H(Q_1)$ 是连通的，而 $H[Q_2]\,\hat{\mathbf{N}}|_{Q_2}$ 是一颗星。在 $N = N_i$ 的情形下，回忆 X_N 是奇数阶的，因此我们可以选取 N' 使得 $N \setminus N' \neq \emptyset$，这意味着 $N_i \cap Q_1 \neq \emptyset$。最后，在 $N \neq N_i$ 的情形下，我们像前一种情形一样得到 $N_i \subseteq Q_1$。

另一方面，假设 N在 X_N中至少有一个非叶邻点 N'。任取一个顶点 $n \in N$。我们将 $\hat{\mathbf{N}}$ 定义为从 N 中移除N并添加 $\{n\}$ 和 $N \setminus \{n\}$ 后得到的划分。此外，我们设 $Q_2 := \{n\} \cup \bigcup_{N'' \in V(X_{N'})} N''$ 以及$Q_1 := V(H) \setminus Q_2$。注意，由于非叶顶点之间有一条边 NN'，因此 $|\bigcup_{N'' \in V(X_{N'})} N''|$ 为奇数，从而 $|Q_1|$ 和 $|Q_2|$ 必为偶数。由于 $N \setminus \{n\} \neq \emptyset$，可知 $\mathbf{N}|_{Q_1}$ 至少包含两个部分，因此根据 21，$\hat{\mathbf{N}}|_{Q_i}$ 是 $H[Q_i]$的一个模划分，其中 $i \in [2]$。此外，由于 $N \setminus \{n\} \neq \emptyset$，我们有 $H(Q_1)$ 必须连通。最后，$H[Q_2]\,\hat{\mathbf{N}}|_{Q_2}$ 是一棵颜色传播树。当 $N = N_i$ 时，条件 $N_i \cap Q_1 \neq \emptyset$ 显然成立；当 $N \neq N_i$时，则可如前所述推出。◁

▷ 命题23。设 T 是 $G_{\mathcal{M}}$ 的任意生成树。若存在一条边 $e \in E(G_{\mathcal{M}}) \setminus E(T)$，则 $V(G)$ 存在一个划分 $\hat{\mathcal{N}} = (\hat{\mathcal{N}}_1, \ldots, \hat{\mathcal{N}}_\ell)$，其中有 $\hat{\ell} \leq k+1$，并且存在 $\hat{\mathcal{N}}$ 的粗化 $\mathcal{Q} = (Q_1, Q_2)$，满足以下性质。$|Q_i|$ 为偶数，且 $\hat{\mathcal{N}}|_{Q_i}$ 是 $G[Q_i]$ 关于 $i \in [2]$ 的模划分。此外，$G[Q_1]$ 连通，并且 $G[Q_2]_{\hat{\mathcal{N}}|_{Q_2}}$ 要么是一颗星，要么是一棵颜色传播树。

证明。对于任意边 $e = MM' \in E(G_{\mathcal{M}}) \setminus E(T)$，令 $e_1, e_2 \in E(T)$ 使得 e_1与 M关联、e_2与 M'关联，且 $(T \setminus \{e_1, e_2\}) \cup \{e\}$ 恰有两个连通分量，并且 M与 M'在 $(T \setminus \{e_1, e_2\}) \cup \{e\}$ 中属于同一个连通分量。对于 $e = MM' \in E(G_{\mathcal{M}}) \setminus E(T)$，令 C_e为 $G_{\mathcal{M}}$ 的子图，该子图由 $(T \setminus \{e_1, e_2\}) \cup \{e\}$ 的某个连通分量的顶点诱导而成

其中包含 M 和 M'。现在定义 e 为使 $|V(C_e)|$ 最小的边。这意味着 C_e 必须是一棵树。首先考虑 C_e 为偶数阶且 C_e 为颜色传播树的情形。首先考虑 $G_{\mathcal{M}} \setminus C_e$ 至少有两个顶点的情形。在这种情况下，我们可以令 $\hat{\mathcal{N}} := \mathcal{M}$，$Q_2 := \bigcup_{M \in V(C_e)} M$ 以及 $Q_1 := V(G) \setminus Q_2$，使其满足所有要求。

因此，假设 $G_{\mathcal{M}} \setminus C_e$ 由一个顶点 N 组成。特别地，e_1、e_2 必须与 N 关联。由于 C_e 是偶数阶，$|N|$ 必须是偶数。将 N 划分为两个奇数大小的部分 N'、N''，并从 $\mathbf{M}$ 中移除 N、加入 N' 和 N''，得到 $\hat{\mathbf{N}}$。此外，由于 C_e 是颜色传播树，我们得到 $|\bigcup_{X \in V(X_e)} X|$ 是奇数，其中 X_e 是移除 e 后 C_e 的两个连通分量之一。现在注意到，由于 N' 是奇数且恰与 X_e 的一个模相邻，图 $G_{\mathcal{M}}[V(X_e) \cup N']$ 是颜色传播树。因此，我们可以令 $Q_2 := N' \cup \bigcup_{X \in V(X_e)} X$，并令 $Q_1 := V(G) \setminus Q_2$，它满足所有要求。

另一方面，考虑 C_e 不是颜色传播树的情形。首先假设 C_e 是偶数阶。由于 C_e 不是颜色传播树，我们可以对 C_e 应用断言 22，其模划分为 $\mathbf{M}|_{V_e}$，其中 $V_e := \bigcup_{N \in V(C_e)} N$。我们得到 V_e 的一个划分 $\mathbf{N}' = (N'_1, \ldots, N'_{\ell'})$，其中 $\ell' \leq |V(C_e)| + 1$，以及 $\mathbf{N}'$ 的粗化 $\mathbf{Q}' = (Q'_1, Q'_2)$，使得 $M_i \cap Q'_1 \neq \emptyset$ 如断言 22 中所述，其中 M_i 是与 e 关联的模之一。通过从 $\mathbf{M}$ 中移除 $V(C_e)$ 的所有部分，并加入 $\mathbf{N}'$ 中的部分，我们得到 $\hat{\mathbf{N}}$。我们进一步令 $Q_2 := Q'_2$，并令 $Q_1 := V(G) \setminus Q_2$。注意，由于 $M_i \cap Q'_1 \neq \emptyset$、$G_{\mathcal{M}} \setminus C_e$、$G[Q'_1]$ 是连通的，且 e_1 或 e_2 与 M_i 以及 $G_{\mathcal{M}} \setminus C_e$ 中的某个顶点关联，因此 $G[Q_1]$ 是连通的。其他所有性质均由断言 22 得出。

另一方面，若 C_e 是奇数阶，则 X_e 或 Y_e 必为偶数阶，其中 X_e，Y_e 是移除 e 后 C_e 的两个连通分支。不失一般性，设 X_e 的大小为偶数。注意，从 $G_{\mathcal{M}}$ 中移除 e 和 e_1 会将 $G_{\mathcal{M}}$ 恰好分成两个连通分量，其中一个是 X_e。若 X_e 是颜色传播树或星，则可设 $\hat{\mathcal{N}} := \mathcal{M}$，$Q_2 := \bigcup_{M \in V(X_e)} M$ 以及 $Q_1 := V(G) \setminus Q_2$。另一方面，若 X_e 不是颜色传播树，则只需用 X_e 替换 C_e，即可采用上述相同论证。◁

注意，由于 $G_{\mathcal{M}}$ 既不是星也不是颜色传播树，因此断言 22 或命题23的前提必有一个成立。由此，根据这两个断言，我们得到 $V(G)$的一个划分 $\hat{\mathbf{N}} = (\hat{N}_1, \ldots, \hat{N}_{\hat{\ell}})$，其中包含 $\hat{\ell} \leq k+1$，以及 $\hat{\mathbf{N}}$的一个粗化 $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2)$。由于 $\hat{\mathbf{N}}|_{Q_2}$ 必定至少包含两个模，因此 $\hat{\mathbf{N}}|_{Q_1}$ 包含的模严格少于 $\mathbf{M}$ 中的模数。设 $k' < k$ 为 $\hat{\mathbf{N}}|_{Q_1}$ 中的模数。于是，我们可以递归地得到 $G[Q_1]$ 的一个划分 $\mathbf{M}'$，其部分数至多为 $2k'$，以及 $\mathbf{M}'$ 的一个粗化 $\mathbf{P}'$，并具有以下性质：$|P|$ 为偶数，$\mathbf{M}'|_P$ 是 $G[P]$ 的模划分，并且对于 $\mathbf{P}$ 的每个部分 P，$G[P]_{\mathcal{M}'|_P}$ 要么是星，要么是颜色传播树。通过将 $\hat{N}|_{Q_2}$ 的所有部分加入 $\mathbf{M}'$，得到 $V(G)$ 的划分 $\hat{M}$；再将 P_2 加入 $\mathbf{P}'$，得到 $\hat{\mathbf{M}}$ 的粗化 $\mathbf{P}$。注意，$\hat{\mathbf{M}}$ 的部分数至多为 $2k' + (\hat{l} - k') \leq 2k$。因此，$\hat{\mathbf{M}}$ 和 $\mathbf{P}$ 满足该命题的条件。◀

定理 14 的证明。不失一般性，假设 G 连通。此外，令 $k := \mathrm{mw}(G)$，并令 $\mathbf{M} = (M_1, \ldots, M_k)$ 为 G 的一个模划分。令 $\hat{\mathbf{M}}$ 为 $V(G)$ 的一个划分，其部分数至多为 $2k$；令 $\mathbf{P}$ 为 $\hat{\mathbf{M}}$ 的一个细化，如引理 20 所述。首先注意，对于 $\mathbf{P}$ 的每个部分 P，$\hat{\mathbf{M}}|_P$ 必须至少包含两个部分，因为 $\hat{\mathbf{M}}|_P$ 是 $G[P]$ 的一个模划分。由于 $\hat{\mathbf{M}}$ 至多有 $2k$ 个部分，且 $\mathbf{P}$ 是 $\hat{\mathbf{P}}$ 的细化，因此 $\mathbf{P}$ 至多有 k 个部分。由于 $G[P]$ $\hat{\mathbf{M}}|_P$ 要么是星，要么是颜色传播树，根据引理16和引理19，对于 $\mathbf{P}$ 的每个部分 P，我们有 $\chi_{\mathrm{odd}}(G[P]) \leq 3$。利用 $G[P]$ 的一个划分 (W_1^P, W_2^P, W_3^P)，使得对于每个部分 P 中的每个 $i \in [3]$，$G[W_i^P]$ 都是奇的，我们得到 G 的一个全局划分，至多包含 $3k$ 个部分，且每个部分都诱导出一个奇子图。◀

由于判定一个图是否可 k-奇着色可以在 $2^{\mathcal{O}(k\,\mathrm{rw}(G))}$ [2, 时间内完成，定理 6] 和 $rw(G) \leq \mathrm{cw}(G) \leq \mathrm{mw}(G)$ 表明，其中 $\mathrm{cw}(G)$ 表示 G 的团宽度，$\mathrm{rw}(G)$ 表示秩宽度，因此我们得到以下推论。

▶**推论 24.** 给定一个图 G 以及 G 的一个宽度为 m 的模划分，判定 G 是否能用至多 q 种颜色进行奇数着色的问题可在时间 $2^{\mathcal{O}(m^2)}$内解决。

5 区间图

本节研究区间图的奇色数，并给出一般情形下的一个上界，以及真区间图情形下的一个紧上界。我们在两个证明中都会使用以下引理。

▶ **引理 25.** 设 G 为一个连通区间图，且 $P = (p_1, \ldots, p_k)$ 为 G 中的一条具有如下性质的极大诱导路径。

$(*)$ $\ell_{p_1} =$ 最小值$\{\ell_v : v \in V(G)\}$ 并且对于每个 $i \in [k-1]$，我们都有 $r_{p_{i+1}} \geq r_v$ 对每个$v \in N_G(p_i)$都成立。

那么，每个 $v \in V(G)$ 都至少与 P 上的一个顶点相邻。

证明。为导出矛盾，假设存在 $v \in V(G)$，使得 v 与 P 的任意顶点都不相邻。注意到 $v \notin \{p_1, \ldots, p_k\}$。此外，由于假设 v 也与 P 的任意顶点都不相邻，因此对于每个 $i \in [k]$，$\ell_{p_i} \leq r_{p_i} < \ell_v$ 或 $\ell_v < \ell_{p_i} \leq r_{p_i}$。取满足 $r_{p_i} < \ell_v$ 的最大指标作为$i \in [k]$。注意，i 定义良好，因为根据性质（$*$），$\ell_{p_1} = \min\{\ell_v : v \in V(G)\} \leq r_{p_1} < \ell_v$。首先考虑情形 $i < k$。但这样一来 $r_{p_i} < \ell_v \leq r_v < \ell_{p_{i+1}}$，这与 p_i 和 p_{i+1} 相邻相矛盾。因此 $i = k$。由于 G 连通，必定存在一条路径 $Q = (q_1, \ldots, q_\ell)$，从 p_k 到 v。令 $j \in [\ell]$ 为满足 $\ell_{q_j} \leq r_{p_k}$ 的最后一个指标。由于 $q_1 = p_k$，我们知道 q_j 存在，并且与 P 中的某个顶点相邻。事实上，$j < \ell$，因为 $r_{p_k} < \ell_v$ 且 $q_\ell = v$。因此 q_{j+1} 存在，且进一步有$q_j q_{j+1} \in E(G)$ 和 $\ell_{q_{j+1}} > r_{p_k}$（根据 j 的选取）。由此可得 $r_{p_k} < r_{q_j}$。如果 q_j 与 p_{k-1} 相邻，这就与性质（$*$）矛盾。另一方面，如果 q_j 与 p_{k-1}不相邻，那么集合 $\{v \in V(G) : p_{k-1}v \notin E(G)$ $p_k v \in E(G)\}$ 非空，这与 P 的极大性矛盾。因此 v 必须至少与 P 中的一个顶点相邻。◀

要证明真区间图的奇色数有界于三，我们基本上采用从左到右的方式，贪心地将图划分为大小为偶数的极大团。

▶**命题 26**。对于每个所有连通分量均为偶数阶的真区间图 G $\chi_{\mathrm{odd}}(G)$，其奇色数至多为三。

证明。我们假设 G 是连通的。固定一个 G 的区间表示，并将表示顶点 $v \in V(G)$ 的区间记为 $I_v = [\ell_v, r_v]$，其中 ℓ_v、$r_v \in \mathbb{R}$。令 $P = (p_1, \ldots, p_k)$ 为 G 中的一条极大诱导路径，如引理 25 所示。对于每个顶点 $v \in V(G) \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$，令 $i_v \in [k]$ 为满足以下条件的下标：p_{i_v} 是 v 在 P 上的第一个邻接点。根据引理 25，注意到这一定义是良好的。对于 $i \in [k]$，我们令 Y_i 为具有以下性质的集合。

$(\Pi 1)_i$ $\{v \in V(G) : i_v = i\} \subseteq Y_i \subseteq \{v \in V(G) : i_v = i\} \cup \{p_i, p_{i+1}\}$。$(\Pi 2)_i$ $p_i \in Y_i$ 当且仅当 $\left|\{p_1, \ldots, p_{i-1}\} \cup \bigcup_{j \in [i-1]} \{v \in V(G) : i_v = j\}\right|$ 为偶数。$(\Pi 3)_i$ $p_{i+1} \in Y_i$ 当且仅当 $\left|\{p_1, \ldots, p_i\} \cup \bigcup_{j \in [i]} \{v \in V(G) : i_v = j\}\right|$ 为奇数。

首先注意，$(Y_1,\dots,Y_k)$ 是 $V(G)$ 的一个划分，因为 $(\Pi 2)_i$ 和 $(\Pi 3)_i$ 意味着每个 p_i 恰好属于一个集合 Y_i。此外，对每个 $i\in[k]$，$|Y_i|$ 都是偶数，因为 $(\Pi 1)_i$ 和 $(\Pi 3)_i$ 意味着 $\big|Y_i\cup\{p_1,\dots,p_i\}\cup\bigcup_{j\in[i-1]}\{v\in V(G)\colon i_v=j\}\big|$ 是偶数，而 $(\Pi 2)_i$ 意味着 $\big|(\{p_1,\dots,p_i\}\cup\bigcup_{j\in[i-1]}\{v\in V(G)\colon i_v=j\})\setminus Y_i\big|$ 是偶数。由于 $v\in V(G)\setminus\{p_1,\dots,p_k\}$ 与 p_{i_v-1} 不相邻，我们得到 $\ell_v\in I_{p_{i_v}}$。由于 G 是真区间图，这意味着 $r_{p_{i_v}}\le r_v$，因此 v 与 p_{i_v+1} 相邻。于是 $(\Pi 1)_i$ 意味着 $G[Y_i]$ 必定是一个团，因为对每个 $i\in[k]$，$Y_i\cap\{p_1,\dots,p_k\}\subseteq\{p_i,p_{i+1}\}$。此外，$N_G(Y_i)$ 与 Y_{i+3} 互不相交，因为根据性质 $(*)$，对每个 $v\in Y_i$，$r_v\le r_{p_{i+1}}$；并且由于 P 是诱导的，对每个 $w\in Y_{i+3}$，$r_{p_{i+1}}<\ell_{p_{i+3}}\le r_w$。因此，我们可以按以下方式定义 G 的奇染色 (V_1,V_2,V_3)。对于 $j\in[3]$，令 $V_j:=\bigcup_{i\equiv j \bmod 3} Y_i$。注意，由于 $N_G(Y_i)\cap Y_{i+3}$，我们得到，对于模 3 意义下的 $i\equiv j$，$d_{G[Y_i]}(v)=d_{G[V_j]}(v)$，而该数为奇数（因为 Y_i 是一个偶数阶团）。因此，对每个 $j\in[3]$，$G[V_j]$ 都是奇数。◀

▶ 注 27. 命题 26 中给出的上界是紧的。考虑图 G，它由一个 K_4 以及额外添加的两个悬挂顶点 u，w 组成，这两个顶点分别与 K_4 中不同的顶点相邻。显然，G 是真区间图，且进一步有 $\chi_{\mathrm{odd}}(G)=3$。

我们采用与命题 26 的证明类似的设置（即一条 P 覆盖图 G 的所有顶点的路径），来证明区间图的一般上界。主要区别在于，我们无法保证形如 $\{p_i\}\cup\{v\in V(G)\colon i_v=i\}$ 的集合是团。为了仍能用较少的颜色对这类集合进行奇着色，我们采用了 1 中针对 $\{v\in V(G)\colon i_v=i\}$ 的奇偶着色，并利用 p_i 的全邻接性。因此，颜色数增加了一倍。此外，这种方法使我们无法像命题 26 的证明中那样移动 p_i。因此，与命题 26 的证明相比，包含在集合 Y_i 中的顶点所对应的区间在线上覆盖的范围更大。这使得分析更加复杂。

▶**定理 28.** 对于每个所有连通分量均为偶数阶的区间图 G $\chi_{\mathrm{odd}}(G)$ 至多为六。

证明。我们假设 G 是连通的。首先固定 G的一个区间表示。我们用 $I_v=[\ell_v,r_v]$ 表示顶点 $v\in V(G)$ 对应的区间，其中 $\ell_v,r_v\in\mathbb{R}$。令 $P=(p_1,\dots,p_k)$ 为 G 中的一条极大诱导路径，如引理 25 所述。令 Y为 $V(G)\setminus\{p_1,\dots,p_k\}$。对于每个 $v\in Y$，我们定义 $i_v\in[k]$ 为满足 v 与 p_{i_v}相邻的最小指标。注意，根据引理 25，这一定义良好。

现在我们递归地定义 Y的一个划分 $(Y_1,\dots,Y_k)$，使得对于每个 $i\in[k]$，以下性质成立。

$(P1)_i$ Y_i 中的每个顶点都与 p_i相邻。$(P2)_i$ 若 $|\{p_1,\dots,p_i\}\cup\{v\in Y\colon i_v\le i\}|$ 为偶数，则 $\bigcup_{j=1}^{i}Y_j=\{v\in Y\colon i_v\le i\}$。$(P3)_i$ 若 $|\{p_1,\dots,p_i\}\cup\{v\in Y\colon i_v\le i\}|$ 为奇数，则要么 $|\{v\in Y\colon i_v\le i\}\setminus\bigcup_{j=1}^{i}Y_j|=1$，要么 $\bigcup_{j=1}^{i}Y_j=\{v\in Y\colon i_v\le i\}$ 且 $N_G(p_{i+1})\cap Y_i=\emptyset$。$(P4)_i$ 若对于 $w\notin\bigcup_{j=1}^{i}Y_j$ 有 $i_w\le i$，则 $w\in N_G(p_{i+1})$ 且 $i_w=\max\{i_v\colon v\in Y\cap N_G(p_{i+1})\}$。

固定 $i\in[k]$，并假设我们已定义 $Y_1,\dots,Y_{i-1}$，使得对每个 $j\in[i-1]$，$(P1)_j$、$(P2)_j$、$(P3)_j$、$(P4)_j$ 均成立。接下来我们说明如何构造 Y_i。定义 $Y_i':=\big\{v\in Y\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}Y_j\colon i_v\le i\big\}$。注意，$Y_i'\cup\bigcup_{j=1}^{i-1}Y_j=\{v\in Y\colon i_v\le i\}$。若 $|\{p_1,\dots,p_i\}\cup\{v\in Y\colon i_v\le i\}|$ 为偶，或者 $Y_i'\cap N_G(p_{i+1})=\emptyset$，则令 $Y_i:=Y_i'$。否则，取 $w\in Y_i'\cap N_G(p_{i+1})$，使得 $i_w=\max\{i_v\colon v\in Y_i'\cap N_G(p_{i+1})\}$，并定义 $Y_i:=Y_i'\setminus\{w\}$。注意，由于我们考虑的是 $Y_i'\cap N_G(p_{i+1})\neq\emptyset$ 的情形，w 定义良好。由 Y_i 的构造可知，性质 $(P2)_i$ 和 $(P3)_i$ 均成立。为说明性质 $(P1)_i$

成立，我们注意到，根据 $(P4)_{i-1}$，每个满足 $i_w < i$ 的顶点 $w \in Y_i'$ 都必须与p_i相邻。此外，根据 i_v的选取，每个满足 $i_v = i$ 的顶点 v 都与 p_i 相邻，因此性质 $(P1)_i$ 成立。为说明性质 $(P4)_i$ 成立，我们注意到，每个满足$i_v = i$ 的顶点 $v \in Y$ 都包含在 Y_i' 中。因此，若 $\max\{i_v\colon v \in Y \cap N_G(p_{i+1})\} = i$，那么我们就会选择满足 $i_w = i$的 w。若 $\max\{i_v\colon v \in Y \cap N_G(p_{i+1})\} < i$，则 $(P4)_i$ 可直接由 $(P4)_{i-1}$ 得出。至此，集合 $Y_1, \ldots, Y_k$ 的构造完成。以下两个断言使我们能够重用用于为 Y_i 着色的颜色，为集合 $Y_{i+c}, Y_{i+2c}, \ldots$ 着色，其中 c 是某个较小的常数。

▷ 命题 29. 对每个顶点 $v \in Y$，都有 $I_v \cap I_{p_i} = \emptyset$对每个 $i \notin \{i_v, i_v+1, i_v+2\}$。特别地，$N_G(v) \cap \{p_1, \ldots, p_k\}$对于每个顶点 $v \in Y$都包含于$\{p_{i_v}, p_{i_v+1}, p_{i_v+2}\}$ 中。

证明。 首先注意到 $I_v \cap I_{p_i} = \emptyset$ 对每个 $i < i_v$ 根据 i_v的定义。由于 P 是诱导路径 $r_{p_{i_v+1}} < \ell_{p_{i_v+3}}$。另一方面， $r_v \le r_{p_{i_v+1}}$ 根据性质 $(*)$。因此$r_v < \ell_{p_{i_v+3}} \le \ell_{p_i}$ 对每个 $i \ge i_v + 3$。因此 $I_v \cap I_{p_i} = \emptyset$ 对每个 $i \ge i_v + 3$ 从而证明了该结论。◁

由命题 29 可得以下命题。

▷ 命题 30。 若 $Y_i \subseteq \{v \in Y\colon i_v \ge i'\}$，则

- $N_G(\{p_i\})$ 与 $\{p_j\} \cup Y_j$ 不相交，对任意 $j \le i-3$ 均成立；并
- 且$N_G(Y_i)$ 与 $\{p_j\} \cup Y_j$ 不相交，对任意 $j \le i'-2$均成立。

证明。 由命题 29 可知，不存在这样的 $v \in Y$满足 $i_v \le i-3$ 且与 $\{p_i\}$相邻。此外， P是一条诱导路径，因此 p_j与 p_i不相邻，对每个 $j \le i-2$均成立。因此，$N_G(\{p_i\})$ 与 $\{p_j\} \cup Y_j$不相交，对每个 $j \le i-3$均成立。

为证明第二个性质，注意到性质 $(*)$ 与 P是诱导路径这一条件蕴含：对于每个 $v \in \{p_1, \ldots, p_{i'-2}\} \bigcup_{j=1}^{i'-2}$，都有 $r_v \le r_{p_{i'-1}}$。由于每个 $w \in Y_i$ 都满足 $i_w \ge i'$，因此每个 $v \in \{p_1, \ldots, p_{i'-2}\} \bigcup_{j=1}^{i'-2} Y_j$都不能与 Y_i 中的任何顶点相邻（注意，当 $i = i'$ 时，若 $r_{p_i} \le r_{p_{i-1}}$，则 p_i 并不满足这一点）。由 $Y_1, \ldots, Y_k$的构造可知，对于每个 $j \le i'-2$，都有 $Y_j \subseteq \{v \in Y\colon i_v \le i'-2\}$，因此$N_G(Y_i)$ 与 Y_j 不相交，对任意 $j \le i'-2$均成立。◁

利用集合 Y_1、……、Y_k、命题 29 和命题 30，我们现在可以找到 G 的一个奇着色。要为 G 着色，我们使用递归论证。在第 i 步，我们将集合$\{p_1$、……、$p_i\} \cup \bigcup_{j=1}^{i} Y_j$划分为六个（可能为空的）部分 V_1^i、……、V_6^i，并使其具有以下性质。

$(C1)_i$如果 $|\{p_1$、……、$p_i\} \cup \bigcup_{j=1}^{i} Y_j|$是偶数，那么 $(V_1^i$、……、$V_6^i)$ 就是 $G[\{p_1$、……、$p_i\}$ 的一个奇着色 $\cup \bigcup_{j=1}^{i} Y_j]$. $(C2)_i$如果 $|\{p_1, \ldots, p_i\} \cup \bigcup_{j=1}^{i} Y_j|$是奇数，那么存在 $j_i \in [6]$，使得对于每个 $j \ne j_i$， $G[V_j^i]$ 都是奇数， $p_i \in V_{j_i}^i$，并且在 $G[V_{j_i}^i]$ 中，除 p_i 外的每个顶点的度都是奇数。$(C3)_i$ $\{p_i\} \cup Y_i$包含在划分 $(V_1^i, \ldots, V_6^i)$ 的至多两个部分的并集中。$(C4)_i$ 对于每个 $j \in [6]$，若存在两个指标 $i' \ne i''$ 使得 $v \in \{p_{i'}\} \cup Y_{i'}$ 且$w \in \{p_{i''}\} \cup Y_{i''}$，则可以通过移除路径 P 的一条边，在 $G[V_j^i]$ 中将任意一对顶点 $v, w \in V_j^i$ 分开。

固定 $i \in [k]$，并假设我们已将 $\{p_1, \ldots, p_{i-1}\} \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} Y_j$划分为六个部分$V_1^{i-1}$、…、$V_6^{i-1}$，且对于每个 $j \le i-1$均满足性质 $(C1)_i$、$(C2)_i$、$(C3)_i$和$(C4)_i$。我们的目标是找到 $\{p_i\} \cup Y_i$ 的一个划分(W_1, W_2)以及两个指标 $j_1 \ne j_2 \in [6]$，使得通过将 W_1添加到 $V_{j_1}^{i-1}$、将 W_2添加到 $V_{j_2}^{i-1}$，由$(V_1^{i-1}, \ldots, V_6^{i-1})$得到的划分是 $\{p_1, \ldots, p_i\} \cup \bigcup_{j=1}^{i} Y_j$的一个划分，并满足性质 $(C1)_i$、$(C2)_i$、$(C3)_i$和$(C4)_i$。

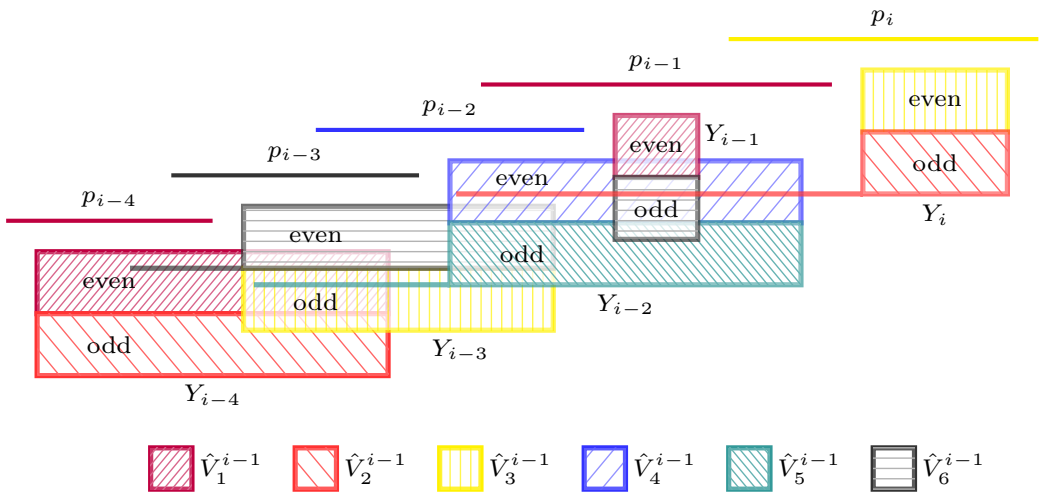


图 3 在证明 Claim 31 的情形 $i_w = i-2$ 中，对划分 $(\hat{V}_1^{i-1}, \ldots, \hat{V}_6^{i-1})$ 的示意图。请注意，在图中，Y_i 被染成了该情形下得到的指标 $\hat{j}_1 = 3$ 和 $\hat{j}_2 = 2$ 对应的两种颜色。

为定义划分(W_1, W_2)，我们使用 $G[Y_i]$的一个划分(W_1', W_2')，使得 $G[W_1']$为奇且 $G[W_2']$ 为偶；根据定理 1，这样的划分存在。注意，在 Y_i 为空的情形下，我们只需得到划分$(\emptyset, \emptyset)$，这已足以满足我们的目的。我们定义$W_1 := W_1'$以及 $W_2 := W_2' \cup \{p_i\}$。注意到 $G[W_1']$ 为奇，根据握手引理，$|W_1'|$ 为偶。因此，$|W_2'|$ 为奇当且仅当 $|Y_i|$ 为奇。由于 W_2'中的每个顶点都根据$(P1)_i$与 p_1相邻，我们得到 W_2'中的每个顶点在 $G[W_2]$中具有奇度，并且 p_1 具有奇度当且仅当 $|Y_i|$ 为奇。注意，此时无需进行太多进一步分析，我们就可以得到使用 12 种颜色的着色。要获得使用六种颜色的着色，则需要进行仔细分析。

下面的命题将为指标 j_1 和 j_2 提供可能的选择。请注意，命题中的指标并非在所有情形下都是合适的选择。

▷ Claim 31. 存在 $\{p_1, \ldots, p_{i-1}\} \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} Y_j$ 的一个划分 $(\hat{V}_1^{i-1}, \ldots, \hat{V}_6^{i-1})$，满足性质 $(C1)_i$、$(C2)_i$、$(C3)_i$、$(C4)_i$；对每个 $j \le i-1$ 以及满足 $N_G(W_1)$ 与 $\hat{V}^{i-1}{}_{\hat{j}_1}$ 不相交且 $N_G(W_2)$ 与 $\hat{V}^{i-1}{}_{\hat{j}_2}$ 不相交的指标 $\hat{j}_1 \neq \hat{j}_2 \in [6]$，均成立。

证明。首先考虑 $Y_i \subseteq \{v \in Y\colon i_v \in \{i, i-1\}\}$ 这一情形。在这种情形下，我们将对每个 $j \in [6]$ 设置 $\hat{V}_j^{i-1} := V_j^{i-1}$。由于 $Y_i \subseteq \{v \in Y\colon i_v \in \{i, i-1\}\}$，根据命题 30 可得，$N_G(W_1)$ 和 $N_G(W_2)$ 均与任何满足 $j \le i-3$ 的集合 $\{p_j\} \cup Y_j$ 不相交。由于 $(C3)_j$, $j < i$ 意味着 $\{p_{i-2}, p_{i-1}\} \cup Y_{i-2} \cup Y_{i-1}$ 至多包含在划分 $(\hat{V}_1^{i-1}, \ldots, \hat{V}_6^{i-1})$ 的四个部分中，因此我们可以找到 $\hat{j}_1, \hat{j}_2 \in [6], \hat{j}_1 \neq \hat{j}_2$，使其满足以下性质：$\hat{V}^{i-1}{}_{\hat{j}_1}$ 和 $\hat{V}^{i-1}{}_{\hat{j}_2}$ 均不包含 $\{p_{i-2}, p_{i-1}\} \cup Y_{i-2} \cup Y_{i-1}$ 中的任何元素。这样选择可确保 $N_G(W_1)$ 与 $\hat{V}^{i-1}{}_{\hat{j}_1}$ 不相交，且 $N_G(W_2)$ 与 $\hat{V}^{i-1}{}_{\hat{j}_2}$ 不相交。

现在考虑 Y_i 包含一个 w 且 $i_w < i-1$的情形。注意到在这种情形下，根据命题 29，我们可以得到 $i_w = i-2$。图 3 展示了在这种情形下我们得到的区间布局和可用颜色。

我们知道，在 W_1、W_2 中至少有一个集合完全包含于 $\{v \in Y\colon i_v = i\} \cup \{p_i\}$（即不包含 w 的那个集合）中，依据 $(P3)_i$。不失一般性，假设这对 W_1 成立（也就是说，下面的论证不会用到 W_2 包含 p_i 这一点）。根据命题 30

我们推知，$N_G(W_2) \subseteq N_G(\{p_i\} \cup Y_i)$ 与任何满足 $j \leq i-4$ 的集合 $\{p_j\} \cup Y_j$ 都不相交。此外，$(C3)_j$, $j < i$ 表明，$\{p_{i-3}, p_{i-2}\} \cup Y_{i-3} \cup Y_{i-2}$ 至多包含在划分 $(V_1^{i-1}, \ldots, V_6^{i-1})$ 的四个部分中。选择 $\hat{}\, j_2$，使得 $V^{i-1}\hat{}\, j_2$ 与 $\{p_{i-3}, p_{i-2}\} \cup Y_{i-3} \cup Y_{i-2}$ 不相交。接下来我们将论证，经过可能对划分 $(V_1^{i-1}, \ldots, V_6^{i-1})$ 进行修改后，可以假设 $\{p_{i-1}\} \cup Y_{i-1}$ 也与 $V^{i-1}\hat{}\, j_2$ 不相交。

首先注意到 $w \in Y_i$ with $i_w = i-2$ 蕴含 $Y_{i-1} \subseteq \{v \in Y\colon i_v = i-1\}$，由 $(P2)_{i-2}$ 和 $(P3)_{i-2}$ 可得。由命题 30 可知，对于任意 $j \leq i-3$，$N_G(\{p_{i-1}\} \cup Y_{i-1})$ 与 $\{p_j\} \cup Y_j$ 不相交。由于依据 $(C3)_j$，$\{p_{i-2}\} \cup Y_{i-2}$ 至多包含在划分 $(V_1^{i-1}, \ldots, V_6^{i-1})$ 的两个部分中，$j < i$ 因此我们可以选取与 $\hat{}\, j_2$ 不同的 $j', j'' \in [6]$, $j' \neq j''$，使得 $V_{j'}^{i-1}, V_{j''}^{i-1}$ 与 $\{p_{i-2}\} \cup Y_{i-2}$ 不相交。由 $(C3)_{i-1}$ 可知，$\{p_{i-1}\} \cup Y_{i-1}$ 至多包含在划分 $(V_1^{i-1}, \ldots, V_6^{i-1})$ 的两个部分中。设 $V_{m'}^{i-1}, V_{m''}^{i-1}$ 是这两个部分，并定义 $M' := V_{m'}^{i-1} \cap (\{p_{i-1}\} \cup Y_{i-1})$ 和 $M'' := V_{m''}^{i-1} \cap (\{p_{i-1}\} \cup Y_{i-1})$。如果 $\{p_{i-1}\} \cup Y_{i-1}$ 包含在一个部分中，则令 $m' = m''$。如果 $m' = \hat{}\, j_2$ 和 $m'' = \hat{}\, j_2$ 均不成立，则 $V^{i-1}\hat{}\, j_2$ 与 $\{p_{i-3}, P_{i-2}, p_{i-1}\} \cup \bigcup_{j=i-3}^{i-1} Y_j$ 不相交，因此令每个 $j \in [6]$ 对应 $\hat{}\, V_j^{i-1} := V_j^{i-1}$ 后，可得 $N_G(W_2)$ 与 $\hat{}\, V^{i-1}\hat{}\, j_2$ 不相交。因此，假设情况并非如此。不失一般性，假设 $m' = \hat{}\, j_2$。由于 $j' \neq j''$，可知 m'' 不等于 j' 或 j''。设 $j' \neq m''$。我们定义 $\hat{}\, V_{j'}^{i-1} := V_{j'}^{i-1} \cup M'$、$\hat{}\, V^{i-1}\hat{}\, j_2 := V^{i-1}\hat{}\, j_2 \setminus M'$，以及对 $j \notin \{j', \hat{}\, j_2\}$，定义 $\hat{}\, V_j^{i-1} := V_j^{i-1}$。为说明 $\{p_1, \ldots, p_{i-1}\} \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} Y_j$ 的划分 $(\hat{}\, V_1^{i-1}, \ldots, \hat{}\, V_6^{i-1})$ 满足 $(C1)_{i-1}$、$(C2)_{i-1}$、$(C3)_{i-1}$、$(C4)_{i-1}$，我们作如下两点观察。由于 $V^{i-1}\hat{}\, j_2$ 与 $\{p_{i-3}, p_{i-2}\} \cup Y_{i-3} \cup Y_{i-2}$ 不相交，并且对任意 $j \leq i-3$，$N_G(M') \subseteq N_G(\{p_{i-1}\} \cup Y_{i-1})$ 与 $\{p_j\} \cup Y_j$ 不相交，因此 M' 是 $G[V^{i-1}\hat{}\, j_2]$ 的一个连通分量。故对于任意顶点 $v \in V^{i-1}\hat{}\, j_2 \setminus M'$，有 $d_{G[V^{i-1}\hat{}\, j_2]}(v) = d_{G[\hat{V}^{i-1}\hat{}\, j_2]}(v)$。此外，由于 $V_{j'}^{i-1}$ 与 $\{p_{i-2}\} \cup Y_{i-2}$ 不相交，并且对任意 $j \leq i-3$，$N_G(M') \subseteq N_G(\{p_{i-1}\} \cup Y_{i-1})$ 与 $\{p_j\} \cup Y_j$ 不相交，因此 M' 是 $G[\hat{}\, V_{j'}^{i-1}]$ 的一个连通分支。因此，对任意顶点 $v \in V_{j'}^{i-1}$，有 $d_{G[V_{j'}^{i-1}]}(v) = d_{G[\hat{V}_{j'}^{i-1}]}(v)$；对任意顶点 $v \in M'$，有 $d_{G[V^{i-1}\hat{}\, j_2]}(v) = d_{G[\hat{V}_{j'}^{i-1}]}(v)$。此论证表明，$(C1)_{i-1}$ 和 $(C2)_{i-1}$ 均成立。由 M' 是 $G[\hat{}\, V_{j'}^{i-1}]$ 的一个连通分支，且 $(V_1^{i-1}, \ldots, V_6^{i-1})$ 满足 $(C4)_{i-1}$，可知 $(C4)_{i-1}$ 成立。此外，$(C3)_{i-1}$ 显然成立。

为选择 $\hat{}\, j_1$，我们首先注意到，$W_1 \subseteq \{p_i\} \cup \{v \in Y\colon i_v = i\}$ 蕴含，对每个 $j \leq i-3$，利用命题 30，$N_G(W_1)$ 与 $\{p_j\} \cup Y_j$ 不相交。由于根据 $(C3)_j$, $j < i$，$\{p_{i-2}, p_{i-1}\} \cup Y_{i-2} \cup Y_{i-1}$ 至多包含在该划分的四个部分中（$\hat{}\, V_1^{i-1}, \ldots, \hat{}\, V_6^{i-1}$），我们可以选择 $\hat{}\, j_1 \in [6]$，使得 $\hat{}\, j_1 \neq \hat{}\, j_2$ 且 $N_G(W_1)$ 与 $\hat{}\, V^{i-1}\hat{}\, j_1$ 不相交，如所要求。◁

在余下的论证中，我们按照 Claim 31 的陈述选取 $\hat{}\, j_1, \hat{}\, j_2 \in [6]$ 和 $(\hat{}\, V_1^{i-1}, \ldots, \hat{}\, V_6^{i-1})$。我们将在下文中通过考虑几种不同的情形来定义划分 $(V_1^i, \ldots, V_6^i)$。

首先考虑 $|\{p_1, \ldots, p_{i-1}\} \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} Y_j|$ 为偶的情形。令 $j_1 := \hat{}\, j_1$ 和 $j_2 := \hat{}\, j_2$，并对每个 $j \notin \{j_1, j_2\}$ 定义 $V_{j_1}^i := \hat{}\, V_{j_1}^{i-1} \cup W_1$、$V_{j_2}^i := \hat{}\, V_{j_2}^{i-1} \cup W_2$ 和 $V_j^i := \hat{}\, V_j^{i-1}$。由于 $|\{p_1, \ldots, p_{i-1}\} \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} Y_j|$ 为偶，根据 $(C1)_{i-1}$，我们得到对每个 $j \in [6]$，$G[\hat{}\, V_j^{i-1}]$ 都是奇的。此外，由于 $G[W_1]$ 是奇的，且 $N_G(W_1)$ 与 $\hat{}\, V_{j_1}^{i-1}$ 不相交，因此 $G[V_{j_1}^i]$ 是奇的。进一步回顾，每个顶点 $v \in W_2 \setminus \{p_i\}$ 在 $G[W_2]$ 中的度都是奇数，并且 p_i 在 $G[W_2]$ 中的度为奇数，当且仅当 $|Y_i|$ 为偶。由于 $|\{p_1, \ldots, p_{i-1}\} \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} Y_j|$ 为偶，$|\{p_1, \ldots, p_i\} \cup \bigcup_{j=1}^{i} Y_j|$ 为偶，当且仅当 $|Y_i|$ 为偶（且 p_i 的度为奇数）。因此，$(V_1^i, \ldots, V_6^i)$ 满足 $(C1)_i$ 和 $(C2)_i$。此外，$(C3)_i$ 成立，因为 $\{p_i\} \cup Y_i$

包含在 $V_{j_1}^i \cup V_{j_2}^i$ 中。最后，由于 $N_G(W_1)$ 与 $\hat{}V_{j_1}^{i-1}$ 不相交，且 $N_G(W_2)$ 与 $\hat{}V_{j_2}^{i-1}$ 不相交，因此 $(C4)_i$ 可由 $(C4)_{i-1}$ 得出。

现在考虑 $|\{p_1,\dots,p_{i-1}\}\cup\bigcup_{j=1}^{i-1}Y_j|$ 为奇数的情形。设 $j_2\in[6]$ 是满足 $p_{i-1}\in\hat{}V_{j_2}^{i-1}$ 的指标，并进一步令 $j_1:=\hat{}j_1$。对每个 $j\notin\{j_1,j_2\}$，定义 $V_{j_1}^i:=\hat{}V_{j_1}^{i-1}\cup W_1$、$V_{j_2}^i:=\hat{}V_{j_2}^{i-1}\cup W_2$ 和 $V_j^i:=\hat{}V_j^{i-1}$。由 $(C1)_{i-1}$ 和 $(C2)_{i-1}$，我们可以直接得出，对于 $j\notin\{j_1,j_2\}$，$G[V_j^i]$ 为奇数。

注意，由 Claim 31 可知，$N_G(W_1)$ 与 $\hat{}V_{j_1}^{i-1}$ 不相交。因此，W_1 是 $G[V_{j_1}^i]$ 中的一个连通分量，并且 $G[W_1]$ 和 $G[\hat{}V_{j_1}^{i-1}]$ 都是奇数，所以我们得到 $G[V_{j_1}^i]$ 为奇数。此外，性质 $(C2)_{i-1}$ 意味着，对于每个 $v\in\hat{}V_{j_2}^{i-1}\setminus\{p_{i-1}\}$，$d_{G[\hat{V}_{j_2}^{i-1}]}(p_{i-1})$ 是偶数，而 $d_{G[\hat{V}_{j_2}^{i-1}]}(v)$ 是奇数。另外，对于每个 $v\in Y_i\setminus\{p_i\}$，$d_{G[W_2]}(v)$ 都是奇数。为了确定 p_{i-1} 在 $G[V_{j_2}^i]$ 中的度，注意 $(P3)_{i-1}$ 保证了 $Y_i\subseteq\{v\in Y\colon i_v=i\}$，因此 p_{i-1} 与任意 $v\in Y_i$ 都不相邻。由于 p_{i-1} 与 p_i 相邻，我们得到 $d_{G[V_{j_2}^i]}(p_{i-1})=d_{G[\hat{V}_{j_2}^{i-1}]}(p_{i-1})+1$，因此 p_{i-1} 在 $G[V_{j_2}^i]$ 中的度是奇数。为了确定 $v\in V_{j_2}^i\setminus\{p_{i-1}\}$ 的度，我们首先论证，对于划分 $(V_1^i,\dots,V_6^k)$，$(C4)_i$ 成立。令 G' 为从 $G[\hat{}V_{j_2}^{i-1}]$ 中删除路径 P 的所有边后得到的图。那么 $(C4)_{i-1}$ 意味着，$v\in\hat{}V_{j_2}^{i-1}\cap(\{p_1,\dots,p_{i-2}\}\cup\bigcup_{j=1}^{i-2}Y_j)$ 中的每个顶点都必须位于 G' 的不同连通分量中，而不是与任意 $w\in\hat{}V_{j_2}^{i-1}\cap(\{p_{i-1}\}\cup Y_{i-1})$ 位于同一连通分量。因此，对于顶点对 $v\in\hat{}V_{j_2}^{i-1}\cap(\{p_1,\dots,p_{i-2}\}\cup\bigcup_{j=1}^{i-2}Y_j)$、$w\in\hat{}V_{j_2}^{i-1}\cap(\{p_{i-1}\}\cup Y_{i-1})$，除 p_{i-2},p_{i-1} 这一对外，均有 $r_v<\ell_w$。由于 $Y_{i-1}\cap N_G(p_i)=\emptyset$ 且 $Y_i\subseteq\{v\in Y\colon i_v=i\}$，我们还知道，对于每个 $v\in Y_{i-1}$, $w\in\{p_i\}\cup Y_i$，都有 $r_v<\ell_w$。综合可得，对于任意 $v\in\hat{}V_{j_2}^{i-1}\cap(\{p_1,\dots,p_{i-1}\}\cup\bigcup_{j=1}^{i-1}Y_j)$、$w\in\{p_i\}\cup Y_i$，除 p_{i-1},

p_i i $\cdots$ p_{i-1} p_i 这一对外，$r_v<\ell_w$（因此 v 与 w 不相邻）。由此我们证明了，对于划分 $(V_1^i,,V_6^k)$，$(C4)$ 成立。由于 和 都包含在 $V_{j_2}^i$ 中，性质 $(C4)_i$ 意味着，对于每个 $w\in Y_i$，$d_{G[V_{j_2}^i]}(w)=d_{G[W_2]}(w)$。此外，$(C4)_i$ 意味着，对于每个 $w\in\hat{}V_{j_2}^{i-1}\setminus\{p_{i-1}\}$，$d_{G[V_{j_2}^i]}(w)=d_{G[\hat{V}_{j_2}^{i-1}]}(w)$。最后，由于 p_i 与 p_{i-1} 相邻，$d_{G[V_{j_2}^i]}(p_i)=d_{G[W_2]}(p_i)+1$。此外，$|\{p_1,\dots,p_i\}\cup\bigcup_{j=1}^{i}Y_j|$ 为偶数，当且仅当 $|Y_i|$ 为奇数，因为 $|\{p_1,\dots,p_{i-1}\}\cup\bigcup_{j=1}^{i-1}Y_j|$ 为奇数。由于 $d_{G[W_2]}(p_i)$ 为偶数，当且仅当 $|Y_i|$ 为奇数，我们得到：$d_{G[V_{j_2}^i]}(p_i)$ 为奇数，当且仅当 $|\{p_1,\dots,p_i\}\cup\bigcup_{j=1}^{i}Y_j|$ 为偶数，正如所需。因此，对于 $(V_1^i,\dots,V_6^i)$，$(C1)_i$ 和 $(C2)_i$ 成立。此外，$(C3)_i$ 按构造成立。

最后，由于 $|\{p_1,\dots,p_k\}\cup\bigcup_{j=1}^{k}Y_j|=|V(G)|$ 是偶的（$V_1^k,\dots,V_6^k$）是 G 的一个奇着色，由（$C1$）$_k$得出。◀

6 结论

我们开启了对图类上奇着色的系统研究。受猜想 3 启发，我们考察了那些不包含某个给定图族中大型图作为诱导子图的图类。综合这些结果，有充分证据表明猜想 3 确实成立。解决这一问题仍是一项重大开放问题，即便是在二部图这一特定情形下也是如此。

还有几个有趣的图类值得考虑，其中最值得关注的是线图和无爪图。注意，对线图 $L(G)$ 进行奇着色，相当于对 G 的边着色，使得每个颜色类都诱导出一个二部图，其中二部划分一侧的每个顶点度为奇数，而另一侧颜色部分的每个顶点度为偶数。

这不要与奇数 k-边着色的概念混淆。奇数 k-边着色是一种边着色（不一定是正常的），使用至多 k 种颜色，并且每个非空颜色类都诱导出一个图，其中每个顶点的度都是奇数。已知所有简单图都可以进行奇数 4-边着色，且每个无环多重图都可以进行奇数 6-边着色（例如参见 [12]）。虽然对线图进行（顶点）奇着色与奇边着色并无直接关联，但这一结果使我们相信线图具有有界奇色数。

最后，确定定理 14 是否可以扩展到有界秩宽度图仍是一个开放问题。我们还认为，定理 28 和推论 6 中的界并不紧，且可以进一步改进。特别地，我们相信以下最初在 [1], 中提出的猜想成立：

▶ **猜想 32**。 每个 G 偶数阶图都具有 $\chi_{\text{odd}}(G) \leq \Delta + 1$。

参考文献

1 Arman Aashtab、Saieed Akbari、Maryam Ghanbari 和 Amitis Shidani。将图划分为奇数诱导子图。Discuss. Math. Graph Theory，43(2):385–399，2023年。doi:10.7151/dmgt.2371。2 Rémy Belmonte 和 Ignasi Sau。关于寻找大的奇数诱导子图和奇着色的复杂性。Algorithmica，83(8):2351–2373，2021年。 doi:10.1007/s00453-021-00830-x。3 Béla Bollobás。色数、围长和最大度。Discrete Mathematics，24(3):311–314，1978年。4 Yair Caro。关于具有奇度的诱导子图。Discret. Math.，132(1-3):23–28，1994年。doi:10.1016/0012-365X(92)00563-7。5 Gerard Jennhwa Chang 和 Guan-Huei Duh。关于具有大围长的平面图的强色指数的精确值。Discret. Appl. Math.，247:389–397，2018年。 doi:10.1016/j.dam.2018.03.075。6 Reinhard Diestel。图论，第 4 版，Graduate texts in mathematics 第 173 卷。Springer，2012年。7 Paul Erdős。图论与概率。Canadian Journal of Mathematics，11:34–38，1959年。8 Asaf Ferber 和 Michael Krivelevich。每个图都包含一个线性大小的诱导子图，其中所有顶点的度均为奇数。Advances in Mathematics，406:108534，2022年。URL： https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870822003516， doi:https://doi.org/10.1016/j.aim.2022.108534。9 Fedor V. Fomin、Petr A. Golovach、Daniel Lokshtanov、Saket Saurabh 和 Meirav Zehavi。团宽度 III：哈密顿圈与图着色的奇数情形。ACM Trans. Algorithms，15(1):9:1–9:27，2019年。 doi:10.1145/3280824。10 Robert Ganian、Petr Hlinený 和 Jan Obdrzálek。关于有界（双）秩宽度图上多项式算法的统一方法。Eur. J. Comb.，34(3):680–701，2013年。 doi:10.1016/j.ejc.2012.07.024。11 László Lovász。Combinatorial Problems and Exercises。North-Holland，1993年。12 Mirko Petrusevski。图的奇数 4-边可着色性。J. Graph Theory，87(4):460–474，2018年。doi:10.1002/jgt.22168。13 Mirko Petrusevski 和 Riste Skrekovski。满足邻域奇偶条件的着色，2021年。URL: https://arxiv.org/abs/2112.13710， doi:10.48550/ARXIV.2112.13710。14 Alex D. Scott。关于所有度均为奇数的诱导子图。Graphs Comb.，17(3):539–553，2001年。doi:10.1007/s003730170028。