arXiv:2303.03228v1 [math.DG] 6 Mar 2023

Ribaucour型曲面

Milton Javier Cardenas Mendez 数学与统计研究所 戈亚斯联邦大学，74001-970 戈亚尼亚，GO，巴西
miltonjcardenas@ufg.br

ArmardoMauro Vasquez Corro 数学与统计研究所 戈亚斯联邦大学，74001-970 戈亚尼亚，GO，巴西
corro@ufg.br

2023年5月30日

摘要

本文定义了Ribaucour型曲面（简称RT曲面）。这类曲面满足一种与Ribaucour曲面相似的关系，而Ribaucour曲面与埃利·嘉当问题有关。这一类曲面提供了看似首批这样的例子：欧氏空间中一对不全等曲面在某个微分同胚下保持曲率线不变，并交换主曲率。我们证明，每个紧致连通RT曲面都是以原点为球心的球面。对于Gauss映射给定的RT曲面，我们得到一种依赖于两个全纯函数的Weierstrass型表示。我们给出了RT曲面的具体例子。此外，我们还利用这一表示对RT旋转曲面进行了分类。

关键词。Ribaucour曲面、广义Weingarten曲面、指定法向Gauss映射、Weierstrass型表示。

引言：如果存在平均曲率 H 与高斯曲率 K 之间的可微关系 W ，使得定向曲面 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ 满足 $W(H,K) = 0$，则称 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ 为Weingarten曲面；当函数 W 为线性函数，即对于 a, b 和常数 c ，有 $a + bH + cK = 0$ 时，这类曲面称为线性Weingarten曲面。

线性Weingarten曲面的例子包括常高斯曲率曲面（$c \neq 0$ 和 $b = 0$）以及常平均曲率曲面（$b \neq 0$ 和$c = 0$）。多位作者研究过这些曲面类，参见 [1], [6] 和[2],等。

设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 为定向曲面，其法向高斯映射为 N，函数 $\Psi, \Lambda \colon \Sigma \to \mathbb{R}^3$，定义为 $\Psi(p) = \langle p, N(p)\rangle$ 和 $\Lambda(p) = \langle p, p\rangle$，其中 $\langle , \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的欧氏标量积，分别称为支撑函数和

二次距离函数。从几何上看， $\Psi(p)$ 表示原点到 T_pM 的有向距离，而 $\Lambda(p)$ 表示原点到 p 的距离平方。设 $p \in \Sigma$ 为一个球面，其球心为 $p + {}^{H}{}_{(p)\,K(p)}\,N(p)$，半径为 ${}_{H(p)\;K(p)}$，称为中间球。

1888年，Appell [5] 研究了一类定向为 $\mathbb{R}^3$ 、与保面积球面变换相关的曲面。后来，Ferreira 和 Roitman [3]证明，这些曲面满足 Weingarten关系 $H + \Psi K = 0$。

1907年，Tzitzeica [8] 研究了定向方式满足存在非零常数 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $K + c^2\Psi^4 = 0$的双曲曲面。

在 [1], ，受文献 [5] 和 [8] 的启发，作者将广义Weingarten曲面定义为满足如下形式关系 $A + BH + CK = 0$的曲面，其中 A， B， C： $\Sigma \to \mathbb{R}$ 是与 Σ的参数化无关的可微函数。特别地，他们研究了满足关系 $2\Psi H + \Lambda K = 0$的一类曲面。这类曲面称为依赖于支撑函数和距离函数的特殊广义 Weingarten曲面（简称 EDSGW曲面），其几何性质是所有中间球都经过原点。作者得到了依赖于两个全纯函数的 EDSGW曲面的类 Weierstrass 表示。在[6], ，作者对由平面曲率线参数化的第三基本形相关的等温EDSGW曲面进行了分类。此外，在 [4], 中还证明，EDSGW曲面与$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 中的曲面类相对应，其中高斯曲率 K 和外蕴曲率 K_E 满足$K = 2K_E$。

Mart´ınez 和 Roitman 在 [2] 中展示了一个似乎是针对埃利·嘉当在其关于外微分系统及其在微分几何中的应用的经典著作中提出的问题的第二种情形所发现的首个例子。此类例子由满足关系式 $2\Psi H + (1 + \Lambda)K = 0$ 的一类 Weingarten曲面给出，这些曲面被称为 Ribaucour曲面；它们具有如下几何性质：所有中间球都沿一条大圆与一个固定球面相交。

在 [9], 中，作者将满足 $2\Psi H + (ce^{2\mu} + \Lambda)K = 0$ 的曲面类定义为调和型 Ribaucour曲面（简称 HR曲面），其中 c 是非零实常数， μ 是关于第三基本形式的调和函数。这些曲面推广了 [2] 中研究的 Ribaucour曲面。

受 [1],[6], [2]和 [3], 的启发，我们定义Ribaucour型曲面（RT曲面），它具有如下几何性质：对每个 $p \in \Sigma$ ，存在一个以$p +$为球心、 ${}^{H}{}_{(p)\,K(p)} + {}_{\Psi(p)\,2}$ 为半径的球面$\overline{N}(p)$，且该球面经过原点；在这种情况下， $2\Psi H + (\Lambda + \Psi^2)$ $K = 0$ 成立。我们得到了RT曲面的Weierstrass型表示，其中法向高斯映射由两个全纯函数确定。利用这一表示，我们对旋转RT曲面进行了分类。此外，我们证明紧致连通RT曲面是一个球面。

1 预备知识

本节固定本文所用的记号： Σ 表示 $\mathbb{R}^3$上的曲面， N 表示其法向高斯映射， U 表示 $\mathbb{R}^2$ 的一个开子集。

设 $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ 是曲面 Σ 的一个参数化，且 $N : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 是法式高斯映射。以 $\{X_{,1}, X_{,2}, N\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的基，其中 $X_{,i}(q) = \frac{\partial X}{\partial u_i}(q)$， $1 \le i,\ j \le 2$ 进一步地，我们可将向量 $X_{,ij}, 1 \le i,\ j \le 2$ 写为

$$X_{,ij} = \sum_{k=1}^{2} \widetilde{\Gamma}_{ij}^{k} X_{,k} + b_{ij} N$$

$\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}$ 系数称为克里斯托费尔符号。

定义 1.1。 设 X 是 Σ 的一个局部参数化，其高斯映射为 N，矩阵为 $W = (W_{ij})$，满足

$$N_{,i} = \sum_{j=1}^{2} W_{ij} X_j, \quad 1 \le i \le 2$$

称为 Σ 的魏因加滕矩阵。

引理 1.2。 设 N 是由 (4) 给出的法式高斯映射，且度量 $L_{ij} = \langle N_{,i}, N_{,j} \rangle$ 为欧氏共形。度量L_{ij} 的克里斯托费尔符号由下式给出

$$\Gamma_{ij}^{k} = 0, \quad \Gamma_{ii}^{i} = \frac{L_{ii,i}}{2L_{ii}}, \quad \Gamma_{ij}^{i} = \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii}}, \quad \Gamma_{ii}^{i} = \frac{-L_{ii,j}}{2L_{jj}}$$

对于 $i,\ j$ e k 不同。

下一个结果由 Roitman 和 Ferreira [3] 得出。

定理 1.3. 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个可定向超曲面，且 $N : \Sigma \to \mathbb{S}^n$ 是法向高斯映射，在每一点的高斯-克罗内克曲率均非零。设 $U \subset \Sigma$是 p_0的一个邻域，使得 $N : U \to N(U) = V \subset \mathbb{S}^n$可逆，且 $h(q) = \langle q, N^{-1}(q) \rangle$， $q \in V$，则

$$X(q) = \nabla_L h(q) + h(q) N(q)$$

注。 利用上述方程，我们得到函数

$$\Lambda(q) = \langle X(q), X(q) \rangle = |\nabla_L h(q)|^2 + h(q)^2 \tag{1}$$

$$\Psi(q) = \langle X(q), N(q) \rangle = h(q) \tag{2}$$

分别称为二次距离函数和支撑函数。

注。 设内积定义为 $\langle , \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \langle f, g \rangle = f_1 g_1 + f_2 g_2$，其中 $f = f_1 + i f_2$ 和 $g = g_1 + i g_2$ 是全纯函数。如果

f, g, h: $U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是全纯函数，则

$$\begin{aligned}
&\langle f, g\rangle_{,1} = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle \\
&\langle f, g\rangle_{,2} = \langle if', g\rangle + \langle f, ig'\rangle \\
&\langle fh, g\rangle = \langle f, \overline{h}g\rangle \\
&f = \langle 1, g\rangle + i\langle i, f\rangle \\
&g_{,1} = g', g_{,2} = ig'
\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\langle f, g\rangle_{,\ 1} = \frac{\partial \langle f_{(z\ \ g\ z\ \rangle\ )0}}{\partial u_1}$

2 RT曲面

受 [1],[6], [2] 和 [3], 的研究启发，我们将开始研究 Ribaucour 型曲面，并称其为 RT曲面。除了给出一些例子外，我们还将为此类曲面提供一种依赖于两个全纯函数的魏尔斯特拉斯表示，并刻画这类曲面为旋转曲面的情形。

定理 2.1。 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是一个具有非零高斯-克罗内克曲率的可定向曲面。那么存在一个可微函数 h: $U \to \mathbb{R}$，以及 g 一个全纯函数，使得法向高斯映射为

$$N = \frac{(2g(u), 1 - |g(u)|^2)}{1 + |g(u)|^2} \tag{4}$$

III 第一基本形式的系数为

$$L_{ij} = \frac{4|g'|^2\delta_{ij}}{(1 + |g|^2)^2} \tag{5}$$

Σ 局部参数化为

$$X(u) = \sum_{j=1}^{2} \frac{h(u)_{,j}}{L_{jj}} N(u)_{,j} + h(u)N(u) \tag{6}$$

在此情况下， $h(u) = \langle X(u)\ N(u)\rangle$ 是支撑函数。此外，魏因加滕矩阵由下式给出: $W = V^{-1}$ 其中

$$V_{ij} = \frac{1}{L_{ij}} \left(h_{,ij} - \sum_{k}^{n} h_{,k}\Gamma_{ij}^{k} + hL_{ij}\delta_{ij} \right) \tag{7}$$

其中， Γ_{ij}^{k} 是 N 的克里斯托费尔符号，而 X的基本形式 I 和 II在局部坐标下表示为

$$I = \langle X_{,i}, X_{,j}\rangle = \sum_{k=1}^{n} V_{ik}V_{jk}L_{kk}, \quad II = \langle X_{,i}, N_{,j}\rangle = V_{ij}L_{jj}.$$

证明。 在定理 (1.3) 中，我们可以选择由 (4) 给出的球面的局部参数化，其度量由 (5) 给出，并且 Σ 由 (6) 进行局部参数化，计算其导数可得

$$X_{,i} = \left(\frac{h_{,ii}}{L_{ii}} - \sum_{j=1}^{n} \frac{h_{,j}}{L_{ii}}\Gamma_{ii}^{j} + h\right) N_{,i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{h_{,ij}}{L_{jj}} - \frac{h_{,j}}{L_{jj}}\Gamma_{ij}^{j} - \frac{h_{,i}}{L_{jj}}\Gamma_{ij}^{i}\right) N_{,j}$$

考虑由（7）给出的矩阵 $V = (V_{ij}) \quad 1 \leq i, \ j \leq n$，因此

$$X_{,i} = \sum_{j=1}^{n} V_{ij} N_{,j} \tag{8}$$

为了求出魏因加滕矩阵，我们必须 $N_{,\ i} = \sum_{j=1}^{n} V_{ij}^{-1} X_{,\ j}$；根据定义 1.1，我们必须 $W = V^{-1}$。为获得基本形式的系数，我们使用（8），因此

$$I = \langle X_{,i}, X_{,j}\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} V_{ik} N_{,k}, \sum_{m=1}^{n} V_{jm} N_{,m}\rangle = \sum_{k,m=1}^{n} V_{ik} V_{jm} \langle N_{,k} N_{,m}\rangle = \sum_{k=1}^{n} V_{ik} V_{jk} L_{kk}$$

$$II = \langle X_{,i}, N_{,j}\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} V_{ik} N_{,k}, N_{,j}\rangle = \sum_{k=1}^{n} V_{ik} \langle N_{,k}, N_{,j}\rangle = V_{ij} L_{jj}$$

定义 2.2. 若一个 Σ 曲面满足：对于每个 $p \in \Sigma$，中心球面 $p + ({}^{H}{}_{(p)\,K(p)} + {}_{\Psi(p)\,2})N(p)$ 和半径 ${}^{H}{}_{(p)\,K(p)} + {}_{\Psi(p)\ 2}$ 经过原点，则称其为 Ribaucour型曲面（RT曲面）；在这种情况下， Σ 满足以下广义Weingarten关系

$$2\Psi H + (\Lambda + \Psi^2) K = 0$$

对所有 $p \in \Sigma$。

引理 2.3. 设 Σ 是一个黎曼曲面，且 $X : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ 是一个浸入，其高斯-克罗内克曲率非零。在定理 2.1 的条件下， $X(\Sigma)$ 是一个 SS曲面，当且仅当

$$h\triangle h - |\nabla h|^2 = 0 \tag{9}$$

证明。 根据定理 (2.1)，我们有 $W = V^{-1}$，设 σ_i 为 V 的特征值，λ_i 为 W 的特征值，则 $\sigma_i = {}^{1}_{\lambda_i}$。利用这一事实以及引理 1.2 中的表达式 (5)、(6) 和 (7)，可得

$$\frac{\triangle h}{L_{11}} + 2h = V_{11} + V_{22} = \frac{-2H}{K}$$

利用方程 (1) 和 (2)，得到

$$\left(\frac{h\triangle h - |\nabla h|^2}{L_{11}}\right) K + 2H\Psi + (\Lambda + \Psi^2) K = 0, \quad \forall p \in \Sigma$$

由此即可得出结论。 □

对于高斯曲率为 $K \neq 0$ 的 RT曲面，我们将通过全纯函数对给出完整刻画。这种表示将使我们能够对所有 RT旋转曲面进行分类。在此之前，我们需要以下引理。

引理 2.4. 考虑全纯函数 $f, g: U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，其中 $g' \neq 0$。取局部参数 $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$ 和 $h = e^{\langle 1, f\rangle}$。因此，矩阵 V 中由 (7) 给出的元素用 f 和 g 表示为

$$\begin{aligned} V_{11} &= \frac{T^2 h}{4|g'|^2}[\langle 1, f'\rangle^2 - \langle 1, \xi\rangle] + h \\ V_{12} = V_{21} &= \frac{T^2 h}{4|g'|^2}\langle i, \xi - \frac{f'^2}{2}\rangle \\ V_{22} &= \frac{T^2 h}{4|g'|^2}[\langle 1, if'\rangle^2 + \langle 1, \xi\rangle] + h \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $T = 1 + |g|^2$和 $\xi = f'\left(\frac{g''}{g'} - \frac{2}{T}\overline{g'}\,\overline{g}\right)_{-} - f''$。此外，

$$detV = \frac{h^2 T^4}{16|g'|^4}\langle \xi, f'^2 - \xi\rangle + \frac{h^2 T^2 |f'|^2}{4|g'|^2} + h^2 \tag{11}$$

证明。 由 $h = e^{\langle 1, f\rangle}$，求导并利用 (3)，得到

$$\begin{aligned} &h_{,1} = e^{\langle 1,f\rangle}\langle 1, f'\rangle, \quad h_{,11} = e^{\langle 1,f\rangle}(\langle 1, f'\rangle^2 + \langle 1, f''\rangle), \quad h_{,2} = e^{\langle 1,f\rangle}\langle 1, if'\rangle, \\ &h_{,22} = e^{\langle 1,f\rangle}(\langle 1, if'\rangle^2 - \langle 1, f''\rangle), \qquad h_{,12} = e^{\langle 1,f\rangle}(\langle 1, if'\rangle\langle 1, f'\rangle + \langle 1, if''\rangle). \end{aligned} \tag{12}$$

由于 $T = 1 + |g|^2$，由引理 1.2 和 (5) 可得

$$\Gamma^1_{11} = \frac{T\langle g', g''\rangle - 2|g'|^2\langle g, g'\rangle}{T|g'|^2} = \Gamma^2_{12}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{T\langle g', ig''\rangle - 2|g'|^2\langle g, ig'\rangle}{T|g'|^2} = \Gamma^1_{21}$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{2|g'|^2\langle g, ig'\rangle - T\langle g', ig''\rangle}{T|g'|^2}, \quad \Gamma^1_{22} = \frac{2|g'|^2\langle g, g'\rangle - T\langle g', g''\rangle}{T|g'|^2}.$$

利用上述表达式、(7) 和 (12)，得到 (10)，因此有

$$\begin{aligned} detV = &\left(\frac{hT^2}{4|g'|^2}[\langle 1, f'\rangle^2 - \langle 1, \xi\rangle] + h\right)\left(\frac{hT^2}{4|g'|^2}[\langle 1, if'\rangle^2 + \langle 1, \xi\rangle] + h\right) \\ &- \left(\frac{hT^2}{4|g'|^2}[\langle 1, if'\rangle\langle 1, f'\rangle + \langle i, \xi\rangle]\right)^2 \end{aligned}$$

因此我们得到（11）。

定理 2.5。 设 Σ 为一个黎曼曲面， $X: \Sigma \to \mathbb{R}^3$ 是一个浸入，且其高斯-克罗内克曲率非零。
那么，当且仅当存在全纯函数 f, g 时， $X(\Sigma)$ 是一个 SS曲面:

$U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，其中 U 是一个单连通开集，且 $g' \neq 0$，使得 $X(\Sigma)$ 局部参数化为

$$X = \frac{e^{\langle 1,f\rangle}}{2|g'|^2}(Tg'\bar{f}' - 2g\langle g', gf'\rangle, -2\langle g', gf'\rangle) + e^{\langle 1,f\rangle}\frac{(2g, 2-T)}{T} \tag{13}$$

采用由（4）给出的高斯法向量 N，正则性条件为

$$T^4\langle \xi, f'^2 - \xi\rangle + 4T^2|f'|^2|g'|^2 + 16|g'|^4 \neq 0$$

X 的第一基本形式和第二基本形式的系数表达式如下

$$\begin{aligned}
E &= h^2\left(\frac{T^2}{4|g'|^2}\left(A_1^2 + \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2}\rangle^2\right) + 2A_1 + \frac{4|g'|^2}{T^2}\right)\\
F &= h^2\left(\frac{T^2|f'|^2}{4|g'|^2} + 2\right)\langle i, \xi - \frac{f'^2}{2}\rangle\\
G &= h^2\left(\frac{T^2}{4|g'|^2}\left(A_2^2 + \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2}\rangle^2\right) + 2A_2 + \frac{4|g'|^2}{T^2}\right)\\
e &= hA_1 + \frac{4h|g'|^2}{T^2}, \quad f = h\langle i, \xi - \frac{f'^2}{2}\rangle, \quad g = hA_2 + \frac{4h|g'|^2}{T^2}
\end{aligned}$$

其中 $\xi = f'\left(\frac{g''}{g'} - \frac{2}{T}g'g\right) - f''$, $A_1 = \langle 1, f'\rangle^2 - \langle 1, \xi\rangle$ 属于 $A_2 = \langle 1, if'\rangle^2 - \langle 1, \xi\rangle$

证明。利用（9），不失一般性，可设 $h = e^{\mu}$ 其中μ： $\Sigma \to \mathbb{R}$ 是一个可微函数，在此情况下，

$$h\triangle h - |\nabla h|^2 = e^{2\mu}\triangle\mu$$

现在， h 满足（9）当且仅当 $h = e^{\langle 1,f\rangle}$，其中 f 是一个全纯函数。由于 N 由（4）给出，求导可得

$$N_{,1} = \frac{2}{T^2}(Tg' - 2g\langle g', g\rangle, -2\langle g', g\rangle)$$

$$N_{,2} = \frac{2}{T^2}(Tig' - 2g\langle g, ig'\rangle, -2\langle g, ig'\rangle)$$

在 (6) 中使用这些表达式和 (5)，得到 (13)。因此，利用 (3)、(8) 和 (10)，我们得到定理陈述中给出的第一基本形式和第二基本形式的系数。

例 2.6. 以原点为球心、半径为 $r > 0$ 的球面是 RT曲面；事实上，利用定理 2.5 并取 $h(u) = r$，由方程 (6) 和 (9) 即可得出结论。

定理 2.7。设 Σ 是紧致连通的 SS曲面，则 Σ 是一个以原点为球心的球面。

证明。 设 Σ 是紧致的，则存在一个半径为 $r > 0$、以原点为球心的 E 球面，使得 Σ 包含在以原点为球心、半径为 r 的闭球内， $B[0, r]$ 以及一点 $p \in E \cap \Sigma$，使得 $T_pE = T_p\Sigma$。令$h:\ \Sigma \to \mathbb{R}$，其中 h 是 Σ的支撑函数。我们知道，对于每个$q \in \Sigma$， $h(q) \leq |q|$，于是

$$h(q) \leq |q| \leq r \quad \text{for all} \quad q \in \Sigma$$

Σ 是一个RT曲面，根据定理2.5和(6)，存在一个在 p 附近的参数化，使得支撑函数 $h:\ U \subset \mathbb{R}^2 \to \Sigma$，由 $h(u) = e^{\mu(u)}u \in U$ 给出，其中 μ 为调和函数

$$e^{\mu} \leq r \Rightarrow \mu \leq \ln(r)$$

由于 μ 是调和函数，根据最大值原理， $\mu(u) = \ln(r)$ 在 U中，随后 $h(u) = r$在 U中；结合 Σ的紧致性和连通性这一论证，我们得出$h(q) = r$ 对所有 $q \in \Sigma$均成立，因此 Σ 是一个以原点为中心的球面。

对于某些全纯函数 f 和 g，我们给出（13）的一些例子。

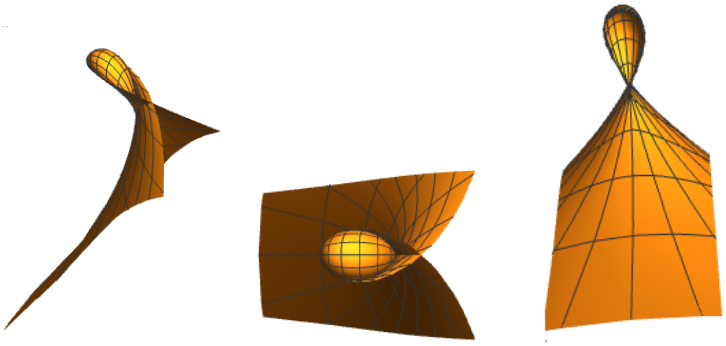

图1: $f(z) = g(z) = z = u_1 + iu_2$

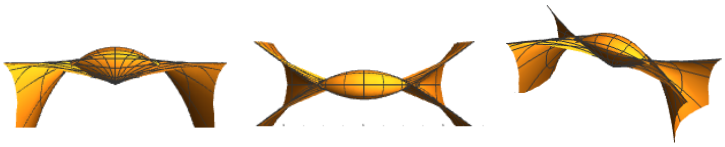

图2: $f(z) = z^2, \quad g(z) = z$

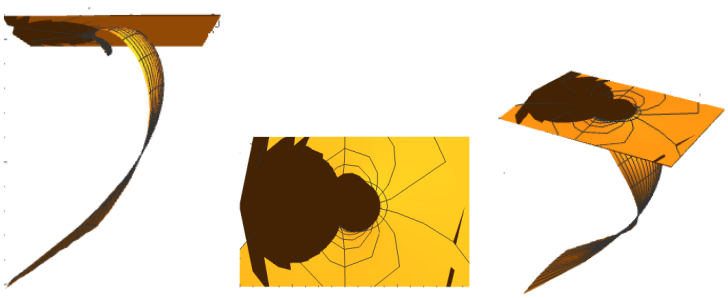

图3： $f(z) = z$， $g(z) = z^2$

下面的定理刻画了旋转RT曲面。

定理 2.8。 设 Σ 是一个连通的RT曲面。由于 Σ 是旋转曲面当且仅当存在常数 a， $b \in \mathbb{R}$，使得 Σ 可局部参数化为

$$X_{a,b}(u_1, u_2) = \frac{e^{au_1+b}}{1+e^{2u_1}} \left(M(u_1)\cos(u_2), M(u_1)\sin(u_2), N(u_1)\right) \tag{14}$$

其中

$$M(u_1) = \frac{a(e^{-u_1} - e^{3u_1}) + 4e^{u_1}}{2}, \quad N(u_1) = 1 - e^{2u_1} - a(1+e^{2u_1}) \tag{15}$$

证明。 设 Σ 可由(13)局部参数化，其高斯映射为(4)，且 f， g 是全纯函数。由于 Σ 是旋转曲面当且仅当 $g(w) = w$ 且 $h(w) = J(|w|^2)$，其中 $w \in \mathbb{C}$是某个可微函数。通过变换参数 $w = e^z$， $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$，得到 $g(z) = e^z$且 $h(z) = J(e^{2u_1})$。因此， $h,_2 = 0$，注意到 $h = e^{\langle 1,f\rangle}$ 和$h,_2 = e^{\langle 1,f\rangle}\langle 1, if'\rangle = 0$，则 $\langle 1, if'\rangle = 0$，所以

$$f(z) = az + z_0, \quad g(z) = e^z, \quad h(z) = e^{au_1+b}, \quad z = u_1 + iu_2, z_0 = b + ic \in \mathbb{C}$$

将这些表达式代入(13)，可得

$$X = e^{au_1+b}\left(\left(\frac{a(e^{-u_1} - e^{u_1})}{2} + \frac{2e^{u_1}}{1+e^{2u_1}}\right)(\cos(u_2) + i\sin(u_2)), \frac{1-e^{2u_1}}{1+e^{2u_1}} - a\right)$$

因此， Σ 可由(14)和(15)在局部参数化。

利用定理2.5，我们有

$$EG - F^2 = \frac{(ae^{2u_1}(e^{2u_1}-4) - a)^2(ae^{4u_1}(a+1) + 2e^{2u_1}(a^2+2) + a(a-1))^2}{16(e^{2u_1}+1)^4 e^{-4u_1(a-1)-4b}}$$

因此，当且仅当 $a = 0$ 时， X_{ab} 是正则的。若 $a \neq 0$，则上面的表达式在

$$u_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(\frac{2+\sqrt{4+a^2}}{a}) & se \quad a > 0 \\ \frac{1}{2}\ln(\frac{2-\sqrt{4+a^2}}{a}) & se \quad a < 0 \\ \frac{1}{2}\ln(\frac{-(2+a^2)+\sqrt{4+5a^2}}{a^2+a}) & se \quad 0 < a < 1 \\ \frac{1}{2}\ln(\frac{-(2+a^2)-\sqrt{4+5a^2}}{a^2+a}) & se \quad -1 < a < 0 \end{cases}$$

图 (4)、(5) 和 (6) 展示了 RT旋转曲面的示例。我们只考虑 $b = 0$ 的情况。

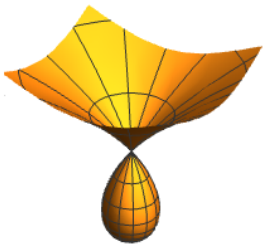

图 4: $a = -1$

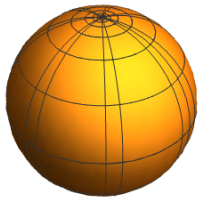

图 5: $a = 0$

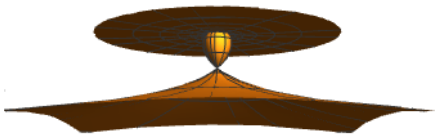

图 6: $a = \frac{1}{2}$ -

参考文献´

[1] A.V. Corro, D.G. Dias, 欧几里得三维空间中一类广义*Weingarten*曲面, Adv.Geom. 2016;16(1)45–55

[2] A. Martinez, P. Roitman, 与埃利·嘉当提出的问题相关的一类曲面´, Ann.Mat. Pura Appl,195,513–527

[3] W. Ferreira, P. Roitman, 二维空间形式中的保面积变换与经典微分几何, 《以色列数学杂志》, 190, 325–348

[4] A.V. Corro, R. Pina, M. Souza, *Weingarten*曲面的类别$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, 《休斯敦数学杂志》, 第 46 卷, 第 651-664 页, 2020 年。

[5] P. Appell, 曲面, 使得原点在主曲率中心的中点处投影到每一条法线上。, 《Amer. J. Math.》10(1888),175– 186. MR1505475 JFM 19.0825.01

[6] A.V. Corro, C.M. Riveros, D.G. Dias, 一类广义特殊魏因加滕曲面, 《国际数学杂志》Vol. 30, No.14 (2019) 1950075

[7] A.V. Corro, K. Tenenblat, 重新探讨*Ribaucour*变换。, 《Communications in Analysis and Geometry》12(2004), 1055–1082. MR2103311 (2005j:53063) Zbl 1090.53055[8] G. Tzitzéica, 论一类新的曲面。, 《Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo》25(1908),180–187. JFM 39.0685.05[9] A.V. Corro, C.M. Riveros, K. Fernandes调和型*Ribaucour*曲面《国际数学杂志》Vol. 33, No. 1 (2022) 2250006