arXiv:2303.03251v1 [math.DG] 6 Mar 2023

# ˇ 微分学切赫上同调

ALIREZA AHMADI

摘要。受这样一类问题的启发：数据定义在覆盖生成族上，我们为微分空间提出了一种新的上同调理论，称为微分学切赫上同调；它是微分空间上层的截面函子的一个正合 ∂-函子。作为应用，在某种设置下，我们建立了：i）微分空间的广义梅耶–维托里斯序列；ii）德拉姆定理的一个版本，从而将微分学切赫上同调与德拉姆上同调联系起来。此外，我们将微分学纤维丛、主丛和向量丛的同构类刻画为次数 1 的（非阿贝尔）微分学切赫上同调。

目录

1. 引言2. 微分空间背景 2.1. 基本定义 2.2. 代数微分拓扑对象 2.3. 微分学纤维丛 3. 微分空间上的层 3.1. 基于预层的上同调理论框架 3.2. 德拉姆上同调 4. 微分学切赫上同调 5. 德拉姆定理 5.1. 广义梅耶 – 维托里斯序列 5.2. 抽象德拉姆定理 5.3. 微分学 ´étale 流形的情形 5.4. 微分学切赫–德拉姆双复形 6. 带规范群的微分纤维丛 6.1. 与次数 1 的（非阿贝尔）微分学切赫上同调的关系 6.2. 一些应用 6.3. 定理的证明6.9附录 A. 微分空间上切赫上同调的其他版本 A.1. D-开子集 site 上的切赫上同调 A.2. 基本截面与 Krepski-Watts-Wolbert 的切赫上同调 参考文献

1
3
3
4
5
6
7
8
9
13
13
16
17
18
19
20
22
23
27
27
28
29

## 1. 引言

切赫上同调通过扩展层的截面函子，提供了一种从局部数据获取全局信息的方法。这种抽象方法的一个优雅例子，出现在流形的微分几何中：对于给定的闭微分形式 ω，研究微分方程 dα = ω。由于流形局部可缩，我们可以在局部求解该方程，从而获得局部数据。

2020 数学主题分类。主要分类：57P99；次要分类：55N05。关键词与短语：微分空间、切赫上同调、de Rham 定理、广义梅耶–维托里斯序列、纤维丛。

相比之下，德拉姆上同调是处理这一问题的一种自然方法，它在流形中扮演不变量的角色，并通过德拉姆定理与切赫上同调相关联。

本文旨在微分学中研究此类问题——微分学为在映射空间、无限维空间以及诸如轨形、无理环面等奇异空间上开展微分几何提供了一个便利的框架，超越了流形的经典设定[4]。一个微分空间由一个集合$X$及其上的微分学结构给出，该结构的元素称为图。事实上，微分学通过覆盖、光滑相容性和局部性公理来确定哪些参数化（即从欧几里得空间的开子集出发的映射）是图；这些公理使人联想到通常光滑映射的性质。该理论由 J.-M. Souriau 于[16] 20 世纪 80 年代引入，主要参考文献是[11] P. Iglesias-Zemmour 所著的教材。

微分形式和德拉姆上同调已很好地推广到微分空间。然而，对于比流形更复杂的微分空间 X，人们可能无法在局部求解微分方程 $d\alpha = \omega$ 。相反，沿着全局图 $\mathbb{R}^n \to X$ 可以总是求解该方程的拉回，其中 n 遍历非负整数；这些全局图构成 X 的一个覆盖生成族。当然，也可以取任何其他其元素定义在可缩区域上的覆盖生成族[1]。换言之，解（数据）是在覆盖生成族上获得的，它们可能并不相容，因而无法构造出一个全局解。

通过以下内容探索给定数据，切赫工具来探索给定数据，我们引入一种修订版的 ˇ 微分空间的切赫上同调，称为以（预）层为系数的微分空间切赫上同调。微分空间切赫上同调通过覆盖生成族来表述，以便在零次情形下检测这些覆盖生成族上的相容数据（命题4.6），并由此得到微分空间上层的截面函子的一个正合∂函子（命题4.7）。它也与 [2]中定义的拟切赫同调对偶。

为切赫上微分空间de Rham 上同调之间的关系，我们考虑一种设置（设置5.3），在此设置下可得到微分空间的广义梅耶–维托里斯序列（命题5.6）。由此得到微分学中的德拉姆定理的一个版本：

定理 I。 设 X 是一个微分空间。在设置 *5.3* 的情形下，如果对于每个 $\mathscr{C}$X 的覆盖生成族，都存在一个从属于 $\mathscr{C}$ 的单位分解，那么 $\check{H}^n(X;\mathbb{R}) \cong H^n_{dR}(X)$，其中 $\mathbb{R}$ 表示 X 上的局部常值层。

特别地，微分空间 ´étale 流形满足这一设置；对于通常的流形，这一版本的 de Rham 定理成立。

ˇ 微分学切赫上同调的另一个方面涉及微分学纤维丛的分类。我们首先通过平凡化和过渡映射的语言考察带规范群的微分纤维丛，其中包括通常的微分空间纤维丛、主丛和向量丛作为特殊情形。微分学纤维丛的过渡映射满足微分学切赫 1-余循环条件。与经典情形类似，这将第一微分学切赫上同调类与微分学纤维丛的同构类之间建立一一对应：

定理 II。设 X 和 T 为微分空间，且令 $\rho : G \to \mathrm{Diff}(T)$ 表示微分空间群 G 在 T 上的一个光滑忠实作用（G 不必是阿贝尔群）。存在一个双射对应

$$\Theta : \check{H}^1(X,G) \to \mathrm{Bund}_T(X,G)$$

，它建立在 X 上取值于 G 的光滑函数层为系数的第一微分切赫上同调类 $\check{H}^1$(X,G)，与 X 上具有规范群 G 和典型纤维 T 的微分学纤维丛的同构类集合之间。

ˇ 其他相关研究。文献中还介绍了其他类型的微分空间切赫上同调。在 [12], 中，P. Iglesias-Zemmour 将一种切赫上同调定义为某个规范幺半群的 Hochschild 上同调；该幺半群与特定的圆图覆盖生成族相关。

[1]可与经典流形情形中微分方程在一个可缩开覆盖上的限制相比较。

图的系数取自 $\mathbb{R}$。在此背景下，构造并讨论了一个切赫–de Rham 双复形。

ˇ在 [8], 三种版本的切赫上同调分别定义在 plot site、D-开子集 site，以及某个预层的截面所构成的相关上链复形的上同调中。附录A中，我们证明后两者相同。

此外，在[13] Krepski 等人以覆盖生成族的星云为基础，给出了另一种切赫上同调，它能够检测星云上次数 0 的基本截面（见附录A）。同时还证明，对于取值于阿贝尔微分学群 $G$ 的光滑函数层，第一阶切赫上同调类能够对微分空间主$G$-丛进行分类。

组织结构。本文组织如下。第2 节概述微分空间和微分学纤维丛。第3节回顾微分空间上的预层和层。特别地，我们提供一个基于预层的框架，用于展示上同调理论。第4节引入微分学切赫上同调，并讨论其行为和性质。第5节建立微分空间的广义 Mayer-Vietoris序列，并给出一个版本的 de Rham 定理。特别地，我们证明该版本的德拉姆定理对通常流形成立。此外，我们还介绍微分学切赫–德拉姆双复形及其谱序列。第6节定义带规范群的微分纤维丛。我们将微分学纤维丛、主丛和向量丛的同构类刻画为第 1 阶（非阿贝尔）微分学切赫上同调。附录ˇA节对 [8], 中提出的切赫上同调进行详细讨论，并附上关于 Krepski 等人提出的切赫上同调的注记。

## 2. 微分空间背景

我们简要回顾 [11] 中关于微分空间所需的定义和结果。

### 2.1. 基本定义。

定义 2.1. 对于非负整数 n，n-定义域是欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开子集，并赋予标准拓扑。从定义域到集合 X 的任意映射称为 X 中的一个参数化。取值为 $x \in X$ 的唯一 0-参数化记作粗体字母 x。若 X 中的参数化 P 满足 $0 \in \mathrm{dom}(P)$ 且 $P(0) = x$，则称 P 为以 x 为中心的参数化。若参数化 P 的定义域（记作 dom(P)）是一个 n-定义域，则称 P 为 n-参数化。若一族 $\{P_i : U_i \to X\}_{i\in J}$ 中的 n-参数化满足 $P_i|_{U_i\cap U_j} = P_j|_{U_i\cap U_j}$，对所有 $i, j \in J$ 均成立，则称该族相容。对于这样的一族，由 $P : \bigcup_{i\in J} U_i \to X$ 定义的参数化 $P(r) = P_i(r)$，其中 $r \in U_i$，称为该族的上确界。按照约定，空族的上确界是 X 上的空参数化 $\varnothing \to$。

定义 2.2. 集合 X 上的微分学 $\mathscr{D}$ 是由取值于 X 的参数化组成的集合，并满足以下公理：

> D1. $\mathscr{D}$ 中各元素像的并集覆盖 X。D2. 对于 $\mathscr{D}$中的每个元素 $P : U \to X$，以及定义域之间的每个光滑映射 $F : V \to U$，参数化 $P \circ F$ 属于 $\mathscr{D}$。D3. $\mathscr{D}$中任意相容族的上确界也属于 $\mathscr{D}$。

微分空间 $(X\ \mathscr{D})$ 是配备了微分学 $\mathscr{D}$的底层集合 X，其元素称为 X 中的图。当微分学已明确时，微分空间仅用其底层集合表示。

定义 2.3. 集合 X 上的预微分学是由取值于 X 的参数化组成的集合 $\mathscr{P}$，满足 D1 和 D2。X 的参数化覆盖是由取值于 X 的参数化组成的集合 $\mathscr{C}$，满足 D1。

定义 2.4. 设 X 为一个集合，且 $\mathscr{C}$是 X 的一个参数化覆盖。由 $\mathscr{C}$生成的预微分学，记作 $\lfloor\mathscr{C}\rfloor$，由参数化 $P \circ F$ 组成，其中 P 属于 $\mathscr{C}$，而 F 是定义域之间的光滑映射。由 $\mathscr{C}$生成的微分学，记作 $\langle\mathscr{C}\rangle$，是由参数化 P 构成的集合，其中 P 是 X 中一个相容族 $\{P_i\}_{i\in J}$的上确界，且 $P_i \in \lfloor\mathscr{C}\rfloor$。对于微分空间 $(X\ \mathscr{D})$，覆盖生成族是一个参数化

覆盖 $\mathscr{C}$，它生成该空间的微分学，即 $\langle\mathscr{C}\rangle = \mathscr{D}$。用 CGF(X) 表示空间 X 的所有覆盖生成族的集合。

例 2.5. 对任意微分空间 X，以下各集合都是覆盖生成族：

▶ 该空间的微分学，▶ 定义域为开球的图的集合，▶ 全局图的集合 $\mathbb{R}^n \to X$（n 遍历非负整数），▶ 中心图的集合，即满足 $0 \in U$ 的图 $U \to X$。

定义 2.6. 设 X 和 Y 是两个微分空间。映射 $f : X \to Y$ 是光滑的，若对 X 中的每个图 P，复合 $f \circ P$ 都是空间 Y 中的图。记 Diff 为微分空间及光滑映射构成的范畴。范畴 Diff 中的同构称为微分同胚。

微分空间中的图恰好就是该空间中的光滑参数化。

定义 2.7. 微分空间之间的映射 $f : X \to Y$ 称为下沉映射，若集合 $\{f \circ P \mid P \text{ 是 X 中的图}\}$ 构成 Y 的覆盖生成族。显然，每个下沉映射都是满射光滑映射。

命题 2.8. *(*[11, §1.51])。设 $\pi : X' \to X$ 是一个下沉映射。映射 $f : X \to Y$ 光滑，当且仅当 $f \circ \pi$ 光滑。此外，映射 f 是下沉映射，当且仅当 $f \circ \pi$ 是下沉映射。

定义 2.9. 设 X 是一个微分空间。如果 R 是 X 上的等价关系，且 $q : X \to X/R$ 是商映射，那么由族 $\{q \circ P \mid P \text{ 是 X}\}$ 中的一个图生成的微分学称为 $X/R$ 上的商微分学，而 $X/R$ 称为商空间。在这种情况下，商映射 $q : X \to X/R$ 是一个下沉映射。

定义 2.10. 设 X 是一个微分空间。X 的微分子空间是一个子集 $X' \subseteq X$，配备子空间微分结构；该结构由 X 中所有取值于 $X'$的图组成。

定义 2.11。$X = \prod_{i\in J} X_i$ 上的乘积微分学由满足以下条件的参数化 P 给出：对于所有 $i \in J$，$\pi_i \circ P$ 都是 $X_i$ 中的图，其中 $\pi_i : X \to X_i$ 是自然投影。若 $J = \{1, \ldots, n\}$，则乘积 $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ 中的图是 n 元组 (P1,...,P$_n$)，其中每个 $P_i$ 都是 $X_i$ 中的图。

定义 2.12。设 $\{X_i\}_{i\in J}$ 是一族微分空间。直和 $X = \bigsqcup_{i\in J} X_i$ 上的和微分拓扑由以下性质给出：参数化 $P : U \to X$ 是一个图，当且仅当存在 U 的一个划分 $\{_i\}_{i\in J}$，使得 $P_i = P|_{U_i}$ 是 $X_i$ 中的图。

定义 2.13。设 X 是一个微分空间，且 $\mathscr{C}$ 是 X 的一个参数化覆盖。和空间 Nebula($\mathscr{C}$) $= \bigsqcup_{P\in\mathscr{C}}$ dom(P) 称为该参数化覆盖 $\mathscr{C}$ 的星云。

定义 2.14. 每个微分空间 X 都具有一种自然拓扑，称为 D-拓扑。在该拓扑下，若 X 的某个子集在任意图下的原像都是开集，则称该子集为 D-开。我们用 D(X) 表示赋有 D-拓扑的微分空间 X。

任意光滑映射都是 D-连续的，也就是说，相对于 D-拓扑是连续的 [11, §2.9]

2.2. 代数微分拓扑对象。

定义2.15. 微分拓扑幺半群是一个幺半群，配备幺半群微分拓扑，且乘法是光滑的。

定义 2.16. 微分空间群是一个群，配备群微分拓扑，且乘法和求逆都是光滑的。

例 2.17. 设 X 是一个微分空间。令 Diff(X) 表示 X 上的微分同胚群，并配备复合运算。参数化 $P : U \to \text{Diff(X)}$ 是微分同胚群的标准微分拓扑中的一个图，当且仅当 P 和 $r \mapsto P(r)^{-1}$ 是函数微分拓扑中的图（见 [11, I.61]）。由于复合运算的光滑性，Diff(X) 是一个微分空间群。

定义 2.1. 微分空间群 G 在微分空间 X 上的光滑作用是一个光滑同态 G →Diff(X)。

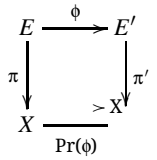
定义 2.18. 微分学向量空间是一个向量空间，赋有一种所谓的向量空间微分结构，使得加法和数乘都是光滑的。

定义 2.19. [6] 设 $X$ 是一个微分空间。一个以 X 为底空间的微分学向量空间是一个光滑映射 $f: V \to X$ 以及每个纤维 $V_x := f^{-1}(x)$ 上实向量空间结构的组合，其中加法映射 $V \times_X V \to V$、数乘映射 $\mathbb{R} \times V \to V$以及零截面 $X \to V$都是光滑的。

定义 2.20. ([3]) 微分学仿射空间是一个三元组 $(E\ \overrightarrow{E}\ +)$，由一个非空微分空间 E、一个微分学向量空间 $\overrightarrow{E}$ 和一个光滑作用 $+: E \times \overrightarrow{E} \to E$ 构成，并且对于任意两个点 a,b ∈E，都存在唯一的 $u \in \overrightarrow{E}$，使得 a + u = b。

2.3. 微分空间纤维丛。

光滑投影。任意满射光滑映射 π: E → X 都称为光滑投影。对于任意 x ∈X， $\pi^{-1}$(x) 记作 $E_x$，它是 π 在 x 上的纤维。光滑投影 π: E → X 与 $\pi': E' \to X'$ 之间的态射，是一对光滑映射 $\phi : E \to E'$ 和 $\mathrm{Pr}(\phi) : X \to X'$，使得下图可交换。

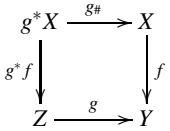



光滑投影及其间的态射构成一个范畴。具有相同底空间 X 的光滑投影 π 和 π′ 若存在它们之间的同构 (ϕ,$\mathrm{id}_X$)，则称为 X-等价。

拉回。微分空间的范畴 Diff 中的拉回存在。这个构造可以具体地如下定义。设 f : X →Y 和 g : Z →Y 是两个光滑映射。f 沿 g 的拉回记作 $g^*f : g^*X \to Z$，是定义在

$$g^*X = \{(z,x) \in Z \times X \mid g(z) = f(x)\}$$

作为 Z ×X 的子空间，将 (z,x) 映射到 z，也就是说，$g^*$ f 是投影 $\mathrm{Pr}_1 : Z \times X \to Z$ 到 $g^*$X 的限制。这产生了一个自然态射 ($g_\#$,g)




从 $g^*$ f 到范畴 Mor(Diff) 中 Diff 的态射 f（参见例如 [14]），其中 $g_\# = \mathrm{Pr}_2|_{g^*X}$，而 $\mathrm{Pr}_2$: Z × X → X 是到第二个因子的投影。显然，对每个 z ∈Z，$g^*$ f 在 z 上的纤维与 f 在 g(z) 上的纤维微分同胚。对称地，$g_\#$ 扮演了 f 对 g 的拉回的角色。

拉回的一个重要性质是传递性。若 h : W →Z 是另一个光滑映射，那么 $g^*$ f 被 h 拉回，即 $h^*g^*$ f，等价于 f 被 g ∘h 拉回，即 Mor(Diff) 中的 $(g \circ h)^*$ f，并且 $(g \circ h)_\# = g_\# \circ h_\#$。

若 E 是一个微分拓扑 G-空间，则 G 在 $f^*E$ 上有一个自然的作用，定义为 $g_{f^*E}(x',\xi) = (x', g_E(\xi))$，其中 $g_E$表示 G 在 E 上的作用。

局部平凡性。

▶ 设 T 为一个微分空间。若光滑投影 π : E →X 关于纤维 T 是平凡的，则 π 与第一因子投影 $\mathrm{Pr}_1 : X \times T \to X$ 是 X-等价的。若存在 X 的一个 D-开覆盖 $\{U_i\}_{i \in J}$，使得对于每个 i ∈J，通过包含映射 $\imath_i : U_i \hookrightarrow X$ 得到的拉回 $\imath_i^*\pi$ 关于 T 是平凡的，则光滑投影 π: E → X 关于纤维 T 是局部平凡的。

▶ 设微分空间群 G 光滑地作用于微分空间 E。若存在一个 G-等变微分同胚 $\phi : E \to X \times G$，使其与 $Pr_1 \circ \phi = \pi$相容，则光滑投影$\pi : E \to X$ 是一个平凡主 G-丛。若存在 X 的一个 D-开覆盖 $\{U_i\}_{i\in J}$，使得对于每个 i，通过包含映射 $\imath_i : U_i \hookrightarrow X$ 得到的拉回 $\imath_i^*\pi$ 是一个平凡主 G-丛，则光滑投影 $\pi: E \to X$ 是一个局部平凡主 G-丛。▶设 V 为一个微分学向量空间。空间 X 上的微分学向量空间 $\pi: E \to X$ 若存在一个微分同胚 $\phi : E \to X \times V$，使其与 $Pr_1 \circ \phi = \pi$相容，并且对于每个 $x \in X$，限制 $\phi|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \to V$ 是微分学向量空间的同构，则称其具有 V 型纤维且是平凡的。空间 X 上的微分学向量空间 $\pi: E \to X$ 若存在 X 的一个 D-开覆盖 $\{U_i\}_{i\in J}$，使得对于每个 i，通过包含映射 $\imath_i : U_i \hookrightarrow X$ 得到的拉回 $\imath_i^*\pi$ 具有 V 型纤维且是平凡的，则称其具有 V 型纤维且是局部平凡的。

定义 2.21. ([11, 第 8 条。9]). 一个微分学纤维丛，其纤维类型为$T$是一个光滑投影$\pi : E \to X$沿着$X$中的图局部平凡，也就是说，$\pi$ 沿着$X$中的每个图拉回后，都是以$T$为纤维的局部平凡丛。

定义 2.22. 微分学纤维丛 $\pi: E \to X$ 与 $\pi' : E' \to X'$ 之间的态射，是一个保纤维光滑映射 $\phi : E \to E'$；也就是说，若 $\pi(\xi_1) = \pi(\xi_2)$，则对于每个 $\xi_1, \xi_2 \in E$，$\pi' \circ \phi(\xi_1) = \pi' \circ \phi(\xi_2)$。

在这种情况下，$\phi$ 诱导出一个底空间之间的光滑映射 $Pr(\phi) : X \to X'$，使得 $(\phi, Pr(\phi))$ 是光滑投影的一个态射。记 Bund 纤维(X,T ) 为 X 上以 T 为典型纤维的微分学纤维丛的同构类集合。

定义 2.23. 设微分空间群 G 在微分空间 E 上光滑作用。微分学主 G-丛是一个光滑投影 $\pi: E \to X$，使得 $\pi$ 沿 X 中的每个图的拉回都是局部平凡的 G-丛。

定义 2.24. 微分学主 G-丛 $\pi: E \to X$ 与 $\pi': E' \to X'$之间的态射是一个 G-等变光滑映射 $\phi : E \to E'$。若存在一个 G-等变微分同胚 $\phi : E \to E'$ 满足 $\pi' \circ \phi = \pi$，则称两个主 G-丛 $\pi : E \to X$ 与 $\pi': E' \to X'$ 同构。

定义 2.25. 设 V 是一个微分学向量空间。纤维类型为 V 的微分学向量丛是 X 上的一个微分学向量空间 $\pi : E \to X$，使得 $\pi$ 沿 X 中的每个图的拉回都是纤维类型为 V 的局部平凡丛。

定义 2.26。微分学向量丛 $\pi: E \to X$ 与 $\pi' : E' \to X'$ 之间的态射是一个保纤维光滑映射 $\phi : E \to E'$，满足 $\phi| : E \to E'$。

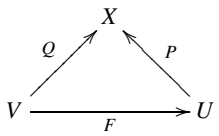
命题 2.27。设 X 是一个微分空间，且 $\mathscr{C} \in CGF(X)$。假设 $\pi: E \to X$ 是一个光滑投影（分别地，来自微分拓扑 G-空间 E 的光滑投影、X 上的微分学向量空间）。那么 $\pi$ 是纤维类型为 T 的微分空间纤维丛（分别地，微分学主 G-丛、纤维类型为 V 的微分学向量丛），当且仅当对属于 $\mathscr{C}$ 的每个图 P，将 $\pi$ 沿 P 拉回所得的丛是纤维类型为 T 的局部平凡丛（分别地，局部平凡主 G-丛、纤维类型为 V 的局部平凡丛）。

证明。证明是直接的。 □

## 3. 微分空间上的层

本节简要概述微分空间上的层以及 [8, 9] 中的相关构造。

图的 site。微分空间 X 中图所构成的范畴记为 Plots(X)，其对象是 X 中的图。对于两个图 $P : U \to X$ 和 $Q : V \to X$ 之间的态射 $Q \xrightarrow{F} P$，该态射对应一个交换三角形



其中 F 是定义域之间的光滑映射。若 $P' : U' \to X$ 是 $P : U \to X$ 的限制，即 $U' \subseteq U$ 且 $P|_{U'} = P$，则有由包含映射 $\imath : U' \hookrightarrow U$ 给出的包含态射 $P' \xrightarrow{\imath} P$。特别地，对于上确界为 P 的相容图族 $\{P_i\}_{i\in J}$，存在包含态射 $P_i \xrightarrow{i} P$。在微分空间 X 的图所构成的范畴上赋予格罗滕迪克预拓扑，其中图 P 的覆盖是上确界为 P 的相容图族。这个 site 称为 X 中的图 site，记为 X Plots。

定义 3.1. 微分空间 X 上的阿贝尔群预层 A 是一个函子 $A : \mathrm{Plots}(X)^{op} \to$阿贝尔群范畴。我们将对应的映射记为 $Q \xrightarrow{F} P$ 上的 $F^* : A(P) \to A(Q)$，并称之为沿 F 的拉回。若 $P' \xrightarrow{\imath} P$ 是一个包含态射，则对每个 $s \in A(P)$，我们将 $s \restriction P'$记为沿 $\imath$ 的拉回。

定义 3.2. 我们将微分空间 X 上预层 A 的极限记为 $\Sigma A(X)$，并称其为 A 的截面。

定义 3.3. 微分空间 X 上的阿贝尔群层 A 是 Plots(X) 上的一个层，也就是说，序列

$$A(P) \longrightarrow \prod_{i\in J} A(P_i) \longrightarrow \prod_{(i,j)\in J\times J} A(P_i \times_P P_j)$$

对于任意图 P 以及上确界为 P 的图的任意相容族 $\{P_i\}_{i\in J}$，都是正合的。

例 3.4. 设 X 是一个微分空间，G 是一个微分空间群。对 X 中的每个图 P，赋予由 G 值光滑函数组成的群 G(P)，其定义域为 dom(P)；对每个态射 $Q \xrightarrow{F} P$，赋予拉回同态 $F^* : G(P) \to G(Q)$，将 f 映为 $f \circ F$。由此在 X 上定义了一个层。

定理 3.5. 对于微分空间 X 上的预层 A，考虑 D-拓扑空间 X 上的预层 $\Sigma A$：将截面集合 $\Sigma A|_U(U)$ 赋给 X 的每个 D-开子空间 U，并配以截面的限制。若 A 是 X 上的层，则 $\Sigma A$ 是 D-拓扑空间 X 上的层。

设 X 是一个微分空间，且 $\mathscr{C} \in \mathrm{CGF}(X)$。记 $\Sigma A(\mathscr{C})$ 为预层 A 在预微分学 $\lfloor \mathscr{C} \rfloor$ 上的限制的极限。根据泛性质，存在一个典范态射 $\alpha_{\mathscr{C}} : \Sigma A(X) \to \Sigma S(\mathscr{C})$。

定义 3.6. 设 X 为一个微分空间。X 上的拟层是一个预层 A，使得对每个 $\mathscr{C} \in \mathrm{CGF}(X)$，典范态射 $\alpha_{\mathscr{C}} : \Sigma A(X) \to \Sigma A(\mathscr{C})$ 都是同构。换言之，对于 X 的每个覆盖生成族 $\mathscr{C}$，以下条件成立：

QS. 对每个 $\sigma \in \Sigma A(\mathscr{C})$，都存在唯一的 $\sigma$ 的延拓 $\overline{\sigma} \in \Sigma A(X)$，即对所有 $P \in \mathscr{C}$，$\overline{\sigma}(P) = \sigma(P)$。

命题 3.7. 微分空间 X 上的预层 A 是拟层，当且仅当对于 X 的任意覆盖生成族 $\mathscr{C}$，序列

$$\Sigma A(X) \longrightarrow \prod_{P\in\mathscr{C}} A(P) \longrightarrow \prod_{P \xleftarrow{F} Q \xrightarrow{F'} P'} A(P \xleftarrow{F} Q \xrightarrow{F'} P')$$

是正合的，其中后一乘积取遍 X 中图的态射 $P \xleftarrow{F} Q \xrightarrow{F'} P'$，满足 $P, P' \in \mathscr{C}$，且 $A(P \xleftarrow{F} Q \xrightarrow{F'} P')$ 等于 A(Q)。

定理3.8. 微分空间上的每个层都是拟层。

3.1. 基于预层的上同调理论框架。 在这里，我们讨论一个基于预层的一般框架，以展示微分空间的一些上同调理论（参见 [8]）。

定义 3.9. 微分空间 X 上阿贝尔群预层的上链复形 $(A^\bullet, d)$ 是由 X 上的预层及态射组成的序列

$$\cdots \longrightarrow A^{k-1} \xrightarrow{d} A^k \xrightarrow{d} A^{k+1} \longrightarrow \cdots$$

使得任意两个相邻态射的复合为零，即 d ∘d = 0。该态射 m $d^k : A^k \to A^{k+1}$ 称为第 k 个上边界算子。

在这种情况下，对于 X 中的所有图 P，我们得到阿贝尔群的上链复形 $(A^\bullet(P), d_P)$。由于上边界算子是自然变换，图之间的态射 $Q \xrightarrow{F} P$ 诱导出一个定义良好的上链复形同态 $(A^\bullet(Q), d_Q) \to (A^\bullet(P), d_P)$。因此，该赋值

$$\begin{aligned} P &\rightsquigarrow H^k(A^\bullet(P)) \\ Q \xrightarrow{F} P &\rightsquigarrow H^k(A^\bullet(P)) \xrightarrow{F^*} H^k(A^\bullet(Q)) \end{aligned}$$

其中 $H^k(A^\bullet(P))$ 是上链复形 $(A^\bullet(P), d_P)$ 的第 k 个上同调群，定义了一个预层，记为 $H^k(A^\bullet)$，称为上链复形 $(A^\bullet, d)$ 的第 k 个上同调预层，

此外，上链复形 $(A^\bullet, d)$ 具有一个相关的截面群上链复形 $(\Sigma A^\bullet, \Sigma d)$

$$\cdots \longrightarrow \Sigma A^{k-1}(X) \xrightarrow{\Sigma d} \Sigma A^k(X) \xrightarrow{\Sigma d} \Sigma A^{k+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

其上链复形 $(A^\bullet, d)$ 的第 k 个相关上同调群记为 $H^k(\Sigma A^\bullet)$。

根据极限的泛性质，存在一个同态

$$\rho_A : H^k(\Sigma A^\bullet) \longrightarrow \Sigma \mathbf{H}^k(A^\bullet)$$

由 $\rho_A([\sigma])(P) = [\sigma(P)]$, 给出，其中 $[\sigma]$ 和 $[\sigma(P)]$ 分别是 $H^k(\Sigma A^\bullet)$ 和 $H^k(A^\bullet)(P)$ 中 σ 和 σ (P) 的类。

定义 3.10。一列

$$\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{\Phi} B \xrightarrow{\Psi} C \longrightarrow \cdots$$

X 上的层 及态射是正合的，当且仅当对于每个图 P 在 X 中，

$$\cdots \longrightarrow A(P) \xrightarrow{\Phi_P} B(P) \xrightarrow{\Psi_P} C(P) \longrightarrow \cdots$$

这是通常层的一个正合序列。这意味着

▶ 对于所有 $a \in A(P)$, $\Psi_P \circ \Phi_P(a) = 0$, ▶ 如果 $\Psi_P(b) = 0$，那么对于每个 $r \in \mathrm{dom}(P)$, 存在一个开邻域 $r \in V \subseteq \mathrm{dom}(P)$，使得 $b \restriction (P|_V) = \Phi_P(a)$，其中某个 $a \in A(P|_V)$。

定义 3.11。微分空间 X 上的层 $\mathscr{Q}$ 的层的分解是 X 上层及态射构成的正合序列

$$0 \longrightarrow \mathscr{Q} \longrightarrow A^0 \xrightarrow{d_0} A^1 \xrightarrow{d_1} A^2 \longrightarrow \cdots.$$

3.2. 德拉姆上同调。设 X 是一个微分空间，对于每个非负整数 k，考虑层 $\Lambda^k$：它将 X 中的每个图 P 对应到阿贝尔群 $\Lambda^k$，即 P 的定义域上的 k阶微分形式；并将每个态射 $Q\ F \longrightarrow P$ 对应到微分形式的拉回同态 $F^*$： $\Lambda^k(P) \to \Lambda^k(Q)$ [9, 例 3.9]。这些层及上边界算子 $d^k$： $\Lambda^k \to \Lambda^{k+1}$，连同图的定义域上微分形式的外微分 $d_P^k$： $\Lambda^k(P) \to \Lambda^{k+1}(P)$，构成一个上链复形 $(\Lambda^\bullet, d)$。

命题 3.12。由截面群构成的相关上链复形（$\Sigma\Lambda^\bullet, \Sigma d$）与微分空间 X 上的微分形式上链复形相同。因此，相关上同调 $H^k(\Sigma\Lambda^\bullet)$ 与空间 X 的德拉姆上同调 $H^k_{dR}(X)$ 重合。

证明。证明是直接的。 □

命题 3.13。该序列

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{R}} \longrightarrow \Lambda^0 \xrightarrow{d} \Lambda^1 \xrightarrow{d} \Lambda^2 \longrightarrow \cdots$$

是常值层 $\underline{\mathbb{R}}$ 的层的分解；它将取值于 $\mathbb{R}$ 的局部常值函数群赋给 X 中每个图 P 的 dom(P)。

证明。事实上，对于 X 中的每个图 P，序列

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{R}}(P) \longrightarrow \Lambda^0(P) \xrightarrow{d_P} \Lambda^1(P) \xrightarrow{d_P} \Lambda^2(P) \longrightarrow \cdots$$

都是 dom(P) 上通常层的正合序列。 □

## 4. 微分学切赫上同调

现在我们引入以（预）层为系数的微分学切赫上同调，并用覆盖生成族来表述。设 A 是微分空间 X 上的阿贝尔群预层，且 $\mathscr{C}$ 是 X 的一个覆盖生成族。

定义 4.1. ([2])。我们归纳地定义 $n$-单纯形：$\mathscr{C}$

(i) $\mathscr{C}$ 上的一个 0-单形只是 $\mathscr{C}$的一个元素 $P_0$。按照约定，0-单形 $P_0$ 的神经图就是图 $P_0$ 本身。(ii) $\mathscr{C}$ 上的一个 1-单形是任意一个图表

$$P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1$$

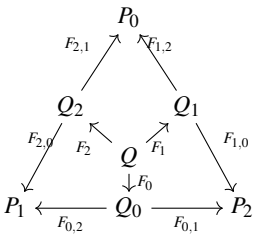
其中有 $P_0$,$P_1 \in \mathscr{C}$。图 Q 称为神经图。注意，Q 是该图表的神经图，而不是 $P_0$,$P_1$的神经图。

(iii) 对于整数 $n \geqslant 2$，$\mathscr{C}$上的一个 n-单形 (P0,...,P$_n$) 由属于 $\mathscr{C}$的 $n+1$ 个图 P0,...,P$_n$ 以及 X 中的一个神经图 Q 构成，并满足：任意 n 个图 P0,..., $\widehat{\ }$P$_i$,...,P$_n$（帽子表示省略 P$_i$）与神经图 Q$_i$构成一个 $(n-1)$-单形。此外，对于每个 $i = 0,...,n$，都存在一个态射 $Q \xrightarrow{F_i}$ Q$_i$，它与态射 Q$_i \xrightarrow{F_{i,j}}$ Q$_{i,j}$交换，对于 $(n-2)$-单形

$$P_0, \ldots, \widehat{P}_i, \ldots, \widehat{P}_j, \ldots, P_n$$

带有神经图 Q$_{i,\ j}$；也就是说，F$_{i,\ j}\circ$F$_i$ = F$_{j,\ i}\circ$F$_j$。

例如，下面的交换图是 $\mathscr{C}$ 上的一个 2-单纯形：




对于 $\mathscr{C}$ 上具有神经图 Q 的 n-单形 (P0,...,P$_n$)，令 A(P0,...,P$_n$) = A(Q)，并设

$$C^n(X, \mathscr{C}, A) = \prod_{n-\text{simplexes}(\mathscr{C})} A(P_0, \ldots, P_n),$$

相对于覆盖生成族 $\mathscr{C}$ 从属于预层 A 的系数上链群。对于非负整数 n，定义算子 $\delta^n$：C$^n$(X $\mathscr{C}$, A) $\longrightarrow$ C$^{n+1}$(X $\mathscr{C}$,A)，如下：

$$\delta^n(c)(P_0, \ldots, P_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \, F_i^* c(P_0, \ldots, \widehat{P}_i, \ldots, P_{n+1}).$$

命题 4.2。 $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$，对于每个非负整数 n。

证明。对于任意 n-上链 c 和 (n+2)-单形 (P0,...,P$_{n+2}$)，我们有

$$\begin{aligned}(\delta^{n+1}\circ\delta^n)(c)(P_0,\dots,P_{n+2}) &= \sum_{i=0}^{n+2}(-1)^i F_i^*\delta^n(c)(P_0,\dots,\widehat{P_i},\dots,P_{n+2})\\ &= \sum_{i=1}^{n+2}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}(F_i^*\circ F_{i,j}^*)c(P_0,\dots,\widehat{P_j},\dots,\widehat{P_i},\dots,P_{n+2})\\ &+ \sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=i+1}^{n+2}(-1)^{i+j-1}(F_i^*\circ F_{i,j}^*)c(P_0,\dots,\widehat{P_i},\dots,\widehat{P_j},\dots,P_{n+2})\\ &= \sum_{i=1}^{n+2}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}(F_i^*\circ F_{i,j}^*)c(P_0,\dots,\widehat{P_j},\dots,\widehat{P_i},\dots,P_{n+2})\\ &- \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{i=j+1}^{n+2}(-1)^{i+j}(F_j^*\circ F_{j,i}^*)c(P_0,\dots,\widehat{P_j},\dots,\widehat{P_i},\dots,P_{n+2}) = 0.\end{aligned}$$

□

因此，我们得到一个上链复形 C•(X $\mathscr{C}$,A),

$$0\longrightarrow C^0(X,\mathscr{C},A)\xrightarrow{\delta^0}C^1(X,\mathscr{C},A)\longrightarrow\cdots\longrightarrow C^n(X,\mathscr{C},A)\xrightarrow{\delta^n}C^{n+1}(X,\mathscr{C},A)\longrightarrow\cdots.$$

记号 4.3. 我们将上链复形 C•(X $\mathscr{C}$,A) 的第 n 个上同调群记为 H$^n$(X $\mathscr{C}$;A)。

定义 4.4. ([2])。设 X 是一个微分空间，且 $\mathscr{C}=\{P_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 X 的一个覆盖生成族。$\mathscr{C}$ 的细化是一个覆盖生成族 $\mathscr{C}'=\{P'_\beta\}_{\beta\in J}$，连同一个映射 λ: J → I 以及一族态射 $\{f_\beta\}_{\beta\in J}$，$P'_\beta\xrightarrow{f_\beta}P_{\lambda(\beta)}$。在此情形下，我们有 $\mathscr{C}'\subseteq\lfloor\mathscr{C}\rfloor$，并将这样的细化记为 $\mathscr{C}'\prec\mathscr{C}$。X 的覆盖生成族的细化以一种显然的方式使 CGF(X) 成为一个范畴。$\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 的公共细化是一个覆盖生成族 $\mathscr{B}$，满足 $\mathscr{B}\prec\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{B}\prec\mathscr{C}'$。

若 $\mathscr{C}'\prec\mathscr{C}$连同 λ: J → I 是一个细化，且 σ′ = (P$'_{\beta_0}$,...,P$'_{\beta_n}$) 是 $\mathscr{C}'$ 上具有神经图 Q 的一个 n- 单形，那么 λ(σ′) = (P$_{\lambda(\beta_0)}$...,P$_{\lambda(\beta_n)}$) 构成 $\mathscr{C}$ 上具有神经图 Q 的一个 n- 单形。此外，λ : J → I 定义了一个链态射 λ$^*$: C•(X $\mathscr{C}$,A) → C•(X $\mathscr{C}'$,A)，其定义为

$$\lambda_0^*(c)(P'_\beta)=f_\beta^*c(P_{\lambda(\beta)})$$

and

$$\lambda_n^*(c)(P'_{\beta_0},\dots,P'_{\beta_n})=c(P_{\lambda(\beta_0)},\dots,P_{\lambda(\beta_n)}),\qquad\text{for } n\geq 1.$$

则 $\delta^n\circ\lambda_n^*=\lambda_{n+1}^*\circ\delta^n$ 对所有 n ≥ 0.设 μ: J → I 是 $\mathscr{C}'\prec\mathscr{C}$的另一个细化映射。考虑由下式给出的 D$_n$: C$^n$(X $\mathscr{C}$,A) → C$^{n-1}$(X $\mathscr{C}'$,A)

$$D_n(c)(P'_{\beta_0},\dots,P'_{\beta_{n-1}})=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j c(P_{\mu(\beta_0)},\dots,P_{\mu(\beta_j)},P_{\lambda(\beta_j)},\dots,P_{\lambda(\beta_{n-1})}).$$

直接计算可得

$$D_{n+1}\circ\delta^n-\delta^n\circ D_n=\lambda^*-\mu^*.$$

也就是说，D 是 λ$^*$ 与 μ$^*$ 之间的链同伦。因此，任意细化 $\mathscr{C}'\prec\mathscr{C}$ 都诱导出一个同态 j($\mathscr{C}'$,$\mathscr{C}$): H$^n$(X $\mathscr{C}$;A) → H$^n$(X $\mathscr{C}'$;A)，且与具体的细化映射无关。此外，对于细化 $\mathscr{C}''\prec\mathscr{C}'\prec\mathscr{C}$，我们有

$$j(\mathscr{C}'',\mathscr{C})=j(\mathscr{C}',\mathscr{C})\circ j(\mathscr{C}'',\mathscr{C}').$$

由此对每个 n ≥ 0，得到一个函子 H$^n$(X −;A) : CGF(X)$^{op}$ → 阿贝尔群范畴。

˘ 定义 4.5。我们将 X 的以预层 A 为系数的第 n 阶微分学切赫上同调群定义为

$$\check{H}^n(X;A)=\varinjlim_{\mathscr{C}}H^n(X,\mathscr{C};A).$$

自然地，$\mathrm{H}^0(\mathrm{X}\ \mathscr{C};\mathrm{A})$ 与 $\ker\delta^0$ 同构，即，

$$\ker\Big(\prod_{P\in\mathscr{C}}A(P)\longrightarrow\prod_{P_0\xleftarrow{F_0}Q\xrightarrow{F_1}P_1}A(P_0\xleftarrow{F_0}Q\xrightarrow{F_1}P_1)\Big),$$

这与 $\Sigma\mathrm{A}(\mathscr{C})$ 相同。现在考虑如下交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma A(X) & \xrightarrow{\alpha_{\mathscr{C}}} & \Sigma A(\mathscr{C}) & \xrightarrow{\beta_{\mathscr{C}}} & H^0(X,\mathscr{C};A) & \xrightarrow{\gamma_{\mathscr{C}}} & \check{H}^0(X;A)\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j(\mathscr{C}',\mathscr{C})} & & \downarrow\\
\Sigma A(X) & \xrightarrow{\alpha_{\mathscr{C}'}} & \Sigma A(\mathscr{C}') & \xrightarrow{\beta_{\mathscr{C}'}} & H^0(X,\mathscr{C}';A) & \xrightarrow{\gamma_{\mathscr{C}'}} & \check{H}^0(X;A)
\end{array}$$

其中，$\gamma_{\mathscr{C}}\colon \mathrm{H}^n(\mathrm{X}\ \mathscr{C};\mathrm{A})\to\check{\mathrm{H}}^n(\mathrm{X};\mathrm{A})$ 表示由 $\mathscr{C}\in\mathrm{CGF(X)}$ 的余极限定义给出的同态。

命题 4.6。若 A 是一个拟层（特别地，若 A 是一个层），则上面给出的自然同态 $\mathrm{h}=\gamma_{\mathscr{C}}\circ\beta_{\mathscr{C}}\circ\alpha_{\mathscr{C}}\colon \Sigma\mathrm{A(X)}\longrightarrow\check{\mathrm{H}}^0(\mathrm{X};\mathrm{A})$ 是一个同构。

证明。若 A 是一个拟层，则对于所有 $\mathscr{C}\in\mathrm{CGF(X)}$，$\alpha_{\mathscr{C}}\colon \Sigma\mathrm{A(X)}\to\Sigma\mathrm{A}(\mathscr{C})$ 是一个同构。因此

$$\begin{array}{ccc}
 & \Sigma\mathrm{A(X)} & \\
(\beta_{\mathscr{C}}\circ\alpha_{\mathscr{C}})^{-1}\nearrow & & \nwarrow(\beta_{\mathscr{C}'}\circ\alpha_{\mathscr{C}'}{}^{-1}) \\
\mathrm{H}^0(\mathrm{X}\ \mathscr{C};\mathrm{A}) & \xrightarrow[\mathrm{j}(\mathscr{C}',\mathscr{C})]{} & \mathrm{H}^0(\mathrm{X}\ \mathscr{C}';\mathrm{A})
\end{array}$$

是一个余锥。泛性质给出唯一的同态 $\mathrm{g}:\check{\mathrm{H}}^0(\mathrm{X;A})\to\Sigma\mathrm{A(X)}$，使得 $\mathrm{g}\circ\gamma_{\mathscr{C}}=(\beta_{\mathscr{C}}\circ\alpha_{\mathscr{C}})^{-1}$。显然，

$$g\circ(\gamma_{\mathscr{C}}\circ\beta_{\mathscr{C}}\circ\alpha_{\mathscr{C}})=g\circ h=\mathrm{id}.$$

另一方面，我们有

$$h\circ g\circ\gamma_{\mathscr{C}}=(\gamma_{\mathscr{C}}\circ\beta_{\mathscr{C}}\circ\alpha_{\mathscr{C}})\circ(\beta_{\mathscr{C}}\circ\alpha_{\mathscr{C}})^{-1}=\gamma_{\mathscr{C}}.$$

由于根据泛性质，恒等映射 $\check{\mathrm{H}}^0(\mathrm{X;A})\to\check{\mathrm{H}}^0(\mathrm{X;A}\}$是具有此性质的唯一同态，因此 $\mathrm{h}\circ\mathrm{g}=\mathrm{id}$。因此，h 是一个同构。□

给定 X 上预层的一个态射 $\phi:\mathrm{A}\to\mathrm{A}'$，定义 $\phi_*^n\colon \mathrm{C}^n(\mathrm{X}\ \mathscr{C},\mathrm{A})\to\mathrm{C}^n(\mathrm{X}\ \mathscr{C},\mathrm{A}')$，使得 $\phi_*^n(\mathrm{c})(\mathrm{P0},\ldots,\mathrm{P}_n)=\phi_Q(\mathrm{c}(\mathrm{P0},\ldots,\mathrm{P}_n))$，其中 Q 是 n-单形 $(\mathrm{P0},\ldots,\mathrm{P}_n)$ 的神经图。于是我们有 $\delta^n\circ\phi_*^n=\phi_*^{n+1}\circ\delta^n$，因此，对每个非负整数 n，$\phi:\mathrm{A}\to\mathrm{A}'$ 都会在上同调群之间诱导一个同态 $\phi_{\#}\colon \mathrm{H}^n(\mathrm{X}\ \mathscr{C};\mathrm{A})\to\mathrm{H}^n(\mathrm{X}\ \mathscr{C};\mathrm{A}')$。若 $\lambda:\mathscr{C}'\to\mathscr{C}$是一个细化，则下图表交换:

$$\begin{array}{ccc}
H^n(X,\mathscr{C};A) & \xrightarrow{\phi_{\#}} & H^n(X,\mathscr{C};A')\\
{\scriptstyle\lambda^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda^*}\\
H^n(X,\mathscr{C}';A) & \xrightarrow[\phi_{\#}]{} & H^n(X,\mathscr{C}';A')
\end{array}$$

因此，根据泛性质，$\phi\colon \mathrm{A}\to\mathrm{A}'$ 诱导出唯一的同态

$$\phi_{\#}:\check{H}^n(X;A)\to\check{H}^n(X;A')$$

满足如下性质

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^n(X;A) & \xrightarrow{\phi_\#} & \check{H}^n(X;A') \\ \uparrow{\scriptstyle \gamma_{\mathscr{C}}} & & \uparrow{\scriptstyle \gamma'_{\mathscr{C}}} \\ H^n(X,\mathscr{C};A) & \xrightarrow[\phi_\#]{} & H^n(X,\mathscr{C};A') \end{array}$$

其中，$\gamma_{\mathscr{C}}$：$\mathrm{H}^n(\mathrm{X}\ \mathscr{C};\mathrm{A}) \to \check{}\mathrm{H}^n(\mathrm{X};\mathrm{A})$ 和 $\gamma'_{\mathscr{C}}$：$\mathrm{H}^n(\mathrm{X}\ \mathscr{C};\mathrm{A}') \to \check{}\mathrm{H}^n(\mathrm{X};\mathrm{A}')$ 表示由 $\mathscr{C} \in \mathrm{CGF(X)}$ 的余极限定义给出的同态。

对于 X 上层的态射 $\phi$：$\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ 和 $\psi$：$\mathrm{A}' \to \mathrm{A}''$，我们还有 $(\psi \circ \phi)_\# = \psi_\# \circ \phi_\#$；对于恒等态射 $\mathrm{id}$：$\mathrm{A} \to \mathrm{A}$，还有 $\mathrm{id}_\# = \mathrm{id}$。

命题 4.7. 微分空间 X 上层的任意短正合列 $0 \longrightarrow \mathrm{A}' \xrightarrow{\phi} \mathrm{A} \xrightarrow{\psi} \mathrm{A}'' \longrightarrow 0$ 都诱导出一个正合序列

$$0 \longrightarrow \Sigma A'(X) \xrightarrow{\Sigma\phi} \Sigma A(X) \xrightarrow{\Sigma\psi} \Sigma A''(X) \longrightarrow H^1(X;A')$$

$$\cdots \longrightarrow \check{H}^n(X;A') \xrightarrow{\phi_\#} \check{H}^n(X;A) \xrightarrow{\psi_\#} \check{H}^n(X;A'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^{n+1}(X;A') \longrightarrow \cdots$$

此外，对于层的任意短正合列的态射

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\ \succ\ } & B' & \xrightarrow{\ \succ\ } & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

下图表可交换:

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^n(X;A'') & \xrightarrow{\partial} & \check{H}^{n+1}(X;A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \check{H}^n(X;B'') & \xrightarrow[\partial]{} & \check{H}^{n+1}(X;B) \end{array}$$

因此，对每个 $\mathrm{n} \geq 0$，我们得到一个正合的 $\partial$-函子 $\check{}\mathrm{H}^n(\mathrm{X}\ _) : \mathrm{Ab(Shv(X)} \to \mathrm{Ab}$。

证明。假设

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\psi} A'' \longrightarrow 0$$

是微分空间 X 上层的短正合列。由左正合性，对于 X 中的所有图 P，序列

$$0 \longrightarrow A'(P) \xrightarrow{\phi_P} A(P) \xrightarrow{\psi_P} A''(P)$$

均为正合，因此序列

$$0 \longrightarrow C^n(X,\mathscr{C},A') \xrightarrow{\phi_*} C^n(X,\mathscr{C},A) \xrightarrow{\psi_*} C^n(X,\mathscr{C},A'').$$

设 $\mathrm{Im}_{A''}$ 为 $\psi$的像的预层，作为 $\mathrm{A}''$ 的子预层，从而

$$0 \longrightarrow C^n(X,\mathscr{C},A') \xrightarrow{\phi_*} C^n(X,\mathscr{C},A) \xrightarrow{\psi_*} C^n(X,\mathscr{C},Im_{A''}) \longrightarrow 0$$

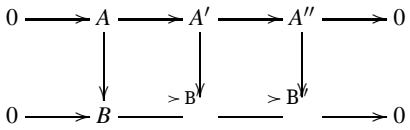
这是上链复形的正合序列。由此得到一个长正合列

$$\cdots \longrightarrow H^n(X,\mathscr{C};A') \xrightarrow{\phi_\#} H^n(X,\mathscr{C};A) \xrightarrow{\psi_\#} H^n(X,\mathscr{C};Im_{A''}) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(X,\mathscr{C};A') \longrightarrow \cdots$$

对覆盖生成族取余极限，可得到一个长正合列

$$\cdots \longrightarrow \check{H}^n(X;A') \xrightarrow{\phi_\#} \check{H}^n(X;A) \xrightarrow{\psi_\#} \check{H}^n(X;Im_{A''}) \xrightarrow{\partial} \check{H}^{n+1}(X;A') \longrightarrow \cdots \tag{1}$$

类似地，根据锯齿引理，对于层的任意短正合列的态射



下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^n(X;Im_{A''}) & \xrightarrow{\partial} & \check{H}^{n+1}(X;A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \check{H}^n(X;Im_{B''}) & \xrightarrow[\partial]{} & \check{H}^{n+1}(X;B) \end{array}$$

但对于每个 n，包含映射上链映射 $C^n(X\ \mathscr{C},Im_{A''}) \to C^n(X\ \mathscr{C},A'')$ 诱导出自然同态 $\theta^n_{\mathscr{C}}$: $H^n(X\ \mathscr{C};Im_{A''}) \to H^n(X\ \mathscr{C};A'')$。取余极限后，我们得到一个同态

$$\theta^n_{\#} : \check{H}^n(X;Im_{A''}) \to \check{H}^n(X;A'').$$

为完成证明，只需证明 $\theta^n_{\#}$ 确实是一个同构。

为证明 $\theta^n_{\#}$ 是满射，令 $[c''] \in \check{H}^n(X;A'')$，使得对于某个 $\mathscr{C} \in CGF(X)$，有 $[c] \in H^n(X\ \mathscr{C};A'')$。于是，$c''$ 是 $C^n(X\ \mathscr{C};A'')$ 的一个上循环元素。由于序列

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\Psi} A'' \longrightarrow 0$$

正合，因此可以在每个 $P \in \mathscr{C}$ 上局部求解方程 $\psi_P(a) = a''$，其中 $a'' \in A''(P)$。特别地，可以找到一个细化 $\lambda : \mathscr{G} \to \mathscr{C}$，它由 $\mathscr{C}$ 中元素的限制构成，使得对于所有 $P \in \mathscr{G}$ 和 $a'' \in A''(P)$，方程 $\psi_P(a) = a''$ 有解 $a \in A(P)$。因此，存在 $c \in C^n(X\ \mathscr{G};A)$，使得 $\psi_*(c) = \lambda^* c''$，这意味着 $\theta^n_{\#}[\psi_*(c)] = [\lambda^* c''] = [c'']$。

为证明 $\theta^n_{\#}$ 是单射，任取上循环元素 $c \in C^n(X\ \mathscr{C};Im_{A''})$，使得 $\theta^n_{\#}([c]) = 0$。于是可得 $\lambda^* c = \delta^{n-1}(b)$，其中存在某个细化 $\lambda : \mathscr{G} \to \mathscr{C}$，且 $b \in C^{n-1}(X\ \mathscr{G};A'')$。再次利用 $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\Psi} A'' \longrightarrow 0$ 的正合性，可找到一个细化 $\mu: \mathscr{H} \to \mathscr{G}$，使得 $\mu^*(b) \in C^{n-1}(X\ \mathscr{H};Im_{A''})$。因此，

$$(\lambda \circ \mu)^*(c) = \mu^* \circ \lambda^*(c) = \mu^* \circ \delta^{n-1}(b) = \delta^{n-1} \circ \mu^*(b) = \delta^{n-1} \circ \psi_*(a),$$

因此 $[c] = [(\lambda \circ \mu)^*(c)] = 0$ 属于 $\check{H}^n(X;Im_{A''})$。

现在将 $\check{H}^n(X;A'')$ 替换为 $\check{H}^n(X;Im_{A''})$，再利用 $\theta^n_{\#}$ 式（1）中的同构，并结合命题 4.6，即可得到结论。□

## 5. 德拉姆定理

本节旨在构建一个框架，以导出广义梅耶–维托里斯序列和 de Rham 定理。

### 5.1. 广义梅耶–维托里斯序列。

**定义 5.1.** 设 X 是一个微分空间。X 的覆盖生成族 $\mathscr{C} = \{P_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 的从属光滑单位分解是

(a) X 上光滑函数的一个集合 $\{f_\alpha$，其中 $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ 配备子空间微分结构；(b) 对 X 中的每个图 Q，指定一个图集合 $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in I}$，使得 $Q = \sup_{\alpha \in I} Q_\alpha$,

使得 $\{Q^*(f_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ 是从属于 $\{dom(Q_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ 的光滑单位分解，i.e.,
(i) 对每个 $\alpha \in I$，$supp(Q^*(f_\alpha)) \subseteq dom(Q_\alpha)$；(ii) $\{supp(Q^*(f_\alpha))\}_{\alpha \in I}$ 局部有限，

(iii) $\sum_{\alpha\in I} Q^*(f_\alpha)(r) = 1$ for all $r \in \mathrm{dom}(Q)$.

例5.2. 设 M 是一个通常流形，其图册为 $\mathfrak{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \to M\}_{\alpha\in I}$（作为一个生成覆盖的族）。那么，任意从 $X \to [0,1]\}_{\alpha\in I}$ 拉回的光滑单位分解 $\{f_\alpha$，若从属于 $\{\mathrm{Im}(\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$，便会诱导出一个从属于 $\mathfrak{A}$ 的光滑单位分解。

设定 5.3。设 $\mathscr{C} = \{P_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是微分空间 $(X\ \mathscr{D}_X)$ 的覆盖生成族，其配备的微分学为 $\mathscr{D}_X$。对于每个 $\alpha \in I$ 以及 X 中的每个图 Q，假设给定一个集合

$$\Delta_0(\alpha, Q) = \{Q^{\alpha\beta} \xrightarrow{G_Q^{\alpha\beta}} P_\alpha\}_{\beta\in J_\alpha}$$

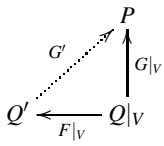
从 Q 的某些限制 $Q^{\alpha\beta}$ 到 $P_\alpha$ 的图的态射，且

$$\Delta_0(Q) = \bigcup_{\alpha\in I} \Delta_0(\alpha, Q)$$

这些态射的源构成 Q 的一个覆盖，即集合 $\{\mathrm{dom}(Q^{\alpha\beta})\}_{\alpha\in I,\ \beta\in J_\alpha}$ 覆盖 dom(Q)。此外，假设图的态射是局部可延拓的，

$$\mathrm{Mor}_{loc}(\mathscr{C}) = \bigcup_{Q\in\mathscr{D}_X} \Delta_0(Q),$$

这意味着，对于 X 中给定的图态射 Q G ⟶P 和 Q F ⟶Q′，其中 Q G ⟶ P 属于 $\mathrm{Mor}_{loc}(\mathscr{C})$，并且对于每个 r ∈ dom(Q)，都存在 r 的一个开邻域 V ⊆ dom(Q) 以及 $\mathrm{Mor}_{loc}(\mathscr{C})$ 中的一个元素 Q′ G⟶′ P，使得下图交换：

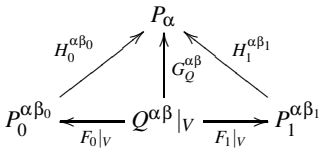



构造5.4。 在设置 5.3中，对于每个 0-单形 $P_0 \in \mathscr{C}$，我们会自动得到一个集合

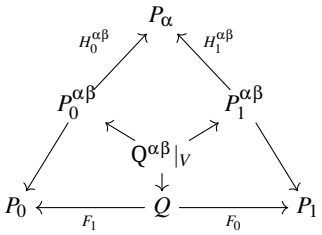
$$\Delta_1(P_0) = \{P_0 \xleftarrow{\iota^{\alpha\beta}} P_0^{\alpha\beta} \xrightarrow{G_0^{\alpha\beta}} P_\alpha\}$$

在 $\mathscr{C}$ 上的 1-单形，其中 $P_0^{\alpha\beta}$ $G \xrightarrow{0}^{\alpha\beta}$ $P_\alpha$ 属于 $\Delta_0(P_0)$，而 $P_0^{\alpha\beta}$ $\iota \xrightarrow{\alpha\beta}$ $P_0$ 是典范包含。注意，$\Delta_1(P_0)$ 中元素的神经图构成了 $P_0$ 的一个覆盖。

现在设 $P_0$ $F \xleftarrow{1}$ Q $F \xrightarrow{0}$ $P_1$ 是 $\mathscr{C}$ 上的一个 1-单形，且 r ∈ dom(Q)。那么对于某个 $Q^{\alpha\beta}$，r ∈ dom($Q^{\alpha\beta}$)。由于图的态射在 $\mathrm{Mor}_{loc}(-,\mathscr{C})$ 上局部可延拓，对于相应的态射 $Q^{\alpha\beta}$ $G^{\alpha\beta}$ $Q$ ⟶ $P_\alpha \in \Delta_0(Q)$，我们有态射 $P_0^{\alpha\beta_0} \xrightarrow{H_0^{\alpha\beta_0}} P_\alpha \in \Delta_0(P_0)$ 和 $P_0^{\alpha\beta} \xrightarrow{H_1^{\alpha\beta_1}} P_{\alpha_1} \in \Delta_0(P_1)$，以及 r 的一个开邻域 V ⊆dom(Q)，使得




可以通过典范包含映射补全此图表，从而得到 $\mathscr{C}$ 上的一个 2-单形，如下所示：



其神经图为 $Q^{\alpha\beta}|_V$，其中 $P_0 \leftarrow P_0^{\alpha\beta} \xrightarrow{\alpha\beta_0} P_\alpha \in \Delta_1(P_0)$，且 $P_1 \leftarrow P_0^{\alpha\beta} \xrightarrow{\alpha\beta_1} P_\alpha \in \Delta_1(P_1)$。因此，对于 $\mathscr{C}$ 上的每个 1-单形 $P_0 \xleftarrow{1} Q \xrightarrow{0} P_1$，我们都有一个集合 $\Delta_2(P_0,P_1) = \{(P_\alpha,P_0,P_1)\}$，其中包含 $\mathscr{C}$ 上的 2-单形，并且 $\Delta_2(P_0,P_1)$ 中元素的神经图构成 Q 的一个覆盖，且 $(P_\alpha,P_1) \in \Delta_1(P_1)$ 和 $(P_\alpha,P_0) \in \Delta_1(P_0)$。

在设置 5.3 的情形下，对 $\mathscr{C}$ 上带有神经图 Q 的任意 n-单形 $(P_0,\ldots,P_n)$，我们可以归纳地构造一个集合 $\Delta_{n+1}(P_0,\ldots,P_n) = \{(P_\alpha,P_0,\ldots,P_n)\}$，其中包含 $\mathscr{C}$ 上的 $(n+1)$-单形，并具有以下性质：

- The collection of nerve plots of elements of $\Delta_{n+1}(P_0,\ldots,P_n)$ constitutes a covering for $Q$. In addition, since domains are paracompact, in each step we can assume that the obtained covering for $Q$ is locally finite.
- The morphism $Q_{(P_\alpha,P_0,\ldots,P_n)} \xrightarrow{\iota} Q_{(P_0,\ldots,P_n)}$ is the canonical inclusion, and for each $i = 0,\ldots,n$, $Q_{(P_\alpha,P_0,\ldots,P_n)} \xrightarrow{F_i\circ\iota} Q_{(P_\alpha,P_0,\ldots,\widehat{P_i},\ldots,P_n)}$ is a restriction of the morphism $Q \xrightarrow{F_i} Q_i$ given by the $n$-simplex $(P_0,\ldots,P_n)$.
- $(P_\alpha,P_0,\ldots,\widehat{P_i},\ldots,P_n)$ belongs to $\Delta_n(P_0,\ldots,\widehat{P_i},\ldots,P_n)$, for each $i = 1,\ldots,n$.

现在假设存在一个光滑单位分解 $\{f_\alpha : X \to [0,1]\}_{\alpha\in I}$ 从属于 $\mathscr{C} = \{P_\alpha\}_{\alpha\in I}$，并考虑算子

$$K^n : C^{n+1}(X,\mathscr{C},\Lambda^k) \longrightarrow C^n(X,\mathscr{C},\Lambda^k)$$

定义为

$$(K^n\omega)(P_0,\ldots,P_n) = \sum_{\Delta_{n+1}(P_0,\ldots,P_n)} Q^*_{(P_\alpha,P_0,\ldots,P_n)}(f_\alpha)\ \omega(P_\alpha,P_0,\ldots,P_n),$$

其中，$Q_{(P_\alpha,P_0,\ldots,P_n)}$ 表示一个 $(n+1)$-单形 $(P_\alpha,P_0,\ldots,P_n)$ 的神经图；该单形如上所述，由带有神经图 Q 的 n-单形 $(P_0,\ldots,P_n)$ 构造而成。每一项

$$Q^*_{(P_\alpha,P_0,\ldots,P_n)}(f_\alpha)\ \omega(P_\alpha,P_0,\ldots,P_n)$$

定义在整个 $\mathrm{dom}(Q)$ 上，并在 $\mathrm{dom}(Q_{(P_\alpha,P_0,\ldots,P_n)}) \setminus \mathrm{supp}(Q^*(f_\alpha))$ 外取零。

命题 5.5. $K^n\circ\delta^n + \delta^{n-1}\circ K^{n-1} = \mathrm{id}$.

证明。对于每个 $\omega \in C^n(X,\mathscr{C},\Lambda^k)$ 以及具有神经图 Q 的 n-单形 $(P_0,\ldots,P_n)$，我们有

$$\begin{aligned}
K^n\circ\delta^n(\omega)(P_0,\ldots,P_n) &= \sum_{\Delta_{n+1}(P_0,\ldots,P_n)} Q^*_{(P_\alpha,P_0,\ldots,P_n)}(f_\alpha)\ (\delta^n\omega)(P_\alpha,P_0,\ldots,P_n)\\
&= \sum_{\Delta_{n+1}(P_0,\ldots,P_n)} Q^*_{(P_\alpha,P_0,\ldots,P_n)}(f_\alpha)\ \Big(\iota_\alpha^*\omega(P_0,\ldots,P_n) - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\ (F_i\circ\iota_\alpha)^*\ \omega(P_\alpha,P_0,\ldots,\widehat{P_i},\ldots,P_n)\Big)\\
&= \sum_{\Delta_{n+1}(P_0,\ldots,P_n)} Q^*_{(P_\alpha,P_0,\ldots,P_n)}(f_\alpha)\iota_\alpha^*\omega(P_0,\ldots,P_n)\\
&\quad - \sum_{\Delta_{n+1}(P_0,\ldots,P_n)} Q^*_{(P_\alpha,P_0,\ldots,P_n)}(f_\alpha)\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\ (F_i\circ\iota_\alpha)^*\ \omega(P_\alpha,P_0,\ldots,\widehat{P_i},\ldots,P_n)\\
&= \omega(P_0,\ldots,P_n) - \sum_{\Delta_{n+1}(P_0,\ldots,P_n)}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\ Q^*_{(P_\alpha,P_0,\ldots,P_n)}(f_\alpha)\ (F_i\circ\iota_\alpha)^*\ \omega(P_\alpha,P_0,\ldots,\widehat{P_i},\ldots,P_n).
\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\delta^{n-1}\circ K^{n-1}(\omega)(P_0,\dots,P_n) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\, F_i^*\,\Big((K^{n-1}\omega)(P_0,\dots,\widehat{P_i},\dots,P_n)\Big)\\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\, F_i^*\,\Big(\sum_{\Delta_n(P_0,\dots,\widehat{P_i},\dots,P_n)} Q^*_{P_\alpha,P_0,\dots,\widehat{P_i},\dots,P_n}(f_\alpha)\;\omega(P_\alpha,P_0,\dots,\widehat{P_i},\dots,P_n)\Big)\\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{\Delta_n(P_0,\dots,\widehat{P_i},\dots,P_n)}(-1)^i\,(F_i\circ\iota_\alpha)^*\Big(Q^*_{P_\alpha,P_0,\dots,\widehat{P_i},\dots,P_n}(f_\alpha)\Big)\;(F_i\circ\iota_\alpha)^*\omega(P_\alpha,P_0,\dots,\widehat{P_i},\dots,P_n)\\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{\Delta_{n+1}(P_0,\dots,P_n)}(-1)^i\,Q^*_{(P_\alpha,P_0,\dots,P_n)}(f_\alpha)\;(F_i\circ\iota_\alpha)^*\;\omega(P_\alpha,P_0,\dots,\widehat{P_i},\dots,P_n).\end{aligned}$$

因此，

$$K^n\circ\delta^n(\omega)(P_0,\dots,P_n)+\delta^{n-1}\circ K^{n-1}(\omega)(P_0,\dots,P_n)=\omega(P_0,\dots,P_n)$$

□

现在，以下结果显而易见：

命题 5.6。（广义梅耶–维托里斯序列）。设 X 是一个微分空间，且 $\mathscr{C}$ 是 X 的覆盖生成族。在设定 *5.3* 的情形下，若存在一个从属于 $\mathscr{C}$ 的单位分解，则序列

$$0\longrightarrow\Omega^k(X)\xrightarrow{r}C^0(X,\mathscr{C},\Lambda^k)\xrightarrow{\delta}C^1(X,\mathscr{C},\Lambda^k)\xrightarrow{\delta}C^2(X,\mathscr{C},\Lambda^k)\longrightarrow\cdots$$

是正合的，或者等价地，$\mathrm{H}^n(\mathrm{X}\ \mathscr{C};\Lambda^k)=0$。

5.2. 抽象德拉姆定理。

定义 5.7. 微分空间 X 上的层 A 若对所有 $\mathrm{n}\geq 1$都满足 $\check{\mathrm{H}}^n(\mathrm{X};\mathrm{A})=0$，则称其为无环的。

定理 5.8.（抽象德拉姆定理）。假设

$$0\longrightarrow\mathscr{S}\longrightarrow A^0\xrightarrow{d_0}A^1\xrightarrow{d_1}A^2\longrightarrow\cdots.$$

是在微分空间 X 上的层 $\mathscr{S}$ 的一个层的分解，其中 $\mathrm{A}^k$ 对所有 $\mathrm{k}\geq 1$ 都是无环层。则 $\check{\mathrm{H}}^n(\mathrm{X};\mathscr{S})$ 与 $\mathrm{H}^n(\Sigma\mathrm{A}^\bullet)$ 同构，其中 $\mathrm{H}^n(\Sigma\mathrm{A}^\bullet)$ 表示相应上链复形的第 k 个上同调群

$$\Sigma A^0\xrightarrow{\Sigma d_0}\Sigma A^1\xrightarrow{\Sigma d_1}\Sigma A^2\longrightarrow\cdots.$$

证明。置 $\mathrm{Z}^0=\mathscr{S}$，并且对于 $\mathrm{k}>0$，令 $\mathrm{Z}^k$ 为层 $\ker(\mathrm{d}_k)$，从而有一个短正合列

$$0\longrightarrow Z^k\xrightarrow{\iota}A^k\xrightarrow{d_k}Z^{k+1}\longrightarrow 0$$

对于所有层，$k\geq 0$。由命题 4.7，这导出一个长正合列

$$0\longrightarrow\Sigma Z^k(X)\xrightarrow{\Sigma\iota}\Sigma A^k(X)\xrightarrow{\Sigma d_k}\Sigma Z^{k+1}(X)\longrightarrow\check{H}^1(X;Z^k)\longrightarrow\check{H}^1(X;A^k)\tag{2}$$

$$\cdots\longrightarrow\check{H}^n(X;Z^k)\longrightarrow\check{H}^n(X;A^k)\longrightarrow\check{H}^n(X;Z^{k+1})\xrightarrow{\partial}\check{H}^{n+1}(X;Z^k)\longrightarrow\cdots\tag{3}$$

由于对于 $\mathrm{k}\geq 1$，$\mathrm{A}^k$ 是无环层，∂：当 $\mathrm{n}\geq 1$ 时，$\check{\mathrm{H}}^n(\mathrm{X};\mathrm{Z}^{k+1})\longrightarrow\check{\mathrm{H}}^{n+1}(\mathrm{X};\mathrm{Z}^k)$ 是同构。因此，归纳地得到同构

$$\check{H}^n(X;\mathscr{S})=\check{H}^n(X;Z^0)\cong\check{H}^1(X;Z^{n-1})$$

得以实现。由（2）可知，我们有一个正合序列

$$0\longrightarrow\Sigma Z^{n-1}(X)\xrightarrow{\Sigma\iota}\Sigma A^{n-1}(X)\xrightarrow{\Sigma d_{n-1}}\Sigma Z^n(X)\longrightarrow\check{H}^1(X;Z^{n-1})\longrightarrow 0$$

由此得到同构

$$\check{H}^n(X;\mathscr{S}) \cong \check{H}^1(X;Z^{n-1}) \cong \Sigma Z^n(X)/Im(\Sigma d_{n-1}) \cong H^n(\Sigma A^\bullet)$$

对于 $n \geq 1$。 □

根据命题 5.6 和 3.13 以及抽象 de Rham 定理，以下结论显而易见。

推论 5.9。 设 X 是一个微分空间。在设定 5.3中，若对于 X 的每个覆盖生成族 $\mathscr{C}$，都存在一个从属于 $\mathscr{C}$的单位分解，则 X 上的 k阶微分形式层 $\Lambda^k$，$k \geq 1$，是无环的。特别地，我们有 $\check{H}^n(X;\mathbb{R}) \cong H^n_{dR}(X)$。

5.3. 微分空间 ´étale 流形的情形。我们先回顾微分空间 ´étale 流形的定义（详见 [1] ）。

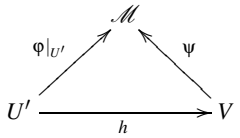
定义 5.10。若微分空间之间的映射 $f: X \to Y$ 满足：对每个 $x \in X$，都存在 x 和 f (x) 的 D-开邻域 $O \subseteq X$ 和 $V \subseteq Y$，使得 $f|_O: O \to O'$ 是一个微分同胚，则称 f 为 ´étale。若光滑映射 $f: X \to Y$ 满足：对 X 中的每个图 P，其拉回 $P^* f$ 都是 ´étale，则称 f 为微分空间 ´étale 映射。

任何微分空间 ´etale 映射都是 D-开映射。

命题 5.11。光滑映射 $f: X \to Y$ 是微分空间 ´etale 映射，当且仅当对于给定的 $x \in X$、任意图 $P: U \to Y$，以及每个满足 $P(r) = f(x)$ 的 $r \in U$，都存在唯一的（在绘图芽意义下）局部提升绘图 $L: V \to X$；该绘图定义在 r 的开邻域 $V \subseteq U$ 上，并满足 $f \circ L = P|_V$，且 $L(r) = x$。

定义 5.12。如果存在一个参数化覆盖 $\mathfrak{A}$（称为图册），使得 $\mathscr{M}$由从 n-域到 $\mathscr{M}$的微分空间 ´etale 映射组成，则称微分空间 $\mathscr{M}$ 是一个微分空间 ´etale n-流形。我们称 $\mathfrak{A}$ 中的元素为微分空间 ´etale 图。在这种情况下， $\mathfrak{A}$ 实际上是 $\mathscr{M}$的覆盖生成族。

若 $\varphi: U \to \mathscr{M}$和 $\psi: V \to \mathscr{M}$是 $\mathscr{M}$上满足 $\varphi(r) = \psi(s)$ 的两个微分拓扑 ´étale 图表，则可以找到一个定义在 r 的开邻域 $U' \subseteq U$ 上的唯一光滑映射 $h: U' \to V$，使得 $h(r) = s$，并且下图可交换：




h 是一个 ´étale 映射，并由微分拓扑 ´étale 图表 φ和 ψ唯一确定。

例 5.13。任何微分拓扑流形都是微分拓扑 ´étale 流形。无理环面 $\mathbb{T}_\alpha = \mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$， $\alpha \notin \mathbb{Q}$，是一个微分拓扑 ´étale 1-流形。

假设 $\mathscr{M}$是一个微分拓扑 ´étale 流形，并配有图册 $\mathfrak{A}$。首先，我们观察 $\mathscr{M}$连同图册$\mathfrak{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathscr{M}\}_{\alpha \in I}$如何满足设置5.3的要求：

对于每个 $\alpha \in I$，选择一个选择[2] $\tau_\alpha: \mathrm{Im}(\varphi_\alpha) \to U_\alpha$ 的 $\varphi_\alpha$，使得 $\varphi_\alpha \circ \tau_\alpha = \mathrm{id}$。令 $\alpha \in I$，Q 为 $\mathscr{M}$中的任意图，并令 $r \in \mathrm{dom}(Q)$。如果 $Q(r) \notin \mathrm{Im}(\varphi_\alpha)$，则取从空绘图出发的态射 $\varnothing \to \varphi_\alpha$。但如果 $Q(r) \in \mathrm{Im}(\varphi_\alpha)$，那么存在一个光滑映射 $G_{\alpha r}: V_{\alpha r} \to U_\alpha$，它定义在 $_{\alpha r} \subseteq \mathrm{dom}(Q)$ 中 r 的一个开邻域 V 上，并满足 $G_{\alpha r}(r) = \tau_\alpha(Q(r))$；具有此性质的 G 是唯一的（芽意义下）。这给出了一个态射 $Q_{\alpha r} \xrightarrow{G \quad \alpha_r} \varphi_\alpha$，其中 $Q_{\alpha r}$ 是 Q 在 $V_{\alpha r}$上的限制。令 $\Delta_0(\alpha, Q)$ 表示以这种方式选取的态射集合。令 $\Delta_0(Q) = \bigcup_{\alpha \in I} \Delta_0(\alpha, Q)$。由于 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{M}$的参数化覆盖，集合 $\{\mathrm{dom}(Q_{\alpha r})\}_{\alpha \in I, r \in \mathrm{dom}(Q)}$ 覆盖 dom(Q)。

为了说明图的态射在 $\mathrm{Mor}_{loc}(\mathfrak{A}) = \bigcup_{Q \in \mathscr{D}_\mathscr{M}} \Delta_0(Q)$ 上是局部可延拓的，假设给定了 $\mathscr{M}$ 中的图的态射 $Q \xrightarrow{G} \varphi_\alpha$ 和 $Q \xrightarrow{F} Q'$，其中 $Q \xrightarrow{G} \varphi_\alpha$ 属于 $\Delta_0(Q)$。令 $r \in \mathrm{dom}(Q)$，使得 $G(r) = \tau_\alpha(Q(r))$。那么，对于 $F(r) \in \mathrm{dom}(Q')$，取元素

[2]感谢选择公理。

$Q'_{\alpha F(r)} \overset{'_{\alpha F(r)}}{G} \varphi_\alpha$，属于 $\Delta_0(Q')$，满足 $G'_{\alpha F(r)}(F(r)) = \tau_\alpha(Q'(F(r))) = \tau_\alpha(Q(r))$。由唯一性可得，在 r 的某个开邻域 $W \subseteq \mathrm{dom}(Q)$ 上，$G'_{\alpha F(r)} \circ F|_W = G|_W$。

现在根据命题 5.6，我们得到以下结果：

命题 5.14. 假设 $\mathscr{M}$ 是一个带有图册 $\mathfrak{A}$ 的微分学 ´etale 流形。如果存在一个从属于 $\mathfrak{A}$ 的单位分解，那么序列

$$0 \longrightarrow \Omega^k(\mathscr{M}) \xrightarrow{r} C^0(\mathscr{M},\mathfrak{A},\Lambda^k) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathscr{M},\mathfrak{A},\Lambda^k) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathscr{M},\mathfrak{A},\Lambda^k) \longrightarrow \cdots$$

是正合的，或者等价地，$H^n(\mathscr{M},\mathfrak{A};\Lambda^k) = 0$。

命题 5.15. 设 $(\mathscr{M},\mathfrak{A})$ 是一个微分学 ´etale 流形。如果对于 X 的每个图册 $\mathfrak{A}'$，都存在一个从属于 $\mathfrak{A}'$ 的单位分解，那么 $\check{H}^n(\mathscr{M};\mathbb{R}) \cong H^n_{dR}(\mathscr{M})$。

证明。我们首先注意到，对于 $\mathscr{M}$ 的任意两个覆盖生成族 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$，我们可以构造一个 $\mathscr{M}$ 的图册 $\mathfrak{B}$，它由图册 $\mathfrak{A}$ 中元素的限制组成，并且细化了 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$。因此，X 上的微分 k 阶形式层 $\Lambda^k$、$k \geq 1$ 是无环的，并且 $\check{H}^n(\mathscr{M};\mathbb{R}) \cong H^n_{dR}(\mathscr{M})$。□

推论 5.16。如果 M 是一个通常流形，则 $\check{H}^n(M;\mathbb{R}) \cong H^n_{dR}(M)$。

证明。因为通常流形的每个图册总是存在从属于它的单位划分。 □

5.4. 微分空间的 ˇCech-de Rham 双复形。设 X 是一个微分空间，且 $\mathscr{C}$ 是由 X 中的全局图组成的覆盖生成族。考虑双复形 $C^\bullet{}_\bullet(X)$，其中

$$C^{n,k}(X) = C^n(X,\mathscr{C},\Lambda^k)$$

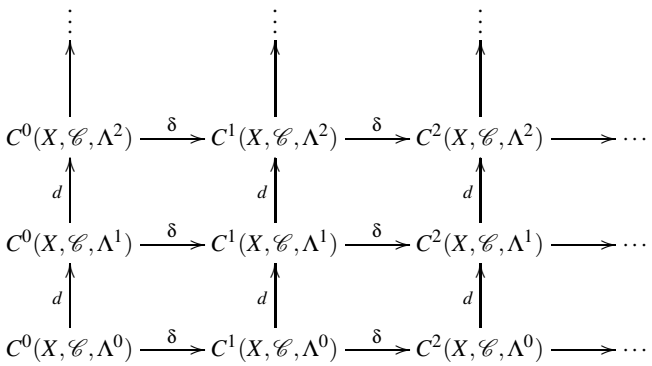
其中 $\Lambda^k$ 是 k阶微分形式的层，并配备微分

$$\delta : C^{n,k}(X) \to C^{n+1,k}(X) \qquad \text{and} \qquad d : C^{n,k}(X) \to C^{n,k+1}(X),$$

其中 $d(c)(P_0,\ldots,P_n) = (-1)^n d\varrho(c(P_0,\ldots,P_n))$，而 $d\varrho$ 是定义在 dom(Q) 上的外微分；对于任意 n-上链 c 和带有神经图 Q 的 n-单形 $(P_0,\ldots,P_n)$，因此我们得到总复形 $C^\bullet(X)$，其

$$C^m(X) = \bigoplus_{n+k=m} C^{n,k}(X)$$

微分为 $D = \delta + d$。




由此得到两个谱序列 $\{{}^dE_r\}$ 和 $\{{}^\delta E_r\}$，且 $E_r^{n\,k} \Longrightarrow H^{n+k}(C^\bullet(X))$。在零页中，我们有

$${}^dE_0^{n,k} \simeq C^{n,k}(X),\ d_0 = d$$
$${}^\delta E_0^{n,k} \simeq C^{n,k}(X),\ d_0 = \delta$$

通过取上同调，在第一页中我们得到

$$ {}^{d}E_1^{n,k} = C^n(X, \mathscr{C}, H_{dR}^k), $$
$$ {}^{\delta}E_1^{n,k} = H^n(X, \mathscr{C}; \Lambda^k), $$

其中，$H_{dR}^k$ 是一个预层，它将每个图 $P : U \to X$ 对应到群 $H_{dR}^k(U)$。特别地，${}_{d}E_1^{n\,0} = C^n(X\ \mathscr{C}, \mathbb{R})$ 和 ${}^{\delta}E_1^{0\,k} = \Omega^k(X)$。在第二页中，我们有

$$ {}^{d}E_2^{n,k} = H^n(X, \mathscr{C}; H_{dR}^k), $$
$$ {}^{\delta}E_2^{n,k} = H^k(H^n(X, \mathscr{C}; \Lambda^\bullet)). $$

特别地，${}_{d}E_2^{n\,0} = H^n(X\ \mathscr{C}, \mathbb{R})$ 和 ${}^{\delta}E_2^{0\,k} = H^k(\Omega^\bullet(X)) = H_{dR}^k(X)$，对每个整数 k 都成立。存在边同态

$$ H_{dR}^k(X) \longrightarrow H^k(C^\bullet(X)) $$

由链映射 $\Omega^k(X) \hookrightarrow C^0(X\ \mathscr{C}, \Lambda^k) = C^{0,k}(X) \hookrightarrow C^k(X)$ 诱导。此外，低次项的正合序列如下：

$$ 0 \longrightarrow H_{dR}^1(X) \longrightarrow H^1(C^\bullet(X)) \longrightarrow {}^{\delta}E_2^{1,0} \longrightarrow H_{dR}^2(X) \longrightarrow H^2(C^\bullet(X)). $$

### 6. 带规范群的微分纤维丛

在本节中，始终假设 X 和 T 是微分空间，并设 $\rho : G \to \mathrm{Diff}(T)$ 是微分空间群 G 在 T 上的光滑忠实作用（G 不一定是阿贝尔群）。

定义 6.1. X 上具有规范群 G 和典型纤维 T 的微分学纤维丛，是一个光滑映射 $\pi: E \to X$，并且存在 X 的覆盖生成族 $\mathscr{C}$ 以及以下数据：

(a) 一个拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{dom}(P) \times T & \xrightarrow{\Psi_P} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Pr}_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathrm{dom}(P) & \xrightarrow{P} & X \end{array}$$

在 Diff 中，称为平凡化，对每个 $P \in \mathscr{C}$，

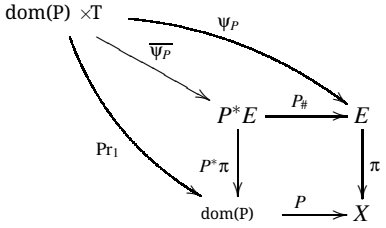
(b) 一个光滑映射 $g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1} : \mathrm{dom}(Q) \to G$，称为迁移，对每个 1-单形 $P_0 \xleftarrow{F=1} Q \xrightarrow{F=0} P_1$ 在 $\mathscr{C}$ 上，使得

$$ \Psi_{P_1}\big(F_0(r), t\big) = \Psi_{P_0}\big(F_1(r), \rho g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}(r)(t)\big), $$

对于所有 $(r,t) \in \mathrm{dom}(Q) \times T$ .

注意，(a) 蕴含 $\pi: E \to X$ 是一个满射的微分拓扑子浸没。

注记 6.2. 由于 (a) 中的交换方块是一个拉回，存在一个微分同胚 $\overline{\Psi_P}: \mathrm{dom}(P) \times T \to P^*E$，使得下图交换：




因此，对于固定的 $r \in \mathrm{dom}(P)$，映射 $\Psi_{P,\ r}: T \to E^{P(r)}$, $t \mapsto \Psi_P(r,t)$ 是一个微分同胚，其光滑逆映射为 $(\Psi_{P,\ r})^{-1} : E^{P(r)} \to T \quad \xi \mapsto \mathrm{Pr}_2 \circ (\overline{\Psi_P})^{-1}(r, \xi)$，其中 $E_{P(r)} = \pi^{-1}(P(r)) \subseteq$

E 赋予了从 E 继承的子空间微分结构。因此，对于每个 1-单形 $P_0 \xleftarrow{F^1} Q \xrightarrow{F^0} P_1$ on $\mathscr{C}$ 以及所有 $r \in \mathrm{dom}(Q)$ 和 $t \in T$，我们得到

$$(\psi_{P_0,F_1(r)})^{-1} \circ \psi_{P_1,F_0(r)} = \rho g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}(r).$$

定义 6.3。设 $\pi: E \to X$ 和 $\pi': E' \to X$ 是 X 上两个纤维为 T、规范群为 G 的微分学纤维丛，它们对应于 G 在 T 上的光滑作用 $\rho : G \to \mathrm{Diff}(T)$，其数据如定义 6.1 所给。$\Phi$ 与 $\pi$ 和 $\pi'$ 之间的同构是光滑投影的一个 X-等价，并伴有 $\mathscr{C} = \{P_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 和 $\mathscr{C}' = \{P'_{\alpha'}\}_{\alpha' \in I'}$ 的公共细化 $\mathscr{B} = \{R_\beta\}_{\beta \in J}$，以及细化映射 $\pi: J \to I$ 和 $\pi': J' \to I$ 、一族态射 $\to P \Phi f \mathscr{B} = \{R_\beta\}_{\beta \in J} f \mathscr{C}' = \{P'_{\alpha'}\}_{\alpha' \in}()$，使得
态射 $\lambda: J \to I$ 和 $\lambda': J \to I'$、一族 $\{P^{\lambda(\beta)} {}_f\xleftarrow{\beta} R^\beta {}_f\xrightarrow{\beta} P'_{\lambda'(\beta)}\}_{\beta \in J}$ 图的态射，使得

- 对于每个 $\beta \in J$，都存在一个光滑映射 $h^\beta : \mathrm{dom}(R^\beta) \to G$，使得

$$\Phi \circ \psi_{P_{\lambda(\beta)}}\left(f_\beta(r), t\right) = \psi'_{P'_{\lambda'(\beta)}}\left(f'_\beta(r), \rho h_\beta(r)(t)\right),$$

对于所有 $(r,t) \in \mathrm{dom}(R^\beta) \times T$ .

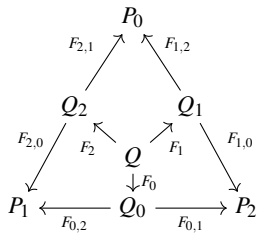
该条件意味着

$$\left(\psi'_{P'_{\lambda'(\beta)}, f'_\beta(r)}\right)^{-1} \circ \Phi \circ \psi_{P_{\lambda(\beta)}, f_\beta(r)} = \rho h_\beta(r).$$

同构关系在 X 上纤维为 T、规范群为 G 的微分学纤维丛集合上定义了一个等价关系。用 $\mathrm{Bund}_T$ (X,G) 表示该关系的等价类集合。

6.1. 与 1 次（非阿贝尔）微分切赫上同调的关系。

定义 6.4. 设 $\mathscr{C}$ 是 X 的一个覆盖生成族。取值于 G 的微分切赫 1-上闭链，是对每个 1-单形 $P_0 \xleftarrow{F^1} Q \xrightarrow{F^0} P_1$ on $\mathscr{C}$ 指定一个光滑映射 $g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1} : \mathrm{dom}(Q) \to G$，使得对于任意 2-单纯形 on $\mathscr{C}$




我们有上闭链恒等式

$$g_{P_0 \xleftarrow{F_{2,1}} Q_2 \xrightarrow{F_{2,0}} P_1}(F_2(r)) \quad g_{P_1 \xleftarrow{F_{0,2}} Q_0 \xrightarrow{F_{0,1}} P_2}(F_0(r)) = g_{P_0 \xleftarrow{F_{1,2}} Q_1 \xrightarrow{F_{1,0}} P_2}(F_1(r))$$

对于所有 $r \in \mathrm{dom}(Q)$，两个微分几何 Čech 1-上闭链

$$\{g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}\}_{1-\mathrm{simplexes}(\mathscr{C})} \qquad \text{and} \qquad \{g'_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}\}_{1-\mathrm{simplexes}(\mathscr{C})}$$

当且仅当存在一个光滑映射族 $\{h_P : \mathrm{dom}(P) \to G\}_{P \in \mathscr{C}}$，使得

$$g'_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}(r) \quad (h_{P_1} \circ F_0(r)) = (h_{P_0} \circ F_1(r)) \quad g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}(r).$$

对于每个 1-单形 $P_0 \xleftarrow{F^1} Q \xrightarrow{F^0} P_1$ 在 $\mathscr{C}$ 上成立。我们将微分几何 ˇCech 1-上闭链的等价类集合记为 $H^1(X\ \mathscr{C}, G)$。

细化 $\lambda :\ \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ 诱导出一个自然映射 $\lambda^* :\ H^1(X\ \mathscr{C}; G) \to H^1(X\ \mathscr{C}'; G)$，将类 $\left(\{g_{P_0 F^1 \leftarrow Q \xrightarrow{F^0} P_1}\}_{1-\mathrm{simplexes}(\mathscr{C})}\right)$ 通过拉回映为类 $\left(\{g_{P_0 F^1 \leftarrow Q \xrightarrow{F^0} P_1}\}_{1-\mathrm{simplexes}(\mathscr{C}')}\right)$。与阿贝尔情形类似，这给出了一个映射 $j(\mathscr{C}', \mathscr{C}) : H^1(X\ \mathscr{C}; A) \to H^1(X\ \mathscr{C}'; A)$，且与具体的细化映射无关。因此，我们得到一个函子

$$H^1(X, -; G) : \mathsf{CGF}(X)^{op} \to \mathsf{Set}.$$

ˇ 定义 6.5。我们将 X 上以 G 为系数的第一非阿贝尔微分学切赫上同调定义为

$$\check{H}^1(X;G) = \varinjlim_{\mathscr{C}} H^1(X,\mathscr{C};G).$$

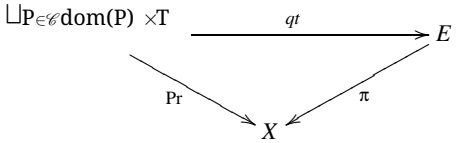
构造 6.6。设给定覆盖生成族 $\mathscr{C}$ 上的微分学切赫 1-上闭链 $\{g_{P_0 F\leftarrow}{}^1 Q \overset{F_0}{\to} P_1\}^{1-\text{simplexes}(\mathscr{C})}$。考虑微分学和空间

$$\bigsqcup_{P\in\mathscr{C}} \mathrm{dom}(P)\times T,$$

并在其上定义等价关系 ∼如下:

- ♦ $(P,r,t)\sim(P',r',t')$ *if and only if there are morphisms* $P \xleftarrow{F} Q \xrightarrow{F'} P'$ *such that* $F(s)=r$ *and* $F'(s)=r'$ *for some* $s\in\mathrm{dom}(Q)$*, and* $t = \rho g_{P\xleftarrow{F} Q\xrightarrow{F'} P'}(s)(t')$.

我们得到交换图




其中各箭头均为光滑映射，E 是微分学商空间，q 是商映射，并且对于每个 (P,r,t) ∈ ⊔P∈𝒞 dom(P) ×T，都有 Pr(P,r,t) =P(r)。

注 6.7. 注意，条件 ♦ 等价于说

$$(P,r,t)\sim(P',r',t') \text{ if and only if } P(r)=x=P'(r') \text{ and } t=\rho g_{P\xleftarrow{r} \mathbf{x}\xrightarrow{r'} P'}(0)(t').$$

命题 6.8. 光滑映射 π: $E$ →X 由构造 *6.6* 给出，它是 X 上具有规范群 G 和典型纤维 T 的微分学纤维丛，其过渡函数是给定的微分空间 Čech 1-上闭链。

证明。对每个 P ∈ $\mathscr{C}$，定义

$$\overline{\psi_P}:\mathrm{dom}(P)\times T\to P^*E \qquad \text{by} \qquad \overline{\psi_P}(r,t)=(\mathrm{Pr}_1,qt)(r,t)=(r,[P,r,t]).$$

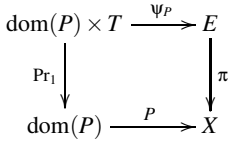
显然，$\overline{\psi_P}$ 是良定义、光滑且纤维保持的。为验证 $\overline{\psi_P}$ 是双射，假设 (r,[P′,s,t′]) 是 P*E 的一个元素。则 x :=P(r) = P′(s)，由此得到 $\mathscr{C}$ 上的 1-单形 $P' \mathbf{s}\longleftarrow \mathbf{x}\, \mathbf{r}\longrightarrow P$。因此，[P′,s,t′] = [P,r ρ $\left(g_{P\, r\longleftarrow \mathbf{x}\, s\longrightarrow P'}(0)\right)$(t′)]。这导出一个良定义映射

$$\phi_P: P^*E\to \mathrm{dom}(P)\times T \qquad \text{by} \qquad \phi_P(r,[P',s,t'])=\left(r,\rho\, g_{P'\xleftarrow{s}\mathbf{x}\xrightarrow{r} P}(0)(t')\right),$$

它确实是 $\overline{\psi_P}$ 的逆映射。要证明 $\overline{\psi_P}$ 是微分同胚，只需证明 $\overline{\psi_P}$ 是下沉映射。设 (F,[P′,F′,α]) 是 P*E 中的一个图，其中 α : V →T 是 T 中的一个图，F : V →dom(P) 是 dom(P) 中的一个图，而 F′: V →dom(P′) 是 dom(P′) 中的一个图。由于 Q :=P′ ∘F′ =P ∘F，态射 $P' F\leftarrow{}' Q\, F\longrightarrow P$ 已构造出来，因此我们可以写成

$$\psi_P(F\ ,\ \rho\left(g_{P\xleftarrow{F} Q\xrightarrow{F'} P'}\right)\cdot\alpha)=(F,[P,F,\rho\left(g_{P\xleftarrow{F} Q\xrightarrow{F'} P'}\right)\cdot\alpha])=(F,[P',F',\alpha]).$$

现在考虑 $\psi_P$ :=P# ∘$\overline{\psi_P}$: dom(P) ×T →E，使得该交换图



是 Diff 中的一个拉回。微分几何 Čech 1-上闭链 $g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}$ 扮演过渡函数的角色：事实上，对于每个 1-单形 $P_0 \xleftarrow{F^1} Q \xrightarrow{F^0} P_1$ 在 $\mathscr{C}$ 上，我们有

$$\begin{aligned}\psi_{P_1}\big(F_0(r),t\big) &= [P_1, F_0(r), t] \\ &= [P_0, F_1(r), \rho\, g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}(r)(t)] \\ &= \psi_{P_0}\big(F_1(r), \rho\, g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}(r)(t)\big),\end{aligned}$$

对所有 $(r,t) \in \mathrm{dom}(Q) \times T$。 □

定理 6.9。对于每个 $\mathscr{C} \in \mathrm{CGF}(X)$，存在一个良定义映射

$$\eta_{\mathscr{C}} : H^1(X, \mathscr{C}, G) \to \mathrm{Bund}_T(X, G)$$

将微分空间 ˇCech 1-上闭链 $\{g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}\}_{1-\mathrm{simplexes}(\mathscr{C})}$ 的等价类映射到其对应的微分学纤维丛的等价类，该映射由构造 6.6给出，使得

$$\eta_{\mathscr{C}} = \eta_{\mathscr{C}'} \circ j(\mathscr{C}', \mathscr{C}),$$

对于覆盖生成族的任意细化 $\mathscr{C}' \to \mathscr{C}$。特别地，根据泛性质，我们得到一个唯一映射

$$\Theta : \check{H}^1(X, G) \to \mathrm{Bund}_T(X, G)$$

它具有如下性质： $\eta_{\mathscr{C}} = \Theta \circ \zeta_{\mathscr{C}}$，其中 $\zeta_{\mathscr{C}}$: $H^1(X\ \mathscr{C}, G) \to \check{H}^1(X,G)$ 是由 CGF(X) 的余极限定义给出的映射。此外，映射 $\Theta$ 是一个双射对应。

6.2. 一些应用。

命题 6.10. X 上纤维为 T、规范群为 Diff(T )、作用为 id : Diff(T ) →Diff(T ) 的微分学纤维丛，恰好就是 X 上纤维为 T 的通常的微分学纤维丛。因此，$\check{H}^1$(X,Diff(T )) 与 $\mathrm{Bund}_T$ (X,Diff(T )) ≅Bund fiber(X,T ) 之间存在双射对应。

证明. 设 π: E →X 是一个纤维为 T 的通常的微分学纤维丛。取 X 中所有满足存在微分同胚 $\overline{\psi_P}$: dom(P) × T →P*E 的图 P 组成的集合 $\mathscr{C}$。X 中所有常值图都属于这个集合，因此 $\mathscr{C}$ 是 X 的一个参数化覆盖。设 Q : V →X 是任意一个图。根据定义，拉回 Q*π : Q*X →V 的纤维 T 局部平凡。因此，存在 $V_i\}_{i\in J}$的一个开覆盖 {，使得对所有 i ∈J，$(Q|_{V_i})^*\pi$ 都是平凡的。因此，Q 是属于 $\mathscr{C}$ 的一族图的上确界，所以 $\mathscr{C}$是 X 的一个覆盖生成族。对每个 P ∈$\mathscr{C}$，$\psi_P := P_\# \circ \overline{\psi_P}$满足定义 6.1 的条件 (a)。对 $\mathscr{C}$ 上的每个 1-单形 $P_0 \xleftarrow{F^1} Q \xrightarrow{F^0} P_1$，定义

$$g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1} : \mathrm{dom}(Q) \to \mathrm{Diff}(T) \quad \text{by} \quad g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}(r) := (\psi_{P_0, F_1(r)})^{-1} \circ \psi_{P_1, F_0(r)}.$$

不难验证 $g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1} : \mathrm{dom}(Q) \to \mathrm{Diff}(T)$ 是满足定义 6.1 条件 (b) 的光滑映射。根据注记 6.2和命题 2.27，反向结论显然成立。 □

命题 6.11。考虑由 ρ(g) ↦ $L_g$ 定义的映射 ρ: G →Diff(G)，它是由左变换诱导的 G 在自身上的光滑作用。那么，X 上带规范群 G 且纤维为 G 的微分学纤维丛，恰好就是 X 上的微分拓扑 G-主丛。因此，$\check{H}^1$(X,G) 与 $\mathrm{Bund}_G$(X,G) ≅ $\mathrm{Bund}_{Prin}$(X,G) 之间存在双射对应。显然，当 G 为阿贝尔群时，第一微分拓扑 ˇCech 上同调群 $\check{H}^1$(X,G) 与 $\mathrm{Bund}_{Prin}$(X,G) 之间存在双射对应。

证明。设 π: E →X 是一个微分学 G-主丛。与命题 6.10 类似，我们可以指定局部平凡化。此外，对于每个 1-单形 $P_0 \xleftarrow{F^1} Q \xrightarrow{F^0} P_1$，取 $P_0, P_1 \in \mathscr{C}$

$$g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1} : \mathrm{dom}(Q) \to G \quad \text{by} \quad g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}(r) := (\psi_{P_0, F_1(r)})^{-1} \circ \psi_{P_1, F_0(r)}(1_G),$$

其中 $1_G$ 是 G 的单位元。

反过来，假设 $\pi: E \to X$ 是一个带规范群 $G$、纤维为 $G$ 的微分纤维丛。根据定理 6.9，$\pi: E \to X$ 同构于由构造 6.6 根据 $\pi : E \to X$ 的过渡函数所给出的相应微分学纤维丛。不难看出，相应的微分学纤维丛是一个微分学 $G$-主丛，并带有 $G$ 的自然光滑作用，因此，$\pi: E \to X$ 是一个微分学 $G$-主丛。□

命题 6.12. 设 V 是一个微分学向量空间，并令 GL(V ) 表示所有微分学向量空间之间的线性同构构成的空间。令 $\rho$: GL(V ) $\hookrightarrow$ Diff(V ) 为 GL(V ) 在 V 上的线性作用。那么，X 上规范群为 GL(V )、典型纤维为 V 的微分学纤维丛，与 X 上典型纤维为 V 的微分学向量丛相同。此外，$\check{H}^1$(X,GL(V )) 与 $\mathrm{Bund}_V$(X,GL(V )) $\cong \mathrm{Bund}_{Vect}$(X,V ) 之间存在双射对应。

证明。证明很直接。 □

注记 6.13。通过这种方式，可以将微分学仿射丛简单地定义为具有规范群 Affin(A) 的微分学纤维丛，其中典型纤维 A 是一个微分学仿射空间，并具有自然作用 $\rho$: Affin(A) $\hookrightarrow$ Diff(A)。换言之，X 上的微分学仿射空间 $\pi$: E $\to$ X 是一个微分学仿射丛，当且仅当存在 X 的一个覆盖生成族 $\mathscr{C}$，使得对于每个 P $\in \mathscr{C}$，其拉回是纤维类型为 A 的平凡丛，即存在一个保纤维微分同胚 $\psi_P$ : dom(P) $\times$A $\to$ P*E，使得对于每个 r $\in$ dom(P)，限制 $\Psi_{P,\ r}$ : A $\to$ $E^{P(r)}$ 是微分学仿射空间的一个同构。因此，在 $\check{H}^1$(X,Affin(A)) 与 $\mathrm{Bund}_{Aff}$(X,Affin(A)) 之间存在双射对应。

6.3. 定理的证明**6.9**。

命题6.14. 若两个微分空间 Čech 1-上闭链

$$\{g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}\}_{1-\mathrm{simplexes}(\mathscr{C})} \qquad \textit{and} \qquad \{g'_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}\}_{1-\mathrm{simplexes}(\mathscr{C})}$$

在覆盖生成族上 $\mathscr{C}$ 等价，则由构造 *6.6*给出的相应微分空间纤维丛同构。

证明. 假设两个微分空间 Čech 1-上闭链

$$\{g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}\}_{1-\mathrm{simplexes}(\mathscr{C})} \qquad \text{and} \qquad \{g'_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}\}_{1-\mathrm{simplexes}(\mathscr{C})}$$

等价。根据定义，存在一族 $\{h_P : \mathrm{dom(P)} \to \mathrm{G}\}_{P \in \mathscr{C}}$ 的光滑映射，使得

$$g'_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}(r) \quad (h_{P_1} \circ F_0(r)) = (h_{P_0} \circ F_1(r)) \quad g_{P_0 \xleftarrow{F_1} Q \xrightarrow{F_0} P_1}(r).$$

令 $\pi$: E $\to$ X 和 $\pi$: E′ $\to$ X 分别为根据构造 6.6，与这些微分学 ˇCech 1-上闭链对应的微分空间纤维丛。定义 $\Phi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$，使得 $\Phi$([P,r,t]) =[P,r$\rho h_P$(r)(t)]。为说明 $\Phi$ 定义良好，设 [P,r,t] = [P′,r′,t′]。那么存在态射 P $\xleftarrow{F}$ Q $\xrightarrow{F'}$ P′，使得对于某个 s $\in$ dom(Q)，F(s) = r 且 F′(s) = r′，并且 t = $\rho g_{P \xleftarrow{F} Q \xrightarrow{F'} P'}$(s)(t′)。因此，

$$\begin{aligned}
\rho\left(h_P(r)\right)(t) = \rho\left(h_P(F(s))\right)(t) &= \rho\left(h_P(F(s))\right) \circ \left(\rho\left(g_{P \xleftarrow{F} Q \xrightarrow{F'} P'}(s)\right)(t')\right) \\
&= \rho\left(h_P(F(s)) * \left(g_{P \xleftarrow{F} Q \xrightarrow{F'} P'}(s)\right)(t')\right) \\
&= \rho\left(g'_{P \xleftarrow{F} Q \xrightarrow{F'} P'}(s) * (h_{P'} \circ F'(s))\right)(t')) \\
&= \rho\left(g'_{P \xleftarrow{F} Q \xrightarrow{F'} P'}(s) \circ \rho\left(h_{P'} \circ F'(s)\right)\right)(t')) \\
&= \rho\left(g'_{P \xleftarrow{F} Q \xrightarrow{F'} P'}(s) \circ \rho\left(h_{P'}(r)\right)\right)(t'))
\end{aligned}$$

因此， $[P,r\ \rho h_P(r)(t)] = [P',r',\rho h_{P'}(r')(t')]$。显然， $\Phi$ 是光滑的。类似地，映射 $\Psi : E' \to E$ 定义为 $\Psi([P,r,t]) = [P,r\ \rho h_P(r)^{-1}(t)]$，是 $\Phi$ 的光滑逆映射。因此， $\Phi$ 是一个微分同胚。此外，

$$\pi' \circ \Phi([P,r,t]) = \pi'([P,r,\rho h_P(r)(t)]) = P(r) = \pi([P,r,t]).$$

容易验证，对于每个 $P \in \mathscr{C}$， $\Phi$与上文给出的 $h_P : \mathrm{dom}(P) \to G$，以及根据命题 6.8 的证明给出的映射 $\psi_P : \mathrm{dom}(P) \times T \to E$ 和 $\psi'_P : \mathrm{dom}(P) \times T \to E'$，是 $\pi$ 与 $\pi'$之间的一个同构。□

根据命题 6.14，我们得到一个良定义映射 $\eta_{\mathscr{C}} : H^1(X\ \mathscr{C}, G) \to \mathrm{Bund}_T(X,G)$ 对所有 $\mathscr{C} \in \mathsf{CGF}(X)$。

命题 6.15。映射 $\eta_{\mathscr{C}} : H^1(X\ \mathscr{C}, G) \to \mathrm{Bund}_T(X,G)$ 满足以下条件

$$\eta_{\mathscr{C}} = \eta_{\mathscr{C}'} \circ j(\mathscr{C}', \mathscr{C}),$$

对于覆盖生成族的任意细化 $\mathscr{C}' \to \mathscr{C}$，其中 $j(\mathscr{C}', \mathscr{C}) : H^1(X\ \mathscr{C}; A) \to H^1(X\ \mathscr{C}'; A)$ 是由该细化诱导的映射。

证明。假设 $\mathscr{C} = \{P_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 和 $\mathscr{C}' = \{P'_\beta\}_{\beta \in J}$ 是 X 的覆盖生成族，并设$\mathscr{C}' \prec \mathscr{C}$是一个细化，配有细化映射 $\lambda : J \to I$，以及一族态射 $P'_\beta \xrightarrow{f_\beta} P_{\lambda(\beta)}$ 之间的态射 $\{f_\beta\}_{\beta \in J}$。为了验证 $\eta_{\mathscr{C}} = \eta_{\mathscr{C}'} \circ j(\mathscr{C}', \mathscr{C})$，我们需要检查映射

$$\begin{aligned} \Xi : \bigsqcup_{\beta \in J} \mathrm{dom}(P'_\beta) \times T / \sim \quad &\longrightarrow \quad \bigsqcup_{\alpha \in I} \mathrm{dom}(P_\alpha) \times T / \sim \\ [P'_\beta, r, t] \quad &\longmapsto \quad [P_{\lambda(\beta)}, f_\beta(r), t] \end{aligned}$$

是一个微分同胚，其中商空间按照构造 6.6 定义。显然， $\Xi$ 是光滑的。为证明单射性，设 $\Xi[P'_{\beta_1}, r_1, t_1] = \Xi[P'_{\beta_2}, r_2, t_2]$，使得 $[P_{\lambda(\beta_1)}, f_{\beta_1}(r_1), t_1] = [P_{\lambda(\beta_2)}, f_{\beta_2}(r_2), t_2]$。于是存在态射 $P_{\lambda(\beta_1)} \xleftarrow{F} Q \xrightarrow{\beta_2} P_{\lambda(\beta_2)}$，使得对于某个 $s \in \mathrm{dom}(Q)$，有 $F_{\beta_1}(s) = f_{\beta_1}(r_1)$ 且 $F_{\beta_2}(s) = f_{\beta_2}(r_2)$，并且 $t_1 = \rho_{F(s)}(t_2)$。这意味着

$$x := P'_{\beta_1}(r_1) = P_{\lambda(\beta_1)} \circ f_{\beta_1}(r_1) = P_{\lambda(\beta_1)} \circ F_{\beta_1}(s) = P_{\lambda(\beta_2)} \circ F_{\beta_2}(s) = P_{\lambda(\beta_2)} \circ f_{\beta_2}(r_2) = P'_{\beta_2}(r_2)$$

从而得到

$$\begin{aligned} \rho g_{P'_{\beta_1} \xleftarrow{r} x \xrightarrow{r'} P'_{\beta_2}}(0)(t_2) &= \rho g_{P_{\lambda(\beta_1)} \xleftarrow{x} x \xrightarrow{x} P_{\lambda(\beta_2)}}(0)(t_2) \\ &= \rho g_{P_{\lambda(\beta_1)} \xleftarrow{F_{\beta_1}} Q \xrightarrow{F_{\beta_2}} P_{\lambda(\beta_2)}}(s)(t_2) = t_1 \end{aligned}$$

因此， $[P'_{\beta_1}, r_1, t_1] = [P'_{\beta_2}, r_2, t_2]$。现在只需证明 $\Xi$是一个下沉映射。设 Q 是 $\bigsqcup_{\alpha \in I} \mathrm{dom}(P_\alpha) \times T / \sim$中的一个图，且 $r \in \mathrm{dom}(Q)$。于是存在 r 的一个开邻域 U、一个 $\alpha \in I$，以及 $\mathrm{dom}(P_\alpha)$ 和 T 中的图 G 和 R，使得 $Q|_U = [P_\alpha, G, R]$。由于 $\mathscr{C}'$是 X 的覆盖生成族，因此存在 G(r) 在 $\mathrm{dom}(P_\alpha)$ 中的一个开邻域 V、一个图 $P'_\beta \in \mathscr{C}'$，以及定义域之间的一个光滑映射 F，使得 $P_\alpha|_V = P'_\beta \circ F$，由此得到 1-单形

$P_\alpha \xleftarrow{\iota} P_\alpha|_V \xrightarrow{f_\beta \circ F} P_{\lambda(\beta)}$。那么 $[P'_\beta, F, \rho g_{P_\alpha \xleftarrow{\iota} P_\alpha|_V \xrightarrow{f_\beta \circ F} P_{\lambda(\beta)}} \circ G \cdot R]$ 是 $\bigsqcup_{\beta \in J} \mathrm{dom}(P'_\beta) \times T / \sim$中的一幅图

使得

$$\begin{aligned} \Xi \circ [P'_\beta, F, \rho g_{P_\alpha \xleftarrow{\iota} P_\alpha|_V \xrightarrow{f_\beta \circ F} P_{\lambda(\beta)}} \circ G \cdot R] &= [P_{\lambda(\beta)}, f_\beta \circ F, \rho g_{P_\alpha \xleftarrow{\iota} P_\alpha|_V \xrightarrow{f_\beta \circ F} P_{\lambda(\beta)}} \circ G \cdot R] \\ &= [P_\alpha, G, R] = Q|_U. \end{aligned}$$

同理，可以验证 $\Xi$ 是满射，因此它是一个下沉映射。□

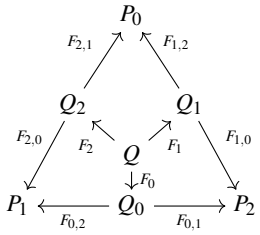
根据泛性质，我们得到唯一的映射

$$\Theta : \check{H}^1(X, G) \to \mathrm{Bund}_T(X, G)$$

满足如下性质： $\eta_{\mathscr{C}} = \Theta \circ \zeta_{\mathscr{C}}$，其中 $\zeta_{\mathscr{C}}: \mathrm{H}^1(\mathrm{X}\ \mathscr{C},\mathrm{G}) \to \check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X},\mathrm{G})$ 是由 $\mathscr{C} \in \mathrm{CGF}(\mathrm{X})$ 的余极限定义给出的映射。

另一方面，可以观察到，带规范群的微分空间纤维丛的转移函数表现得像取值于层 $G$ 中的微分学切赫 1-上闭链（见例 3.4）。事实上，

(a) $\mathrm{g}_{P \xleftarrow{F} Q \xrightarrow{F} P}(\mathrm{r})$ 是取值为 $1_G$ 的常值映射，其中 $1_G$ 表示 G 的单位元；(b) 对所有 $\mathrm{r} \in \mathrm{dom}(\mathrm{Q})$，$\mathrm{g}_{P_0 \xleftarrow{F} Q \xrightarrow{F} P_1}(\mathrm{r})$ 是 G 中 $\mathrm{g}_{P_1 \xleftarrow{F_0} Q \xrightarrow{F_1} P_0}(\mathrm{r})$ 的逆映射。(c) 如果




是 $\mathscr{C}$ 上的一个 2-单纯形，那么

$$g_{P_0 \xleftarrow{F_{2,1}} Q_2 \xrightarrow{F_{2,0}} P_1}(F_2(r)) \quad g_{P_1 \xleftarrow{F_{0,2}} Q_0 \xrightarrow{F_{0,1}} P_2}(F_0(r)) = g_{P_0 \xleftarrow{F_{1,2}} Q_1 \xrightarrow{F_{1,0}} P_2}(F_1(r))$$

对所有 $\mathrm{r} \in \mathrm{dom}(\mathrm{Q})$ .

这启发我们定义映射 $\Delta: \mathrm{Bund}_T(\mathrm{X},\mathrm{G}) \to \check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X},\mathrm{G})$，将带规范群的微分学纤维丛的等价类映射到其转移函数作为微分学切赫 1-上闭链所得的等价类。

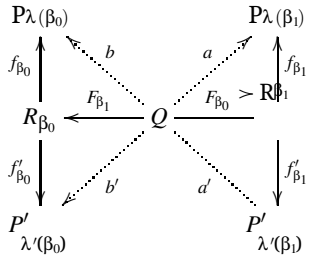
命题 6.16. 映射 $\Delta: \mathrm{Bund}_T(\mathrm{X},\mathrm{G}) \to \check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X},\mathrm{G})$ 定义良好。

证明。 设 $\pi: E \to X$ 和 $\pi': E' \to X$ 是带规范群 $G$ 和典型纤维 $T$ 的微分学纤维丛，定义于 $X$ 上，其数据如定义 6.1所给。假设 $\Phi$ 是 $\pi$ 与 $\pi'$ 之间的同构，并且存在 $\mathscr{C} = \{\mathrm{P}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 和 $\mathscr{C}' = \{\mathrm{P}'_{\alpha'}\}_{\alpha' \in I'}$ 的公共细化 $\mathscr{B} = \{\mathrm{R}_\beta\}_{\beta \in J}$，同时
细化映射 $\lambda: \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ 和 $\lambda': \mathrm{J} \to \mathrm{I}'$，以及一族 $\{\mathrm{P}^{\lambda(\beta)} \xleftarrow{f^{\beta}} \mathrm{R}^{\beta} \xrightarrow{f^{'}_{\beta}} \mathrm{P}'^{\lambda'(\beta)}\}_{\beta \in J}$ 图的态射，使得对每个 $\beta \in \mathrm{J}$，都存在一个光滑映射 $\mathrm{h}^{\beta}: \mathrm{dom}(\mathrm{R}^{\beta}) \to \mathrm{G}$，使得

$$\Phi \circ \psi_{P_{\lambda(\beta)}}(f_\beta(r), t) = \psi'_{P'_{\lambda'(\beta)}}\left(f'_\beta(r), \rho h_\beta(r)(t)\right),$$

对所有 $(\mathrm{r},\mathrm{t}) \in \mathrm{dom}(\mathrm{R}^{\beta}) \times \mathrm{T}$。

为完成证明，只需证明在 $\mathscr{B}$ 上，$\lambda^* \mathrm{g}$ 与 $\lambda'^* \mathrm{g}'$ 等价，其中 g 和 $\mathrm{g}'$ 分别表示 $\pi$ 和 $\pi'$ 的过渡函数。设 $\mathrm{R}^{\beta_0} \xleftarrow{F^{\beta_1}} \mathrm{Q} \xrightarrow{F^{\beta_0}} \mathrm{R}^{\beta_1}$ 是 $\mathscr{B}$ 上的一个 1-单形。那么图表



交换，因此 1-单形 $P\lambda_{(\beta_0)}\ b \longleftarrow Q\ a \longrightarrow P\lambda_{(\beta_1)}$ 和 $P'_{\lambda'(\beta_0)}\ b' \longleftarrow Q\ a' \longrightarrow P'_{\lambda'(\beta_1)}$ 分别在 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 上实现。因此，对于每个 $r \in \mathrm{dom}(Q)$，我们可以写成

$$\begin{aligned}
\rho\lambda'^{*}g'_{R_{\beta_0}\xleftarrow{F_{\beta_1}}Q\xrightarrow{F_{\beta_0}}R_{\beta_1}}(r)\circ\rho(h_{\beta_1}\circ F_{\beta_0}(r)) &= \rho\, g'_{P'_{\lambda'(\beta_0)}\xleftarrow{b'}Q\xrightarrow{a'}P'_{\lambda'(\beta_1)}}(r)\circ\left(\psi'_{P'_{\lambda'(\beta_1)},a'(r)}\right)^{-1}\circ\Phi\circ\psi_{P_{\lambda(\beta_1)},a(r)}\\
&= \left(\psi'_{P_{\lambda'(\beta_0)},b'(r)}\right)^{-1}\circ\Phi\circ\psi_{P_{\lambda(\beta_1)},a(r)}\\
&= \left(\psi'_{P_{\lambda'(\beta_0)},b'(r)}\right)^{-1}\circ\Phi\circ\psi_{\lambda(\beta_0),b(r)}\circ\rho\, g_{P_{\lambda(\beta_0)}\xleftarrow{b}Q\xrightarrow{a}P_{\lambda(\beta_1)}}(r)\\
&= \rho(h_{\beta_0}\circ F_{\beta_1}(r))\circ\rho\, g_{P_{\lambda(\beta_0)}\xleftarrow{b}Q\xrightarrow{a}P_{\lambda(\beta_1)}}(r)\\
&= \rho(h_{\beta_0}\circ F_{\beta_1}(r))\circ\rho\lambda^{*}g_{R_{\beta_0}\xleftarrow{F_{\beta_1}}Q\xrightarrow{F_{\beta_0}}R_{\beta_1}}(r).
\end{aligned}$$

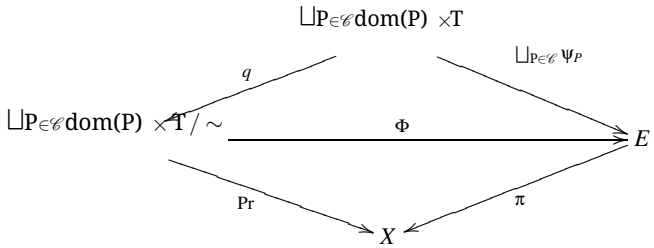
由于 $\rho$ 是忠实作用，我们得出

$$\lambda'^{*}g'_{R_{\beta_0}\xleftarrow{F_{\beta_1}}Q\xrightarrow{F_{\beta_0}}R_{\beta_1}}(r)\quad h_{\beta_1}\circ F_{\beta_0}(r) = h_{\beta_0}\circ F_{\beta_1}(r)\quad \lambda^{*}g_{R_{\beta_0}\xleftarrow{F_{\beta_1}}Q\xrightarrow{F_{\beta_0}}R_{\beta_1}}(r).$$

因此，class(g) 和 class(g′) 在 $\check{}H^1(X,G)$ 中相同。 □

命题 6.17。 设 $\pi: E \to X$ 是 X 上具有规范群 G 和典型纤维 T 的微分学纤维丛。那么 $\pi$ 同构于根据构造 π6.6所得到的、具有规范群 G 且对应于 的过渡函数的微分学纤维丛。

证明。设 $\pi: E \to X$ 是一个微分学纤维丛，其数据如定义 6.1 所给出。令 $\mathrm{Pr} : \bigsqcup_{P\in\mathscr{C}} \mathrm{dom}(P) \times T / \sim \to X$ 为根据构造 6.6 对应于 $\pi$ 的过渡函数的微分学纤维丛。考虑良定义映射 $\Phi: \bigsqcup_{P\in\mathscr{C}}\mathrm{dom}(P) \times T / \sim \to E$，其中 $\Phi([P,r,t]) = \psi_P(r,t)$。那么图表




可交换。因此，要证明 $\Phi$ 是同构，我们必须证明它是微分同胚。

我们断言 $\bigsqcup_{P\in\mathscr{C}}\psi_P : \bigsqcup_{P\in\mathscr{C}}\mathrm{dom}(P) \times T \to E$ 是一个下沉映射，这意味着根据 Φ §1.51], [11, 是一个下沉映射。为证明 $\bigsqcup_{P\in\mathscr{C}}\psi_P$ 是满射，取 $\xi \in E$。由于 $\mathscr{C}$ 是 X 的一个参数化覆盖，存在 $P \in \mathscr{C}$ 和 $r \in \mathrm{dom}(P)$，使得 $\pi(\xi) = P(r)$。因此， $\xi$ 是 $E^{P(r)}$ 中的一个元素，我们可以找到 $t \in T$，使得 $\psi_{P,r}(r) = \xi$，或者 $\psi_P(r,t) = \xi$。现在，令 $Q : V \to E$ 为 E 中任意一个图，并令 $r \in V$。由于 $\mathscr{C}$ 是 X 的覆盖生成族，且 $\pi\circ Q$ 是 X 中的一个图，我们可以写成 $\pi\circ Q|_{V'} = P \circ F$，其中某个 $P \in \mathscr{C}$ 和一个光滑映射 $F : V' \to \mathrm{dom}(P)$ 定义在 r 的开邻域 $V' \subseteq V$ 上。于是 $(F, Q|_{V'})$ 是 $P^{*}E$ 中的一个图。令 $L := (\overline{\psi_P})^{-1}\circ(F, Q|_{V'})$，使得 $(\bigsqcup_{P\in\mathscr{C}}\psi_P)\circ L = Q|_{V'}$。

为完成证明，只需证明 $\Phi$ 是单射。令 $\Phi([P,r,t]) = \Phi([P',r',t'])$，使得 $\psi_P(r,t) = \psi_{P'}(r', t')$ 或 $\psi_{P,r}(t) = \psi_{P',r'}(t')$。于是 $x := P(r') = P(r')$，并且在 $\mathscr{C}$ 上得到了 1-单形 $P'\ r \xleftarrow{\ r'\ } x\ r \longrightarrow P$。根据注记 6.2,

$$\rho\, g_{P'\xleftarrow{r'}x\xrightarrow{r}P}(0)(t') = (\psi_{P,r})^{-1}\circ\psi_{P',r'}(t') = (\psi_{P,r})^{-1}\circ\psi_{P,r}(t) = t.$$

因此， $[P,r,t] = [P',r',t']$。 □

命题 6.18。映射 $\Theta : \check{}H^1(X,G) \to \mathrm{Bund}_T(X,G)$ 是双射对应。

证明。 鉴于命题 6.8 和 6.17，不难看出 $\Delta$ 是 $\Theta$的逆映射。 □

附录 A. 微分空间的切赫上同调的其他版本

A.1. D-开子集 site 上的切赫上同调。一般而言，切赫上同调可以推广到格罗滕迪克位点上的（预）层（参见例如 [17]）。对于微分空间 X，我们可以考虑两个自然的位点：D-开子集的 D-Open(X) 和图的 Plots(X)。Plots(X) site 上的切赫上同调产生预层 $\check{H}^\bullet$，其将 $P \mapsto$ 赋为 $\check{H}^\bullet(\mathrm{dom}(P);A_P)$，其中 $\check{H}^\bullet(\mathrm{dom}(P);A_P)$ 是 dom(P) 上以 $A_P$ 为系数的通常切赫上同调。然而，D-Open(X) site 上的切赫上同调与 D-拓扑空间 X 上以 $\Sigma A$ 为系数的通常切赫上同调相同。在本附录中，我们证明，D- Open(X) site 上的切赫上同调与第 3 节所提供框架中的切赫上同调相同，该框架已在 [8]中提出。

设 $\mathscr{O} = \{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是微分空间 X 的一个 D-开覆盖，A 是 X 上的一个预层。那么，对于 X 中任意一个图 P，$\mathscr{O}_P = P^{-1}\mathscr{O} = \{P^{-1}(O_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ 是其定义域的一个覆盖。令

$$P_{\alpha_0,\dots,\alpha_n} := P|_{P^{-1}(O_{\alpha_0}\cap\cdots\cap O_{\alpha_n})} = P|_{P^{-1}(O_{\alpha_0})} \times_P \cdots \times_P P|_{P^{-1}(O_{\alpha_n})}$$

对于属于 $\mathscr{O}$ I 的元素的每个 n-单形 $O_{\alpha_0} \cap \quad \cap O_{\alpha_n}$，.特别地，图 P 是族 $\{P_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的上确界。

对于每个非负整数 n，的定义预层 P 对应到 ˇCech n-ˇ上链群

$$\check{C}^n(\mathscr{O};A)(P) := \prod_{n-\text{simplexes}} A(P_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}),$$

其从属于 dom(P) 上的覆盖 $\mathscr{O}_P$，系数取自预层 A(P)；并将每个态射 $Q \xrightarrow{F} P$ 对应到拉回同态 $F^\star : \check{C}^n(\mathscr{O}_P;A(P)) \to \check{C}^n(\mathscr{O}_Q;A(Q))$，该同态将 c 映为 $F^\star(c)$，使得

$$F^\star(c)\big(Q_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}\big) := F^*_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}\big(c(P_{\alpha_0,\dots,\alpha_n})\big).$$

此外，考虑定义在图的定义域上的 Čech 余边界算子之间的态射 $d : \check{C}^n(\mathscr{O};A) \to \check{C}^{n+1}(\mathscr{O};A)$。由此得到相应的截面群上链复形

$$0 \longrightarrow \Sigma\check{C}^0(\mathscr{O};A)(X) \xrightarrow{\Sigma d} \Sigma\check{C}^1(\mathscr{O};A)(X) \xrightarrow{\Sigma d} \Sigma\check{C}^2(\mathscr{O};A)(X) \xrightarrow{\Sigma d} \cdots$$

以及上同调群 $H^k(\Sigma\,\check{C}^\bullet(\mathscr{O};A))$ .

此外，根据定理 4.2], , 层 A 在 D-拓扑空间 X 上诱导出一个普通层 $\Sigma A$；根据定义，$A_P$ 也在 X 中的各图 P 的 dom(P) 上诱导出层。

命题 A.1. $\left(\check{C}^\bullet(\mathscr{O};\Sigma A), d_X\right)$ 与 $\left(\Sigma\,\check{C}^\bullet(\mathscr{O};A)(X)\ \Sigma d\right)$ 同构。

*Proof.* Consider the homomorphism $\Theta : \check{C}^n(\mathscr{O};\Sigma A) \to \Sigma\check{C}^n(\mathscr{O};A)(X)$ taking $c \in \prod_{n-\text{simplexes}} \Sigma A(O_{\alpha_0,\dots,\alpha_n})$ 到由下式定义的 $\Theta(c) \in \Sigma\,\check{C}^n(\mathscr{O};A)(X)$

$$\Theta(c)(P)(\alpha_0,\dots,\alpha_n) := c(\alpha_0,\dots,\alpha_n)(P_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}),$$

对 X 中的每个图 P 都成立。为证明 $\Theta(c)$ 定义良好，设 $Q \xrightarrow{F} P$ 是 X 中图之间的一个态射。那么

$$\begin{aligned} F^\star\big(\Theta(c)(P)\big)(\alpha_0,\dots,\alpha_n) &= F^*_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}\big(\Theta(c)(P)(\alpha_0,\dots,\alpha_n)\big) \\ &= F^*_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}\big(c(\alpha_0,\dots,\alpha_n)(P_{\alpha_0,\dots,\alpha_n})\big) \\ &= c(\alpha_0,\dots,\alpha_n)(Q_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}) \\ &= \Theta(c)(Q)(\alpha_0,\dots,\alpha_n), \end{aligned}$$

因此 $F^\star\big(\Theta(c)(P)\big) = \Theta(c)(Q)$。

另一方面，考虑映射 $\Delta\colon \Sigma\check{\mathrm{C}}^n(\mathscr{O};\mathrm{A})(\mathrm{X}) \to \check{\mathrm{C}}^n(\mathscr{O};\Sigma\mathrm{A})$，它将 $\sigma \in \Sigma\check{\mathrm{C}}^n(\mathscr{O};\mathrm{A})(\mathrm{X})$ 映至由 $\Delta(\sigma)(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)(\mathrm{P}) := \sigma(\mathrm{P})(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)$ 定义的 $\Delta(\sigma) \in \check{\mathrm{C}}^n(\mathscr{O};\Sigma\mathrm{A})$，其中 P 是 $\mathrm{O}_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n}$ 中的任意一个图。为说明 $\Delta(\sigma)$ 定义良好，设 $\mathrm{Q} \xrightarrow{F} \mathrm{P}$ 是 $\mathrm{O}_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n}$ 中的一个绘图态射。我们得到

$$\begin{aligned} F^*\big(\Delta(\sigma)(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)(P)\big) &= F^*\big(\sigma(P)(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)\big) \\ &= F^\star\big(\sigma(P)\big)(\alpha_0,\ldots,\alpha_n) \\ &= \sigma(Q)(\alpha_0,\ldots,\alpha_n) \\ &= \Delta(\sigma)(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)(Q). \end{aligned}$$

对于每个 $c \in \prod \Sigma A(O_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n})$，$(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)$ 以及每个属于 $O_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n}$ 的图 $P$，我们有 n–个单形

$$\begin{aligned} \Delta\big(\Theta(c)\big)(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)(P) &= \Theta(c)(P)(\alpha_0,\ldots,\alpha_n) \\ &= c(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)(P_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n}) \\ &= c(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)(P) \end{aligned}$$

因此 $\Delta\circ\Theta = \mathrm{id}$。为验证 $\Theta\circ\Delta = \mathrm{id}$，对于每个 $\sigma \in \Sigma\check{\mathrm{C}}^n(\mathscr{O};\mathrm{A})(\mathrm{X})$、$(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)$ 以及 X 中的每个图 P，我们得到

$$\begin{aligned} \Theta\big(\Delta(\sigma)\big)(P)(\alpha_0,\ldots,\alpha_n) &= \Delta(\sigma)(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)(P_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n}) \\ &= \sigma(P_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n})(\alpha_0,\ldots,\alpha_n) \\ &= \sigma(P)\restriction P_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n}(\alpha_0,\ldots,\alpha_n) \\ &= \sigma(P)(\alpha_0,\ldots,\alpha_n), \end{aligned}$$

因此，$\Theta$ 是一个同构。

最后，为验证 $\Sigma d\circ\Theta = \Theta\circ d_X$，令 $c \in \prod \Sigma A(O_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n})$。那么 n–个单形

$$\begin{aligned} \Sigma d\big(\Theta(c)\big)(P)(\alpha_0,\ldots,\alpha_{n+1}) &= d_P\big(\Theta(c)(P)\big)(\alpha_0,\ldots,\alpha_{n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\,\Theta(c)(P)(\alpha_0,\ldots,\widehat{\alpha_k},\ldots,\alpha_{n+1})\restriction P_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{n+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\,c(\alpha_0,\ldots,\widehat{\alpha_k},\ldots,\alpha_{n+1})(P_{\alpha_0,\ldots,\widehat{\alpha_k},\ldots,\alpha_{n+1}})\restriction P_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{n+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\,c(\alpha_0,\ldots,\widehat{\alpha_k},\ldots,\alpha_{n+1})(P_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{n+1}}) \\ &= \big(d_X(c)\big)(\alpha_0,\ldots,\alpha_{n+1})(P_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{n+1}}) \\ &= \Theta\big(d_X(c)\big)(P)(\alpha_0,\ldots,\alpha_{n+1}). \end{aligned}$$

□

推论 A.2. 若 A 是微分空间 X 上的一个层，则群 $\mathrm{H}^0\big(\Sigma\,\check{\mathrm{C}}^\bullet(\mathscr{O};\mathrm{A})\big)$ 和 $\Sigma\mathrm{A}(\mathrm{X})$ 同构。

A.2. 基本截面与 Krepski-Watts-Wolbert 所定义的切赫上同调。 这里我们证明，对于一个层 $A$，由 Krepski-Watts-Wolbert 定义的第 0 个切赫上同调群 $\check{H}^0_{KWW}(\mathscr{C};A)$ 是[13], 的截面群$A$，以及基本截面群 $\Sigma_{basic}ev^*A$(星云$(\mathscr{C})$) 三者均同构。

定义 A.3. 任意光滑映射 f : X →Y 都会诱导一个位点态射 f : $X_{\mathsf{Plots}} \to Y_{\overline{\mathsf{Plots}}}$，其定义为将 Q $_F \longrightarrow$ P 映射为 f ◦Q $_F \longrightarrow$ f ◦P。设 A 是微分空间 Y 上的预层。预层 A 沿 f 在 X 上的拉回 f *A 定义为 f *A := A ◦f。由此得到截面之间的一个自然映射:

$$f^* : \Sigma A(Y) \to \Sigma f^* A(X), \quad (f^*\sigma)(P) = \sigma(f \circ P)$$

定义 A.4. 设 A 是微分空间 Y 上的预层，且 f : X →Y 是一个光滑映射。截面 σ of f *A 是基本截面，当且仅当对 X 中的所有图 P 和 P′，都有以下蕴含关系:

$$f \circ P = f \circ P' \quad \Longrightarrow \quad \sigma(P) = \sigma(P').$$

我们将 $\Sigma_{basic}$f *A(X) 记为 f *A 的基本截面集合 .

命题 A.5. 设 A 是微分空间 Y 上的阿贝尔群层。若 f : X →Y 是一个下沉映射，则 $\Sigma_{basic}$f *A(X) 与 ΣA(Y ) 同构。

证明。首先，我们证明同态 f *: ΣA(Y ) → Σf *A(X) 是单射。设 f *σ = f *σ′，且 P 是 Y 中的任意图。存在 X 中的一个图 L，使得 P = f ◦L。于是

$$\sigma(P) = \sigma(f \circ L) = (f^*\sigma)(L) = (f^*\sigma')(L) = \sigma'(f \circ L) = \sigma'(P)$$

以及 σ = σ′。因此，f *在其像上是一个同构。现在我们证明 Im( f *) = $\Sigma_{basic}$f *A(X)。显然，Im( f *) ⊆ $\Sigma_{basic}$f *A(X)，因此令 σ 为 f *A 的一个基本截面。设 P 是 Y 中的一个图。由于 f 是下沉映射，P 是一个相容族 $\{P_i\}_{i\in J}$的上确界，其中 $P_i$ = f ◦$L_i$，对于 X 中的某个图 $L_i : U_i \to X$。令

$$\tau(P_i) := \sigma(L_i) \in f^*A(L_i) = A(P_i).$$

由于σ是一个截面，对于每个 i, j ∈ J，我们有

$$\tau(P_i) \restriction P_{ij} = \iota_i^*(\tau(P_i)) = \iota_i^*(\sigma(L_i)) = \iota_j^*(\sigma(L_j)) = \iota_j^*(\tau(P_j)) = \tau(P_j) \restriction P_{ij}$$

根据层性质，对于每个 i ∈ J，存在一个元素 τ(P) ∈ A(P)，使得 τ(P) ↾ $P_i$ = τ($P_i$)。根据基本条件，τ(P) 与所选取的、其上确界为 P 的相容族 $\{P_i\}_{i\in J}$ 无关。此外，还可以看出

$$F^*\tau(P) = F^*\sigma(L) = \sigma(L \circ F) = \tau(f \circ L \circ F) = \tau(P \circ F).$$

因此，τ 是 A 的一个定义良好的截面，满足 f *(τ) = σ。 □

命题 A.6. 设 A 是 X 上的阿贝尔群层，且 $\mathscr{C}$是 X 的一个覆盖生成族。则群 ˇ$H^0_{KWW}$($\mathscr{C}$; A)、 $\Sigma_{basic}$ev*A(星云($\mathscr{C}$)) 和 ΣA(X) 都同构。

证明. ˇ$H^0_{KWW}$($\mathscr{C}$;A) 同构于 ker $\partial_0$: ˇ$C^0_{KWW}$($\mathscr{C}$;A) → ˇ$C^1_{KWW}$($\mathscr{C}$;A)，其中 $\partial_0$表示第 0 个上边界算子。另一方面，ker$\partial_0$恰好是 $\Sigma_{basic}$ev*A(星云($\mathscr{C}$))，并且由于

$$ev : \mathsf{Nebula}(\mathscr{C}) \to X, \ (P, r) \mapsto P(r)$$

是一个下沉映射， $\Sigma_{basic}ev^*A$(星云($\mathscr{C}$)) 同构于 $\Sigma A(X)$ 根据命题 A.5。 □

## 参考文献

[1] A. Ahmadi, 《微分学中的下浸映射、浸入映射与 ´etale 映射》, arXiv:2203.05994（2022）。[2] A. Ahmadi、A. Dehghan Nezhad, 《微分空间上的余层若干方面》, Categ. Gen. Algebr. Struct. Appl. 12(1)（2020）123-147。[3] A. Ahmadi、A. Dehghan Nezhad、B. Davvaz, 《微分学中的超群与多群》, Comm. Algebra 48(6)（2020）2683-2698。[4] J.C. Baez、A.E. Hoffnung, 《光滑空间的便捷范畴》, Trans. Amer. Math. Soc. 363(11)（2011）5789-5825。[5] R. Bott、L.W. Tu, 《代数拓扑中的微分形式》, 第82卷。纽约：施普林格，1982。[6] J.D. Christensen、E. Wu, 《光滑分类空间》, 《以色列数学杂志》241(2)（2021）911-954。[7] R.L. Cohen, 《纤维丛的拓扑：讲义》, 斯坦福大学，1998，参见[8] https://math.stanford.edu/~ralph/fiber.pdf A. Dehghan Nezhad、A. Ahmadi, 《微分空间上的上同调理论与层》, 第49届伊朗数学年会（2018）。[9] A. Dehghan Nezhad、A. Ahmadi, 《微分空间上层的新方法》, Topology Appl. 263（2019）141-153。[10] D. Husemoller, 《纤维丛》, 《数学研究生教材》第20卷，施普林格，纽约，1994

[11] P. Iglesias-Zemmour，《微分学》，《数学调查与专著》185，AMS，2013。[12] P. Iglesias-Zemmour，《微分学中的切赫-德拉姆双复形》，《以色列数学杂志》（2022），即将刊出。[13] D. Krepski、J. Watts、S. Wolbert，《微分空间的层、主丛与切赫上同调》，预印本 arXiv:2111.01032（2022）。[14] S. Mac Lane，《工作数学家的范畴论》，施普林格出版社，1998。[15] L.I. Nicolaescu，《流形几何讲义》，世界科学出版社，2008。[16] J.-M. Souriau，《微分群》，载于：《数学物理中的微分几何方法》，会议论文集，艾克斯-普罗旺斯/萨拉曼卡，1979；载于：《数学讲义》836，施普林格出版社，1980，91-128。´G. Tamme，《´Etale 上同调导论》，Manfred Kolster 译，施普林格出版社，1994。

ALIREZA AHMADI，亚兹德大学数学科学系，89195–741，伊朗亚兹德 电子邮箱：ahmadi@stu.yazd.ac.ir，alirezaahmadi13@yahoo.com