arXiv:2303.03255v2 [math.MG] 8 Mar 2023

关于凸集的立体角

J. BRUNA、J. CUF´I、E. GALLEGO 和 A. REVENT´OS

Abstract. 本文分析经典 Crofton公式在三维空间中的类似形式，该公式适用于平面紧凸集。在此公式中，凸集从一个外部点看去所形成的视觉角起着基本作用。视觉角在欧几里得空间中凸集上的推广称为视立体角。这个立体角是单位球面上的一个球面凸集，因此可以考察其长度、面积及其他几何量。本文的主要目标是通过与立体角相关的函数的积分，表示原凸集依赖于体积、表面积和平均曲率积分的不变量。

1. 引言与结果陈述

本文旨在给出经典 Crofton公式在三维空间中的类似形式，该公式适用于平面紧凸集 K，

$$\int_{P\notin K} 2(\omega-\sin\omega)\,dP = L^2 - 2\pi F. \tag{1.1}$$

这里， L 为 K的边界长度， F 为其面积，而 $\omega=\omega(P)$ 是从 P观察 K 时的视觉角。

平面中的视觉角在欧几里得空间 $\mathbb{E}^3$ 中对紧凸集的推广是视觉立体角。从点 $P\notin K$ 观察紧凸集 K 的立体角$\Omega(P)$是满足以下条件的单位方向 u 的集合：射线 $P+tu$， $t\geq 0$ 与 K相交。与单位圆 S^1 中的一段弧及其长度 ω不同，我们得到的是单位球面 S^2 上的一个（球面凸）集合，它具有更丰富的几何性质，包括面积、长度以及其他可能考虑的几何量。

在我们的分析中，我们将引入两个集合函数 $\alpha(\Omega)$ $\beta(\Omega)$，它们定义在球面凸集 $\Omega\subset S^2$上，并以不同的意义取代 $\omega-\sin\omega$。为介绍这两个函数，我们先回顾球面几何中的经典概念，主要参考文献为 [5]。由 Ω 张成的锥的支撑平面的垂线构成另一个锥；该锥与 S^2 的交集就是所谓的 Ω ∂对偶曲线。 S^2 中由这条曲线及其关于原˜点的对称曲线所围成的区域（记作 Ω），由满足平面$v^\perp$ 与 Ω 相交的单位方向 v 组成。我们也可以将其视为 S^2 中与 Ω 相交的大圆的集合。其在 S^2 中的补集 ˜Ω^c 由两个对称的部分组成。由于标量˜乘积 $\langle v,u\rangle$ 对于 $v\in\Omega^c$， $u\in\Omega$ 不为零，因此该量在

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 52A15，次要分类号 53C65。
Key words and phrases. 不变测度，凸集，二面角，立体角，等宽。作者部分受到项目 2021SGR01015（加泰罗尼亚政府）和 PID2021-125625NB-I00 的资助。（科学与创新部´on）。

每个部分中符号恒定。符号为正的部分称为对偶实心锥，记作 Ω^*。

集合函数 α, β 分别定义为

$$\alpha(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{u\in\Omega,\, v\in\tilde{\Omega}} |\langle u, v\rangle|\, du\, dv,$$

$$\beta(\Omega) = \frac{1}{8} \int_{v_i\in\tilde{\Omega}} |\det(v_1, v_2, v_3)|\, dv_1\, dv_2\, dv_3, \tag{1.2}$$

其中 du 表示 S^2中的勒贝格测度。

˜积分前的系数可由以下事实解释：集合 Ω 对经过原点且与 Ω 相交的平面进行双重参数化；等价地，这些平面对应于与 Ω 相交的大圆，因此 v积分实际上是在这组平面上进行的，见下文。

显然可以验证，两个集合函数在球面的刚性运动下保持不变，也就是说 $\alpha(T($Ω$)) = \alpha($Ω$)$ $\beta(T($Ω$)) = \beta($Ω$)$。我们指出，直接计算表明，在平面中的形式类比为

$$\alpha(I) = \frac{1}{2} \int_{u\in I,\, v\in\tilde{I}} |\langle u, v\rangle|\, du\, dv, \quad \beta(I) = \frac{1}{4} \int_{v_i\in\tilde{I}} |\det(v_1, v_2)|\, dv_1\, dv_2,$$

此时 I 是一个区间，两者都等于常数乘以 $\omega - \sin\omega$，其中 ω 是 I的长度。

由此得到的克罗夫顿型公式如下：

定理1.1。对于一个紧凸集 $K \subset \mathbb{E}^3$，其平均曲率积分为M，体积为 V，表面积为 F，有

$$\frac{1}{2}\pi MF - 2\pi^2 V = \int_{P\notin K} \alpha(\Omega(P))\, dP. \tag{1.3}$$

定理1.2。对于 $\mathbb{E}^3$ 中的一个紧凸集 K，其平均曲率积分为M，体积为 V，有

$$M^3 - \pi^4 V = \int_{P\notin K} \beta(\Omega(P))\, dP. \tag{1.4}$$

定理1.3。采用相同的记号，

$$\int L(K\cap E)^2\, dE = \int_{P\notin K} |\Omega(P)|^2\, dP + 4\pi^2 V, \tag{1.5}$$

其中，dE 是空间中仿射平面 E 的不变测度，L 表示长度，|Ω|表示曲面测度。[1]

由定理 1.1 和闵可夫斯基不等式 $12\pi V \le MF$（参见[2]）可得

$$\int_{P\notin K} \alpha(\Omega(P))\, dP \ge 4\pi^2 V,$$

且仅当 K 是一个球时等号成立。

[1]公式（1.5）此前曾在 2003年与 E. Teufel 的私人讨论中被考虑。

定理1.3 可得出以下推论:

定理 1.4。 对于所有凸集

$$\int_{P\notin K} |\Omega(P)|^2\, dP \geq 4\pi^2 V, \tag{1.6}$$

且当且仅当 K 是一个球时等号成立。

我们的部分分析将致力于根据 Ω 的度量性质理解集合函数 α, β。对于集合函数 α，可以很容易地得到一种令人满意的描述，即

$$\alpha(\Omega) = \pi|\Omega| - \langle c(\Omega), c(\Omega^*)\rangle, \tag{1.7}$$

其中 $c(\Omega) = \int_\Omega u\, du$ 以及类似地 $c(\Omega^*)$ 是（未加权的）形心。类似地，对于弧 I 在 S^1 中的情形，I^* 在此处是长度为 $\pi - \omega$ 的同心弧，其对应表达式等于 $\omega - \sin\omega$，相差一个常数因子。一切都可以仅用 Ω 表示。只有对于球冠及其他简单情形，才能显式计算 $\alpha(\Omega)$。

对于集合函数 β，其描述并不那么简洁。事实上，我们证明差值 $\beta(\Omega) - \frac{\pi^2}{2}\alpha(\Omega)$ 可以用从 不属于Ω 的点$\mathcal{D}(\Omega\ u)$所观察到的 Ω 的二面视觉角来表示；这是球面几何中视觉角的对应概念。注意， $\mathcal{D}(\Omega\ u)$ 是经过原点且 u 与 Ω 相切的两个平面之间的角。由此可见，方程（1.3）和（1.4）的线性组合就是经典的 Crofton-Herglotz公式，因此定理 1.1和定理 1.2 可以看作等价的陈述（见第 2.3节）。

关于定理 1.3，若能根据 K 的几何性质理解（1.5）的左侧，将会很有意思。

2. Proofs of theorems

2.1. **定理 1.1、1.2、1.3 和 1.4 的证明**。 所有这些定理都是仿照平面Crofton公式（1.1）的积分几何证明得到的。我们分别用 E、G 表示仿射平面和空间直线，并用 dE、dG 表示相应的规范不变测度，例如文献 [5]中所使用的测度。

根据关于内禀体积的经典Crofton公式，给定紧凸集 $K \subset \mathbb{E}^3$，其平均曲率积分 M、边界面积 F 和体积 V （见 [5]）满足

$$\int_{G\cap K\neq\emptyset} dG = \frac{\pi}{2}F, \quad \int L(K\cap G)dG = 2\pi V, \tag{2.1}$$

and

$$\int_{E\cap K\neq\emptyset} dE = M, \int L(K\cap E)dE = \frac{\pi^2}{2}F, \int A(K\cap E)dE = 2\pi V. \tag{2.2}$$

我们将考虑赋有乘积测度的线性簇对和三元组。利用下一个引理中的参数化来表示这些测度将很有用，其证明可由 [5]的第 12 节推得:

引理 2.1. 下述结论成立：

a)

$$dG\ dE = |\langle u, v\rangle| dG_P\ dE_P\ dP \tag{2.3}$$

其中， $P = G \cap E$、 v 是 E的单位法向方向， u 是 G的单位方向，dP 是 $\mathbb{E}^3$上的勒贝格测度， dG_P 是 $\mathbb{E}^3$ 中经过P 的直线测度，而 dE_P 是 $\mathbb{E}^3$ 中经过 P的平面测度。

b)

$$dE^1\ dE^2\ dE^3 = |\det(v_1, v_2, v_3)| dE_P^1\ dE_P^2\ dE_P^3\ dP. \tag{2.4}$$

其中， v_i 是 E_i 和 $P = E_1 \cap E_2 \cap E_3$.的单位法向方向

c) 对于相交于点 $P \in \mathbb{E}^3$ 的直线对 G^1、 G^2 ，有

$$dG_P^1\, dG_P^2\, dP = dG_E^1\, dG_E^2\, dE \tag{2.5}$$

其中， dG_E 是 E内的直线测度。

在所有陈述中，我们可以分别将 dG_P、 dE_P与$\frac{1}{2}du$、 $\frac{1}{2}dv$对应起来。

现在我们可以着手证明前面陈述的定理。

定理 *1.1* 的证明。我们考虑一对（E， G），其中平面和直线都与K相交。由（2.1）、（2.2）和（2.3），

$$\frac{\pi}{2} MF = \int\limits_{G\cap K\neq\emptyset, E\cap K\neq\emptyset} dG\, dE = \int_{\mathbb{E}^3} \int\limits_{G_P\cap K\neq\emptyset, E_P\cap K\neq\emptyset} |\langle u, v\rangle| dG_P\ dE_P\ dP.$$

若 $P \in K$，则对 G_P， E_P没有限制。由于它们分别由 u， v 双重参数化，

$$\int |\langle u, v\rangle| dG_P\ dE_P = \frac{1}{4} \int_{u,v\in S^2} |\langle u, v\rangle| du\, dv.$$

显然， v 积分与 u无关，因此上式等于

$$\pi \int |\langle u, v\rangle|\, dv.$$

取 $u = (0, 0, 1)$，并用球坐标计算，可得值 $2\pi^2$。

若 $P \notin K$，则 G_P由 $u \in \Omega(P)$ 参数化，而 E_P由 $v \in \Omega(P)$ 双重参数化˜，因此

$$\int\limits_{G_P\cap K\neq\emptyset, E_P\cap K\neq\emptyset} |\langle u, v\rangle| dG_P\ dE_P = \frac{1}{2} \int_{u\in\Omega(P), v\in\tilde{\Omega}(P)} |\langle u, v\rangle|\, du\, dv = \alpha(\Omega(P)),$$

从而证明了（1.3）。 □

定理的证明 *1.2*。这里我们使用相交于 K 的平面三元组，并仿照上述证明进行。由式（2.2）和（2.4）可得

$$M^3 = \int_{\mathbb{E}^3} \int\limits_{E_P^i\cap K\neq\emptyset} |\det(v_1, v_2, v_3)| dE_P^1\ dE_P^2\ dE_P^3\ dP.$$

同样，如果 P 位于 K 内，则对 E_P^i 没有限制，而且

$$\int |\det(v_1,v_2,v_3)| dE_P^1\ dE_P^2\ dE_P^3 = \frac{1}{8}\int_{v_i\in S^2} |\det(v_1,v_2,v_3)|\,dv_1\,dv_2\,dv_3.$$

v_1， v_2 中的积分与 v_3 无关，因此上述积分等于

$$\frac{\pi}{2}\int |\det(v_1,v_2,v_3)|\,dv_1\,dv_2.$$

取 $v_3 = (0,\ 0,\ 1)$，并用球坐标计算，得到值π^4。

若 $P\notin K$，则 E_P^i 由 $v_i\in \tilde{\Omega}(P)$ 双重参数化，使得

$$\int\limits_{E_P^i\cap K\neq\emptyset} |\det(v_1,v_2,v_3)| dE_P^1\,dE_P^2\,dE_P^3 = \beta(\Omega(P)),$$

并且（1.4）得证。 □

定理 *1.3* 的证明。现在我们使用相交直线对，这两条直线均与 K相交。该直线集的测度为

$$\int_{P\in\mathbb{E}^3, G_P^i\cap K\neq\emptyset} dG_P^1\,dG_P^2\,dP = \int_{\mathbb{E}^3}\left(\int_{G_P^i\cap K\neq\emptyset} dG_P^1\,dG_P^2\right)dP.$$

.....的贡献 K 在 dP积分中为（2π）^2V，而 K^c 的贡献为 $\int_{P\notin K}$ |Ω（P）$|^2\,dP$。另一方面，由（2.5），这等于

$$\int\left(\int_{G_1,G_2\subset E, G_i\cap K\neq\emptyset} dG_E^1\,dG_E^2\right)dE.$$

由于 $\int_{G\subset E,\ G\cap K\neq\emptyset} dG = L(K\cap E)$（$E$中的柯西–克罗夫顿公式），故得证。□

我们指出，该论证等价于对 E 应用平面 Crofton 公式（1.1）在 $E\cap K$ 内对 E进行积分。

定理 *1.4* 的证明。在平面中应用等周不等式 E，式（1.5）的左端大于

$$4\pi\int_E A(K\cap E)\,dE,$$

由（2.2）中的最后一个等式可知其等于 $8\pi^2V$，从而证明了（1.6）。若等号成立，则对所有 L （$K\cap E$）$^2 = 4\pi A$（$K\cap E$），于是所有 E中的 $K\cap E$都是圆盘，这很容易推出 K 是一个球。 □

2.2. **关于集合函数** α**.** 为证明关系式（1.7），只需注意到

$$\int_{v\in\tilde{\Omega}} |\langle u,v\rangle|\,dv = \int_{v\in S^2} |\langle u,v\rangle|\,dv - 2\int_{v\in\Omega^*} |\langle u,v\rangle|\,dv.$$

第一个积分不依赖于 u，且等于 2π；而在第二个积分中，$\langle u,v\rangle$ 为正。综上，

$$\alpha(\Omega) = \pi\int_{u\in\Omega} du - \int_{u\in\Omega, v\in\Omega^*}\langle u,v\rangle\,du\,dv = \pi|\Omega| - \langle c(\Omega), c(\Omega^*)\rangle.$$

当 Ω 是 S^2 中的一个球面半径为 ω 的球冠时，

$$\alpha(\Omega) = 2\pi^2(1-\cos\omega) - \pi^2\cos^2\omega\sin^2\omega.$$

为了用 Ω 表示该函数，我们利用 Ω 的边界参数化，找出 Ω 与 Ω^* 的形心之间的关系。我们考虑由 S^2 的单位外法向量给出的 Ω 上的定向，并令 $\gamma(t)$、$0 \le t \le \ell$为 $\partial\Omega$ 在诱导定向下的弧长参数化，因此 $T = \gamma'$为单位切向量。

命题 2.2.

a)

$$c(\Omega) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \gamma(t)\times\gamma'(t)\ dt, \quad c(\Omega^*) = \frac{1}{2}\int_0^\ell k_g(t)\gamma(t)\ dt,$$

其中 $k_g(t)$ 是 $\gamma(t)$的测地曲率。

b)

$$c(\Omega) + c(\Omega^*) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \gamma'(t)\times\gamma''(t)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^\ell k(t)\vec{B}(t)\ dt.$$

其中 $k(t)$ 是 $\gamma(t)$ 的曲率，而 $\vec{B}(t)$ 是其副法向量。

证明。若 $u = (x, y, z)$，则 $c(\Omega)$ 的第一个分量为 $\int_\Omega x du$，即向量场 $X = (1, 0, 0)$ 穿过 Ω 的通量。由于 $X = \nabla\times Y, Y = \frac{1}{2}(0, -z, y)$，该分量等于

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\langle T, Y(\gamma(t))\rangle\, dt.$$

现在，$\langle T, Y\rangle$ 等于 $\gamma\times\gamma'(t)$的第一分量。其他分量也同理，因此 a) 中的第一个公式得证。接下来，注意到 $\gamma^*(t) = \gamma(t)\times\gamma'(t)$ 参数化了对偶曲线，即 Ω^* 的边界，因此同样有

$$c(\Omega^*) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \gamma^*(t)\times(\gamma^*)'(t)\ dt.$$

Now,

$$\gamma^*\times\gamma^{*\prime} = (\gamma\times\gamma')\times(\gamma\times\gamma')' = (\gamma\times\gamma')\times(\gamma\times\gamma'') = \det(\gamma,\gamma',\gamma'')\gamma = k_g\gamma$$

于是 a) 得证。

为证明 b)，我们简化记号，写作 $\sigma = \gamma\times\gamma' + \gamma^*\times\gamma^{*\prime}$.$\vec{}$ $\vec{}$ $\vec{}$。记 T, N, B 为 γ 的弗雷内标架。根据定义，很容易看出 $\langle\sigma, \vec{T}\rangle = 0$。此外

$$\langle\sigma,\vec{N}\rangle = \frac{1}{k}\langle\gamma\times\gamma',\gamma''\rangle + \frac{1}{k}\langle\det(\gamma,\gamma',\gamma'')\gamma,\gamma''\rangle = \frac{1}{k}\langle\gamma\times\gamma',\gamma''\rangle - \frac{1}{k}\det(\gamma,\gamma',\gamma'') = 0$$

因为 $\langle\gamma,\gamma'\rangle = 0$ ，所以 $\langle\gamma,\gamma''\rangle = -1.$。现在我们计算 $\langle\sigma,\vec{B}\rangle$,

$$\begin{aligned}
\langle\sigma,\vec{B}\rangle &= \langle\sigma,\vec{T}\times\vec{N}\rangle = \frac{1}{k}\langle\sigma,\gamma'\times\gamma''\rangle = \frac{1}{k}\langle\gamma\times\gamma' + \gamma^*\times\gamma^{*\prime},\gamma'\times\gamma''\rangle = \\
&= \frac{1}{k}\langle\gamma\times\gamma',\gamma'\times\gamma''\rangle + \frac{1}{k}\langle\gamma^*\times\gamma^{*\prime},\gamma'\times\gamma''\rangle = \\
&= -\frac{1}{k}\langle\gamma,\gamma''\rangle\langle\gamma',\gamma'\rangle + \frac{1}{k}\langle k_g\gamma,\gamma'\times\gamma''\rangle = \frac{1}{k}(1+k_g^2).
\end{aligned}$$

由于曲线 γ 位于单位球面上，因此我们有 $k^2 = 1+k_g^2$；于是 $\langle \sigma, \vec{B}\rangle = k$，由此得出

$$\gamma \times \gamma' + \gamma^* \times \gamma^{*\prime} = k\vec{B}.$$

由于 $\gamma' \times \gamma'' = \vec{T} \times k\vec{N} = k\vec{B}$，命题得证。

□

2.3. **关于集合函数** β。这里我们希望得到(1.2)的另一种表达式，由此导出克罗夫顿–赫尔戈茨公式。

设 $u = v_2 \times v_3/|v_2 \times v_3|$。为指定 $u^\perp$ 的一组基，我们将 u 写成球坐标形式：$u = (\sin\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi)$，并定义

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial\varphi} = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi), \qquad e_2 = \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0),$$

从而 $\{e_1, e_2, v\}$ 构成一组正向正交基。我们用这组基表示 $v_2,\ v_3$

$$v_2 = \cos\theta_2 \cdot e_1 + \sin\theta_2 \cdot e_2, \quad v_3 = \cos\theta_3 \cdot e_1 + \sin\theta_3 \cdot e_2.$$

于是 $v_2,\ v_3$ 可由以下参数化：$u,\ \theta_2,\ \theta_3$。注意，积分实际上是在与 Ω 相交的大圆三元组集合上进行的，因此 $\pm v_2,\ \pm v_3$ 计为一个。令 $0 \le \theta_2,\ \theta_3 \le \pi$ 并要求角 $\theta_2,\ \theta_3$ 位于由 Ω 和 $\mathcal{D}(\Omega\ u)$ 决定的二面角内。于是 u。$u \in S^2,\ \theta_2,\ \theta_3$ 是与 Ω 相交的大圆对集合的双重参数化。在这一参数化下，很容易验证（参见 [4, (34.1)]）

$$dv_2 dv_3 = |\sin(\theta_3 - \theta_2)| d\theta_2 d\theta_3 dv,$$

而

$$|\det(v_1, v_2, v_3)| = |v_2 \times v_3| \cdot |\langle v_1, u\rangle| = |\sin(\theta_3 - \theta_2)| \cdot |\langle v_1, u\rangle|.$$

Thus

$$\beta\Omega) = \frac{1}{4}\int_{v_1\in\tilde{\Omega}, u\in S^2, \theta_i\in\mathcal{D}(\Omega,u)} \sin^2(\theta_3 - \theta_2)|\langle v_1, u\rangle| dv_1\, d\theta_2\, d\theta_3\, du$$

现在，关于 θ_2, θ_3 的积分很容易计算。仍以$\mathcal{D}$(Ω u)表示二面角的测度，得到

$$\beta(\Omega) = \frac{1}{8}\int_{v_1\in\tilde{\Omega},\, u\in S^2} (\mathcal{D}^2(\Omega, u) - \sin^2\mathcal{D}(\Omega, u))|\langle v_1, u\rangle| dv_1\, du.$$

对于 $\pm u \in \Omega$，有 $\mathcal{D}$(Ω u) $= \pi$，因此这一部分的贡献等于$\pi^2\alpha$(Ω)/2。于是

$$\beta(\Omega) = \frac{\pi^2}{2}\alpha(\Omega) + \gamma(\Omega),$$

with

$$\gamma(\Omega) = \frac{1}{8}\int_{v\in\tilde{\Omega},\, \pm u\notin\Omega} (\mathcal{D}^2(\Omega, u) - \sin^2\mathcal{D}(\Omega, u))|\langle v, u\rangle| dv\, du.$$

因此，定理 1.1和 1.2 推出

$$M^3 - \frac{1}{4}\pi^3 MF = \int_{P\notin K} \gamma(\Omega(P))\, dP.$$

现在代入 $\gamma(\Omega(P))$ 的定义，并使用（2.3）。若 u 是G的单位方向， $\mathcal{D}(\Omega(P)$ $u)$ 是从 K观察 G时的二面角 $\mathcal{D}(K,G)$，则上式右端等于

$$\frac{1}{2}\int_{E\cap K\neq\emptyset, G\cap K=\emptyset}(\mathcal{D}^2(K,G)-\sin^2\mathcal{D}(K,G))dE\,dG=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{E\cap K\neq\emptyset}dE\left(\int_{G\cap K=\emptyset}(\mathcal{D}^2(K,G)-\sin^2\mathcal{D}(K,G)\right)dG.$$

利用（2.2）我们得到经典的 Crofton-Herglotz公式 [[1]页。75]

$$\int_{G\cap K=\emptyset}(\mathcal{D}^2(K,G)-\sin^2\mathcal{D}(K,G))\,dG=2M^2-\frac{\pi^3F}{2}.$$

这表明，在存在 Crofton-Herglotz公式的情况下，定理 1.1 和1.2可以视为等价的陈述。

3. Some inequalities for convex sets of constant width

本节将讨论等宽的紧凸集 K 。对于这些集合中的每一个，都有关系式 $R+r=a$，其中 a 是 K的宽度，而 r， R 分别是 K的内切半径和外接半径。因此，记作$c=r/R$，我们有

$$r=\frac{ac}{1+c},\quad R=\frac{a}{1+c}.$$

由荣格定理（[3, 3.4。2]）可得 $c\geq\sqrt{8/3}-1=0.63...$

定理3.1。设 K 是一个宽度为 a 的紧凸集，且 $c=r/R$ 是 K 的内切半径与外接半径之比。则

$$\int L(K\cap E)^2dE\leq 8\pi^3a^3\left(\frac{1}{(1+c)^2}-\frac{1}{12}\right), \tag{3.1}$$

对于球面等号成立。

证明。首先注意到，记 $p(u)$、 $u\in S^2$ 为 K 和 $\eta(u)=p(u)-a/2$ 的支撑函数，有

$$\eta(u)^2=p(u)^2+a^2/4-ap(u).$$

因此

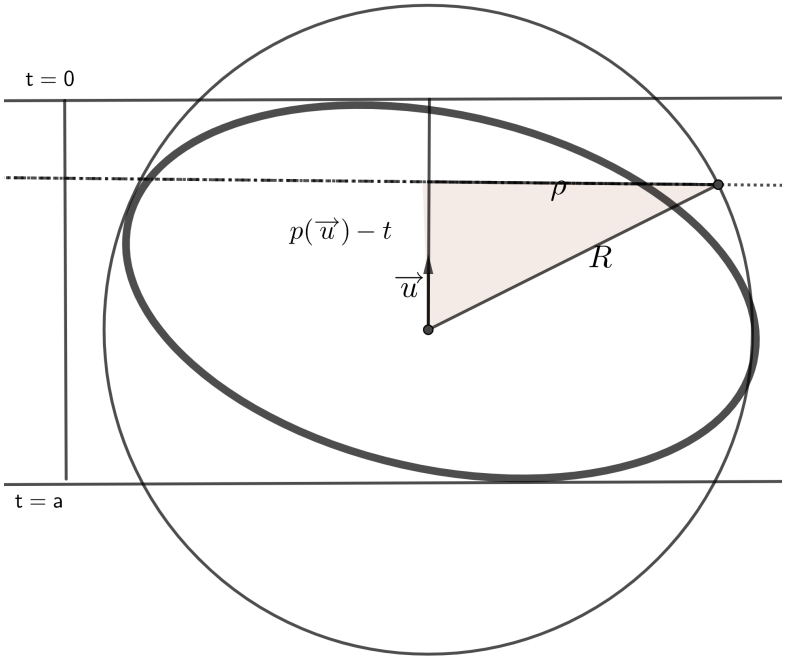
$$\int_{S^2}\eta(u)^2\,du=\int_{S^2}p(u)^2\,du+\pi a^2-2\pi a^2\geq 0,$$

从而

$$\int_{S^2}p(u)^2\,du\geq\pi a^2. \tag{3.2}$$

我们有

$$\int_{\mathcal{A}_{3,k}}L(K\cap E)^2dE=\frac{1}{2}\int_{S^2}\int_0^a L(K\cap E)^2\,dt\,du\leq\frac{1}{2}\int_{S^2}\int_0^a L(S_R\cap E)^2\,dt\,du\leq$$
$$\frac{1}{2}\int_{S^2}\int_0^a\left(2\pi\sqrt{R^2-(p(u)-t)^2}\right)^2dt\,du=\int_{S^2}2\pi^2\left(R^2a-\frac{a^3}{3}+a^2p(u)-ap(u)^2\right)du$$



并根据（3.2）

$$\int L(K \cap E)^2 dE \quad \leq \quad 8\pi^3 \left(R^2 a - \frac{a^3}{12} \right) = 8\pi^3 a^3 \left(\frac{1}{(1+c)^2} - \frac{1}{12} \right).$$

□

注意，根据荣格不等式 $c \geq \sqrt{8/3} - 1$，上述结果意味着

$$\int L(K \cap E)^2 dE \leq \frac{7}{3} \pi^3 a^3.$$

命题 3.2. 设 K 为一个等宽为 a 的紧凸集，其中 $c = r/R$是内切半径与 K的外接半径之比。则

$$4\pi^3 a^3 \left(\frac{8}{3} \frac{c^3}{(1+c)^3} - \frac{1}{6} \right) \leq \int_{P \notin K} |\Omega(P)|^2 dP \leq 4\pi^3 a^3 \left(\frac{11 - 3c(3c^2 + c - 3)}{6(1+c)^3} \right),$$

等号在球面情形下成立，其中当 $c > 0.657...$时，下界非负。

证明。右侧不等式由式（3.1）和（1.5）代入 V为 V_r得出，其中 V_r 是内切球 S_r 的体积， K属于 。左侧不等式则通过在易于验证的关系式中减去 $4\pi^2 V$ 得到

$$8\pi^2 V_r = \int L(S_r \cap E)^2 dE \leq \int L(K \cap E)^2 dE$$

并利用不等式 $V \leq V_{a/2}$，其中 $V_{a/2}$ 是半径为$a/2$的球的体积（见 [3]）。□

注3.3。注意，仅用宽度表示时，我们有

$$\int_{P\notin K} |\Omega(P)|^2 dP \leq \frac{9}{2}\pi^3 a^3(\sqrt{6}-2).$$

注记 3.4。可以进一步探讨等号是否成立

$$\int L(K\cap E)^2 dE = \pi MF - 4\pi^2 V$$

对于球面成立的结论，对于等宽凸集是否也成立。对于这种情形，采用上述同类论证，我们只能证明

$$\frac{c^3-1}{(1+c)^3} \leq \frac{1}{16\pi^3 a^3}\left(\int L(K\cap E)^2 dE - (\pi MF - 4\pi^2 V)\right) \leq \frac{-23c^3+3c^2+3c+17}{24(1+c)^3}$$

且球面取等号（c=1）。

References

[1] W. Blaschke. *Vorlesungen uber Integralgeometrie*。VEB 德国科学出版社，柏林，第 3 版，1955 年。[2] Minkowski H. 关于长度的概念。 *Oberfläche und Volume 9*，1:115–121，1901 年。[3] H. Martini、L. Montejano 和 D. Oliveros。 *Bodies of Constant Width*第 54 卷。施普林格国际出版公司，尚，2019 年。[4] J. Rey Pastor 和 L. A. Santalo。 *Geometría integral*。Espasa Calpe，1951 年。[5] L.A. Santal´o。 *Integral geometry and geometric probability*。剑桥大学出版社，剑桥，第 2 版，2004 年。

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Barcelona, Catalonia

Email address: joaquim.bruna@uab.cat, julia.cufi@uab.cat, eduardo.gallego@uab.cat, agusti.reventos@uab.cat