渐近迭代法的数学基础

D. Batic*
Department of Mathematics, Khalifa University of Science and Technology, Main Campus, Abu Dhabi, United Arab Emirates
M. Nowakowski†
Departamento de Fisica, Universidad de los Andes,Cra.1E No.18A-10, Bogota, Colombia（日期：2023年3月7日）

arXiv:2303.03262v1 [math.CA] 6 Mar 2023

我们提出了一种研究渐近迭代法（AIM）的新方法，借此建立了标准渐近迭代法与连分数法之间的联系，并基于渐近分数提出了一种新颖的终止条件。利用这一替代终止条件以及连分数的某些性质，我们推导出渐近迭代法技术中渐近函数 α 的闭式无穷级数公式。此外，我们证明该级数逐点收敛于 α，而 α 又可解释为某个递推关系的极小解中的特定项。我们还探讨了确保极小解存在、进而确保函数 α 本身存在的一些条件。

PACS 编号:

I. 引言

[1] 提出了所谓的渐近迭代法（AIM），旨在求解由二阶常微分方程描述的某些特征值问题，其形式为

$$y^{''} = \lambda_0(x)y^{'} + s_0(x)y, \quad \lambda_0, s_0 \in C^{\infty}(I), \quad I \subseteq \mathbb{R} \tag{1}$$

其中，对于任意 $x \in I$， $\lambda_0 \neq 0$，此外， λ_0 和 s_0 在区间I的端点处不必有界。谱参数通常编码在函数 s_0中。对 λ_0的光滑性条件以及 s_0 并不过于苛刻，因为在大多数应用中，这类函数通常表示为某些有理函数，而通过适当选择其定义域，总是可以使其光滑。此外， [1] 默认假设方程（1）的通解在区间 I 上也是光滑的，其中 λ_0 和 s_0 均为光滑函数。这一假设是合理的，因为方程（1）的解至多只会在 λ_0 和 s_0 不连续的那些点处不连续。[1] 对方程（1）关于自变量求 n阶导数，得到

$$y^{(n+2)} = \lambda_n(x)y^{'} + s_n(x)y \tag{2}$$

其中函数 λ_n 和 s_n 由以下耦合递推关系组确定

$$\lambda_n = \lambda_{n-1}^{'} + \lambda_0\lambda_{n-1} + s_{n-1}, \quad \forall n = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

$$s_n = s_{n-1}^{'} + s_0\lambda_{n-1}. \tag{4}$$

此时， [1] 考虑第（$n+2$）阶导数与第（$n+1$）阶导数的比值，它可利用（2）表示为

$$\frac{y^{(n+2)}}{y^{(n+1)}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \frac{y^{'} + \frac{s_n}{\lambda_n}y}{y^{'} + \frac{s_{n-1}}{\lambda_{n-1}}y} \tag{5}$$

*电子邮箱：davide.batic@ku.ac.ae
†电子邮箱：mnowakos@uniandes.edu.co

以及 [1] 中的渐近条件

$$\frac{s_n}{\lambda_n} = \frac{s_{n-1}}{\lambda_{n-1}} := \alpha(x), \quad n \gg 1, \tag{6}$$

这等价于要求存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq N$

$$\frac{s_n(x)}{\lambda_n(x)} = \alpha(x) \tag{7}$$

对所有 $x \in I$。最后，若条件 (7) 成立，并利用 (3) 和 (4)，则可得 (5) 的解为

$$y^{(n+1)}(x) = C_1 \lambda_{n-1}(x) \exp\left(\int_x \left[\lambda_0(t) + \alpha(t)\right]\, dt\right) \tag{8}$$

对所有 $n \geq N$。将 (8) 代入 $y^{(n+1)} = \lambda_{n-1} y^{'} + s_{n-1} y$，并应用渐近条件 (7)，我们得到方程 (1) 的解的如下表示，即

$$y(x) = \exp\left(-\int_x \alpha(\rho) d\rho\right)\left[C_1 \int_x \exp\left(\int_\tau \left[\lambda_0(t) + \alpha(t)\right]\, dt\right) d\tau + C_2\right]. \tag{9}$$

[1] 声称 (9) 是方程 (1) 的通解。对此说法应谨慎看待。首先，(9) 要求 (7) 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，但一般情况下并非如此。此外，若将 (9) 代入 (1)，我们会发现，只有当未知函数 α 是下列 Riccati方程的解时，(9) 才是原常微分方程的解

$$\alpha^{'} = \alpha^2(x) + \lambda_0(x)\alpha(x) - s_0(x). \tag{10}$$

不难验证，方程（1）的一类解可表示为（9）中的形式，其中 α 是 Riccati方程（10）的解，当且仅当方程（1）中的二阶微分算子可因式分解为

$$\left(\frac{d}{dx} + \alpha(x)\right)\left(\frac{d}{dx} + \beta(x)\right) y = 0, \quad \beta = -\lambda_0(x) - \alpha(x). \tag{11}$$

这一性质与 AIM渐近条件（6）完全无关；该渐近条件的由来可能与如下要求有关：方程（1）的通解在某个区间 I 上是实解析的。如下文所示，这一观察是推导 AIM方法新渐近条件的关键。为此，任取一个 $x_0 \in I$。注意，区间 I 已经定义为使得 λ_0 在其中处处不为零。考虑初始条件 $y(x_0) = \mathfrak{c}_1$。于是，我们可以围绕 x_0 为方程（1）的解展开泰勒级数

$$y(x) = \mathfrak{c}_1 + (x - x_0) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \quad f_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^n \tag{12}$$

and

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \frac{|x - x_0|}{n+2}\left|\frac{y^{(n+2)}(x_0)}{y^{(n+1)}(x_0)}\right| = \frac{|x - x_0|}{n+2}\left|\frac{\lambda_n(x_0)}{\lambda_{n-1}(x_0)}\right|\left|\frac{y^{'}(x_0) + \mathfrak{c}_1 \frac{s_n(x_0)}{\lambda_n(x_0)}}{y^{'}(x_0) + \mathfrak{c}_1 \frac{s_{n-1}(x_0)}{\lambda_{n-1}(x_0)}}\right|, \tag{13}$$

在最后一步中，我们使用了在点 x_0 处取值的（5），以及初始条件 $y(x_0) = \mathfrak{c}_1$。如果渐近条件

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n(x_0)}{\lambda_n(x_0)} = \alpha(x_0), \quad \alpha(x_0) < \infty \tag{14}$$

以及渐近展开

$$\left|\frac{\lambda_n(x_0)}{\lambda_{n-1}(x_0)}\right| = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 n + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right), \quad \mathfrak{a}_i \geq 0 \ \forall i = 1, 2 \quad , \gamma > 0 \tag{15}$$

成立时，泰勒级数 (12) 将在以 x_0 为中心的某个开区间内收敛，其收敛半径为 $\rho = 1/\mathfrak{a}_1$。这里有必要作一点说明。序列 $(s_n/\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的逐点收敛，加上渐近

展开 (15) 足以确保 (12) 对任意 $x_0 \in I$ 都收敛，因此，解在区间 I 上是光滑的。然而，如果还要求 (1) 的通解具有表示式 (9)，则需要要求 α 在 I 上至少连续；但这等价于要求序列 $(s_n/\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在区间 I 上一致收敛。注意，[1, 2] 并未讨论对 (6) 应施加哪种收敛要求。引入序列 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $\alpha_n = s_n/\lambda_n$。如果该序列在 I 上至少逐点收敛，那么新的 AIM 渐近条件可表述为

$$\lim_{n\to\infty} [\alpha_n(x) - \alpha_{n-1}(x)] = 0 \tag{16}$$

或者，在出现终止行为的情况下，

$$\alpha_N(x) - \alpha_{N-1}(x) = 0 \tag{17}$$

对某个正整数 N。如果当前问题不满足终止条件 (17)，则有必要考虑 (16)。[1, 3, 4] 注意到，利用 (16) 计算某些特征值问题的特征值时，所需的稳定性和迭代次数会对点 $x_0 \in I$ 的选择非常敏感。这表明，序列 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收敛恐怕更像是例外而非规律。对此，我们想指出，[5] 证明了，当 (1) 是复平面上的一般福克斯微分方程时，上述序列会在 $U_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_i| < |z - z_j| \mid j = 1, 2, \cdots, r,\ j \neq i\}$ 的紧子集上一致收敛到 (1) 的全纯解的对数导数，其中指标 r 表示 (1) 的奇点数。关于 x_0 的最优选择，[2] 确实给出了由其中的方程 (56) 表示的一个条件，该条件经过适当调整后等价于 (16)，并说明了渐近迭代法何时适用；然而，[2] 并未提供任何算法或方法来确定 x_0 的最优选择。此外，[6]也研究了渐近迭代法与连分数之间的联系。最后但同样重要的是，渐近迭代法的强大之处显而易见：回想一下，在 [7–9] 中解析推导出的施瓦西度规中无质量标量场的新一支准正规模，也可以通过改进渐近迭代法 [1, 3, 4, 10] 数值求得。本文结构如下：在第二节中，我们证明满足初始条件的 (3) 的解具有唯一性。在第三节中，我们说明如何用某个连分数表示 (10) 中出现的未知函数 α，并讨论该连分数的收敛问题。我们还为由 (68) 表示的未知函数 α 构造了一个新公式，并证明若满足定理 IV.3 中的条件，则渐近迭代法中以 $\alpha_n = s_n/\lambda_n$ 为项的序列会在某个区间 I 上逐点收敛到函数 α；该函数又可解释为递推关系 (87) 的极小解 $\psi_n(x)$ 中的第 ψ_{-1} 项 x。我们还探讨了若干确保极小解存在的条件，并发现这些条件会缩小使用渐近迭代法时必须从中选择 x_0 最优值的区间。

II. 递推关系（3）和（4）构成的耦合系统

令 I_2 表示 2×2 单位矩阵。定义

$$\Phi_n := \begin{pmatrix} \lambda_n \\ s_n \end{pmatrix} \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad T := I_2 \frac{d}{dx} + \mathfrak{A}(x), \quad \mathfrak{A}(x) := \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ s_0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

注意，在这一步，微分算子 T 是定义在 $\mathbb{C}(x) \times \mathbb{C}(x)$ 上的形式线性算子，其中 $\mathbb{C}(x)$ 表示实变量 x 上所有有理函数构成的向量空间，且分子和分母中的多项式可以具有复系数。于是，递推关系（3）和（4）可以写成矩阵形式

$$\Phi_n = T\Phi_{n-1} \quad \forall n = 1, 2, \cdots \tag{19}$$

初始条件为

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ s_0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

不难看出，对于任意 n，系统（19）的解为

$$\Phi_n = T^n \Phi_0. \tag{21}$$

由于对于任意 n，函数 λ_n 和 s_n 在同一区间 I 上都是实解析的，而 s_0 和 λ_0 在该区间上也是实解析的，因此我们可以将向量值函数 Φ_n 在某个 $x_0 \in I$ 处展开为幂级数，其收敛半径为 R，直到

λ_0 和 s_0 最近的极点。同样，我们可以将矩阵 A 在 x_0 处展开为矩阵幂级数，其收敛半径为 R。更确切地说，如果我们代入

$$\Phi_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathfrak{C}_{m,n}(x-x_0)^m, \quad \mathfrak{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{A}_k(x-x_0)^k, \quad |x-x_0| < R \tag{22}$$

将 $\mathfrak{C}_{m,n} \in \mathbb{C}^2$ 和 $\mathfrak{A}_k \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ 代入（19），并利用幂级数的柯西乘积以及简单的指标移位，我们得到以下递推关系

$$\mathfrak{C}_{m,n+1} = (m+1)\mathfrak{C}_{m+1,n} + \sum_{\ell=0}^{m} \mathfrak{A}_{m-\ell}\mathfrak{C}_{\ell,n} \quad \forall\, m,n = 0,1,\cdots. \tag{23}$$

给定 $x_0 \in I$，对于每个固定的 n，我们可以根据（23）递归计算 $m=1$、2、$\cdots$对应的系数 $\mathfrak{C}_{m,n}$。例如，当 $n=0$ 时，方程（23）允许我们计算 Φ_1 的泰勒展开中的所有系数，依此类推。这表明，对于任意 n，方程（19）的解 Φ_n 是唯一的。

III. 渐近迭代法与连分数方法之间的联系 D

本节将说明如何用某个连分数表示式（10）中出现的未知函数 α。此外，我们还将讨论该连分数的收敛问题。为此，我们采用一种不同于第一节所述的方法。若对（1）关于 x 求一次导数，则得到

$$y^{1+2} = \lambda_0 y^{''} + (\lambda_0^{'} + s_0)y^{'} + s_0^{'} y. \tag{24}$$

另一方面，我们可以对 (1) 关于 y 求解，得到

$$y = \frac{y^{''}}{s_0} - \frac{\lambda_0}{s_0} y^{'} \tag{25}$$

将其代入 (24)，可得

$$y^{(1+2)} = p_1 y^{''} + q_1 y^{'} \tag{26}$$

with

$$p_1 = \lambda_0 + \frac{s_0^{'}}{s_0}, \quad q_1 = s_0 + \lambda_0^{'} - \lambda_0 \frac{s_0^{'}}{s_0}. \tag{27}$$

再次对 (26) 求导并代入其中

$$y^{'} = \frac{y^{(1+2)}}{q_1} - \frac{p_1}{q_1} y^{''} \tag{28}$$

得到

$$y^{(2+2)} = p_2 y^{(1+2)} + q_2 y^{''} \tag{29}$$

with

$$p_2 = p_1 + \frac{q_1^{'}}{q_1}, \quad q_2 = q_1 + p_1^{'} - p_1 \frac{q_1^{'}}{q_1} y^{''}. \tag{30}$$

此时，若继续迭代，则对所有 $n \geq 0$ 均可得到

$$y^{(n+2)} = p_n(x) y^{(n+1)} + q_n(x) y^{(n)} \tag{31}$$

其中

$$p_n = p_{n-1} + \frac{q_{n-1}^{'}}{q_{n-1}}, \tag{32}$$

$$q_n = q_{n-1} + p_{n-1}^{'} - p_{n-1} \frac{q_{n-1}^{'}}{q_{n-1}}, \tag{33}$$

其中 $p_0 := \lambda_0$、 $q_0 := s_0$，且 $p_{-1} = q_{-1} = 0$。方程（31）是关于未知函数 $y^{(n)}$ 的二阶线性常微分方程，因此，对于每个 $n \geq 0$，我们都可以为其关联一个如下形式的Riccati方程

$$\varphi_n^{'} = \varphi_n^2(x) + p_n(x)\varphi_n(x) - q_n(x), \quad \varphi_n := -\frac{y^{(n+1)}}{y^{(n)}}. \tag{34}$$

不难看出，在 $n = 0$ 的情况下，方程（34）结合条件 $p_0 := \lambda_0$ 和 $q_0 := s_0$可化为 Riccati方程（10），因此我们可以作出如下对应关系 $\varphi_0 = \alpha$。将（31）改写为

$$\frac{y^{(n+2)}}{y^{(n+1)}} = p_n(x) + q_n(x)\frac{y^{(n)}}{y^{(n+1)}} \tag{35}$$

并注意到 $\varphi_{n+1} = -y^{(n+2)}/y^{(n+1)}$，则（35）变为

$$\frac{q_n}{\varphi_n} = p_n + \varphi_{n+1} \tag{36}$$

由此可得到关于 φ_n 的如下递推关系，即

$$\varphi_n(x) = \frac{q_n(x)}{p_n(x) + \varphi_{n+1}(x)} \quad \forall n \geq 0. \tag{37}$$

最后，利用（37），Riccati方程（10）的解可表示为连分数，具体如下

$$\alpha(x) = \varphi_0(x) = \frac{q_0(x)}{p_0(x) + \varphi_1(x)} = \cfrac{q_0(x)}{p_0(x) + \cfrac{q_1(x)}{p_1(x) + \cfrac{q_2(x)}{p_2(x) + \ldots}}} = \underset{n=0}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \left(\frac{q_n(x)}{p_n(x)} \right). \tag{38}$$

此时，有几点说明是必要的。

1. 如果对于某个正整数 N，有 $q_N(x) = 0$ 对所有 $x \in I$均成立，那么（37）会使连分数（38）终止，并由（37）和（38）可得

$$\alpha(x) = \cfrac{q_0(x)}{p_0(x) + \cfrac{q_1(x)}{p_1(x) + \cfrac{q_2(x)}{\ddots\, p_{N-2}(x) + \cfrac{q_{N-1}(x)}{p_{N-1}(x)}}}}. \tag{39}$$

2. 如果未出现终止条件，则必须仔细分析连分式（38）的收敛或发散性质。

IV. 函数 α 的级数表示

下文将（38）的第N个渐近值定义为

$$C_N(x) = \frac{A_N(x)}{B_N(x)} = \underset{n=0}{\overset{N}{\mathrm{K}}} \left(\frac{q_n(x)}{p_n(x)} \right), \tag{40}$$

其中，函数序列 $(A_N(x))_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(B_N(x))_{n\in\mathbb{N}}$ 分别是连分数 (38) 的第 N 个部分分子和第 N 个部分分母。我们始终假设 A_N/B_N 是既约形式，即 A_N 和 B_N 没有公因子。此外，如果连分数 (38) 在实线的某个区间 I 上逐点收敛到 α，则称

$$\lim_{N\to\infty} C_N(x) = \alpha(x) \quad \forall\, x \in I. \tag{41}$$

通过观察可知

$$C_0(x) = \frac{A_0(x)}{B_0(x)} = \frac{q_0(x)}{p_0(x)} = \frac{s_0(x)}{\lambda_0(x)} = \alpha_0(x), \tag{42}$$

$$C_1(x) = \frac{A_1(x)}{B_1(x)} = \frac{p_1(x)q_0(x)}{p_0(x)p_1(x)+q_1(x)} = \frac{s_0^{'}(x)+s_0(x)\lambda_0(x)}{\lambda_0^{'}(x)+\lambda_0^2(x)+s_0(x)} = \frac{s_1(x)}{\lambda_1(x)} = \alpha_1(x), \tag{43}$$

$$\vdots \tag{44}$$

我们发现，（38）的渐近式序列等价于渐近迭代法中出现的序列 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$。因此，我们证明了 [1] 提出的 AIM条件（6）等价于要求：当 n 充分大时，α 由连分数（38）的第n个渐近分数给出。另一方面，如果（38），或者等价地，其渐近式序列在某个区间 I上逐点收敛，那么，AIM渐近条件（16）可替换为条件

$$\lim_{n\to\infty}[C_n(x)-C_{n-1}(x)] = 0 \quad \forall\, x\in I. \tag{45}$$

对于可用渐近迭代法处理的问题，如果出现终止行为，则终止条件（17）可替换为等价条件

$$q_N(x) = 0 \quad \forall\, x\in I \tag{46}$$

其中 N 为某个正整数。下一个定理将使我们能够把条件（45）重新表述为一个特定的极限，该极限仅涉及连分数（38）的部分分母序列中的项，以及通过递推关系（32）和（33）定义的序列 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 中的项。

定理IV.1 考虑连分数 $\mathrm{K}_{n=0}^{N}(q_n(x)/p_n(x))$，其第 n 个渐近分数由式 (40) 给出。则该连分数的第 n 个部分分子 $A_n(x)$ 和分母 $B_n(x)$ 满足三项递推关系

$$A_n(x) = p_n(x)A_{n-1}(x)+q_n(x)A_{n-2}(x), \quad A_{-1}(x)=0,\ A_{-2}(x)=1 \quad \forall x\in I, \tag{47}$$

$$B_n(x) = p_n(x)B_{n-1}(x)+q_n(x)B_{n-2}(x), \quad B_{-1}(x)=1,\ B_{-2}(x)=0 \quad \forall x\in I \tag{48}$$

对所有 $n\geq 0$ 均成立。

证明。我们采用归纳法　　进行证明。首先，我们注意到，对于 $n=0$，方程 (47) 和 (48) 能正确地给出

$$A_0(x) = p_0(x)A_{-1}(x)+q_0(x)A_{-2}(x) = q_0(x), \tag{49}$$

$$B_0(x) = p_0(x)B_{-1}(x)+q_0(x)B_{-2}(x) = p_0(x). \tag{50}$$

在 $n=1$ 的情况下，我们如预期得到

$$A_1(x) = p_1(x)A_0(x)+q_1(x)A_{-1}(x) = p_1(x)q_0(x), \tag{51}$$

$$B_1(x) = p_1(x)B_0(x)+q_1(x)B_{-1}(x) = p_0(x)p_1(x)+q_1(x). \tag{52}$$

假设 (47) 和 (48) 对 $n=m$ 成立。那么，我们有

$$A_m(x) = p_m(x)A_{m-1}(x)+q_m(x)A_{m-2}(x), \tag{53}$$

$$B_m(x) = p_m(x)B_{m-1}(x)+q_m(x)B_{m-2}(x). \tag{54}$$

From

$$C_{m+1}(x) = \mathop{\mathrm{K}}_{n=0}^{m+1}\left(\frac{q_n(x)}{p_n(x)}\right) = \cfrac{q_0(x)}{p_0(x)+\cfrac{q_1(x)}{p_1(x)+\cfrac{q_2(x)}{\ddots\, p_{m-1}(x)+\cfrac{q_m(x)}{p_m(x)+\frac{q_{m+1}(x)}{p_{m+1}(x)}}}}}, \tag{55}$$

$$C_m(x) = \cfrac{q_0(x)}{p_0(x)+\cfrac{q_1(x)}{p_1(x)+\cfrac{q_2(x)}{\ddots\, p_{m-1}(x)+\frac{q_m(x)}{p_m(x)}}}} \tag{56}$$

我们发现，将 $C_m(x)$ 中的 $p_m(x)$ 替换为 $p_m(x) + (q_{m+1}(x)/p_{m+1}(x))$，即可得到 $C_{m+1}(x)$。因此，我们可以写成

$$C_{m+1}(x) = \frac{A_{m+1}(x)}{B_{m+1}(x)} = \frac{\widehat{A}_m(x)}{\widehat{B}_m(x)}, \tag{57}$$

with

$$\widehat{A}_m(x) = \frac{p_{m+1}(x)A_m(x) + q_{m+1}(x)A_{m-1}(x)}{p_{m+1}(x)}, \tag{58}$$

$$\widehat{B}_m(x) = \frac{p_{m+1}(x)B_m(x) + q_{m+1}(x)B_{m-1}(x)}{p_{m+1}(x)}, \tag{59}$$

这里用到了 (53) 和 (54)。最后，利用 (58) 和 (59) 可得

$$\frac{A_{m+1}(x)}{B_{m+1}(x)} = \frac{p_{m+1}(x)A_m(x) + q_{m+1}(x)A_{m-1}(x)}{p_{m+1}(x)B_m(x) + q_{m+1}(x)B_{m-1}(x)} \tag{60}$$

至此，证明完成。 □

将 (47) 乘以 $B_{n-1}(x)$，将 (48) 乘以 $A_{n-1}(x)$，再将两式相减，即可得到 N 阶渐近分数的一个公式。此过程得到

$$A_n(x)B_{n-1}(x) - A_{n-1}(x)B_n(x) = -q_n(x)\left[A_{n-1}(x)B_{n-2}(x) - A_{n-2}(x)B_{n-1}(x)\right]. \tag{61}$$

令 $v_n(x) = A_n(x)B_{n-1}(x) - A_{n-1}(x)B_n(x)$。利用 (47) 和 (48) 中的初始条件可得 $v_{-1}(x) = -1$。此外，(61) 可改写为

$$v_n(x) = -q_n(x)v_{n-1}(x) \tag{62}$$

其解为

$$v_n(x) = (-1)^n \prod_{j=0}^{n} q_j(x) \quad \forall n \geq 0 \tag{63}$$

其中 $v_{-1}(x) = -1$。此时，利用 (40) 及 v_n 的定义，我们观察到

$$\lim_{n\to\infty}\left[C_n(x) - C_{n-1}(x)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{A_n(x)B_{n-1}(x) - A_{n-1}(x)B_n(x)}{B_n(x)B_{n-1}(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{v_n(x)}{B_n(x)B_{n-1}(x)}. \tag{64}$$

借助（62）和（63）不难验证，AIM条件（45）变为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\prod_{j=0}^{n} q_j(x)}{B_n(x)B_{n-1}(x)} = 0 \quad \forall x \in I. \tag{65}$$

上述公式清楚地表明，当某个 q_j 消失时，便会出现终止行为。此外，可以通过为递推关系（54）的 $B_n(x)$ 解构造一致渐近表示，来回答（65）中的极限是否在区间 I 上消失这一问题。若将（63）除以 $B_n(x)B_{n-1}(x)$，并引入差分算子 $\Delta x_n := x_{n+1} - x_n$ [11]，则得到

$$\Delta C_{n-1}(x) = \frac{A_n(x)}{B_n(x)} - \frac{A_{n-1}(x)}{B_{n-1}(x)} = \frac{(-1)^n\prod_{j=0}^{n} q_j(x)}{B_n(x)B_{n-1}(x)} \quad \forall n \geq 0 \tag{66}$$

并应用在 [11] 中定义的反差分算子 Δ^{-1}，得到

$$C_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{q_0(x)\cdots q_k(x)}{B_k(x)B_{k-1}(x)} \quad \forall n \geq 1. \tag{67}$$

将 (67) 与 (41) 结合，并令 $n \to \infty$，可得到连分数 (38) 的以下形式表示，或者等价地，得到未知函数 α 的以下形式表示，即

$$\alpha(x) = \underset{n=0}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \left(\frac{q_n(x)}{p_n(x)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q_0(x) \cdots q_n(x)}{B_n(x) B_{n-1}(x)}. \tag{68}$$

为了给出连分数 (68) 在实数轴的给定区间上逐点收敛到某个函数的充要条件，我们先回顾一下：如果两个连分数具有相同的渐近式序列，就称它们等价（用符号 $\approx$ 表示）。

定理 IV.2 对所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 和所有 $x \in \mathfrak{I} \subseteq \mathbb{R}$，假设 $p_n(x) > 0$ 且 $q_n(x)$ 不为零。进一步假设 $\mathcal{I} = \mathfrak{I} \cap I \neq \emptyset$，其中 I 是 (1) 中引入的区间。那么，连分数 (68) 在 $\mathcal{I}$ 上逐点收敛到某个函数 α，当且仅当级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) \tag{69}$$

对每个 $x \in \mathcal{I}$ 都发散。

证明。任取 $x_0 \in \mathcal{I}$。我们从以下观察开始：等价关系

$$\underset{n=0}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \left(\frac{q_n(x_0)}{p_n(x_0)} \right) \approx \underset{n=0}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \left(\frac{\gamma_{n-1}\gamma_n q_n(x_0)}{\gamma_n p_n(x_0)} \right) \tag{70}$$

对任意非零复数序列 $\gamma_{-1} = 1$、γ_0、$\gamma_1 \cdots$ [11] 都成立。特别地，若我们选取序列 $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $\gamma_{n-1} = 1/q_n$，则

$$\underset{n=0}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \left(\frac{q_n(x_0)}{p_n(x_0)} \right) \approx q_0(x_0) \underset{n=0}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \left(\frac{1}{p_n(x_0)} \right). \tag{71}$$

由（68）可得

$$\underset{n=0}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \left(\frac{1}{p_n(x_0)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n, \quad S_n := \frac{(-1)^n}{B_{n-1}(x_0) B_n(x_0)} \tag{72}$$

其中 $B_n(x_0)$ 由递推关系（54）给出，且对所有 n都有 $q_n = 1$，即

$$B_n(x_0) = p_n(x_0) B_{n-1}(x_0) + B_{n-2}(x_0), \quad B_{-2}(x_0) = 0, \quad B_{-1}(x_0) = 1. \tag{73}$$

注意，$p_n(x)$ 对所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 以及所有 $x \in \mathcal{I}$都有 $>$，这确保了上述递推关系中的所有项 $B_n(x_0)$ 均为正。由（72）可知，只要（72）中的交错级数收敛，（68）就收敛。为此，我们注意到

$$B_{n+1}(x_0) = p_{n+1}(x_0) B_n(x_0) + B_{n-1}(x_0) > B_{n-1}(x_0). \tag{74}$$

这意味着 $B_n(x_0)B_{n+1}(x_0) > B_n(x_0)B_{n-1}(x_0)$，因此，

$$\frac{1}{B_n(x_0) B_{n+1}(x_0)} < \frac{1}{B_n(x_0) B_{n-1}(x_0)} \tag{75}$$

对所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$均成立。因此，序列（$|S_n|$）单调递减。所以，只要以下极限发散，（72）中的级数就收敛

$$\lim_{n\to\infty} B_{n-1}(x_0) B_n(x_0). \tag{76}$$

此外，由（73）可得

$$\begin{aligned}
B_1(x_0) &= 1 + p_0(x_0) p_1(x_0) > 1, && (77)\\
B_2(x_0) &= p_0(x_0) + p_2(x_0) + p_0(x_0) p_1(x_0) p_2(x_0) > p_0(x_0), && (78)\\
B_3(x_0) &= 1 + p_0(x_0) p_1(x_0) + p_0(x_0) p_3(x_0) + p_2(x_0) p_3(x_0) + p_0(x_0) p_1(x_0) p_2(x_0) p_3(x_0) > 1, && (79)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

因此， $B_n(x_0) > \min\{1, p_0\} =: \mu$ 由此我们得出

$$B_{n-1}(x_0)B_n(x_0) > \mu^2 \sum_{k=0}^{n} p_k(x_0). \tag{80}$$

这表明，如果 $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x_0)$ 发散，则 (76) 中的极限也发散，而连分数收敛。现在假设 $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x_0)$ 收敛。那么，由 (73) 可知

$$B_{n-1}(x_0) + B_n(x_0) = B_{n-2}(x_0) + [1 + p_n(x_0)]\, B_{n-1}(x_0) < [1 + p_n(x_0)]\, [B_{n-1}(x_0) + B_{n-2}(x_0)] \tag{81}$$

并通过归纳法

$$B_{n-1}(x_0) + B_n(x_0) < \prod_{k=0}^{n} [1 + p_k(x_0)] < \prod_{k=0}^{n} e^{p_k(x_0)} < \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x_0)\right). \tag{82}$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x_0)$ 收敛，设 L 表示相应的极限。这意味着

$$B_{n-1}(x_0) + B_n(x_0) < e^L \tag{83}$$

因此，

$$B_{n-1}(x_0)B_n(x_0) < B_{n-1}^2(x_0) + B_n^2(x_0) + 2B_{n-1}(x_0)B_n(x_0) = [B_{n-1}(x_0) + B_n(x_0)]^2 < e^{2L}. \tag{84}$$

这违反了式 (76) 的发散条件，因此式 (68) 在 x_0 处必须发散。由于 $x_0 \in \mathcal{I}$ 的选择是任意的，该结果对任何 $x \in \mathcal{I}$ 都成立。 □

为了探究函数 α 是否可解释为某个递推关系极小解的特定项，我们将在下文推导。这里先简要回顾：差分方程的一个解 ψ_n

$$\mathfrak{x}_{n+2} + \mathfrak{f}_1(n)\mathfrak{x}_{n+1} + \mathfrak{f}_2(n)\mathfrak{x}_n = 0 \tag{85}$$

若称其为极小解或次主导解，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n}{\mathfrak{x}_n} = 0 \tag{86}$$

对于任何不是 ψ_n 倍数的解 $\mathfrak{x}_n$ ，

定理 IV.3 令 $\mathcal{I}$ 如定理 IV.2 所定义。考虑递推关系

$$\mathfrak{x}_n(x) - p_n(x)\mathfrak{x}_{n-1}(x) - q_n(x)\mathfrak{x}_{n-2}(x) = 0 \tag{87}$$

其中，对于所有 $x \in \mathcal{I}$ 以及每个 $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$， $q_n(x) \neq 0$。若对于任何 $x \in \mathcal{I}$，式 (87) 都有一个极小解 $\psi_n(x)$，且对于所有 $x \in \mathcal{I}$，$\psi_{-1}(x) \neq 0$，那么连分数 (68) 在区间 $\mathcal{I}$ 上逐点收敛到 α。

证明。假设（87）具有一个极小解 $\psi_n(x)$，且对所有 $x \in \mathcal{I}$ 都有 $\psi_{-1}(x) \neq 0$。将（87）除以 $\mathfrak{x}_{n-1}$，并引入 $\mathfrak{y}_n(x) := \mathfrak{x}_n(x)/\mathfrak{x}_{n-1}(x)$，其中对所有 $x \in \mathcal{I}$ 都有 $\mathfrak{x}_{n-1}(x) \neq 0$，可得

$$\mathfrak{y}_n(x) - p_n(x) = \frac{q_n(x)}{\mathfrak{y}_{n-1}(x)} \tag{88}$$

因此，

$$\mathfrak{y}_{n-1}(x) = \frac{q_n(x)}{-p_n(x) + \mathfrak{y}_n(x)}. \tag{89}$$

递归应用上述公式可得

$$\mathfrak{y}_{n-1}(x) = \cfrac{q_n(x)}{-p_n(x) + \cfrac{q_{n+1}(x)}{-p_{n+1}(x) + \cfrac{q_{n+2}(x)}{-p_{n+2}(x) + \cdots}}}. \tag{90}$$

考虑到 $\mathfrak{y}_{n-1}(x) := \mathfrak{x}_{n-1}(x)/\mathfrak{x}_{n-2}(x)$，情形 $n=0$ 可得

$$\mathfrak{y}_{-1}(x) = \frac{\mathfrak{x}_{-1}(x)}{\mathfrak{x}_{-2}(x)} = \cfrac{q_0(x)}{-p_0(x) + \cfrac{q_1(x)}{-p_1(x) + \cfrac{q_2(x)}{-p_2(x) + \cdots}}} = \underset{n=0}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \left(\frac{q_n(x)}{-p_n(x)} \right) \tag{91}$$

第 n 个渐近分数

$$\widehat{C}_n(x) = \frac{\widehat{A}_n(x)}{\widehat{B}_n(x)}. \tag{92}$$

另一方面，$A_n(x)$ 和 $B_n(x)$ 是方程 (87) 的两个线性无关解，满足初始条件 $A_{-1}(x) = 0$、$A_{-2}(x) = 1$ 以及 $B_{-1}(x) = 1$、$B_{-2}(x) = 0$，对所有 $x \in \mathcal{I}$ 均成立。因此，不失一般性，设对于某个 $\ell(x) \neq 0$，且对所有 $x \in \mathcal{I}$

$$\psi_n(x) = \widehat{A}_n(x) + \ell(x)\widehat{B}_n(x) \quad \forall n \geq -1. \tag{93}$$

注意，对所有 $x \in \mathcal{I}$

$$\psi_{-1}(x) = \ell(x), \quad \psi_{-2}(x) = 1. \tag{94}$$

此外，我们有

$$\frac{\psi_n(x)}{\widehat{B}_n(x)} = \frac{\widehat{A}_n(x)}{\widehat{B}_n(x)} + \ell(x). \tag{95}$$

由于对于每个 $x \in \mathcal{I}$，$\psi_n(x)$ 都是方程 (87) 的极小解，因此可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n(x)}{\widehat{B}_n(x)} = 0 \tag{96}$$

在 $\mathcal{I}$ 上逐点成立。若将 $n \to \infty$ 代入 (95)，则再次得到在 $\mathcal{I}$ 上逐点成立

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{C}_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\widehat{A}_n(x)}{\widehat{B}_n(x)} = -\ell(x). \tag{97}$$

另一方面，由式（91）可得

$$\mathfrak{y}_{-1}(x) = \frac{\psi_{-1}(x)}{\psi_{-2}(x)} = \ell(x) \tag{98}$$

将其与式（97）和 $\psi_{-2}(x) = 1$ 结合，得到

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{C}_n(x) = -\psi_{-1}(x). \tag{99}$$

考虑到如下普遍性质：若收敛连分数 $\mathrm{K}_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{-b_n}\right)$ 的极限为 L，则 $\mathrm{K}_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ 的极限也为 L，可得

$$\lim_{n\to\infty} C_n(x) = -\lim_{n\to\infty} \widehat{C}_n(x) = \psi_{-1}(x) \tag{100}$$

证明至此完成。 □

该结果表明，若满足上述定理中的条件，AIM方法中以 $\alpha_n = s_n/\lambda_n$ 为项的序列将在 $\mathcal{I}$ 上逐点收敛到某个函数 α，该函数可解释为

递推关系（87）的极小解 $\psi_n(x)$ 的项。现在，我们来探讨确保极小解存在的一些条件。为此，引入变量替换

$$\mathfrak{x}_n(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \prod_{j=n_0}^{n-2} p_j(x)\mathfrak{y}_n(x), \tag{101}$$

将其应用于 (87)，可得到递推关系

$$\mathfrak{y}_n(x) - 2\mathfrak{y}_{n+1}(x) + \frac{4q_n(x)}{p_{n-1}(x)p_n(x)}\mathfrak{y}_{n+2}(x) = 0. \tag{102}$$

假设以下极限在 $\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}$ 上处处逐点存在，即

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{4q_n(x)}{p_{n-1}(x)p_n(x)} \tag{103}$$

并对每个 $x \in \mathcal{I}_0$ 定义

$$a_n(x) = \frac{4q_n(x)}{p_{n-1}(x)p_n(x)} - q(x). \tag{104}$$

(102) 的特征根为

$$r_\pm(x) = 1 \pm \sqrt{1 - q(x)} \quad \forall x \in \mathcal{I}_0. \tag{105}$$

根据 [11]，我们有以下几种情况

1. 若对于所有 $x \in \mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}$，$q(x) < 1$，且 $p_n(x)$、$q_n(x)$ 均为实值函数，则 $r_\pm(x)$ 为实数且互不相同。此外，我们有以下几种子情况

   (a) 若对任意 $x \in \mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{I}$，$a_n(x) \to 0$ 在 $n \to \infty$ 处逐点成立，则 Poincar´e-Perron 定理保证存在两个线性无关解 $\mathfrak{y}_{\pm,\,n}(x)$，使其满足方程 (102)

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{y}_{\pm,n+1}(x)}{\mathfrak{y}_{\pm,n}(x)} = r_\pm(x) \quad \forall x \in \mathcal{I}_0 \cap \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2. \tag{106}$$

   设 $\mathcal{I}_3 \subseteq \mathcal{I}$ 是实线上的某个区间，对任意 $x \in \mathcal{I}_3$，$|r_-(x)| < |r_+(x)|$ 均成立，则可以构造一些正函数 $f_\pm(x)$，使其满足

   $$|r_-(x)| < f_-(x) < f_+(x) < |r_+(x)| \quad \forall x \in \mathcal{I}_3. \tag{107}$$

   此外，由 (106) 可得

   $$\left|\frac{\mathfrak{y}_{-,n+1}(x)}{\mathfrak{y}_{-,n}(x)}\right| \le f_-(x), \quad \left|\frac{\mathfrak{y}_{+,n+1}(x)}{\mathfrak{y}_{+,n}(x)}\right| \ge f_+(x) \quad \forall x \in \bigcap_{k=0}^{3} \mathcal{I}_k \tag{108}$$

   由此可得

   $$|\mathfrak{y}_{-,n}(x)| \le f_-^n(x)|\mathfrak{y}_{-,0}(x)|, \quad |\mathfrak{y}_{+,n}(x)| \ge f_+^n(x)|\mathfrak{y}_{+,0}(x)| \tag{109}$$

   因此，

   $$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\mathfrak{y}_{-,n}(x)}{\mathfrak{y}_{+,n}(x)}\right| = \left|\frac{\mathfrak{y}_{-,0}(x)}{\mathfrak{y}_{+,0}(x)}\right| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{f_-(x)}{f_+(x)}\right)^n = 0. \tag{110}$$

   这表明 $\mathfrak{y}_{-,\,n}(x)$ 是方程 (102) 的一个极小解，并且根据定理 IV.3，连分数 (68) 在区间 $\bigcap_{k=0}^{3} \mathcal{I}_k$ 上逐点收敛到 α。

(b) 假设存在某个区间 $\mathcal{I}_4 \subseteq \mathcal{I}$，使得对于任意 $x \in \mathcal{I}_4$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n(x)| < \infty. \tag{111}$$

因此，[11] 中的推论 8.27允许构造出两个具有渐近行为的方程 (102) 的线性无关解

$$\mathfrak{y}_{\pm,n}(x) = r_{\pm}^{n}(x)\,[1 + o(1)] \tag{112}$$

并且借助 (101)，递推关系 (87) 有如下解

$$\mathfrak{x}_{\pm,n}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \prod_{j=n_0}^{n-2} p_j(x) r_{\pm}^{n}(x)\,[1 + o(1)] \quad \forall x \in \bigcap_{k=0}^{4} \mathcal{I}_k. \tag{113}$$

考虑到不等式 $|r_{-}(x)| < |r_{+}(x)|$ 在区间 $\mathcal{I}_3$上成立，则

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\mathfrak{x}_{-,n}(x)}{\mathfrak{x}_{+,n}(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{r_{-}(x)}{r_{+}(x)}\right|^{n} [1 + o(1)] \quad \forall x \in \bigcap_{k=0}^{4} \mathcal{I}_k \tag{114}$$

由此我们得出，$\mathfrak{x}_{-,n}(x)$ 是一个极小解。

(c) 若不是

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n(x)|^2 < \infty \tag{115}$$

在适当的区间 I上，[12] 证明了 (87) 有两个线性无关解

$$\mathfrak{x}_{\pm,n}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \prod_{j=n_0}^{n-2} p_j(x) \prod_{j=n_0}^{n-1} \left[1 \mp \sqrt{1 - q(x)} \pm \frac{a_j(x)}{2\sqrt{1 - q(x)}}\right] [1 + o(1)]\,. \tag{116}$$

那么，$\mathfrak{x}_{-,\,n}(x)$ 是一个极小解，因此可以使用定理 IV.3 得出连分数（68）逐点收敛到 α。

2. 当我们需要考虑满足 $q(x) = 1$，从而 $r_{\pm}(x) = 1$ 的那些 x 值时，这种情形具有相关性。照常，令 $x \in \mathcal{I}$，并且对所有 $x \in \mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}$，$q(x) = 1$。进一步假设

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n\,|a_n(x)| < \infty \quad \forall x \in \widehat{\mathcal{I}}_2 \subseteq \mathcal{I}. \tag{117}$$

那么，Coffman 定理（参见 [11] 中的定理 8.29）意味着存在两个渐近解 $\mathfrak{y}_{-,\,n}(x) \approx 1$ 和 $\mathfrak{y}_{+,\,n}(x) \approx n$，因此我们又可以构造出一个极小解。

3. 若在 $\mathcal{I}$ 的某个适当子集上 $q(x) > 1$，则 $r_{\pm}(x)$ 互为复共轭。此外，如果我们要求

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_{n+1}(x) - a_n(x)| < \infty \tag{118}$$

在 $\mathcal{I}$ 的某个子集上，那么我们可以如 [13]，中那样构造两个线性无关解，即

$$\mathfrak{y}_{\pm,n}(x) = [1 + o(1)] \prod_{m=n_0}^{n-1} \beta_{\pm,m}(x), \quad \beta_{\pm,m}(x) = 1 \pm \sqrt{1 - q(x) + a_n(x)} \tag{119}$$

只要满足

$$\Re\sqrt{1 - q(x) + a_n(x)} \geq 0 \tag{120}$$

对于平方根的一个固定分支，例如 $0 \leq \arg\sqrt{z} < \pi$。这种情况下，我们也可以提取出一个极小解。

4. 假设式 (87) 中的系数具有渐近展开

$$p_n(x) \approx a(x)n^{\sigma}(x), \quad q_n(x) \approx b(x)n^{\tau(x)} \tag{121}$$

其中 $a(x)b(x) \neq 0$ 在某个区间上，且 $\sigma(x)$ $\tau(x)$ 为实值函数。于是，我们有以下判据来检验极小解是否存在 [14, 15]

(a) 如果 $\sigma(x) > \tau(x)/2$ 在 $\mathcal{I}$ 的某个子集上成立，我们可以找到一个基本解组 $\mathfrak{x}_{\pm,n}(x)$，使得以下极限逐点成立

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{x}_{-,n+1}(x)}{\mathfrak{x}_{-,n}(x)} = -a(x)n^{\sigma(x)}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{x}_{+,n+1}(x)}{\mathfrak{x}_{+,n}(x)} = -\frac{b(x)}{a(x)}n^{\sigma(x)-\tau(x)}. \tag{122}$$

此外，$\mathfrak{x}_{+,n}(x)$ 是一个极小解。

(b) 如果在某一点 $\sigma(x) = \tau(x)/2$，令 $r_{\pm}(x)$ 表示方程 $\lambda^2 + \sigma(x)\lambda + \tau(x) = 0 \text{with} |r_+(x)| \geq |r_-(x)|$ 在 $\mathcal{I}$ 的某个子集上的根。那么，对于 $|r_+(x)| \neq |r_-(x)|$，递推关系 (87) 有一个基本解组 $\mathfrak{x}_{\pm,n}(x)$，使得以下极限逐点成立

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{x}_{-,n+1}(x)}{\mathfrak{x}_{-,n}(x)} = r_-(x)n^{\sigma(x)}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{x}_{+,n+1}(x)}{\mathfrak{x}_{+,n}(x)} = r_+(x)n^{\tau(x)}. \tag{123}$$

此外，$\mathfrak{x}_{+,n}(x)$ 是一个极小解。

5. 假设 (87) 中的系数具有渐近展开

$$p_n(x) \approx \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j(x)}{n^j}, \quad q_n(x) \approx \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j(x)}{n^j} \tag{124}$$

且在某个区间上 $b_0(x) \neq$。与 (87) 相关的特征方程为 $r^2 + a_0(x)r + b_0(x) = 0$，其根为

$$r_{\pm}(x) = -\frac{a_0(x)}{2} \pm \sqrt{\frac{a_0^2(x)}{4} - b_0(x)}. \tag{125}$$

此时，可以使用 Birkhoff-Adams 定理 [16–21]，构造 (87) 的基本解组的渐近展开，从而确定是否存在极小解。具体分为以下几种情况

(a) 若 $a_0^2(x) \neq 4b_0(x)$ 在 $\mathcal{I}$ 的某个子集上成立，则有两个线性无关解 $\mathfrak{x}_{\pm,n}(x)$，其形式为

$$\mathfrak{x}_{+,n}(x) = r_{\pm}^n(x)n^{\alpha_{\pm}(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{\pm,k}(x)}{n^k}, \quad \alpha_{\pm}(x) = \frac{a_1(x)r_{\pm(x)} + b_1(x)}{a_0(x)r_{\pm}(x) + 2b_0(x)} \tag{126}$$

对于满足 $\alpha_{\pm}(x)$ 表达式中的分母不为零的那些 x 值。此外，系数 $c_{\pm,k}$ 满足递推关系

$$\sum_{j=0}^{s-1} \left[r_{\pm}^2(x)2^{s-j} \begin{pmatrix} \alpha_{\pm}(x) - j \\ s-j \end{pmatrix} + r_{\pm}(x) \sum_{k=j}^{s} \begin{pmatrix} \alpha_{\pm}(x) - j \\ k-j \end{pmatrix} a_{s-k}(x) + b_{s-j}(x) \right] c_{\pm,j}(x) = 0, \quad c_{\pm,0}(x) = 1. \tag{127}$$

(b) 在满足 $r_-(x) = r_+(x) = r(x)$ 且 $r(x) = -a_0(x)/2$ 不是 $a_1(x)r(x)$ 的根的那些点上，(87) 具有如下形式的两个线性无关解

$$\mathfrak{x}_{+,n}(x) = r^n(x)e^{\gamma_{\pm}(x)\sqrt{n}}n^{\widetilde{\alpha}_{\pm}(x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{\pm,j}(x)}{n^{j/2}} \tag{128}$$

with

$$\widetilde{\alpha}(x) = \frac{1}{4} + \frac{b_1(x)}{2b_0(x)}, \quad \gamma_{\pm}(x) = \pm 2\sqrt{\frac{a_0(x)a_1(x) - 2b_1(x)}{2b_0(x)}}, \quad c_{\pm,0} = 1, \tag{129}$$

$$c_{\pm,1}(x) = \frac{1}{24b_0^2(x)\gamma_{\pm}(x)} \left(a_0^2(x)a_1^2(x) - 24a_0(x)a_1(x)b_0(x) + 8a_0(x)a_1(x)b_1(x)\right. \tag{130}$$

$$\left. -24a_0(x)a_2(x)b_0(x) - 9b_0^2(x) - 32b_1^2(x) + 24b_0(x)b_1(x) + 48b_0(x)b_2(x)\right) \tag{131}$$

(c) 在满足 $r_-(x) = r_+(x) = r(x)$ 且 $2b_1(x) = a_0(x)a_1(x)$ 的那些点上，我们改为考虑方程

$$\widetilde{\alpha}(\widetilde{\alpha}-1)r^2(x) + [a_1(x)\widetilde{\alpha} + a_2(x)]\, r(x) + b_2(x) = 0. \tag{132}$$

由 $\widetilde{\alpha}_\pm$ 和 $\Re\ \widetilde{\alpha}_+ \geq \Re\widetilde{\alpha}_-$ 表示方程 (132) 的根。于是，我们有以下三种情形

i. 对于满足 $\widetilde{\alpha}_+ - \widetilde{\alpha}_- \neq 0$、1、2、$\cdots$ 的那些 x 值，方程 (87) 有两个如下形式的线性无关解

$$\mathfrak{x}_{\pm,n}(x) = r^n(x)n^{\widetilde{\alpha}_\pm(x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{\pm,j}(x)}{n^j}. \tag{133}$$

ii. 对于满足 $\widetilde{\alpha}_+ - \widetilde{\alpha}_- = 1$、2、$\cdots$ 的那些 x 值，方程 (87) 有一个解 $\mathfrak{x}_{-,n}(x)$，由 (133) 给出；另一个解为

$$\mathfrak{x}_{+,n}(x) = z_n(x) + c\mathfrak{x}_{-,n}(x)\ln n, \tag{134}$$

其中 c 是一个可能为零的常数，并且

$$z_n(x) = r^n(x)n^{\widetilde{\alpha}_+(x)} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{d_s}{n^s}. \tag{135}$$

iii. 对于满足 $\widetilde{\alpha}_+ = \widetilde{\alpha}_-$ 的那些 x 值，方程 (87) 有一个解 $\mathfrak{x}_{-,n}(x)$，由 (133) 给出；第二个解由 (135) 表示，其中

$$z_n(x) = r^n(x)n^{\widetilde{\alpha}_-(x)-k_0+2} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{d_s}{n^s} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{d_s}{n^s}, \tag{136}$$

其中 k_0 是满足 $k_0 \geq 3$ 的正整数。

我们注意到，一般而言，确保极小解存在的上述条件可能会缩小使用渐近迭代法时 x 的取值区间。下面的结果进一步缩小了 x 的取值区间，使得连分数 (72) 以及因此式 (68) 逐点收敛。

定理 IV.4　　设 $\mathfrak{K} := \{x \in I \mid p_n(x) \geq 1\}$。那么，对于所有 $x \in \mathfrak{K}$，AIM条件 (45) 均成立。

证明。由于 (72) 与 (68) 等价，因此不失一般性，我们可以考察 (72) 的渐近式序列。由 (67) 可得第 n 个和第 $(n-1)$ 个渐近式

$$C_n(x) - C_{n-1}(x) = \frac{(-1)^n}{B_n(x)B_{n-1}(x)} \tag{137}$$

其中 $B_n(x)$ 满足式 (48) 中的递推关系。由 (80) 可知

$$B_n(x)B_{n-1}(x) > \mu^2 \sum_{k=0}^{n} p_k(x), \quad \mu = \min_{x\in I}\{1, p_0(x)\} \tag{138}$$

由于对所有 n，$p_n(x) \geq 1$，因此对所有 n，$p_n(x) > 0$。对于 $x \in \mathfrak{K}$，我们有

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x) \geq n+1. \tag{139}$$

此外，由于所有 $p_k(x)$ 均为正数，我们还有

$$\left|\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\right| \geq n+1 \tag{140}$$

因此，

$$|B_n(x)B_{n-1}(x)| > (n+1)\mu^2 \tag{141}$$

由此可得

$$|C_n(x) - C_{n-1}(x)| < \frac{1}{(n+1)\mu^2}. \tag{142}$$

显然，上述表达式在 $n \to \infty$ 时趋于零，证明至此完成。 □

致谢

我们感谢匿名审稿人认真审阅本文并提出宝贵意见，这些意见有助于提高本文的质量。

---

[1] H. Ciftci、R. L. Hall 和 N. Saad, *Asymptotic iteration method for eigenvalue problems*, J. Phys. A: Math. Gen. 36, 11807 (2003)。[2] M. E. H. Ismail 和 N. Saad, *The Asymptotic Iteration Method Revisited*, J. Math. Phys. 61, 033501 (2020)。[3] H. T. Cho、A.S. Cornell、J. Doukas 和 W. Naylor, *Black hole quasinormal modes using the asymptotic iteration method*, Class. Quantum Grav. 27, 155004 (2010)。[4] H. T. Cho、A.S. Cornell、J. Doukas、T.-R. Huang 和 W. Naylor, *A New Approach to Black Hole Quasinormal Modes: A Review of the Asymptotic Iteration Method* **2012** 2012 281705 , Adv. Math. Phys. ( )。

[5] C. Camacho 和 H. Movasati, *Remarks on a theorem of Perron*, J. Differ. Equ. 260, 1465 (2016)。[6] A.R. Matamala、F.A. Gutierrez 和 J. Diaz-Vald´es, *A connection between the asymptotic iteration method and the continued fractions formalism* **361**, 16 2007 , Phys. Lett. A ( )。[7] D. Batic、M. Nowakowski 和 K. Redway, *Some exact quasi-normal frequencies of a massless scalar field in the Schwarzschild space-time* **98**, 024017 2018 , Phys. Rev. D ( )。[8] R. Panosso Macedo, *Comment on "Some exact quasinormal frequencies of a massless scalar field in Schwarzschild space-time"* **99**, 088501 2019 , Phys. Rev. D ( )[9] D. Batic、M. Nowakowski 和 K. Redway, *Reply to "Comment on 'Some exact quasinormal frequencies of a massless scalar field in Schwarzschild spacetime' "* **99**, 088502 2019 , Phys. Rev. D ( )。[10] H.Ciftci、R. L. Hall 和 N. Saad, *Perturbation Theory in a framework of iteration methods*, Phys. Lett. A340, 388 (2005)。[11] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Springer Verlag (2005)。[12] S. Elaydi, *Asymptotics for linear difference equations I: Basic theory*, J. Difference Eqn. Appl. 5, 563 (1999)。[13] S. Elaydi, *Asymptotics for linear difference equations II: Application* 见 *New Trends in Difference Equations*, Taylor & Francis, 伦敦（2002）。[14] P. Kreuser, *Über das Verhalten der Integrale homogener linearer Differenzengleichungen im Unendlichen*, 论文, 图宾根大学, 莱比锡（1914）。[15] O. Perron, *Über einen Satz des Herrn Poincaré*, J. Reine Angew. Math. 136, 17 (1909) [16] C. R. Adams, *On the irregular cases of linear ordinary difference equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 30, 507 (1928)。[17] G. D. Birkhoff, *General theory of linear difference equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 12, 243 (1911)。[18] G. D. Birkhoff, *Formal theory of irregular linear difference equations*, Acta Math. 54, 205 (1930)。[19] G. D. Birkhoff 和 W. J. Trjitzinsky, *Analytic theory of singular difference equations*, Acta Math. 60, 1 (1932)。[20] H. Li, *Asymptotic expansions for second-order linear difference equations*, J. Comput. Appl. Math. 41, 65 (1992)。[21] R. Wong 和 H. Li, *Asymptotic expansions for second-order linear difference equations II*, Stud. Appl. Math. 87, 289 (1992)。