arXiv:2303.03265v1 [math.FA] 6 Mar 2023

Lipschitz自由空间与有限维空间的子集

JAN BIMA

ABSTRACT. 我们研究有限维向量空间子集上的 Lipschitz 自由p-空间 F_p 的几何中的两个问题，其中 $0 < p \leq 1$。我们解决了一个未解决问题，并证明：若 $(\mathrm{M}\ \rho)$ 是一个无限的倍增度量空间（例如欧几里得空间的无限子集），则对每个 $\alpha \in (0,1)$ 和 $0 < p \leq 1$，$\mathrm{F}_p(\mathrm{M}\ \rho^\alpha) \simeq \ell_p$。我们给出了空间 $\mathrm{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)$ 与 ℓ_p 之间班纳赫-马祖尔距离的一个上界。此外，我们探讨了 Albiac等人提出的一个问题 [4]，并阐释了 p, d 对一个典范的、局部逐坐标仿射收缩的 Lipschitz常数所起的作用。该收缩从 $(K, |\cdot|_1)$ 映射到由这些立方体的顶点构成的 Lipschitz 自由 p- 空间 $\mathrm{F}_p(V, |\cdot|_1)$；其中 $K = \bigcup_{Q \in \mathrm{R}} Q$ 是一族 $\emptyset \neq \mathrm{R} \subseteq \{Rw + R[0,1]^d : w \in \mathbb{Z}^d\}$ 个边长为 $R > 0$ 的立方体在 $\mathbb{R}^d$ 中的并集。

1. INTRODUCTION

给定一个带基点度量空间 $\mathcal{M}$，存在一个 Banach空间 $\mathcal{F}(\mathcal{M})$，称为基于 $\mathcal{M}$的 *Lipschitz* 自由空间，使得$\mathcal{M}$ 通过映射 $\delta: \mathcal{M} \to \mathcal{F}(\mathcal{M})$等距嵌入到其中；对于每个 Banach空间 Y和一个在原点处为零的 Lipschitz映射 $f: \mathcal{M} \to Y$，f 都可唯一延拓为线性算子 $T_f: \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to Y$，使得 $\mathrm{Lip}\ f = \|T_f\|$。

Lipschitz 自由空间具有一项显著性质，即它们将经典线性理论与Banach空间的非线性几何联系起来。这一研究方向可追溯至 Godefroy 和 Kalton 的开创性论文 [8]，他们将 Lipschitz 自由空间确定为一类值得研究的自然对象，用于研究一个经典且深刻的问题：两个 Lipschitz同构的Banach空间是否线性同构。

作为该理论的一个应用，我们指出，作者证明了：只要 X 和 Y 是 Banach空间，且 X 等距嵌入到Y 中，就存在一个将 X 嵌入到Y中的线性等距嵌入。类似地，他们利用 Lipschitz 自由空间的泛扩张性质证明，Banach空间的有界逼近性质仅凭 Lipschitz同构便能得到保留。值得一提的是，逼近性质与巴拿赫空间非线性几何的研究仍在持续发展（参见 [4, 7, 9, 10, 12, 16]）。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 46A16（主要），46A32、46A45、46B03（次要）。*Key words and phrases.* Lipschitz 自由 p空间、 ℓ_p 空间同构、班纳赫-马祖尔距离、倍增度量空间、逼近性质。感谢 M. Cúth 对我的研究工作提出的无数见解。我还要感谢 J. L. Ansorena 提出反例2.5。感谢 GAČR 23-04776S 的支持。本文工作完成于作者任职于 MSD Czech Republic 期间，工作地点为捷克共和国布拉格。

在 Lipschitz同构问题的背景下，Albiac 和 Kalton[1]后来为每个$0 < p < 1$给出了一个由两个可分 p-Banach空间构成的例子；这两个空间 Lipschitz同构，但并非线性同构。事实证明，广义 Lipschitz同构问题的反例可以在广义利普希茨自由空间的框架下构造，这类空间被称为*Lipschitz*自由空间 p空间。

对于每个 $0 < p \leq 1$，度量空间$\mathcal{M}$ 上的 Lipschitz自由 p空间 $\mathcal{F}_p(\mathcal{M})$ 都是一个 p-Banach空间，$\mathcal{M}$ 等距嵌入其中；并且对于任意 p-Banach空间 Y 以及一个 Lipschitz映射 $f : \mathcal{M} \to Y$，若其在原点处为零，则 f 可唯一延拓为线性算子 $T_f : \mathcal{F}_p(\mathcal{M}) \to Y$，其 Lipschitz常数为 $f = \|T_f\|$。我们指出，近期在 [2] 中开始了对 Lipschitz自由 p空间的深入研究。

Lipschitz自由 p空间的局部非凸几何相当难以理解。举例来说，我们注意到，对于度量空间 $\mathcal{M}$ 的任意子空间$\mathcal{N}$，很容易证明，$\mathcal{F}_1(\mathcal{N})$ 通过包含映射$\mathcal{N} \to \mathcal{M}$的典范线性化，等距嵌入到$\mathcal{F}_1(\mathcal{M})$ 中。然而，对于 $p < 1$，情况并非如此；甚至，包含映射在一般情况下是否为同构嵌入仍是一个开放问题，分别参见 [2,定理 6.1 和问题 6.2], 。

$p < 1$ 理论的一个显著特点是，我们不再能够运用对偶论证，而必须转而在 Lipschitz 自由 p空间本身中进行直接的几何构造。此外，$p < 1$ 上的 p范数的严格凹性通常会在证明中引入维数因子；因此，为 Lipschitz 自由空间的逼近性质所积累的大量文献中提出的许多技术，通常都难以加以改造并应用于此。

本文考察有限维赋范空间子集上的 Lipschitz自由p空间结构方面的两个开放问题。具体而言，我们阐述经典 $p = 1$ 理论中的若干结果在 $0 < p \leq 1$ 尺度上的推广程度。

定理 1 (参见定理 4.9)**.** 设 $(\mathcal{M}\ \rho)$ 是一个无限倍增度量空间（例如欧几里得空间的一个无限子集），且 $0 < \alpha < 1,\ 0 < p \leq 1$. 则 $\mathcal{F}_p(\mathcal{M}\ \rho^\alpha)$ 与空间 ℓ_p同构。

Lipschitz 自由空间理论中的一个经典结果指出，若 $|\cdot|$是 $\mathbb{R}^d$ 上的一个范数，且 $\mathcal{M}$ 是赋予$H\ddot{o}lder\ distorted\ metric\ |\cdot|^\alpha$的 $\mathbb{R}^d$ 中的一个无限有界子集，其中 $0 < \alpha < 1$, 则$\mathcal{F}_1(\mathcal{M}\ |\cdot|^\alpha) \simeq \ell_1$。

标准方法（例如，参见 [18]）是将$\mathcal{F}_1(\mathcal{M}\ |\cdot|^\alpha)$的等距预对偶识别为子空间 $\mathrm{lip}_0(\mathcal{M}\ |\cdot|^\alpha)$，该子空间由 Lipschitz 对偶 $\mathrm{Lip}_0(\mathcal{M}\ |\cdot|^\alpha)$中的小*Lipschitz*函数组成 $\simeq \mathcal{F}_1^*(\mathcal{M}\ |\cdot|^\alpha)$。随后通过构造 $\mathrm{lip}_0(\mathcal{M}\ |\cdot|^\alpha)$与空间 c_0 之间的同构来完成证明；这是一个较早的结果，可追溯至例如 [6]。

更近些时候，这一结果被推广到 [3] 的无限子集。特别地，有人观察到，对于任意 $0 < p \leq 1$，若$\mathcal{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)$ 与空间 ℓ_p 同构，则对于 $\mathbb{R}^d$ 的任意无限子集$\mathcal{M}$，$\mathcal{F}_p(\mathcal{M}\ |\cdot|^\alpha) \simeq \ell_p$（并且，根据阿苏阿德嵌入定理，这一结论也适用于无限倍增度量空间的 H¨older 畸变）。作者声称，标准 $p = 1$ 论证中的思路可以用于推出同构 $\mathcal{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha) \simeq \ell_p$，其中 $d = 1$ 和 $0 < p \leq 1$；然而，对于 $d \geq 2$

现有技术仍不足以解决这一问题，因此问题依然悬而未决，参见 [3,问题 6.8]。

这里我们研究$\mathcal{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)$的多维结构。与 $p = 1$的标准证明不同，我们在相应空间的 p-范数化集合之间构造了一个显式的线性双射。结果表明，该基与$\mathcal{F}_p([0,1]^d)$的Schauder基具有相同的形式，参见 [4, 定理 3.8]。

还值得注意的是，我们的方法给出了$\mathcal{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)$与 ℓ_p之间班纳赫-马祖尔距离的一个估计，只要将 $|\cdot|$视为 ℓ_1 范数即可。即使在 $p = 1$的情形下，这也是一个新的结果。感兴趣的读者可以比较 $(4d^{2-\alpha}c(\alpha))^d$的上界与 $c'(\alpha)$ $d^{\alpha(1-\alpha)}(\log(2n))^{-\alpha/2}$ 的下界（当 $\alpha \in [1/2, 1)$ 以及$c'(\alpha)d^{\alpha/2}(\log(2n))^{-\alpha/2}$ 的下界（其他情形），其中 $p = 1$ 和 $c(\alpha)$、 $c'(\alpha)$均为普适常数，参见 [13,命题 8.6]。

作为定理 1 证明的引言，深入研究从 $(K, |\cdot|_1)$ 到其顶点上的 Lipschitz 自由 p-空间 $\mathcal{F}_p(V, |\cdot|_1)$ 的一个典范的局部逐坐标仿射收缩映射将很有启发性。其中，$K = \bigcup_{Q\in\mathcal{R}} Q$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中一族边长为 $R > 0$ 的立方体 $\emptyset \neq \mathcal{R} \subseteq \{Rw + R[0,1]^d : w \in \mathbb{Z}^d\}$ 的并集。

由 [14] 可知，对于 $p = 1$，该收缩映射是 Lipschitz 连续的，且 Lipschitz常数等于一。最近， [4, 定理 5.1] 进一步证明，对于任意 $0 < p \leq 1$，该收缩映射都是 Lipschitz 连续的；然而， p、 d 在 Lipschitz常数估计中的作用尚不明确，而且该方法即使在经典的$p = 1$ 情形下也只能得到次优估计。

在此，我们介绍一种替代方法，该方法通常改进 [4]，中的估计，并应用双重计数论证，推导出收缩映射的 Lipschitz常数下界。也就是说，我们得到以下结果，从而对 [4,问题 4.6]给出了否定的回答。

定理 *2*（参见定理 *3.2*）。存在唯一映射 $r_{K,V} : (K, |\cdot|_1) \to \mathcal{F}_p(V, |\cdot|_1)$，使得 $r_{K,V}(v) = \delta_V(v)$，其中 $v \in V$，且 $r_{K,V}$在 R 中的每个立方体上都是逐坐标仿射的。若记 $C(p, n) = n^{1/p-1}$，其中$n \in \mathbb{N}$，则

$$C(p, 2^{d-1}) \leq \operatorname{Lip} r_{K,V} \leq C(p, 2^{d-1})C(p, d)C(p, 3).$$

本文的组织结构如下。在第 2 节中，我们回顾 p-Banach空间的概念，并介绍 Lipschitz 自由 p-空间的若干基础性质。我们还将在立方体中引入典范的局部逐坐标仿射收缩映射。第 3 节专门用于证明定理 2。在第 4节中，我们将发展一系列结果，为证明定理 1 在特殊情形 $\mathcal{M} = [0,1]^d$做铺垫，随后推导出关于无限倍增度量空间 H¨older 畸变的一般结论。

2. Preliminaries

2.1. p范空间。

定义 2.1。 设 X 为一个向量空间。若映射 $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ 满足存在 $\kappa \geq 1$ 使得，则称其为 X 上的拟范数 。

(i) $\|x\| > 0$ 对于任意 $x \neq 0$,

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ 对于任意标量 α 和 $x \in X$，(iii) $\|x+y\| \le \kappa(\|x\| + \|y\|)$ 对于任意 $x,\ y \in X$。我们将 $(X,\ \|\cdot\|)$ 称为 拟赋范空间。

将条件 (iii) 替换为如下假设：存在某个 $0 < p \le 1$，(iii')

$\|x+y\|^p \le \|x\|^p + \|y\|^p$ 对于任意 $x,\ y \in X$，

由此得到 p-范数 和 p-赋范空间 的概念。此外，若 X 关于度量 $d(x,y) = \|x-y\|^p$是完备的，其中 $x, y \in X$，则称 $(X, \|\cdot\|)$ 为 p-*Banach*空间。

定义 2.2。对于 $0 < p \le 1$，若向量空间 X 的子集 Z 对任意 $x, y \in Z$ 及标量 α, β，其中 $|\alpha|^p + |\beta|^p \le 1$，都有 $\alpha x + \beta y \in Z$，则称其为绝对 p-凸的。

包含 Z 的最小绝对 p-凸集记作 $\operatorname{aconv}_p Z$。

对于拟赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 的单位球，我们记作 $B_X = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$。

定义 2.3。对于 $0 < p \le 1$，若拟赋范空间 X 的子集 Z 满足以下条件，则称其为带常数 α-范数控制的 p，$\beta > 0$

$$\alpha \operatorname{\overline{aconv}}_p Z \subseteq B_X \subseteq \beta \operatorname{\overline{aconv}}_p Z.$$

若 $\alpha = \beta = 1$，则称 Z 是 等距的 p-范数控制集。

以下事实是 Lipschitz 连续映射延拓定理的一个简单线性变体。

引理 2.4。设 $0 < p \le 1$。假设 Y_1 和 Y_2 分别在 p *Banach*空间 X_1 和 X_2 中是 p-范数控制集，并且 $\operatorname{aconv}_p Y_1$ 和 $\operatorname{aconv}_p Y_2$ 分别包含 $\operatorname{span} Y_1$ 和 $\operatorname{span} Y_2$ 中零的邻域。也就是说，对于每个 $i \in$ ***{1,2}***，存在某个 $c_i > 0$，使得 $\operatorname{aconv}_p Y_i \supseteq c_i B_{X_i} \cap$ 张成空间 Y_i。

若 T 是从 张成空间 Y_1 到 X_2 的单射线性映射，且 $T(Y_1) =\!\sim Y_2$，则 T 可延拓为满同构 $T\colon X_1 \to X_2$。

定量而言，若在 X_1 中，Y_1、Y_2 是常数分别为 α、β 和 α'、β' 的 p-范数化集，则 $\|\widetilde{T}\| \le \beta/\alpha'$ 且 $\|\widetilde{T}^{-1}\| \le \beta'/\alpha$。

我们指出，[2, 引理 2.6]陈述了一个更强的、所谓的延拓结果变体，却省略了以下假设：在每个 $\operatorname{aconv}_p Y_i$ 中包含零点的一个邻域张成空间 Y_i，对每个 $i \in \{1,\ 2\}$。然而，这一断言并不成立。尽管如此，事实证明，在 2.4 的应用中，引理 [2, 引理 2.6] 的假设在 [2]中均得到满足；因此，所导出的结果仍然有效。

以下关于 [2, 引理 2.6] 的反例由 J. L. Ansorena 提出。

反例 2.5。设 X 为一个 p-Banach空间，其中 $0 < p \le 1$，并设M 为 X的闭子空间。设 $T\colon X \to X/M$ 为商映射。

选取 V 的一个稠密子空间，使得 $V \cap M = \{0\}$，并令 $K = B_X \cap V$。容易看出，K 也是绝对 p-凸的，并且在 X 中是等距 p-范数化的。若 U_X 表示 X 中零点的开单位邻域，我们验证

$$B_{X/M} = \bigcap_{t>1} tT(U_X) = \bigcap_{t>1} tT(B_X) = \bigcap_{t>1} tT(\overline{K}) \subseteq \bigcap_{t>1} t\overline{T(K)} = \overline{T(K)}.$$

例如，对于任意 $0 < p \leq 1$，我们可以取 $X = \ell_p$， $M =$ 张成空间$\{e_1\}$，以及 $V =$ 张成空间$\{\{e_n : n \geq 2\} \cup \{e_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} e_n\}\}$。

若记 $X_1 = X$、 $X_2 = X/M$ 和 $Y_1 = K$、 $Y_2 = T$（K），则 Y_1 和 Y_2 分别在 X_1 和 X_2 中是绝对 p-范数化的，并且 T 是从 span Y_1 到 span Y_2 的线性双射。然而， T 不能延拓为从 X_1 到 X_2 的同构。

一类特殊系数。我们引入一个系数 $C(p, n)$，它在 κ 条件 (iii) 中对于 n 元素之和起着相应作用；也就是说，若 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个拟赋范空间，且给定 $0 < p \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$，则 $\|\sum_{i=1}^{n} x_i\| \leq C(p, n) \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ 对任意 $x_1, \ldots, x_n \in X$。

定义 2.6. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $0 < p \leq 1$，记作

$$C(p,n) = \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^p \right)^{1/p} : w_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{i=1}^{n} w_i \leq 1 \right\}.$$

注意，对于任意 $n \in \mathbb{N}$、 $0 < p \leq 1$，以及 $w = (w_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$，$(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^p)^{1/p} \leq C(p,n)|w|_1$。

由 H¨older 不等式可轻易得到 $C(p, n)$ 的显式公式。

事实 2.7. 设 $n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 1$。则有 $C(p, n) = n^{1/p-1}$。

2.2. **Lipschitz 自由 p-空间**。若 $(\mathcal{M}, \rho)$ 是一个带基点度量空间，其基点为 $0_{\mathcal{M}}$，考虑映射 $\delta : \mathcal{M} \to \text{Lip}_0(\mathcal{M})^*$，它将 $x \in \mathcal{M}$ 映射到典范求值泛函 $\delta(x) \in \text{Lip}_0(\mathcal{M})^*$，即对每个 $f \in \text{Lip}_0(\mathcal{M})$，都有 $\langle \delta(x), f \rangle = f(x)$。

我们回顾一下，M 上的*Lipschitz*自由空间$\mathcal{F}(\mathcal{M})$ 可以视为 $\delta(\mathcal{M})$ 在 Lip$_0$($\mathcal{M}$)* 中的闭张成空间，

$$\mathcal{F}(\mathcal{M}) = \overline{\text{span}}\{\delta(x) : x \in \mathcal{M}\},$$

并且$\mathcal{F}(\mathcal{M})^*$ 与 Lip$_0$($\mathcal{M}$) 线性等距。在事实上，若 Mol($\mathcal{M}$) 表示$\mathcal{F}(\mathcal{M})$ 中初等分子的集合，

$$\text{Mol}(\mathcal{M}) = \left\{ \frac{\delta(x) - \delta(y)}{\rho(x,y)} : x, y \in \mathcal{M}, x \neq y \right\},$$

由 Hahn-Banach定理可知， $B_{\mathcal{F}(\mathcal{M})} = \text{conv Mol}(\mathcal{M})$。 ——

令 $0 < p \leq 1$ 并记 $\mathcal{P}(\mathcal{M}) = \text{span}\{\delta(x) : x \in \mathcal{M}\}$。根据上述构造，对每个 $m \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$,

$$\|m\| = \inf \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p},$$

下确界取遍所有满足 $m = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$ 的 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $\mu_i \in \text{Mol}(\mathcal{M})$、 $a_i \in \mathbb{R}$，以及每个$i \in \{1, \ldots, n\}$。

结果表明，$(\mathcal{P}(\mathcal{M}) \|\cdot\|)$ 是一个 p-赋范空间，且 δ 是等距嵌入。经过完备化过程，便得到 Lipschitz自由 p-空间$\mathcal{F}_p(\mathcal{M})$。

定理2.8 （参见 [2, 定理 4。5]）。 设 （M ρ）是一个带基点度量空间。给定 $0 < p \leq 1$, 存在一个 p-*Banach*空间 （F_p（M） $\|\cdot\|$），称为 M 上的Lipschitz 自由 p-空间，以及一个映射 δ： $M \to F_p$（M），使得

(i) δ 是等距嵌入，且 $\delta(0_{\mathcal{M}}) = 0_{\mathcal{F}_p(M)}$， (ii) $F_p(M)$ = 张成空间 $\{\delta(x) : x \in M\}$， (iii) 若 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 是一个 p-Banach空间，则 $B(F_p(M)\ Y)$ 与 $Lip_0(M\ Y)$ 线性等距同构，该同构由映射 $f^* \mapsto f^* \circ \delta$ 给出，对每个 $f^* \in B(F_p(M)\ Y)$ 均成立。

事实 2.9 （参见 [2, 推论 4.11]）。设 $(M\ \rho)$ 是一个带基点度量空间。对于每个 $0 < p \leq 1$，集合 $\mathrm{Mol}(M)$ 在 $F_p(M)$ 中是等距的 p-范数化集。也就是说，$B_{\mathcal{F}_p(\mathcal{M})} = \mathrm{aconv}_p\overline{\mathrm{Mol}(M)}$，且对每个 $m \in P(M)$，我们有

$$\|m\| = \inf\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p},$$

下确界取遍所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $\mu_i \in \mathrm{Mol}(M)$， $a_i \in \mathbb{R}$，其中$i \in \{1, \ldots, n\}$，满足 $m = \sum_{i=1}^n a_i\mu_i$。

我们证明，对于 M 的任意稠密子集N 以及任意 $m \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$，若仅考虑将 m 分解为由$\mathcal{N}$上的分子构成的分解，上述公式仍然成立。

引理 2.10。设 N 是带基点度量空间 $(M\ \rho)$ 的一个稠密子集。那么对每个 $0 < p \leq 1$ 和 $m \in P(N)$，有 $\|m\|_{\mathcal{F}_p(\mathcal{M})} = \inf(\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{1/p}$，下确界取遍所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $\mu_i \in \mathrm{Mol}(N)$， $a_i \in \mathbb{R}$，其中$i \in \{1, \ldots, n\}$，满足 $m = \sum_{i=1}^n a_i\mu_i$。

特别地，相对于环境空间 $F_p(M)$，$\mathrm{aconv}_p\,\mathrm{Mol}(N)$ 包含 $P(N)$ 中零点的开单位邻域。也就是说，我们有 $\{m \in P(N) : \|m\|_{\mathcal{F}_p(\mathcal{M})} < 1\} \subseteq \mathrm{aconv}_p\,\mathrm{Mol}(N)$。

证明。设 $m \in P(N)$，并取 $\epsilon > 0$。由事实 2.9 可知，存在 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $\mu_i \in \mathrm{Mol}(M)$、 $a_i \in \mathbb{R}$，其中 $i \in \{1, \ldots, n\}$，使得$m = \sum_{i=1}^n a_i\mu_i$，且 $(\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{1/p} < (1+\epsilon)\|m\|_{\mathcal{F}_p}(M)$。进一步考虑$u_i, v_i \in M$、 $u_i \neq v_i$，使得 $\mu_i = \frac{\delta(u_i)-\delta(v_i)}{|u_i-v_i|^\alpha}$，其中 $i \in \{1, \ldots, n\}$。

记$\mathcal{B} = \{u_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}} \cup \{v_i\}^{i\in\{1,\ldots,n\}}$。由于$\mathcal{N}$在$\mathcal{M}$中稠密，容易构造一个映射 $r : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{N}$，使得对于任意 $b \in \mathcal{N}$， $r(b) = b$，且 $\frac{|r(u_i) - r\ v_i|^\alpha}{|u_i - v_i|^\alpha} < 1 + \epsilon$，但对于任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$， ~~$r(u_i) \neq r(v_i)$~~。

考虑唯一的线性映射 $r' : \mathcal{P}(\mathcal{B}) \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{N})$，它满足对每个 $b \in \mathcal{B}$， $r'(\delta(b)) = \delta(r(b))$。容易看出 $r'(m) = m$，因为 r' 在 $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ 上与恒等映射一致。

将 $m = r'(m) = \sum_{i=1}^n a_i r'(\mu_i)$ 改写为，其中

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i r'(\mu_i) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{r'(\delta(u_i)) - r'(\delta(v_i))}{|u_i - v_i|^\alpha} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{|r(u_i) - r(v_i)|^\alpha}{|u_i - v_i|^\alpha} \frac{\delta(r(u_i)) - \delta(r(v_i))}{|r(u_i) - (v_i)|^\alpha}.\end{aligned}$$

对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，我们记 $\mu_i' = \frac{\delta(r(u_i)) - \delta(r(v_i))}{|r(u_i) - (v_i)|^\alpha} \in \mathrm{Mol}(N)$，并设 $a_i' = a_i \frac{|r(u_i) - r\ v_i|^\alpha}{|u_i - v_i|^\alpha}$。由构造可知， $m = \sum_{i=1}^n a_i'\mu_i'$ and $(\sum_{i=1}^n |a_i'|^p)^{1/p} < (1+\epsilon)(\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{1/p} < (1+\epsilon)^2\|m\|_{\mathcal{F}_p}(M)$。取$\epsilon \to 0$，第一个断言即得。

请注意，特别是，已证明的部分表明 $\{m \in \mathcal{P}(\mathcal{N}) : \|m\|_{\mathcal{F}_p(\mathcal{M})} < 1\} \subseteq \operatorname{aconv}_p \operatorname{Mol}(\mathcal{N})$。这就证明了第二个断言。□

注意，对于任意 $0 < p \leq 1$，任何在基点处取值为零的带基点度量空间之间的 Lipschitz映射，都可以延拓为相应 Lipschitz自由 p空间之间的有界算子。

事实 2.11 (参见 [2, 引理 4.8]). 设 M、N 为带基点度量空间。对于每个$0 < p \leq 1$，都存在一个线性等距映射 $L : \operatorname{Lip}_0(M, N) \to B(F_p(M), F_p(N))$，称为典范线性化算子，使得对每个 $f \in \operatorname{Lip}_0(M, N)$，$\delta_{\mathcal{N}} \circ f = L(f) \circ \delta_{\mathcal{M}}$。

2.3. **在 $[0,1]^d$ 中的射影构造**。我们概述 $[0,1]^d$ 中一种典范的、局部逐坐标仿射的射影构造；借此为第 4 $p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)$ 节中讨论的 F的基展开奠定基础。值得指出的是，这种特定选择在各种语境中均有充分讨论，例如 [4, 18, 14]。我们采用 [4,第 3]节中的记号。

设 $d \in \mathbb{N}$, $R > 0$。若 $w = (w_i)_{i=1}^d \in \mathbb{Z}^d$，则令 $V_{w,R}^d = Rw + R\{0,1\}^d$，并将立方体 $Q_{w,R}^d$ 定义为集合 $V_{w,R}^d$的凸包，即 $Q_{w,R}^d = Rw + R[0,1]^d$。记 $\mathrm{Q}_R^d = \left\{Q_{w,R}^d : w \in \mathbb{Z}^d\right\}$，$\mathrm{V}_R^d = \left\{V_{w,R}^d : w \in \mathbb{Z}^d\right\}$。进一步引入映射 $\mathrm{V} : \mathrm{Q}_R^d \to \mathrm{V}_R^d$，其定义为 $\mathrm{V}(Q_{w,R}^d) = V_{w,R}^d$，其中$w \in \mathbb{Z}^d$。

我们定义从 $\mathbb{R}^d$ 到顶点集 $\mathcal{V}_R^d$的投影系数。对于任意$x \in [0,1]$ 和 $w \in \mathbb{Z}$，我们先令

$$x^{(w)} = \begin{cases} x & \text{if } w = 1, \\ 1 - x & \text{if } w = 0, \\ 0 & \text{if } w \notin \{0,1\}, \end{cases}$$

并且在 $x = (x_i)_{i=1}^d \in [0,1]^d$ 和 $w = (w_i)_{i=1}^d \in \mathbb{Z}^d$时，记作

$$x^{(w)} = \prod_{i=1}^d x_i^{(w_i)}.$$

我们发现，这一构造可以提升到 $\mathbb{R}^d$ 中的 x。

引理2.12 （参见 [4, 引理3。1]）。设 $d \in \mathbb{N}$, $R > 0$。存在一个映射

$$\Lambda_R^d : \bigcup \mathcal{V}_R^d \times \mathbb{R}^d \to [0,1]$$

使得 $\Lambda_R^d(Ru, Rw + Rx) = x^{(u-w)}$，对每个 $x \in [0,1]^d$和 $u, w \in \mathbb{Z}^d$均成立。

此外，我们列出 Λ_R^d 的一些性质，后文将会引用这些性质。

引理 2.13 （参见 [4, 引理 3.4]）。设 $d \in \mathbb{N}$, $R > 0$。则有

(i) $\Lambda_R^d(v, x) = 0$ *whenever* $x \in Q \in \mathcal{Q}_R^d$ *and* $v \notin \mathcal{V}(Q)$,
(ii) $\Lambda_R^d(v, u) = \delta_{v,u}$ *for any* $u, v \in \mathcal{V}_R^d$,
(iii) $\sum_{v \in \mathcal{V}_R^d} \Lambda_R^d(v, x) = 1$ *for any* $x \in \mathbb{R}^d$,
(iv) $\Lambda_R^d(v, x) = \prod_{i=1}^d \Lambda_R^1(v_i, x_i)$ *for any* $x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$, $v = (v_i)_{i=1}^d \in \mathcal{V}_R^d$.

3. A Retraction in $\mathcal{F}_p([0,1]^d, |\cdot|_1)$

借助第2.3节中的射影构造，我们考虑从 $(K, |\cdot|_1)$ 到其顶点上的 Lipschitz 自由p-空间 $\mathcal{F}_p(V, |\cdot|_1)$ 的一个回缩，其中 $K = \bigcup_{Q\in\text{实数集}} Q$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中边长相等的一族实数集 规则间隔立方体的并。我们给出该回缩的 Lipschitz 常数界，并据此分析从顶点集到 p-Banach空间的 Lipschitz映射的局部逐坐标仿射延拓。

接下来我们选取 $d \in \mathbb{N}$，并赋予 $\mathbb{R}^d$ 以 ℓ_1 范数。

沿用第 2.3 节的记号，令 实数集 $\subseteq \mathcal{Q}_R^d$, $K = \bigcup_{Q\in\mathcal{R}} Q$, $V = \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} \mathcal{V}(Q)$, 并固定 V 中的一个点，作为 K, V 的共同基点。由引理 2.13 (i) 可知，对任意 $x \in K$，系数 $\Lambda_R^d(\cdot\ x)$ 都是有限支撑的，因此我们可以定义 $r = r_{K,\ V}\colon K \to \mathcal{F}_p(V)$ 如下

$$r(x) = \sum_{v\in V} \Lambda_R^d(v, x)\delta_V(v), \quad x \in K. \tag{1}$$

我们很容易看出 $r_{K,\ V} = \delta_V$ 在 V 上。此外，[4, 定理 3.5] 已证明，假设在 $\mathbb{R}^d$ 上采用 ℓ_∞ 范数，则映射$r_{K,\ V}$ 是 Lipschitz 的，其上界取决于 p 和 d。将他们的方法应用于 $p = 1$ 与 ℓ_1 范数的情形，得到的估计仍含有依赖于 d 的项；这与 [14] 给出的正面结果形成对比，该结果表明 Lipschitz 常数等于 1。

问题3.1 ([4, 问题 4.6])。是否存在一个常数 C，它取决于 p，但不取决于 d、K 或 V，使得 $\mathrm{Lip}(r_{K,\ V}) \le C$?

我们改进了 [4, 定理 3.5]中的估计，但对上述问题给出了否定的回答。

定理 3.2。设 $d \in \mathbb{N}$、$R > 0$，$R \subseteq Q_R^d$，其中 $R \neq \emptyset$、$K = \bigcup_{Q\in\text{实数集}} Q$、$V = \bigcup_{Q\in\text{实数集}} V(Q)$，并将 V 视为带有子空间ℓ_1 度量的带基点度量空间。令 $0 < p \le 1$ 和 $r = r_{K、V}$： $K \to F_p(V)$ 如上所述。

对于任意 x、$y \in K$，我们有

$$\|r(x) - r(y)\|_p \le C(p, 2^{d-1})C(p, d)C(p, 3)|x - y|_1.$$

反之，存在 x、$y \in K$ 使得

$$C(p, 2^{d-1})|x - y|_1 \le \|r(x) - r(y)\|_p.$$

我们给出一系列初步结果，概述当前构造在膨胀和平移下的性质。

引理 3.3. 设 $V \subseteq \mathbb{Z}^d$、$0_V \in V$、$R > 0$ 和 $x \in \mathbb{Z}$。记 $V' = RV + Rx$、$0_{V'} = R0_V + Rx$，并分别将 0_V、$0_{V'}$ 视为 V、V' 的基点。

对于任意 $0 < p \le 1$，映射 $\tau'\colon \delta_V(V) \subseteq F_p(V) \to F_p(V')$，$\delta_V(v) \mapsto \delta_{V'}(Rv + Rx)$，其中 $v \in V$，可延拓为 $F_p(V)$ 与 $F_p(V')$ 之间的同构 τ，使得对于任意 $x \in F_p(V)$，$\|\tau(x)\|_{\mathcal{F}_p(V')} = R\|x\|_{\mathcal{F}_p(V)}$。

证明。我们注意到映射 $\sigma\colon V \to V'$, $v \mapsto Rv + Rx$，其中 $v \in V$，是 V, V' 之间的双 Lipschitz 双射，使得 $|\sigma(v) - \sigma(u)|_1 = R|v - u|_1$，其中$v$，$u \in V$。

根据事实2.11，存在空间$\mathcal{F}_p(V)$和$\mathcal{F}_p(V')$之间的同构 τ，满足 $\tau\circ\delta_V = \delta_{V'}\circ\sigma$，且 $\|\tau(x)\|_{\mathcal{F}_p(V')} = R\|x\|_{\mathcal{F}_p(V)}$，其中 $x\in\mathcal{F}_p(V)$。由于根据构造，$\tau\restriction_{\delta_V(V)} = \tau'$，结论得证。□

引理 3.4。设 $d\in\mathbb{N}$，$R>0$，实数集 $\subseteq Q_R^d$，$K = \bigcup_{Q\in\text{实数集}} Q$，且 $V = \bigcup_{Q\in\text{实数集}} V(Q)$。只要 $x, y\in K$ 满足条件 $y-x\in R\mathbb{Z}^d$，就有

(i) $\Lambda_R^d(v,x) = \Lambda_R^d(v+(y-x)\ y)$，其中 $v\in R\mathbb{Z}^d$;
(ii) 对任意 $v\in V$，Λ_R^d，$v+(y-x)\in V(v,x)\neq 0$;
(iii) $r(y) = \sum_{v\in V,\ \Lambda_R^d(v,x)\neq 0}\Lambda_R^d(v,x)\delta_V(v+(y-x))$。

证明。选取 w，$u\in\mathbb{Z}^d$ 使得 $x\in Q_{w,\ R}^d\in$ 实数集 且 $y\in Q_{u,\ R}^d\in$ 实数集。

根据 Λ_R^d 的定义，我们对任意 $v\in R\mathbb{Z}^d$ 得出

$$\begin{aligned}\Lambda_R^d(v,x) &= \Lambda_R^d(v, Rw+(x-Rw))\\ &= \left(\frac{x}{R}-w\right)^{\left(\frac{v}{R}-w\right)}\\ &= \Lambda_R^d(v+(y-x), (Rw+(y-x))+(x-Rw))\\ &= \Lambda_R^d(v+(y-x), y),\end{aligned}\tag{2}$$

其中，依假设有 $v+(y-x)\in R\mathbb{Z}^d$；这验证了第一个断言。

由于当 $v\in\mathcal{V}_R^d$ 时，$\Lambda_R^d(v,\ y) = 0$，且$\mathcal{V}(Q_{u,\ R}^d)\subseteq V$，我们推得 $\{v+(y-x)$: $v\in V,\ \Lambda_R^d(v,\ x)\neq 0\}\subseteq\{v:\ v\in V,\ \Lambda_R^d(v,\ y)\neq 0\}$；这证明了第二个断言。

事实上，由于交换 x 和 y 的角色后，同样的包含关系仍成立，因此我们得出

$$\{v+(y-x): v\in V,\ \Lambda_R^d(v,x)\neq 0\} = \{v: v\in V,\ \Lambda_R^d(v,y)\neq 0\}.\tag{3}$$

我们断言

$$\begin{aligned}r(y) &= \sum_{\substack{v\in V\\ \Lambda_R^d(v,y)\neq 0}}\Lambda_R^d(v,y)\delta_V(v)\\ &= \sum_{\substack{v\in V\\ \Lambda_R^d(v,x)\neq 0}}\Lambda_R^d(v+(y-x),y)\delta_V(v+(y-x))\\ &= \sum_{\substack{v\in V\\ \Lambda_R^d(v,x)\neq 0}}\Lambda_R^d(v,x)\delta_V(v+(y-x)).\end{aligned}$$

事实上，第一个等式由 r 的定义得出，而第二个和第三个等式分别应用方程（3）和（2）。证明至此完成。□

我们接下来证明主要结果。为此，先引入以下记号。

记号 3.5. 对于任意 $j\in\{1,\dots,d\}$，我们定义 π_j: $\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d-1}$, $(x_i)_{i=1}^d\mapsto(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1}\cdots,x_d)$，其中 $(x_i)_{i=1}^d\in\mathbb{R}^d$。

给定 $v=(v_i)_{i=1}^{d-1}\in\{0,1\}^{d-1}$，我们将 $v^0=(v_i^0)_{i=1}^d$, $v^1=(v_i^1)_{i=1}^d$记作满足 $v_i^0=v_i^1=v_i$ 的 $\{0,1\}^d$ 中的元素，其中 $i\in\{1,\dots,d-1\}$，且分别为 $v_d^0=0$, $v_d^1=1$。

定理 3.2 的证明。我们断言，经过膨胀和平移后，只需考虑如下情形 $R=1$ 且 $Q_{0,1}\in\mathrm{R}$。事实上，若 $\mathrm{R}'\subseteq\mathrm{Q}_R^d$, $K'=\bigcup_{Q\in\mathrm{R}'}Q$, $V'=\bigcup_{Q\in\mathrm{R}'}\mathrm{V}(Q)$，且 $0_{V'}$ 是 V' 的基点，我们可以找到 $\mathrm{R}\subseteq\mathrm{Q}_1^d$, $Q_{0,1}\in\mathrm{R}$, $K=\bigcup_{Q\in\mathrm{R}}Q$, $V=\bigcup_{Q\in\mathrm{R}}\mathrm{V}(Q)$, $0_V\in V$, 和$w\in\mathbb{Z}^d$，使得 $K'=RK+Rw$, $V'=RV+Rw$，且 $0_{V'}=R0_V+Rw$。我们记作 $\sigma\colon K\to K'$, $y\mapsto Ry+Rw$，其中 $y\in K$，并将 0_V 视为 V的基点。

我们令 $\tau\colon\mathrm{F}_p(V)\to\mathrm{F}_p(V')$ 表示引理 3.3 中的同构。取 $y\in K$。对于任意 $v\in\mathbb{Z}^d$，根据 Λ_R^d 的定义性质和引理 3.4 (i)，我们分别注意到 $\Lambda_R^d(Rv+Rw, Ry+Rw)=\Lambda_1^d(v+w,y+w)$ 以及 $\Lambda_1^d(v+w,y+w)=\Lambda_1^d(v,y)$。因此可写为

$$\begin{aligned}r_{K',V'}(\sigma(y))&=\sum_{v\in V'}\Lambda_R^d(v,\sigma(y))\delta_{V'}(v)\\&=\sum_{v\in V}\Lambda_R^d(Rv+Rw,Ry+Rw)\delta_{V'}(Rv+Rw)\\&=\sum_{v\in V}\Lambda_1^d(v,y)\delta_{V'}(Rv+Rw)\\&=\tau(r_{K,V}(y)).\end{aligned}$$

由于 $y\in K$ 是任意的，并利用 $\|\tau(x)\|_{\mathcal{F}_p(V')}=R\|x\|_{\mathcal{F}_p(V)}$ 这一事实，其中 $x\in\mathcal{F}_p(V)$，我们推得对于任意 $y,z\in K$

$$\|r_{K',V'}(\sigma(y))-r_{K',V'}(\sigma(z))\|_{\mathcal{F}_p(V')}=R\,\|r_{K,V}(y)-r_{K,V}(z)\|_{\mathcal{F}_p(V)}\,.$$

类似地，我们注意到对于任意 $y,z\in K$，$|\sigma(y)-\sigma(z)|_1=R|y-z|_1$。由于 σ 是 K 与 K' 之间的双射，断言得证。

为了确立 r 的 Lipschitz常数上界，我们先考虑 $x,\ y\in Q$ 其中 $Q\in$ 实数集。为此，我们首先注意到，对于 $x=(x_i)_{i=1}^d\in Q_{w,\,1}^d\in$ 实数集，其中 $w=(w_i)_{i=1}^d\in\mathbb{Z}^d$，由引理 2.13 (i) 和 (iv)

$$\begin{aligned}r(x)&=\sum_{v\in\mathcal{V}(Q_{w,1}^d)}\Lambda_1^d(v,x)\delta_V(v)\\&=\sum_{u\in\{0,1\}^{d-1}}\Lambda_1^{d-1}(\pi_d(w)+u,\pi_d(x))\Lambda_1^1(w_d,x_d)\delta_V(w+u^0)\\&\quad+\sum_{u\in\{0,1\}^{d-1}}\Lambda_1^{d-1}(\pi_d(w)+u,\pi_d(x))\Lambda_1^1(w_d+1,x_d)\delta_V(w+u^1)\\&=\sum_{u\in\{0,1\}^{d-1}}\Lambda_1^{d-1}(\pi_d(w)+u,\pi_d(x))(1-(x_d-w_d))\delta_V(w+u^0)\\&\quad+\sum_{u\in\{0,1\}^{d-1}}\Lambda_1^{d-1}(\pi_d(w)+u,\pi_d(x))(x_d-w_d)\delta_V(w+u^1).\end{aligned}\tag{4}$$

取 $x=(x_i)_{i=1}^d$, $y=(y_i)_{i=1}^d\in Q_{w,\,1}^d\in$ 实数集，其中 $w=(w_i)_{i=1}^d\in\mathbb{Z}^d$。我们还将假设 x、y 至多在一个坐标上不同；不失

一般性，令 $x_i = y_i$ 对于任意 $i \in \{1, \ldots, d-1\}$。由（4）可得

$$(5)\quad r(x) - r(y) = (x_d - y_d) \cdot \sum_{u \in \{0,1\}^{d-1}} \Lambda_1^{d-1}(\pi_d(w) + u, \pi_d(x))(\delta_V(w + u^1) - \delta_V(w + u^0)).$$

由引理 2.13 (iii)，我们有 $\sum_{u \in V^{d-1}(\pi_d(Q_w^d,1))} \Lambda_1^{d-1}(u, \pi_d(x)) = 1$。此外，对于任意 $u \in \{0,1\}^{d-1}$，也有 $\|\delta_V(w + u^1) - \delta_V(w + u^0)\|_p = 1$，因此我们得到不等式

$$(6)\qquad \|r(x) - r(y)\|_p \le C(p, 2^{d-1})|x_d - y_d|.$$

现在，对于任意 $x = (x_i)_{i=1}^d$, $y = (y_i)_{i=1}^d \in Q_{w,1}^d \in$ 实数集，我们可以取一个序列 $(z^i)_{i=0}^d = ((z_j^i)_{j=1}^d)_{i=0}^d \in (Q_w^d,1)^{d+1}$，使得对于任意 $i \in \{0, \ldots, d\}$ 以及 $j \in \{1, \ldots, d\}$，当且仅当 $i \ge j$ 时，有 $z_j^i = x_j$；否则有 $z_j^i = y_j$。序列 $(z^i)_{i=1}^d$ 中任意两个相邻元素至多在一个坐标上不同，利用不等式 (6)，我们得到

$$\begin{aligned}\|r(x) - r(y)\|_p^p &\le \sum_{i=0}^{d-1} \left\|r(z^{i+1}) - r(z^i)\right\|_p^p \\ &\le C^p(p, 2^{d-1}) \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^p,\end{aligned}$$

因此 $\|r(x) - r(y)\|_p \le C(p, 2^{d-1})C(p, d)|x - y|_1$。

对于一般情形，我们考虑 $x = (x_i)_{i=1}^d \in Q_{w,1}^d \in$ 实数集 以及 $y = (y_i)_{i=1}^d \in Q_{u,1}^d \in$ 实数集，其中 $w, u \in \mathbb{Z}^d$。记 $I = \{i \in \{1, \ldots, d\} : w_i \ne u_i\}$。

给定 $i \in I$，我们可以找到 $n_i, m_i \in \mathbb{Z}$，使得 $n_i \in \{w_i, w_i + 1\}$、$m_i \in \{u_i, u_i + 1\}$ 以及 $|x_i - y_i| = |x_i - n_i| + |n_i - m_i| + |m_i - y_i|$。我们还取 $x' = (x_i')_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$、$y' = (y_i')_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$，使得 $x_i' = y_i' = x_i$ 当且仅当 $i \in \{1, \ldots, d\} \setminus I$，而在其他情况下为 $x_i' = n_i$, $y_i' = m_i$；稍加思考可知，$x' \in Q_{w,1}^d$、$y' \in Q_{u,1}^d$ 以及 $|x - y|_1 = |x - x'|_1 + |x' - y'|_1 + |y' - y|_1$。

注意到 $y' - x' \in \mathbb{Z}^d$；因此引理 3.4 适用，并且

$$r(y') = \sum_{\substack{v \in V \\ \Lambda_1^d(v,x') \ne 0}} \Lambda_1^d(v, x')\delta_V(v + (y' - x')),$$

$$r(x') - r(y') = \sum_{\substack{v \in V \\ \Lambda_1^d(v,x') \ne 0}} \Lambda_1^d(v, x')(\delta_V(v) - \delta_V(v + (y' - x'))).$$

如果 I 为空，那么必然有 $r(x') = r(y')$。否则，x' 的至少一个坐标取值于 $\mathbb{Z}$；我们断言，在这种情况下，$|\{v \in V(Q) : \Lambda_1^d(v, x') \ne 0\}| \le 2^{d-1}$。为此，令 $x_j' \in \mathbb{Z}$，其中某个 $j \in \{1, \ldots, d\}$，并定义：当且仅当 $x_j' = w_j + 1$ 时，$w_j' = w_j + 1$；否则 $w_j' = w_j - 1$。若现在记 $w' = (w_1, \ldots, w_{j-1}, w_j', w_{j+1}, \ldots, w_d) \in \mathbb{Z}^d$，则可得 $w \ne w'$ 和 $x' \in Q_{w,1} \cap Q_{w',1}$。我们有，当

$v \notin \mathcal{V}(Q_{w,\,1}) \cap \mathcal{V}(Q_{w',\,1})$，根据引理 2.13 (i)；由于 $|\mathcal{V}(Q_{w,\,1}) \cap \mathcal{V}(Q_{w',\,1})| \leq 2^{d-1}$，断言得证。

由于 $\|\delta_V(v) - \delta_V(v + (y' - x'))\|_p = |x' - y'|_1$ 对于任意 $v \in \mathcal{V}(Q)$，$\Lambda_1^d(v,\, x') \neq 0$，且 $\sum_{v \in V} \Lambda_1^d(v,\, x') = 1$ 由引理 2.13 (iii)，因此在这两种情况下，我们都有理由证明以下不等式

$$\|r(x') - r(y')\|_p \leq C(p, 2^{d-1})|x' - y'|_1.$$

利用已证明的部分以及 $x,\ x' \in Q^d_{w,\,1}, y,\ y' \in Q^d_{u,\,1}$这一事实，我们推得

$$\begin{aligned}\|r(x) - r(y)\|_p^p &\leq \|r(x) - r(x')\|_p^p + \|r(x') - r(y')\|_p^p + \|r(y') - r(y)\|_p^p \\ &\leq C^p(p, 2^{d-1})C^p(p, d)(|x - x'|_1^p + |x' - y'|_1^p + |y' - y|_1^p),\end{aligned}$$

综上可得 $\|r(x) - r(y)\|_p \leq C(p,\ 2^{d-1})C(p,\ d)C(p,\ 3)|x - y|_1$。

关于逆向部分，令 实数集 $\subseteq \mathcal{Q}^d_R$，其中 实数集 $\neq \emptyset$, $K = \bigcup_{Q \in \text{实数集}} Q$, $V = \bigcup_{Q \in \text{实数集}} \mathcal{V}(Q)$，并将 0_V视为 V 的基点。根据最初的说明，只需考虑 $R = 1$ 且 $Q_{0,\,1} \in$实数集 的情形。

令 $x = (x_i)_{i=1}^d$, $y = (y_i)_{i=1}^d$ 满足：对于每个$i \in \{1, \ldots, d-1\}$，都有 $x_i = y_i = 1/2$, 且 $x_d = 0$, $y_d = 1$。回顾一下，利用（5），我们有$r(y) - r(x) = \sum_{u \in \{0,1\}^{d-1}} 2^{-d+1}(\delta_V(u^1) - \delta_V(u^0))$.

记 $\mathcal{M} = \left\{ \frac{\delta(z) - \delta(z')}{|z - z'|_1} :\ z,\ z' \in V,\ z \neq z' \right\}$；由事实 2.9，我们有

$$\|r(y) - r(x)\|_p = \inf \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p},$$

下确界取遍所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $\mu_i \in \mathcal{M},\ a_i \in \mathbb{R}$，其中$i \in \{1, \ldots, n\}$，满足 $r(y) - r(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i$。

我们将看到，$\|r(x) - r(y)\|_p \geq C(p, 2^{d-1})|x - y|_1 = C(p, 2^{d-1})$。为此，取 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $a_i \in \mathbb{R}$, $\mu_i \in \mathcal{M}$，其中 $i \in \{1, \ldots, n\}$，如上所述。

我们引入 $\mathcal{N}$：$\mathcal{V}(Q_{0,1}) \to \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$，记作

$$v \mapsto \left\{ i \in \{1, \ldots, n\} : \mu_i \in \left\{ \pm \frac{\delta(z) - \delta(v)}{|z - v|_1} :\ x \in V,\ z \neq v \right\} \right\}.$$

由此可知，对任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$，至多存在两个不同的元素 $u, v \in \mathcal{V}(Q_{0,\,1})$，使得 $i \in \mathcal{N}(u) \cap \mathcal{N}(v)$；因此，$\sum_{i=1}^n |a_i|^p \geq \frac{1}{2} \sum_{u \in \mathcal{V}(Q_{0,1})} \sum_{i \in \mathcal{N}(u)} |a_i|^p$。

我们断言，对于任意 $u \in \mathcal{V}(Q_{0,1})$，都有 $\sum_{i \in \mathcal{N}(u)} |a_i| \geq 2^{-d+1}$。

为此，我们取 $u \in \mathcal{V}(Q_{0,1})$，并按如下方式构造 φ：若 χ_A 表示集合 $A \subseteq V$的示性函数，则我们定义 $\varphi = \chi_{\{u\}}$ if$u \neq 0_V$，否则定义为 $\varphi = \chi_{V \setminus \{u\}}$。注意，$\varphi \in \mathrm{Lip}_0(V)$，$\mathrm{Lip}\,\varphi \leq 1$，因为 $\varphi(0_V) = 0$ 且 $|\varphi(z) - \varphi(z)| \leq 1$，对于任意两个 z、$z' \in V$、$z \neq z'$均成立。根据 $\mathrm{F}_p(V)$ 的性质（iii），我们令 $\varphi^* \in \mathrm{F}_p(V)^*$ 满足：在集合 V上，$\varphi = \varphi^* \circ \delta_V$。

我们注意到，对于任意 $i \in \{1, \dots, n\}$，均有 $|\langle \varphi^*, \mu_i \rangle$**{v10>**，其中对每个 $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{N}(u)$，$\varphi^*, \mu_i\rangle = 0$。因此，我们可以写作

$$\begin{aligned} |\langle \varphi^*, r(y) - r(x) \rangle| &= \left| \left\langle \varphi^*, \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i \right\rangle \right| \\ &\leq \sum_{i \in \mathcal{N}(u)} |a_i| \, |\langle \varphi^*, \mu_i \rangle| \leq \sum_{i \in \mathcal{N}(u)} |a_i|, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} |\langle \varphi^*, r(y) - r(x) \rangle| &= \left| \left\langle \varphi^*, \sum_{v \in \{0,1\}^{d-1}} 2^{-d+1} (\delta_V(v^1) - \delta_V(v^0)) \right\rangle \right| \\ &= 2^{-d+1}, \end{aligned}$$

并且中间的断言得以证明。

注意，$x \mapsto x^p$ 在 $[0, \infty)$ 上是次可加的，因此对于任意 $u \in \mathcal{V}(Q_{0,1})$，都有$\sum_{i \in \mathcal{N}(u)} |a_i|^p \geq 2^{p(-d+1)}$。综上，我们有理由证明

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p &\geq \frac{1}{2} \sum_{u \in \mathcal{V}(Q_{0,1})} \sum_{i \in \mathcal{N}(u)} |a_i|^p \\ &\geq 2^{d-1} 2^{p(-d+1)} \\ &= C^p(p, 2^{d-1}), \end{aligned}$$

由此证明得证。 □

回顾一个密切相关的结果，该结果表明$\mathcal{F}_p([0,1]^d)$ 具有 Schauder基，考虑 [4, 定理 3。8]。事实上，相应的典范投影是回缩映射 r；因此，定理 3.2 给出了基常数的精细估计。

4. On the Geometry of $\mathcal{F}_p(\mathcal{M}, \rho^\alpha)$ Where $(\mathcal{M}, \rho)$ Is InfiniteDoubling

我们回顾一下，若存在 $\lambda_{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}$，称其为倍增常数，使得$\mathcal{M}$ ρ中的任意半径为 $2r > 0$的闭球都能被 $\lambda_{\mathcal{M}}$ 个半径为 r 的闭球覆盖，则度量空间 $(\mathcal{M}, \rho)$ 称为倍增的。例如，有限维 Banach空间的任意子空间都是倍增的。

Assouad [5] 的一个经典结果表明，对于任意 $\alpha \in (0, 1)$，畸变空间 (M, ρ^α) 与某个 $M' \subseteq \mathbb{R}^d$ 上的 $(M', |\cdot|^\beta)$ 双 Lipschitz 等价，其中 $d \in \mathbb{N}$ 且 $\beta \in (0, 1)$。因此，对于任意 $0 < p \leq 1$，有 $F_p(M, \rho^\alpha) \simeq F_p(M', |\cdot|^\beta)$，见事实 2.11。

此外，[3]中指出，对于 $\mathbb{R}^d$的无限子集$\mathcal{M}$，同构定理可归结为$\mathcal{M} = [0,1]^d$的情形。因此，本节的核心内容是补上缺失的部分，并证明$\mathcal{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha) \simeq \ell_p$，对任意 $0 < \alpha < 1$ 和 $0 < p \leq 1$均成立。

4.1. 同构 $\mathrm{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha) \simeq \ell_p$。容易看出，对任意固定的 $0<\alpha<1$，任意两个定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的范数 $|\cdot|$、$|\cdot|_*$所对应的 H ¨older 扭曲彼此 Lipschitz 等价；因此，根据事实 2.11，对任意 $0<p\le 1$，都有 $\mathrm{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha) \simeq \mathrm{F}_p([0,1]^d, |\cdot|_*^\alpha)$。为方便起见，以下将 $|\cdot|$ 视为 ℓ_1 范数。

定理 4.1。 设 $d\in\mathbb{N}$ *and* $0<\alpha<1$, $0<p\le 1$。则 $F_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)$ 同构于空间 ℓ_p。

定量而言，若考虑 $\mathrm{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)$ 与 $\ell_p(V)$ 之间的班纳赫-马祖尔距离（参见，例如，[11,p. 277]），其定义为 $d(\mathrm{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)\ \ell_p(V)) = \inf \|T\|\|T^{-1}\|$，其中 T 遍历满同构 $T\colon \mathrm{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha) \to \ell_p(V)$，我们证明 $d(\mathrm{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)\ \ell_p(V)) \le C(p,2^d)\rho^d\tau^d$，其中 ρ 和 τ 分别如引理 4.4 和 4.8 所述。

取定 $0<\alpha<1$ 和 $0<p\le 1$。当上下文中已固定并已知 $d\in\mathbb{N}$ 时，我们将 $V_{-1}=\{0\}$，$V_k=[0,1]^d\cap 2^{-k}\mathbb{Z}^d$记作，其中 $k\in\mathbb{N}_0$，且 $V=\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} V_k\setminus V_{k-1}$。我们取 0 作为 $[0,1]^d$ 的基点，并记作$\delta\colon [0,1]^d \to \mathcal{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)$，这就是典范等距嵌入。

证明通过考察映射 $\iota\colon \{e_v\colon v\in V\} \subset \ell_p(V) \to \mathcal{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)$ 展开，

$$e_v \mapsto 2^{k\alpha}\left(\delta(v) - \sum_{u\in V_{k-1}} \Lambda^d_{2^{-k+1}}(u,v)\delta(u)\right), \quad v\in V_k\setminus V_{k-1},\ k\in\mathbb{N}_0.$$

稍加思考可知，$\{e_v\colon v\in V\}$ 在 $\ell_p(V)$ 中是 p-赋范的（见定义 2.3），并且 ι 可扩展为一个从 $\operatorname{span}\{e_v\colon v\in V\}$ 到 $\mathrm{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)$ 的一对一线性映射。因此，根据引理 2.4，一旦证明 $\iota(\{e_v\colon v\in V\})$ 在 $\mathrm{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)$ 中是 p-赋范的，ι 就能为我们提供一个满同构 $\tilde{\iota}\colon \ell_p(V) \to \mathrm{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)$。

值得注意的是，在欧几里得空间上的 Lipschitz 自由空间理论中，常会采用这种特定的 $\iota(e_v)$，其中 $v\in V$。事实上，在标准的 $p=1$ 情形证明中会用到它的一个对偶变体（例如，参见 [18,定理8.44]）；并且已知 $\iota(e_v)$，其中 $v\in V$，构成了$\mathcal{F}_p([0,1]^d, |\cdot|)$的一个Schauder基，参见 [4, 定理3.8]。

记号4.2。 若固定 $d\in\mathbb{N}$，$x=(x_i)_{i=1}^d\in\mathbb{R}^d$, $j\in\{1,\dots,d\}$和 $\epsilon\in\mathbb{R}$，则定义 $x^j_\epsilon=(x_1,\dots, x_j+\epsilon,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$。若 $x\in[0,1]$, $x\in 2^{-n}\mathbb{Z}\setminus 2^{-n+1}\mathbb{Z}$，其中某个 $n\in\mathbb{N}$，则记作 $x^+=x+2^{-n}$, $x^-=x-2^{-n}$。

对于 $d\in\mathbb{N}$, $j\in\{1,\dots,d\}$，以及 $(x_i)_{i=1}^{d-1}\in[0,1]^{d-1}$，我们还采用记号 $\delta^j{}_{(x_i)_{i=1}^{d-1}}(x) = \delta(x_1,\dots,x_{j-1},x,x_j,\dots,x_{d-1})$。

4.1.1. 一个线性化结果。 我们以一种能够部分还原候选基几何的方式展开元素 $\delta(v)$，其中 $v\in V$。这对于引理 4.4所考虑的构造至关重要。

引理 4.3。 令 $u_1u_2\in[0,1]\cap 2^{-n}\mathbb{Z}$，其中 $n\in\mathbb{N}_0$ $u_1<u_2$，且 $|u_1-u_2|=2^{-n}$。令 $v\in[u_1,u_2]$ 满足 $v\in 2^{-k}\mathbb{Z}$，其中 $k\in\mathbb{N}$ $k\ge n$。

存在 μ_1、 $\mu_2 \geq 0$、 $\mu_1 + \mu_2 = 1$、 $l \in \mathbb{N}_0$、 $\nu_i > 0$、 $n_i \in \mathbb{N}$、 $n_i > n$ 以及$v_i \in 2^{-n_i}\mathbb{Z} \setminus 2^{-n_i+1}\mathbb{Z}$，其中 $i \in \{1、\ldots\ldots、 l\}$，使得

$$2^{n\alpha}\delta_x^j(v) = \mu_1 2^{n\alpha}\delta_x^j(u_1) + \mu_2 2^{n\alpha}\delta_x^j(u_2) + \sum_{i=1}^{l} \nu_i 2^{n_i\alpha}\left(\delta_x^j(v_i) - \frac{1}{2}(\delta_x^j(v_i^-) + \delta_x^j(v_i^+))\right),$$

对于任意 $d \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, d\}$，以及 $x = (x_j)_{j=1}^{d-1} \in [0,1]^{d-1}$。

Moreover, we have $\left(\sum_{i=1}^{l} |\nu_i|^p\right)^{1/p} \leq 2^{-\alpha}\left(\frac{1}{1-2^{-p\alpha}}\right)^{1/p}$.

证明。我们将证明，对于任意 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$，以及任意 $v \in [u_1, u_2] \cap 2^{-k}\mathbb{Z}$, 都可以选取系数 $\mu_1^v, \mu_2^v \geq 0$, $l^v \in \mathbb{N}_0$, $\nu_i^v \in [0,1]$, $v_i^v \in [u_1, u_2]$和 $n_i^v \in \mathbb{N}$，其中 $i \in \{1, \ldots, l^v\}$，使得对于任意$v \in [u_1, u_2] \cap 2^{-k}\mathbb{Z}$，都有

(i) $\mu_1^v, \mu_2^v \geq 0$, $\mu_1^v + \mu_2^v = 1$，并且对于每个 $i \in \{1, \ldots, l^v\}$，均有 $k \geq n_i^v > n$；(ii) 若 $v' \in [u_1, u_2] \cap 2^{-k}\mathbb{Z}$，则至多存在一个指标 $i \in \{1, \ldots, l^v\}$ 使得 $v_i^v = v'$；(iii) 对于每个 $i \in \{1, \ldots, l^v\}$，$v_i^v \in [u_1, u_2] \cap 2^{-n_i^v}\mathbb{Z} \setminus 2^{-n_i^v+1}\mathbb{Z}$；(iv) 对任意 $j \in \{1, \ldots, d\}$ 和 $x = (x_j)_{j=1}^{d-1} \in [0,1]^{d-1}$，有

$$2^{n\alpha}\delta_x^j(v) = \mu_1^v 2^{n\alpha}\delta_x^j(u_1) + \mu_2^v 2^{n\alpha}\delta_x^j(u_2) + \sum_{i=1}^{l} \nu_i^v 2^{n_i^v\alpha}\left(\delta_x^j(v_i^v) - \frac{1}{2}(\delta_x^j((v_i^v)^-) + \delta_x^j((v_i^v)^+))\right),$$

(v) $0 < \nu_i^v \leq 2^{(n-n_i^v)\alpha}$ 对每个 $i \in \{1, \ldots, l^v\}$,

(vi) 如果 $v' \in [u_1, u_2] \cap 2^{-k+1}\mathbb{Z}$ 满足 $|v - v'| = 2^{-k}$，那么 $\{v_i^{v'} : i \in \{1, \ldots, l^{v'}\}\} \subseteq \{v_i^v : i \in \{1, \ldots, l^v\}\}$,

(vii) $|\{v_i^v : i \in \{1, \ldots, l^v\}\} \cap 2^{-m}\mathbb{Z} \setminus 2^{-m+1}\mathbb{Z}\}| \leq 1$ 对任意 $m \in \mathbb{N}$, $m > n$。

我们对 k 使用归纳法。为此，注意到对于 $k = n$，我们可以分别取 $l^v = 0$ 和 $\mu_1^v = 1$, $\mu_2^v = 0$ 或 $\mu_1^v = 0$, $\mu_2^v = 1$，使 v 分别等于 u_1 或 u_2。

令 $k \in \mathbb{N}$, $k > n$ 满足：断言对 $k-1$ 成立。

对于任意 $v \in [u_1, u_2] \cap 2^{-k}\mathbb{Z}$，我们按如下方式定义系数 $\mu_1^v, \mu_2^v \in \mathbb{R}$, $l^v \in \mathbb{N}_0$,$\nu_i^v \in [0,1]$, $n_i^v \in \mathbb{N}$, $k \geq n_i^v > n$, $i \in \{1, \ldots, l^v\}$。若 $v \in 2^{-k+1}\mathbb{Z}$，则取自归纳假设中的系数。否则 $v \in 2^{-k}\mathbb{Z} \setminus 2^{-k+1}\mathbb{Z}$，因此 $v^-, v^+ \in [u_1, u_2] \cap 2^{-k+1}\mathbb{Z}$。对于任意 $d \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, d\}$，以及 $x = (x_j)_{j=1}^{d-1} \in [0,1]^{d-1}$，我们可以写成

$$2^{n\alpha}\delta_x^j(v) = 2^{(n-k)\alpha}2^{k\alpha}\left(\delta_x^j(v) - \frac{1}{2}(\delta_x^j(v^-) + \delta_x^j(v^+))\right) + 2^{n\alpha-1}\delta_x^j(v^-) + 2^{n\alpha-1}\delta_x^j(v^+). \tag{7}$$

现在令 $\mu_1^{v^+}$, $\mu_2^{v^+}$, l^{v^+}, $\nu_i^{v^+}$, $n_i^{v^+}$, $v_i^{v^+}$, $i \in \{1, \ldots, l^{v^+}\}$ 以及 $\mu_1^{v^-}$, $\mu_2^{v^-}$, l^{v^-}, $\nu_i^{v^-}$, $n_i^{v^-}$, $v_i^{v^+}$, $i \in \{1, \ldots, l^{v^-}\}$，分别为对应于 v^+,v^- 的系数。记 $\mathrm{V} = \{v_i^{v^+} : i \in \{1, \ldots, l^{v^+}\}\} \cup \{v_i^{v^-} : i \in \{1, \ldots, l^{v^-}\}\}$，并令 $l^v = |\mathrm{V}| + 1$。令 v_i^v, $i \in \{1, \ldots, l^v - 1\}$，使得 $\{v_i^v : i \in \{1, \ldots, l^v - 1\}\} = \mathrm{V}$；有限集 V 必然存在这样的排列。根据 V 的选取和归纳假设，对于任意

$i \in \{1, \dots, l^v - 1\}$ 我们还可以找到 $n_i^v \in \mathbb{N}$, $k - 1 \geq n_i^v > n$, 使得 $v_i^v \in 2^{-n_i^v}\mathbb{Z} \setminus 2^{-n_i^v+1}\mathbb{Z}$。若 $i \in \{1, \dots, l^v - 1\}$, 则进一步记作 $\nu_i^v = \frac{1}{2}\sum_{j\in\{1,\dots,l^{v^+}\}} {}_{v_j^{v^+}=v_i^v}\nu_j^{v^+} + \frac{1}{2}\sum_{j\in\{1,\dots,l^{v^-}\}} {}_{v_j^{v^-}=v_i^v}\nu_j^{v^-}$; 由归纳假设可知, 至多存在一个指标 $j \in \{1, \dots, l^{v^+}\}$ 使得 $v_j^{v^+} = v_i^v$ （v^- 的情形类似）, 因此得到 $0 < \nu_i^v \leq 2^{\alpha(n-n_i^v)}$。

我们设定 $n_{l^v}^v = k$、$v_{l^v}^v = v$、$\nu_{l^v}^v = 2^{(n-k)\alpha}$ 和 $\mu_1^v = \frac{1}{2}(\mu_1^{v^+} + \mu_1^{v^-})$、$\mu_2^v = \frac{1}{2}(\mu_2^{v^+} + \mu_2^{v^-})$。需要指出的是, $\mu_1^v, \mu_2^v \geq 0$ 和 $\mu_1^v + \mu_2^v = \frac{1}{2}(\mu_1^{v^+} + \mu_1^{v^-}) + \frac{1}{2}(\mu_2^{v^+} + \mu_2^{v^-}) = 1$, 因为 $\mu_1^{v^+} + \mu_2^{v^+} = \mu_1^{v^-} + \mu_2^{v^-} = 1$, 由归纳假设可知。

继续 (7), 利用上述系数, 我们可以改写

$$\begin{aligned}
2^{n\alpha}\delta_x^j(v) &= 2^{(n-k)\alpha}2^{k\alpha}\left(\delta_x^j(v) - \frac{1}{2}(\delta_x^j(v^-) + \delta_x^j(v^+))\right) \\
&\quad + 2^{n\alpha-1}\delta_x^j(v^-) + 2^{n\alpha-1}\delta_x^j(v^+) \\
&= \mu_1^v 2^{n\alpha}\delta_x^j(u_1) + \mu_2^v 2^{n\alpha}\delta_x^j(u_2) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{l^v-1} \nu_i^v 2^{n_i^v\alpha}\left(\delta_x^j(v_i^v) - \frac{1}{2}(\delta_x^j((v_i^v)^-) + \delta_x^j((v_i^v)^+))\right) \\
&\quad + 2^{(n-k)\alpha}2^{k\alpha}\left(\delta_x^j(v) - \frac{1}{2}(\delta_x^j(v^-) + \delta_x^j(v^+))\right) \\
&= \mu_1^v 2^{n\alpha}\delta_x^j(u_1) + \mu_2^v 2^{n\alpha}\delta_x^j(u_2) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{l^v} \nu_i^v 2^{n_i^v\alpha}\left(\delta_x^j(v_i^v) - \frac{1}{2}(\delta_x^j((v_i^v)^-) + \delta_x^j((v_i^v)^+))\right).
\end{aligned}$$

我们注意到, 对于任意 $v \in [u_1, u_2] \cap 2^{-k}\mathbb{Z}$ 以及元素 $\mu_1^v, \mu_2^v, l^v, n_i^v, v_i^v$, 以及 ν_i^v, 其中 $i \in \{1, \dots, l^v\}$, 条件 (i) 至 (vi) 由归纳假设可立即得到, 而其他条件则已在构造过程中于 $v \in 2^{-k+1}\mathbb{Z}$ 时得到证明。$v \in 2^{-k}\mathbb{Z} \setminus 2^{-k+1}\mathbb{Z}$。

为证明条件（vii）, 我们首先指出, 根据构造和归纳假设, 结论对任意 $v \in 2^{-k+1}\mathbb{Z}$ 均成立。取 $v \in [u_1, u_2] \cap 2^{-k}\mathbb{Z} \setminus 2^{-k+1}\mathbb{Z}$。

由于有 $v^-, v^+ \in 2^{-k+1}\mathbb{Z}$, $|v^+ - v^-| = 2^{-k+1}$, 可得 $\{v^-, v^+\} \cap 2^{-k+2}\mathbb{Z} \neq \emptyset$。因此, 存在 u, u', 使得 $u \in \{v^-, v^+\} \cap 2^{-k+1}\mathbb{Z} \setminus 2^{-k+2}\mathbb{Z}$, $u' \in \{v^-, v^+\} \cap 2^{-k+2}\mathbb{Z}$。根据归纳假设以及对于 u 和 u' 的条件 (vi), 我们得到 $\{v_i^{u'} : i \in \{1, \dots, l^{u'}\}\} \subseteq \{v_i^u : i \in \{1, \dots, l^u\}\}$。根据构造, $\{v_i^v : i \in \{1, \dots, l^v\}\} \cap 2^{-k+1}\mathbb{Z} = \{v_i^{v^+} : i \in \{1, \dots, l^{v^+}\}\} \cup \{v_i^{v^-} : i \in \{1, \dots, l^{v^-}\}\}$, 由此我们推得

$$\{v_i^v : i \in \{1, \dots, l^v\}\} \cap 2^{-k+1}\mathbb{Z} = \{v_i^u : i \in \{1, \dots, l^u\}\}.$$

条件（vii）的结论现在由 u 在 $m \in \mathbb{N}$、$k - 1 \geq m > n$ 时的归纳假设得出。又因为 $\{v_i^v : i \in \{1, \dots, l^v\}\} \setminus 2^{-k+1}\mathbb{Z} = \{v\}$, 条件（vii）得到满足。归纳步骤的证明至此完成。

取 $k \in \mathbb{N}$、$k \geq n$ 和 $v \in [u_1, u_2] \cap 2^{-k}\mathbb{Z}$。注意到, 根据条件 (i), $n_i^v > n$, 其中 $i \in \{1, \dots, l^v\}$; 根据条件 (ii)、(iii) 和 (vii), $|\{i \in \{1, \dots, l^v\} : n_i^v = j\}| \leq 1$, 其中 $j \in \mathbb{N}$、$j > n$。同样, 条件 (v) 表明

对于每个 $i \in \{1, \dots, l^v\}$， $0 < \nu_i^v \le 2^{(n-n_i^v)\alpha}$；因此，

$$\left(\sum_{i=1}^{l^v} |\nu_i^v|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{l^v} 2^{p(n-n_i^v)\alpha}\right)^{1/p} < \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-p\alpha i}\right)^{1/p} = 2^{-\alpha}\left(\frac{1}{1-2^{-p\alpha}}\right)^{1/p}.$$

该断言得证。 □

引理 4.4. 设 $d \in \mathbb{N}$ *and* $M \subseteq F^p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)$ 满足：对于任意 $v \in V_k$，其中 $k \in \mathbb{N}_0$，都有 $2^{k\alpha}\left(\delta(v) - \sum_{u \in V_{k-1}} \Lambda^d_{2^{-k+1}}(u,v)\delta(u)\right) \in M$。

存在一个常数 $\rho' > 0$，使得以下结论成立。考虑$v = (v_i)_{i=1}^d \in V$和 $i \in \{1, \dots, d\}$。若 $v_i \in 2^{-n}\mathbb{Z} \setminus 2^{-n+1}\mathbb{Z}$对某个 $n \in \mathbb{N}$成立，则 $2^{n\alpha}\left(\delta(v) - \frac{1}{2}(\delta(v^i_{2^{-n}}) + \delta(v^i_{-2^{-n}}))\right) \in \rho' \operatorname{aconv}^p M$。定量而言，若令 $\rho = \left(C^p(p,2) + (1 + 2^{1-p})2^{-p\alpha}\left(\frac{1}{1-2^{-p\alpha}}\right)\right)^{1/p}$，则 $\rho' = \rho^d$。

证明。我们证明，对于任意 $l \in \{0, \dots, d-1\}$，以下断言成立。设 $v = (v_i)_{i=1}^d \in V$。若 $i \in \{1, \dots, d\}$ 满足 $v_i \in 2^{-n}\mathbb{Z} \setminus 2^{-n+1}\mathbb{Z}$，其中某个 $n \in \mathbb{N}$满足条件，且若 $|\{j \in \{1, \dots, d\} : v_j \notin 2^{-n}\mathbb{Z}\}| \le l$，那么$2^{n\alpha}\left(\delta(v) - \frac{1}{2}(\delta(v^i_{2^{-n}}) + \delta(v^i_{-2^{-n}}))\right) \in \rho^{l+1} \operatorname{aconv}^p \mathcal{M}$。我们对 l 进行归纳证明。

设 $l = 0$。我们选取如上所述的 $v = (v_i)_{i=1}^d \in V$、 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i \in \{1, \dots, d\}$。回顾一下，对于任意 $u = (u_i)_{i=1}^d \in V_{n-1}$，由引理 2.13 (iv) 可得$\Lambda^d_{2^{-n+1}}(u,v) = \Lambda^{d-1}_{2^{-n+1}}(\pi_d(u)\ \pi_d(v))\Lambda^1_{2^{-n+1}}(u_i, v_i)$。因此，只要 $u_i \notin \{v_i \pm 2^{-n}\}$，就有 $\Lambda^d_{2^{-n+1}}(u,v) = 0$，于是

$$\begin{aligned}\sum_{u \in V_{n-1}} &\Lambda^d_{2^{-n+1}}(u,v)\delta(u) \\ &= \sum_{\substack{u=(u_i)_{i=1}^d \in V_{n-1} \\ u_i \in \{v_i \pm 2^{-n}\}}} \Lambda^{d-1}_{2^{-n+1}}(\pi_i(u), \pi_i(v))\Lambda^1_{2^{-n+1}}(u_i, v_i)\delta(u) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{u=(u_i)_{i=1}^d \in V_{n-1} \\ u_i \in \{v_i \pm 2^{-n}\}}} \Lambda^{d-1}_{2^{-n+1}}(\pi_i(u), \pi_i(v))\delta(u).\end{aligned}$$

重复相同的论证，我们验证得

$$\sum_{u \in V_{n-1}} \Lambda^d_{2^{-n+1}}(u, v^i_{2^{-n}})\delta(u) = \sum_{\substack{u=(u_i)_{i=1}^d \in V_{n-1} \\ u_i = v_i + 2^{-n}}} \Lambda^{d-1}_{2^{-n+1}}(\pi_i(u), \pi_i(v))\delta(u),$$

$$\sum_{u \in V_{n-1}} \Lambda^d_{2^{-n+1}}(u, v^i_{-2^{-n}})\delta(u) = \sum_{\substack{u=(u_i)_{i=1}^d \in V_{n-1} \\ u_i = v_i - 2^{-n}}} \Lambda^{d-1}_{2^{-n+1}}(\pi_i(u), \pi_i(v))\delta(u).$$

综上，我们得到

$$\begin{aligned}2^{n\alpha}&\left(\delta(v)-\frac{1}{2}(\delta(v^i_{2^{-n}})+\delta(v^i_{-2^{-n}}))\right)\\&=2^{n\alpha}\left(\delta(v)-\sum_{u\in V_{n-1}}\Lambda^d_{2^{-n+1}}(u,v)\delta(u)\right)\\&\quad-2^{n\alpha-1}\left(\delta(v^i_{2^{-n}})-\sum_{u\in V_{n-1}}\Lambda^d_{2^{-n+1}}(u,v^i_{2^{-n}})\delta(u)\right)\\&\quad-2^{n\alpha-1}\left(\delta(v^i_{-2^{-n}})-\sum_{u\in V_{n-1}}\Lambda^d_{2^{-n+1}}(u,v^i_{-2^{-n}})\delta(u)\right).\end{aligned}$$

注意，根据假设，对于每个 $v'\in\{v,v^i_{\pm 2^{-n}}\}\subseteq V_n$，都有 $2^{n\alpha}\left(\delta(v')-\sum_{u\in V_{n-1}}\Lambda^d_{2^{-n+1}}(u,v')\delta(u)\right)$。中间断言现可推出如下：

$$\begin{aligned}2^{n\alpha}\left(\delta(v)-\frac{1}{2}(\delta(v^i_{2^{-n}})+\delta(v^i_{-2^{-n}}))\right)&\in\left(1+2^{1-p}\right)^{1/p}\operatorname{aconv}_p\mathcal{M}\\&\subseteq\rho\operatorname{aconv}_p\mathcal{M}.\end{aligned}$$

设 $l\in\{1,\dots,d-1\}$ 使得该断言对 $l-1$ 成立。取 $v=(v_i)_{i=1}^d\in V$、$n\in\mathbb{N}$ 和 $i\in\{1,\dots,d\}$，使得 $v_i\in 2^{-n}\mathbb{Z}\setminus 2^{-n+1}\mathbb{Z}$。若 $\{j\in\{1,\dots,d\}:v_j\notin 2^{-n}\mathbb{Z}\}$ 为空，则由归纳假设可得结论；因此，我们可以进一步假设存在某个 $j\in\{1,\dots,d\}$ 使得 $v_j\notin 2^{-n}\mathbb{Z}$。

我们考虑 $u_1,u_2\in[0,1]\cap 2^{-n}\mathbb{Z}$ 使得 $u_1<v_j<u_2$ 且 $|u_1-u_2|=2^{-n}$。进一步记 $v'=(v_1,\dots,v_{j-1},u_1,v_{j+1},\dots,v_d)$、$v''=(v_1,\dots,v_{j-1},u_2,v_{j+1},\dots,v_d)$。注意到，$i$、$n$ 和 $v',v''\in V$ 分别满足关于 $l-1$ 的归纳假设；因此，

$$\begin{aligned}(8)\quad&\left\{2^{n\alpha}\left(\delta(w)-\frac{1}{2}(\delta(w^i_{2^{-n}})+\delta(w^i_{-2^{-n}}))\right):w\in\{v',v''\}\right\}\\&\subseteq\rho^l\operatorname{aconv}_p\mathcal{M}.\end{aligned}$$

我们规定 $m=i$ 当且仅当 $j>i$，否则 $m=i-1$，并定义 $x=(v_1,\dots,v_{j-1},v_{j+1},\dots,v_d)$ 和 $x_1=x^m_{2^{-n}}$、$x_2=x^m_{-2^{-n}}$。此外，令 μ_1、$\mu_2\in\mathbb{R}$、$l\in\mathbb{N}_0$、$\nu_r\in\mathbb{R}$、$n_r\in\mathbb{N}$、$n_r>n$ 以及 $w_r\in 2^{-n_r}\mathbb{Z}\setminus 2^{-n_r+1}\mathbb{Z}$，其中 $r\in\{1,\dots,l\}$，为与 u_1、u_2 和 v_j 相关联的引理 4.3 中的系数。于是

$$\begin{aligned}2^{n\alpha}\delta^j_x(v_j)&=\mu_1 2^{n\alpha}\delta^j_x(u_1)+\mu_2 2^{n\alpha}\delta^j_x(u_2)\\&\quad+\sum_{r=1}^{l}\nu_r 2^{\alpha n_r}\left(\delta^j_x(w_r)-\frac{1}{2}(\delta^j_x(w_r^-)+\delta^j_x(w_r^+))\right),\\2^{n\alpha-1}\delta^j_{x_1}(v_j)&=\mu_1 2^{n\alpha-1}\delta^j_{x_1}(u_1)+\mu_2 2^{n\alpha-1}\delta^j_{x_1}(u_2)\\&\quad+\sum_{r=1}^{l}\nu_r 2^{\alpha n_r-1}\left(\delta^j_{x_1}(w_r)-\frac{1}{2}(\delta^j_{x_1}(w_r^-)+\delta^j_{x_1}(w_r^+))\right),\end{aligned}$$

and

$$2^{n\alpha-1}\delta^j_{x_2}(v_j) = \mu_1 2^{n\alpha-1}\delta^j_{x_2}(u_1) + \mu_2 2^{n\alpha-1}\delta^j_{x_2}(u_2) + \sum_{r=1}^{l} \nu_r 2^{\alpha n_r - 1}\left(\delta^j_{x_2}(w_r) - \frac{1}{2}(\delta^j_{x_2}(w_r^-) + \delta^j_{x_2}(w_r^+))\right).$$

取 $r \in \{1, \dots, l\}$，并回忆 $w_r \in 2^{-n_r}\mathbb{Z} \setminus 2^{-n}\mathbb{Z}$。若 $y = (y_i)_{i=1}^{d-1} \in \{x, x_1, x_2\}$，则令 $y' = (y'_i)_{i=1}^{d} = (y_1, \dots, y_{j-1}, w_r, y_{j+1}, \dots, y_d)$；由此得到 $|\{k \in \{1, \dots, d\} : y'_k \notin 2^{-n_r}\mathbb{Z}\}| \le l - 1$。根据归纳假设，

$$2^{\alpha n_r}\left(\delta^j_y(w_r) - \frac{1}{2}(\delta^j_y(w_r^-) + \delta^j_y(w_r^+))\right) \in \rho^l \operatorname{aconv}_p \mathcal{M}.$$

利用引理 4.3 的估计，我们对任意 $y \in \{x,\ x_1,\ x_2\}$

$$\sum_{r=1}^{l} \nu_r 2^{\alpha n_r}\left(\delta^j_y(w_r) - \frac{1}{2}(\delta^j_y(w_r^-) + \delta^j_y(w_r^+))\right) \in 2^{-\alpha}\left(\frac{1}{1-2^{-p\alpha}}\right)^{1/p} \rho^l \operatorname{aconv}_p \mathcal{M}. \tag{9}$$

注意到 $\delta^j_x(v_j) = \delta(v)$；同理，

$$\begin{aligned}
\delta^j_x(u_1) &= \delta(v') & \delta^j_x(u_2) &= \delta(v'')\\
\delta(v^i_{2^{-n}}) &= \delta^j_{x_1}(v_j) & \delta(v^i_{-2^{-n}}) &= \delta^j_{x_2}(v_j)\\
\delta^j_{x_1}(u_1) &= \delta((v')^i_{2^{-n}}) & \delta^j_{x_1}(u_2) &= \delta((v'')^i_{2^{-n}})\\
\delta^j_{x_2}(u_1) &= \delta((v')^i_{-2^{-n}}) & \delta^j_{x_2}(u_2) &= \delta((v'')^i_{-2^{-n}}).
\end{aligned}$$

现在我们可以改写为

$$\begin{aligned}
2^{n\alpha}&\left(\delta(v) - \frac{1}{2}(\delta(v^i_{2^{-n}}) + \delta(v^i_{-2^{-n}}))\right)\\
&= \mu_1 2^{n\alpha}\delta^j_x(u_1) + \mu_2 2^{n\alpha}\delta^j_x(u_2)\\
&\quad + \sum_{r=1}^{l} \nu_r 2^{\alpha n_r}\left(\delta^j_x(w_r) - \frac{1}{2}(\delta^j_x(w_r^-) + \delta^j_x(w_r^+))\right)\\
&\quad - \mu_1 2^{n\alpha-1}\delta^j_{x_1}(u_1) + \mu_2 2^{n\alpha-1}\delta^j_{x_1}(u_2)\\
&\quad - \sum_{r=1}^{l} \nu_r 2^{\alpha n_r - 1}\left(\delta^j_{x_1}(w_r) - \frac{1}{2}(\delta^j_{x_1}(w_r^-) + \delta^j_{x_1}(w_r^+))\right)\\
&\quad - \mu_1 2^{n\alpha-1}\delta^j_{x_2}(u_1) + \mu_2 2^{n\alpha-1}\delta^j_{x_2}(u_2)\\
&\quad - \sum_{r=1}^{l} \nu_r 2^{\alpha n_r - 1}\left(\delta^j_{x_2}(w_r) - \frac{1}{2}(\delta^j_{x_2}(w_r^-) + \delta^j_{x_1}(w_r^+))\right),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\mu_1 2^{n\alpha}&\left(\delta^j_x(u_1) - \frac{1}{2}(\delta^j_{x_1}(u_1) + \delta^j_{x_2}(u_1))\right)\\
&= \mu_1 2^{n\alpha}\left(\delta(v') - \frac{1}{2}(\delta((v')^i_{2^{-n}}) + \delta((v')^i_{-2^{-n}}))\right),
\end{aligned}$$

$$\mu_2 2^{n\alpha}\left(\delta_x^j(u_2)-\frac{1}{2}(\delta_{x_1}^j(u_2)+\delta_{x_2}^j(u_2))\right)$$
$$=\mu_2 2^{n\alpha}\left(\delta(v'')-\frac{1}{2}(\delta((v'')_{2^{-n}}^i)+\delta((v'')_{-2^{-n}}^i))\right).$$

代入最后两项后，我们改写为

$$\begin{aligned}2^{n\alpha}&\left(\delta(v)-\frac{1}{2}(\delta(v_{2^{-n}}^i)+\delta(v_{-2^{-n}}^i))\right)\\&=\mu_1 2^{n\alpha}\left(\delta(v')-\frac{1}{2}(\delta((v')_{2^{-n}}^i)+\delta((v')_{-2^{-n}}^i))\right)\\&\quad+\mu_2 2^{n\alpha}\left(\delta(v'')-\frac{1}{2}(\delta((v'')_{2^{-n}}^i)+\delta((v'')_{-2^{-n}}^i))\right)\\&\quad+\sum_{r=1}^{l}\nu_r 2^{\alpha n_r}\left(\delta_x^j(w_r)-\frac{1}{2}(\delta_x^j(w_r^-)+\delta_x^j(w_r^+))\right)\\&\quad-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{l}\nu_r 2^{\alpha n_r}\left(\delta_{x_1}^j(w_r)-\frac{1}{2}(\delta_{x_1}^j(w_r^-)+\delta_{x_1}^j(w_r^+))\right)\\&\quad-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{l}\nu_r 2^{\alpha n_r}\left(\delta_{x_2}^j(w_r)-\frac{1}{2}(\delta_{x_2}^j(w_r^-)+\delta_{x_1}^j(w_r^+))\right).\end{aligned}$$

利用（8）和（9），我们得出

$$\begin{aligned}2^{n\alpha}&\left(\delta(v)-\frac{1}{2}(\delta(v_{2^{-n}}^i)+\delta(v_{-2^{-n}}^i))\right)\\&\in\left(\mu_1^p+\mu_2^p+(1+2^{1-p})2^{-p\alpha}\frac{1}{1-2^{-p\alpha}}\right)^{1/p}\rho^l\operatorname{aconv}_p\mathcal{M}\\&\subseteq\rho^{l+1}\operatorname{aconv}_p\mathcal{M}.\end{aligned}$$

这就验证了归纳步骤，从而完成证明。 □

4.1.2. 一个几何考量。 我们推导出一个结论；特别是对于 $d=1$，它意味着存在 $\rho\in\mathbb{R}$，使得对于任意 $u,v\in[0,1]\cap 2^{-n}\mathbb{Z}$，其中 $n\in\mathbb{N}_0$，我们有 $\frac{\delta(u)-\delta(v)}{|u-v|^\alpha}\in\rho\operatorname{aconv}_p\iota(\{e_x:x\in V\})$。

首先，我们在假设 $|u-v|=2^{-n}$ 的条件下证明该结论。

引理 4.5。 设 $d\in\mathbb{N}$，$i\in\{1,\dots,d\}$，$x=(x_j)_{j=1}^{d-1}\in[0,1]^{d-1}$，且 $M\subseteq F^p([0,1]^d,|\cdot|^\alpha)$。假设 $\delta_x^i(0)\ \delta_x^i(1)\in M$，并且对任意 $y\in 2^{-k}\mathbb{Z}\setminus 2^{-k+1}\mathbb{Z}$，其中 $k\in\mathbb{N}$，均有 $2^{\alpha k}\left(\delta_x^i(y)-\frac{1}{2}(\delta_x^i(y^-)+\delta_x^i(y^+))\right)\in M$。

每当 u、$v\in[0,1]\cap 2^{-n}\mathbb{Z}$ 和 $|u-v|=2^{-n}$ 对某个 $n\in\mathbb{N}_0$ 成立时，我们就有 $\frac{\delta_x^i(u)-\delta_x^i(v)}{|u-v|^\alpha}\in 2^{1/p}\left(\frac{1}{1-2^{p(\alpha-1)}}\right)^{1/p}$ 凸包$_p M$.

证明。 给定 $n\in\mathbb{N}_0$，记

$$\mathcal{M}_n=\left\{\frac{\delta_x^i(u)-\delta_x^i(v)}{|u-v|^\alpha}:u,v\in[0,1]\cap 2^{-n}\mathbb{Z},|u-v|=2^{-n}\right\}.$$

我们断言，对于任意 $y\in\mathcal{M}_n$，其中 $n\in\mathbb{N}_0$，都存在系数$\mu_j^y\in\{-1,1\}$，其中 $j\in\{0,\dots,n\}$，以及元素 $y_j^y\in 2^{-j}\mathbb{Z}\setminus 2^{-j+1}\mathbb{Z}$，其中

$j \in \{1, \ldots, n\}$，使得

$$y = \mu_0^y 2^{n(\alpha-1)}(\delta_x^i(1) - \delta_x^i(0)) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j^y 2^{(n-j)(\alpha-1)} 2^{j\alpha} \left(\delta_x^i(y_j^y) - \frac{1}{2}(\delta_x^i((y_j^y)^+) + \delta_x^i((y_j^y)^-)) \right). \tag{10}$$

我们对 n 进行归纳。为此，我们注意到，当 $n = 0$ 时，结论是显然的。

设 $n \in \mathbb{N}$ 使得该断言对 $n-1$ 成立，并取 $y = \frac{\delta_x^i(u) - \delta_x^i(v)}{|u-v|^\alpha} \in \mathcal{M}_n$，其中 $u, v \in [0,1] \cap 2^{-n}\mathbb{Z}$, $|u-v| = 2^{-n}$。由于 $\{u, v\} \cap 2^{-n}\mathbb{Z} \setminus 2^{-n+1}\mathbb{Z} \neq \emptyset$，存在 $w \in 2^{-n}\mathbb{Z} \setminus 2^{-n+1}\mathbb{Z}$ 使得

$$y \in \left\{ \pm \frac{\delta_x^i(w) - \delta_x^i(w^+)}{|w - w^+|^\alpha}, \pm \frac{\delta_x^i(w) - \delta_x^i(w^-)}{|w - w^-|^\alpha} \right\}.$$

类似地，存在 $\nu_1, \nu_2 \in \{-1, 1\}$，使得

$$\frac{\delta_x^i(u) - \delta_x^i(v)}{|u-v|^\alpha} = \nu_1 2^{n\alpha} \left(\delta_x^i(w) - \frac{1}{2}(\delta_x^i(w^+) + \delta_x^i(w^-)) \right) + \nu_2 2^{\alpha-1} \frac{\delta_x^i(w^+) - \delta_x^i(w^-)}{|w^+ - w^-|^\alpha}. \tag{11}$$

记 $z = \frac{\delta_x^i(w^+) - \delta_x^i(w^-)}{|w^+ - w^-|^\alpha} \in \mathrm{M}_{n-1}$，并令 $\mu_j^z \in \{-1, 1\}$，其中 $j \in \{0, \ldots, n-1\}$，以及 $y_j^z \in 2^{-j}\mathbb{Z} \setminus 2^{-j+1}\mathbb{Z}$，其中 $j \in \{1, \ldots, n-1\}$，为归纳假设中的系数。现在我们可以定义 $\mu_j^y = \nu_2 \mu_j^z$，其中 $j \in \{0, \ldots, n-1\}$，以及 $y_j^y = y_j^z$，其中 $j \in \{1, \ldots, n-1\}$。类似地，令 $\mu_n^y = \nu_1$, $y_n^y = w$。

由构造可知 $\{\mu_j^y : j \in \{0, \ldots, n\}\} \subseteq \{-1, 1\}$ 且 $y_j^y \in 2^{-j}\mathbb{Z} \setminus 2^{-j+1}\mathbb{Z}$ 对任意 $j \in \{1, \ldots, n\}$. 由（11）可轻易验证

$$y = \mu_0^y 2^{n(\alpha-1)}(\delta_x^i(1) - \delta_x^i(0)) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j^y 2^{(n-j)(\alpha-1)} 2^{j\alpha} \left(\delta_x^i(y_j^y) - \frac{1}{2}(\delta_x^i((y_j^y)^+) + \delta_x^i((y_j^y)^-)) \right).$$

由于 $y \in \mathcal{M}_n$ 是任意的，这就完成了归纳步骤。

设 $y \in \mathrm{M}_n$，其中 $n \in \mathbb{N}_0$。我们选取 $\mu_j^y \in \{-1, 1\}$，其中 $j \in \{0, \ldots, n\}$，以及 $y_j^y \in 2^{-j}\mathbb{Z} \setminus 2^{-j+1}\mathbb{Z}$，其中 $j \in \{1, \ldots, n\}$，如前一部分所述。回顾一下，根据假设，对任意 $j \in \{1, \ldots, n\}$，有 $2^{j\alpha}\left(\delta_x^i(y_j^y) - \frac{1}{2}(\delta_x^i((y_j^y)^+) + \delta_x^i((y_j^y)^-)) \right) \in \mathrm{M}$，且 $\delta_x^i(0)$ $\delta_x^i(1) \in \mathrm{M}$。将此与（10）结合，可推出 $y \in \left(2 \cdot 2^{p(\alpha-1)n} + \sum_{j=1}^{n} 2^{p(n-j)(\alpha-1)}\right)^{1/p} \operatorname{aconv}_p \mathrm{M}$；因此，

$$y \in \left(2 \sum_{i=0}^{n} 2^{pi(\alpha-1)}\right)^{1/p} \operatorname{aconv}_p \mathcal{M} \subseteq 2^{1/p} \left(\frac{1}{1 - 2^{p(\alpha-1)}}\right)^{1/p} \operatorname{aconv}_p \mathcal{M}.$$

该断言得证。 □

我们将一般元素 $\frac{\delta(u) - \delta(v)}{|u-v|^\alpha}$（其中 $u, v \in [0,1] \cap 2^{-n}\mathbb{Z}$，对某个 $n \in \mathbb{N}_0$）分解为我们上文讨论过的元素的组合。

下面的技术结果是对 [18,引理 8.40]的改进。

引理 4.6. 设 $u, v \in [0,1] \cap 2^{-n}\mathbb{Z}$，其中某些 $n \in \mathbb{N}_0$，$u \neq v$。存在$l \in \mathbb{N}$和 $a_i \in [u,v] \cap 2^{-n}\mathbb{Z}$，其中 $i \in \{1,\dots,l\}$，使得

(i) $a_1 = u$, $a_l = v$,

(ii) $a_i, a_{i+1} \in 2^{-k}\mathbb{Z}$ *and* $|a_i - a_{i+1}| = 2^{-k}$ *for some* $k \in \{0,\dots,n\}$, *for any* $i \in \{1,\dots,l-1\}$,

(iii) $\left(\sum_{i=1}^{l-1} |a_{i+1} - a_i|^{p\alpha}\right)^{1/p} < 2^{1/p}\left(\frac{1}{1-2^{-p\alpha}}\right)^{1/p} |u-v|^{\alpha}$.

证明。不失一般性，令 $u < v$。

我们选取满足 $[u,v] \cap 2^{-n_0}\mathbb{Z} \neq \emptyset$ 的最小 $n_0 \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$，并按如下方式定义集合 $\mathrm{V}_i \subseteq 2^{-i}\mathbb{Z}$，其中 $i \in \{n_0,\dots,n\}$。令 $\mathrm{V}_{n_0} = 2^{-n_0}\mathbb{Z} \cap [u,v]$。若 $i \in \{n_0+1,\dots,n\}$，且对所有 $j \in \{n_0,\dots,i-1\}$ 均已定义 V_j，则取 $\mathrm{V}_i = [u,v] \cap 2^{-i}\mathbb{Z} \setminus [\min \bigcup_{j\in\{n_0,\dots,i-1\}} \mathrm{V}_j, \max \bigcup_{j\in\{n_0,\dots,i-1\}} \mathrm{V}_j]$。

我们注意到，根据 n_0 的选取，$|\mathcal{V}_{n_0}| = 1$，而且，由构造可知，$[u,v] \cap 2^{-i}\mathbb{Z} \subseteq [\min \bigcup_{j\in\{n_0,\dots,i\}} \mathcal{V}_j, \max \bigcup_{j\in\{n_0,\dots,i\}} \mathcal{V}_j]$，其中 $i \in \{n_0,\dots,n\}$。

取 $i \in \{n_0+1,\dots,n\}$。由上述说明可知$\mathcal{V}_i \cap 2^{-i+1}\mathbb{Z} = \emptyset$；由于$\bigcup_{j\in\{n_0,\dots,i-1\}} \mathcal{V}_j \subseteq 2^{-i+1}\mathbb{Z}$，这就证明了包含关系

$$\mathcal{V}_i \subseteq \{\min \bigcup_{j\in\{n_0,\dots,i-1\}} \mathcal{V}_j - 2^{-i}, \max \bigcup_{j\in\{n_0,\dots,i-1\}} \mathcal{V}_j + 2^{-i}\}. \tag{12}$$

记 $\mathrm{V} = \bigcup_{i\in\{n_0,\dots,n\}} \mathrm{V}_i$。于是 V 是有限集，且 $\{u,v\} \subseteq \mathrm{V}$，因为 $\{u,v\} \subseteq 2^{-n}\mathbb{Z}$；因此我们可以定义 $l = |\mathrm{V}|$，并找出集合 V 的一个严格单调排列 a_i，其中 $i \in \{1,\dots,l\}$，使得 $a_1 = u$, $a_l = v$。还需证明 l和 a_i（其中 $i \in \{1,\dots,l\}$）满足条件 (ii) 和 (iii)。

为证明 (ii)，取 $i \in \{1,\dots,l-1\}$。由 (12)，存在 $k \in \{n_0+1,\dots,n\}$，使得 $a_i = \min \bigcup_{j\in\{n_0,\dots,k-1\}} \mathrm{V}_j - 2^{-k}$, $a_{i+1} = \min \bigcup_{j\in\{n_0,\dots,k-1\}} \mathrm{V}_j$ or $a_i = \max \bigcup_{j\in\{n_0,\dots,k-1\}} \mathrm{V}_j$, $a_{i+1} = \min \bigcup_{j\in\{n_0,\dots,k-1\}} \mathrm{V}_j + 2^{-k}$；由此可得$a_i, a_{i+1} \in 2^{-k}\mathbb{Z}$ 和 $|a_i - a_{i+1}| = 2^{-k}$。

上述论证还表明，对于任意满足 $k \leq n_0$ or $n < k$ 的 $k \in \mathbb{Z}$，集合 $\{i \in \{1,\dots,l-1\} : |a_i - a_{i+1}| = 2^{-k}\}$ 为空；若 $n_0 < k \leq n$，则该集合至多含有两个元素。我们考虑满足存在 $i \in \{1,\dots,l-1\}$ 且 $|a_i - a_{i+1}| = 2^{-k_0}$ 的最小 $k_0 \in \mathbb{Z}$；由于$|u-v| \geq 2^{-k_0}$，我们有

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{l-1} \frac{|a_{i+1}-a_i|^{p\alpha}}{|u-v|^{p\alpha}}\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{i=1}^{l-1} \frac{|a_{i+1}-a_i|^{p\alpha}}{2^{-pk_0\alpha}}\right)^{1/p} \\ &\leq \left(2\sum_{i=k_0}^{n} 2^{p(-i+k_0)\alpha}\right)^{1/p} \\ &< 2^{1/p}\left(\frac{1}{1-2^{-p\alpha}}\right)^{1/p},\end{aligned}$$

这验证了条件（iii）。证明现已完成。 □

引理 4.7. 设 $d \in \mathbb{N}$，$i \in \{1, \dots, d\}$，$x = (x_j)_{j=1}^{d-1} \in [0,1]^{d-1}$，且 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^{\alpha})$ 满足引理 *4.5* 的结论成立，即：

只要对某个 $n \in \mathbb{N}_0$， u、 $v \in [0,1] \cap 2^{-n}\mathbb{Z}$ 和 $|u-v| = 2^{-n}$，那么 δ_x^i $\frac{(u-\delta_x^i v}{|u-v|^\alpha} \in 2^{1/p}\left(\frac{1}{1-2^{p(\alpha-1)}}\right)^{1/p})()\,\mathrm{aconv}_p M$。

每当 $u, v \in [0,1] \cap 2^{-n}\mathbb{Z}$ 对某个 $n \in \mathbb{N}_0$ 成立，其中 $u \neq v$，那么 $\frac{\delta_x^i(u-\delta_x^i v}{|u-v|^\alpha} \in 2^{2/p}\left(\frac{1}{1-2^{p(\alpha-1)}}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{1-2^{-p\alpha}}\right)^{1/p})()\,\mathrm{aconv}_p M$。

证明。给定 u， $v \in [0,1]\cap 2^{-n}\mathbb{Z}$，其中 $n \in \mathbb{N}$， $u \neq v$，我们选取系数l和 a_j，其中 $j \in \{1,\dots,l\}$，取自引理 4.6，与 v， u和 n 相关。根据引理 i）和（iii）的条件，分别由引理 4.6，我们得到

$$\frac{\delta_x^i(u)-\delta_x^i(v)}{|u-v|^\alpha} = \sum_{j=1}^{l-1} \frac{|a_{j+1}-a_j|^\alpha}{|u-v|^\alpha} \frac{\delta_x^i(a_{j+1})-\delta_x^i(a_j)}{|a_{j+1}-a_j|^\alpha},$$

$$\left(\sum_{j=1}^{l-1} \frac{|a_{j+1}-a_j|^{p\alpha}}{|u-v|^{p\alpha}}\right)^{1/p} < 2^{1/p}\left(\frac{1}{1-2^{-p\alpha}}\right)^{1/p}.$$

根据关于 $\mathcal{M}$ 的假设以及条件（ii），我们得到

$$\frac{\delta_x^i(a_{j+1})-\delta_x^i(a_j)}{|a_{j+1}-a_j|^\alpha} \in 2^{1/p}\left(\frac{1}{1-2^{p(\alpha-1)}}\right)^{1/p} \mathrm{aconv}_p\,\mathcal{M}, \quad j \in \{1,\dots,l-1\};$$

因此，我们得到 $\frac{\delta_x^i(u-\delta_x^i v}{|u-v|^\alpha} \in 2^{2/p}\left(\frac{1}{1-2^{p(\alpha-1)}}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{1-2^{-p\alpha}}\right)^{1/p})()\,\mathrm{aconv}_p$ $\mathcal{M}$。证明完成。□

借助引理 4.4的结论，我们对边界立方体的维数进行归纳，从而推广前述结果。

引理 *4.8.* 设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $M \subseteq F_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)$ 满足 $\{\delta(u) : u \in \{0,1\}^d\} \subseteq M$，且引理 *4.4* 的结论成立，即存在 $\rho' > 0$，使得对于任意 $v = (v_i)_{i=1}^d \in V$ 和 $i \in \{1,\dots,d\}$，若 $v_i \in 2^{-n}\mathbb{Z} \setminus 2^{-n+1}\mathbb{Z}$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立，则 $2^{n\alpha}\left(\delta(v) - \frac{1}{2}(\delta(v^i_{2^{-n}}) + \delta(v^i_{-2^{-n}}))\right) \in \rho'\,\mathrm{aconv}_p \bar{M}$。

存在 $\tau' > 0$，使得对于任意 u、 $v \in V \cup \{0\}$、 $u \neq v$，都有$\delta(\frac{u}{|u-v|^\alpha} \in \tau')-\delta()\,\mathrm{aconv}_p M$。定量地，若记 $\tau = C^\alpha(p\alpha, d)2^{2/p} \cdot \left(\frac{1}{1-2^{p(\alpha-1)}}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{1-2^{-p\alpha}}\right)^{1/p} \cdot (1+(d-1)^{p\alpha})^{1/p}$, *then* $\tau' = \tau^d\rho'$.

证明。我们用归纳法证明，对于任意 $l \in \{1,\dots,d\}$，以下断言成立。设 $u = (u_i)_{i=1}^d$, $v = (v_i)_{i=1}^d \in [0,1]^d \cap 2^{-n}\mathbb{Z}^d$，其中 $n \in \mathbb{N}_0$、 $u \neq v$，且 $\mathcal{I} \subseteq \{1,\dots,d\}$， $|\mathcal{I}| = d-l$，满足对于任意 $i \in \mathcal{I}$，都有 $u_i = v_i \in \{0,1\}$。那么 $(\frac{u}{|u-v|^\alpha} \in \tau^l\rho')-\delta()\,\mathrm{aconv}_p \mathcal{M}$。

注意，假设对任意 $i \in \mathcal{I}$（其中$|\mathcal{I}| = d-l$）， $u_i = v_i \in \{0,1\}$ 成立后，我们便可在 $[0,1]^d$ 的 l-面上迭代地推广该结果。

令 $l = 1$，并取 $u = (u_i)_{i=1}^d$、 $v = (v_i)_{i=1}^d \in [0,1]^d \cap 2^{-n}\mathbb{Z}^d$，其中$n \in \mathbb{N}_0$、 $u \neq v$，且 $i \in \{1,\dots,d\}$，使得对任意$j \in \{1,\dots,d\} \setminus \{i\}$， $u_j = v_j \in \{0,1\}$。我们可以找到 $x \in \{0,1\}^{d-1}$ 以及 u'、 $v' \in [0,1] \cap 2^{-n}\mathbb{Z}$，使得 $\delta(u) = \delta_x^i(u')$， $\delta(v) = \delta_x^i(v')$。

注意，根据假设， $\delta_x^i(0)$ $\delta_x^i(1) \in \mathcal{M}$，并且对于某个 $k \in \mathbb{N}$，只要 $q \in 2^{-k}\mathbb{Z} \setminus 2^{-k+1}\mathbb{Z}$，就有 $2^{\alpha k}\left(\delta_x^i(q) - \frac{1}{2}(\delta_x^i(q^-) + \delta_x^i(q^+))\right) \in$

ρ' 在 M 上逐点收敛。由此可知 d, i, x和 ρ'在 M 上逐点收敛，满足引理 4.5 的假设。

因此，由引理 4.7 对于 u', $v' \in [0,1] \cap 2^{-n}\mathbb{Z}$, $u \neq v$，我们得到

$$\frac{\delta(u)-\delta(v)}{|u-v|^\alpha} = \frac{\delta_x^i(u')-\delta_x^i(v')}{|u'-v'|^\alpha} \in \tau\rho' \operatorname{aconv}_p \mathcal{M},$$

这就完成了第一步。

设 $l \in \{2,\dots,d\}$ 满足该断言对 $l-1$ 成立。我们选取 $u=(u_i)_{i=1}^d$, $v=(v_i)_{i=1}^d \in [0,1]^d \cap 2^{-n}\mathbb{Z}^d$，其中 $n \in \mathbb{N}_0$, $u \neq v$，且 $\mathrm{I} \subseteq \{1,\dots,d\}$, $|\mathrm{I}| = d-l$，使得对任意 $i \in \mathrm{I}$，都有 $u_i = v_i \in \{0,1\}$。首先假设存在 $i \in \{1,\dots,d\} \setminus \mathrm{I}$，使得对任意 $j \in \{1,\dots,d\} \setminus \{i\}$，都有 $u_j = v_j$。我们将证明 $\frac{u-\delta v}{|u-v|^\alpha} \in 2^{2/p}\left(\frac{1}{1-2^{p(\alpha-1)}}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{1-2^{-p\alpha}}\right)^{1/p}(1+(d-1)^{p\alpha})^{1/p}\tau^{l-1}\rho' \operatorname{aconv}_p \mathrm{M}$。

令 $y=(y_j)_{j=1}^d$, $z=(z_j)_{j=1}^d \in [0,1]^d \cap 2^{-n}\mathbb{Z}^d$ 满足 $y_i = 0, z_i = 1$ 和 $y_j = z_j = u_j$，对任意 $j \in \{1,\dots,d\} \setminus \{i\}$ 均成立。我们进一步选取 $y'=(y'_j)_{j=1}^d$, $z'=(z'_j)_{j=1}^d \in \{0,1\}^d$，使得 $y'_j = y_j$，且对任意 $j \in \mathcal{I} \cup \{i\}$ 均有 $z'_j = z_j$。

若 $y \neq y'$，则我们将 $\delta(y) = |y-y'|^\alpha \frac{\delta(y)-\delta(y')}{|y-y'|^\alpha} + \delta(y')$ 改写，其中，特别地，$\frac{\delta(y)-\delta(y')}{|y-y'|^\alpha} \in \tau^{l-1}\rho' - \delta(y') \operatorname{aconv}_p \mathrm{M}$，这是由归纳假设得到的。由于在剩余情形下 $\delta(y) = \delta(y')$，且根据关于 M 的假设，$\delta(y') \in \mathrm{M}$，因此我们推出 $\delta(y) \in (1+(d-1)^{p\alpha})^{1/p}\tau^{l-1}\rho' \operatorname{aconv}_p \mathrm{M}$。对 z 重复同样的论证，我们得到 $\delta(y) - \delta(z) \in (1+(d-1)^{p\alpha})^{1/p}\tau^{l-1}\rho' \operatorname{aconv}_p \mathrm{M}$。

令接下来的 $x \in [0,1]^{d-1} \cap 2^{-n}\mathbb{Z}^{d-1}$ and $u', v' \in [0,1] \cap 2^{-n}\mathbb{Z}$, $u' \neq v'$，满足 $\delta(u) = \delta_x^i(u')$, $\delta(v) = \delta_x^i(v')$。注意到 $\delta(y) = \delta_x^i(0)$ 且 $\delta(z) = \delta_x^i(1)$。由上一段可得 $\delta_x^i(0) - \delta_x^i(1) \in (1+(d-1)^{p\alpha})^{1/p}\tau^{l-1}\rho' \operatorname{aconv}_p \mathrm{M}$；若对于某个 $k \in \mathbb{N}$ 有 $q \in 2^{-k}\mathbb{Z} \setminus 2^{-k+1}\mathbb{Z}$，则根据对 M 的假设，$2^{\alpha k}\left(\delta_x^i(q) - \frac{1}{2}(\delta_x^i(q^-) + \delta_x^i(q^+))\right) \in \rho' \operatorname{aconv}_p \mathrm{M}$。由引理 4.5 和 4.7，我们得出

$$\begin{aligned}\frac{\delta(u)-\delta(v)}{|u-v|^\alpha} &= \frac{\delta_x^i(u')-\delta_x^i(v')}{|u'-v'|^\alpha} \\ &\in 2^{2/p}\left(\frac{1}{1-2^{p(\alpha-1)}}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{1-2^{-p\alpha}}\right)^{1/p} \\ &\quad \cdot (1+(d-1)^{p\alpha})^{1/p}\tau^{l-1}\rho' \operatorname{aconv}_p \mathcal{M}.\end{aligned}$$

为证明一般情形，我们选取 $u=(u_i)_{i=1}^d$, $v=(v_i)_{i=1}^d \in [0,1]^d \cap 2^{-n}\mathbb{Z}^d$，其中 $n \in \mathbb{N}_0$, $u \neq v$，且 $\mathrm{I} \subseteq \{1,\dots,d\}$, $|\mathrm{I}| = d-l$，满足对于任意 $i \in \mathrm{I}$, $u_i = v_i \in \{0,1\}$。若 u, v 恰好在 k 个坐标上不同，$k \geq 1$，则令 $u^1 = v$, $u^{k+1} = u$，并找出 u^i，其中 $i \in \{2,\dots,k\}$，使得对于任意 $i \in \{1,\dots,k\}$，u^i, u^{i+1}仅在一个坐标上不同。注意，对于任意 $i \in \{1,\dots,k+1\}$，所有 u^i在集合 I 中的任意坐标上都相同。

由此可得 $\sum_{i=1}^k |u^{i+1}-u^i| = |u-v|$ 以及

$$\frac{\delta(u)-\delta(v)}{|u-v|^\alpha} = \sum_{i=1}^k \frac{|u^{i+1}-u^i|^\alpha}{|u-v|^\alpha}\frac{\delta(u^{i+1})-\delta(u^i)}{|u^{i+1}-u^i|^\alpha},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{|u^{i+1}-u^i|^{p\alpha}}{|u-v|^{p\alpha}}\right)^{1/p}\leq C^{\alpha}(p\alpha,d),$$

其中，根据已证明的结论，对于任意 $i\in\{1,\dots,k\}$，

$$\begin{aligned}\frac{\delta(u^{i+1})-\delta(u^i)}{|u^{i+1}-u^i|^{\alpha}}\in 2^{2/p}&\left(\frac{1}{1-2^{p(\alpha-1)}}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{1-2^{-p\alpha}}\right)^{1/p}\\&\cdot(1+(d-1)^{p\alpha})^{1/p}\tau^{l-1}\rho'\operatorname{aconv}_p\mathcal{M}.\end{aligned}$$

因此，我们可以写作

$$\begin{aligned}\frac{\delta(u)-\delta(v)}{|u-v|^{\alpha}}&\in C^{\alpha}(p\alpha,d)2^{2/p}\left(\frac{1}{1-2^{p(\alpha-1)}}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{1-2^{-p\alpha}}\right)^{1/p}\\&\quad\cdot(1+(d-1)^{p\alpha})^{1/p}\tau^{l-1}\rho'\operatorname{aconv}_p\mathcal{M}\\&=\tau^{l}\rho'\operatorname{aconv}_p\mathcal{M}.\end{aligned}$$

断言得证。 □

至此，我们已收集到证明同构定理所需的全部结果。

定理 4.1 的证明。令 $\iota:\{e_v\}_{v\in V}\subset\ell_p(V)\to \mathrm{F}_p([0,1]^d,|\cdot|^{\alpha})$ 定义为 $e_v\mapsto 2^{k\alpha}\left(\delta(v)-\sum_{u\in V_{k-1}}\Lambda^d_{2^{-k+1}}(u,v)\delta(u)\right)$，其中 $v\in V_k\setminus V_{k-1}$，且$k\in\mathbb{N}_0$。

容易看出，$\{e_v:v\in V\}$ 在 $\ell_p(V)$ 中是等距 p-赋范的，并且 $\operatorname{aconv}_p\{e_v:v\in V\}$ 包含 $\operatorname{span}\{e_v:v\in V\}$ 中零的一个邻域。此外，我们断言 ι 可延拓为一个从 $\operatorname{span}\{e_v:v\in V\}$ 到 $\mathrm{F}_p([0,1]^d,|\cdot|^{\alpha})$ 的单射线性映射。事实上，可以直接进行简单论证；或者只需注意到 $\delta_{\mathcal{F}_p([0,1]^d,|\cdot|^{\alpha})}(x)\mapsto\delta_{\mathcal{F}_p([0,1]^d)}(x)$，其中$x\in[0,1]^d$，诱导出一个满射线性双射 $\kappa:\operatorname{span}\{\delta_{\mathcal{F}_p([0,1]^d,|\cdot|^{\alpha})}(x):x\in[0,1]^d\}\to\operatorname{span}\{\delta_{\mathcal{F}_p([0,1]^d)}(x):x\in[0,1]^d\}$，且 $\kappa(\iota(e_v))$（其中 $v\in V$）在 $\mathrm{F}_p([0,1]^d)$ 中构成一个 Schauder基，参见 [4, 定理 3.8]。

一旦我们证明 $\iota(\{e_v:v\in V\})$ 在 $\mathrm{F}_p([0,1]^d,|\cdot|^{\alpha})$ 中是 p-范数化的，并且 $\operatorname{aconv}_p\iota(\{e_v:v\in V\})$ 包含 $\operatorname{span}\iota(\{e_v:v\in V\})$ 中零的一个邻域，根据引理 2.4 即可得出 ι extends to an onto isomorphism$\tilde{\iota}:\ell_p(V)\to\mathrm{F}_p([0,1]^d,|\cdot|^{\alpha})$。为此，我们首先建立如下包含关系：$\beta\iota(\{e_v:v\in V\})\subseteq B_{\mathcal{F}_p}$，其中 $\beta>0$。

对于任意 $v\in V_0\setminus V_{-1}$，我们推得

$$\|\iota(e_v)\|_p=\|\delta(v)\|_p=|v|^{\alpha}\left\|\frac{\delta(v)}{|v|^{\alpha}}\right\|_p\leq d^{\alpha},$$

其中 $\left\|\delta_{\frac{v}{|v|^{\alpha}}}\right\|_p=1$）作为 δ 是等距性。

设 $v=(v_i)_{i=1}^d \in V_k \setminus V_{k-1}$，其中 $k \in \mathbb{N}$。我们首先注意到

$$\begin{aligned}\|\iota(e_v)\|_p^p &= \left\| \sum_{u\in V_{k-1}} 2^{k\alpha} \Lambda_{2^{-k+1}}^d(u,v)(\delta(v)-\delta(u)) \right\|_p^p \\ &\leq \sum_{u\in V_{k-1}} \left\| 2^{k\alpha}|v-u|^\alpha \Lambda_{2^{-k+1}}^d(u,v) \frac{\delta(v)-\delta(u)}{|v-u|^\alpha} \right\|_p^p \\ &= \sum_{u\in V_{k-1}} (2^{k\alpha}|v-u|^\alpha \Lambda_{2^{-k+1}}^d(u,v))^p,\end{aligned} \tag{13}$$

其中第三个等式对任意 $u \in V_{k-1}$ 均由 δ 的等距性以及 $\left\| \frac{\delta(v-u)}{|v-u|^\alpha} \right\|_p = 1$ 得出。我们进一步指出，对于任意 $u=(u_i)_{i=1}^d \in V_{k-1}$，$\Lambda_{2^{-k+1}}^d(u,v) \neq 0$，根据引理 2.13 (iv) 可得 $|v_i-u_i| \in \{0,2^{-k}\}$，其中 $i \in \{1,\dots,d\}$；因此，$2^{k\alpha}|v-u|^\alpha \leq d^\alpha$。类似地，根据引理 2.13 (iii)，我们回顾 $\sum_{u\in V_{k-1}} \Lambda_{2^{-k+1}}^d(u,v) = 1$，并且根据定义，$\Lambda_{2^{-k+1}}^d(\cdot\, v) \geq 0$。继续(13)，我们得到

$$\begin{aligned}\|\iota(e_v)\|_p &\leq \left(\sum_{u\in V_{k-1}} (2^{k\alpha}|v-u|^\alpha \Lambda_{2^{-k+1}}^d(u,v))^p \right)^{1/p} \\ &\leq d^\alpha C(p,2^d).\end{aligned}$$

因此 $\iota(\{e_v\colon v\in V\}) \subseteq d^\alpha C(p,2^d) B_{\mathcal{F}_p}$。

我们验证，对于某个 $\alpha>0$，$\mathrm{Mol}(V\cup\{0\}) \subseteq \alpha \mathrm{aconv}_p\, \iota(\{e_v\colon v\in V\})$。为此，令 $v\in V_k$，其中 $k\in\mathbb{N}_0$。每当 $v\in V_k\setminus V_{k-1}$ 时，我们有 $2^{k\alpha}\left(\delta(v) - \sum_{u\in V_{k-1}} \Lambda_{2^{-k+1}}^d(u,v)\delta(u)\right) \in \iota(\{e_{v'}\colon v'\in V\})$。若 $v\in V_{k-1}$，回忆一下，根据引理 2.13 (ii)，对于任意 $u\in V_{k-1}$，$\Lambda_{2^{-k+1}}^d(u,v) = \delta_{u,v}$；因此，$2^{k\alpha}\left(\delta(v) - \sum_{u\in V_{k-1}} \Lambda_{2^{-k+1}}^d(u,v)\delta(u)\right) = 0$。我们推得

$$\begin{aligned}2^{k\alpha}\left(\delta(v) - \sum_{u\in V_{k-1}} \Lambda_{2^{-k+1}}^d(u,v)\delta(u)\right) &\in \{0,\iota(e_v)\} \\ &\subseteq \mathrm{aconv}_p\, \iota(\{e_{v'} : v'\in V\}).\end{aligned}$$

由于现在 $\mathrm{aconv}_p\, \iota(\{e_v\colon v\in V\})$ 满足引理 4.4 的假设，特别地，我们有 $\{\delta(u)\colon u\in\{0,1\}^d\} = \{\iota(e_v)\colon v\in V_0\setminus V_{-1}\} \cup \{0\} \subseteq \mathrm{aconv}_p\, \iota(\{e_v\colon v\in V\})$，根据引理 4.8，存在 $\alpha>0$ 使得

$$\mathrm{Mol}(V\cup\{0\}) \subseteq \alpha\, \mathrm{aconv}_p\, \iota(\{e_v : v\in V\}). \tag{14}$$

定量而言，若 ρ 和 τ 分别如引理 4.4 和 4.8所述，我们可以取 $\alpha=\rho^d\tau^d$。

注意到 $\mathrm{Mol}(V\cup\{0\})$ 是 $\mathrm{Mol}([0,1]^d)$ 的稠密子集，而根据事实 2.9，它在等距意义下是 p-范数化的。因此，由 (14) 可得 $B_{\mathcal{F}_p} \subseteq \alpha\, \mathrm{aconv}_p \iota(\{e_v\colon v\in V\})$。由于根据已经证明的部分，$\iota(\{e_v\colon v\in V\}) \subseteq d^\alpha C(p,2^d) B_{\mathcal{F}_p}$，我们得出结论：$\iota(\{e_v\colon v\in V\})$ 在 $\mathrm{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)$ 中是 p-范数化的。

此外，引理 2.10 结合 (14) 表明，$\operatorname{aconv}_p \iota(\{e_v : v \in V\}) \supseteq 1/\alpha \cdot \mathrm{Mol}(V \cup \{0\})$ 包含张成空间 $\operatorname{span} \iota(\{e_v : v \in V\}) = \mathrm{P}(V \cup \{0\})$ 中的一个零的邻域。

总之，我们已验证引理 2.4的假设均已满足；因此，ι 可扩展为一个满同构 $\tilde{\iota}$。

定量地说，我们证明了

$$\frac{1}{C(p, 2^d)} \overline{\operatorname{aconv}}_p \iota(\{e_v : v \in V\}) \subseteq B_{\mathcal{F}_p} \subseteq \rho^d \tau^d \overline{\operatorname{aconv}}_p \iota(\{e_v : v \in V\}),$$

因此，$\mathcal{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)$ 与 $\ell_p(V)$ 的班纳赫-马祖尔距离可估计为 $d(\mathcal{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha) \ell_p(V)) \leq \|\tilde{\iota}\| \|\tilde{\iota}^{-1}\| \leq C(p, 2^d) \rho^d \tau^d$。

证明完毕。

□

4.2. 同构 $\mathcal{F}_p(\mathcal{M}, \rho^\alpha)$，其中 $(\mathcal{M}, \rho)$ 是无限倍增的。 我们将同构定理推广到无限倍增度量空间的 H¨older 扭曲。以下论证由 [3]提出。

定理 4.9。 设(M, ρ) 为一个无限倍增度量空间，且 $0 < \alpha < 1, 0 < p \leq 1$。则 $F_p(M, \rho^\alpha)$ 与空间 ℓ_p 同构。

证明。 令 $\beta \in (\alpha, 1)$。由阿苏阿德定理，见 [5, 命题 2。6]，可知，$(\mathcal{M}, \rho^{\alpha/\beta})$ 与 $(\mathcal{M}', |\cdot|)$ 双 Lipschitz 等价，其中某个 $\mathcal{M}' \subset \mathbb{R}^d$，且 $d \in \mathbb{N}$。因此，$(\mathcal{M}, \rho^\alpha)$ 与 $(\mathcal{M}', |\cdot|^\beta)$ 双 Lipschitz 等价。故在证明的其余部分，我们可假设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个无限子集。

注意到 $\mathrm{F}_p(\mathbb{R}^d, |\cdot|^\alpha)$ 包含一个与 $\mathrm{F}_p(\mathrm{M}, |\cdot|^\alpha)$ 同构的可补子空间；由于 M 是无限的，该子空间是无限维的。事实上，对于任意 $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N} \subseteq \mathbb{R}^d$，都存在一个有界算子$T: \mathrm{F}_p(\mathrm{N}) \to \mathrm{F}_p(\mathrm{M})$，满足 $T \circ L_i = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_p(\mathrm{M})}$，其中 L_i 是包含映射 $i: \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ 的典范线性化，即 M 在 N 中是可补p-可延拓的，见 [3, 定理 5。1]。

此外，已知 $\mathcal{F}_p(\mathbb{R}^d, |\cdot|^\alpha) \simeq \mathcal{F}_p([0,1]^d, |\cdot|^\alpha)$，见 [3, 定理 4。15]。根据定理 4.1，可得 $\mathcal{F}_p(\mathbb{R}^d, |\cdot|^\alpha) \simeq \ell_p$。

我们推得 $\mathcal{F}_p(\mathcal{M}, |\cdot|^\alpha)$ 同构于 ℓ_p 的一个有补无限维子空间。因此，它同构于 ℓ_p，见 [15, 定理 1]和 [17,定理 2]，由此证明完毕。□

References

[1] F. Albiac 和 N. Kalton。拟 Banach 空间的 Lipschitz 结构。《以色列数学杂志》170（2009 年 3 月），第 317–335 页。[2] F. Albiac 等人。关于 $0 < p < 1$ 的 Lipschitz 自由 p-空间。《以色列数学杂志》240.1（2020 年 9 月），第 65–98 页。[3] F.Albiac 等人。与其无穷直和同构的 Lipschitz 自由空间及其几何应用。《美国数学学会汇刊》374.10（2021 年 7 月），第 7281–7312 页。[4] F. Albiac 等人。关于 $0 < p \leq 1$ 的 Lipschitz 自由 p- 空间 $\mathcal{F}_p(\mathbb{Z}^d)$ 和 $\mathcal{F}_p(\mathbb{R}^d)$ 的结构。《数学汇刊》 73.3（2022 年 7 月），第 337–357 页。

[5] P. Assouad。在 $\mathbb{R}^n$ 中的 Lipschitz 嵌入。《法国数学学会公报》111（1983 年），第 429–448 页。[6] R. Bonic、J. Frampton 和 A. Tromba。 Λ-流形。《函数分析杂志》3.2（1969 年），第 310–320 页。[7] L. Borel-Mathurin。巴拿赫空间的逼近性质与非线性几何。《休斯敦数学杂志》38（2012 年 1 月），第 1135–1148 页。[8] G. Godefroy 和 N. J. Kalton。Lipschitz 自由巴拿赫空间。《数学研究》 159.1 （ 2003 年），第 121–141 页。[9] G. Godefroy。Lipschitz可逼近巴拿赫空间。《查理大学数学评论》61.2（ 2020 年），第 187–193 页。[10] P. H ´ajek 和 R. Medina。巴拿赫空间中网上的 Lipschitz 自由空间的绍德尔基。《数学分析与应用杂志》512.2（2022 年），第 126–178 页。[11] N. Jaegermann。班纳赫-马祖尔距离与有限维算子理想。英国英格兰埃塞克斯哈洛；纽约：朗文科学与技术出版社、约翰·威立，1989 年。[12] N. J. Kalton。巴拿赫空间的逼近性质与非线性几何。《数学年刊》354（2012 年），第 1247–1288 页。[13] N. J. Kalton。Lipschitz 函数与 H¨lder 函数空间及其应用。《数学汇刊》55.2（2004 年），第 171–217 页。[14] G. Lancien 和 E. Perneck´a。Lipschitz自由空间中的逼近性质与绍德尔分解。《函数分析杂志》264.10（2013 年），第 2323–2334 页。[15] A. Pe-lczy´nski。某些巴拿赫空间中的投影。《数学研究》19.2（1960 年），第 209–228 页。[16] E. Perneck´a 和 R. J. Smith。子集 $\mathbb{R}^n$ 上 Lipschitz自由空间的度量逼近性质。《逼近理论杂志》199（2015 年），第 29–44 页。[17] W. Stiles。 l_p、 $0 < p < 1$ 的某些性质。《数学研究》42.2（1972 年），第 109–119 页。[18] N. Weaver。Lipschitz代数。第 2 版。世界科技出版公司，哈肯萨克，新泽西州，2018 年。*Email address*: jan.bima@mff.cuni.cz

Charles University, Faculty of Mathematics and Physics, Department of Mathematical Analysis, Sokolovská 83, 186 75 Prague 8, Czech Republic

MSD Czech Republic, Prague, Czech Republic