arXiv:2303.03289v1 [math.LO] 6 Mar 2023

关于若干逻辑代数的评述

Mariana Floricica C˘alin，Cristina Flaut，Dana Piciu

摘要。 逻辑代数研究某些代数结构，通常是有界格；这些结构被视为某些逻辑的模型，其中包括作为序理论一个分支的逻辑。众所周知，它们对于推动有用概念的发展具有重要意义，并在社会生活中得到应用，例如计算机代数。

本文特别涉及BL-代数，并介绍有限环或具有有限个理想的环在其与BL-环的联系中的性质。

关键词：逻辑代数，BL-代数，BL-环 AMS 分类：
03G10，03G25，06A06，06D05，08C05，06F35。

0. 引言

逻辑代数是明确的代数系统，展现了逻辑的基本数学结构。这些代数研究某些代数结构，通常是有界格，并将其视为特定逻辑的模型，其中包括作为序理论一个领域的逻辑。众所周知，它们在社会生活中具有重要意义，并有诸多应用，可用于推动实用概念的发展。例如，计算机代数（又称符号计算或代数计算）是一个科学领域，涉及研究和开发用于计算数学表达式和操作其他数学对象的算法和/或软件；此外，它们也应用于社会分析中的真值研究。下文将举例说明逻辑代数的一些应用。

基本逻辑（简称 BL）由 Hajek 于 [H; 98] 提出，用于形式化由连续三角范数在实数区间 $[0, 1]$ 上诱导的多值语义。基本逻辑概括了模糊集理论中最常用的三种逻辑： ˙Lukasiewicz 逻辑、G″odel 逻辑和乘积逻辑。BL-代数是基本逻辑的Lindenbaum-Tarski代数。

本文主要讨论 BL-代数和 BL-环。

BL-环是其理想格可以赋予 BL-代数结构的交换含幺环。我们介绍有限环或具有有限个理想的环的性质，以及它们与 BL-环之间的联系。为此，我们给出一些例子，并在结论中提出寻找此类环的分类方法的研究方向。

在本文中，所考虑的所有环均为交换含幺环。

1. 预备知识

设 R 是一个交换含幺环。集合 $Id(R)$ 表示环 R 的所有理想组成的集合。令 I, $J \in Id(R)$。以下集合也是 R 中的理想:

$$I + J =< I \cup J >= \{i + j, i \in I, j \in J\},$$

$$I \otimes J = \{\sum_{k=1}^{n} i_k j_k,\ i_k \in I, j_k \in J\},$$

$$(I : J) = \{x \in R, x \cdot J \subseteq I\},$$

$$Ann\,(I) = (\mathbf{0} : I)\,, \text{ where } \mathbf{0} =< 0 >,$$

称为和、积、商和理想的湮灭子 I。

定义 1.1. ([AM; 69]) 我们考虑 I, $J \in Id(R)$。理想 I和 J称为互素，如果 $I + J = R$，也就是说，存在 $i \in I, j \in J$ 使得 $i + j = 1$。

备注 1.2. 如果 R_1 和 R_2 是交换环，且 I_1 是 R_1 中的一个理想，I_2是 R_2中的一个理想，那么 $I_1 \times I_2$是环 $R = R_1 \times R_2$中的一个理想。此外，环 R 中的每个理想都具有 $I \times J$的形式，其中 I 是 R_1 中的一个理想， J 是 R_2中的一个理想。

命题 1.3. ([AM; 69], 环的中国剩余定理）如果R 是一个交换环，且 I, J 是 R 中的两个理想，满足 $I + J = R$，则有$I \otimes J = I \cap J$。 那么

$$\frac{R}{I \otimes J} = \frac{R}{I \cap J} \simeq \frac{R}{I} \times \frac{R}{J}.$$

□

命题 1.4. *1*）若 R_i、$i \in \{1, 2, ..., s\}$ 是交换含幺环，且 I_i 是环 R_i 中的理想，若我们考虑 $R = R_1 \times ... \times R_s$，而 $I = I_1 \times ... \times I_s$ 是环 R 中的理想，则

$$\frac{R}{I} \simeq \frac{R_1}{I_1} \times ... \times \frac{R_s}{I_s}.$$

2）对于交换环 R，有 $R[X] \times R[X] \simeq (R \times R)[X]$。

3）若 $(m, n) = 1$，则 $\mathbb{Z}_m[X] \times \mathbb{Z}_n[X] \simeq (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n)[X] = \mathbb{Z}_{mn}[X]$。

4)

$$\frac{\mathbb{Z}[X]}{(n)} \simeq (\mathbb{Z}/(n))[X].$$

5）若 $I = I_1 \times I_2$ 是环 $R[X] \times R[X]$ 中的理想，则

$$(R[X] \times R[X])/I \simeq \frac{R[X]}{I_1} \times \frac{R[X]}{I_2}.$$

证明。1）由基本同构定理显然可知。考虑满态射 $\phi: \frac{R}{I} \to \frac{R_1}{I_1} \times ... \times \frac{R_s}{I_s}$, $\phi(x_1, ..., x_s) = (\widehat{x_1}, ..., \widehat{x_s})$。

2) 设 $f: R[X] \times R[X] \simeq (R \times R)[X]$, $f(p, q) = Q[X]$, 其中 $p = p_0 + p_1 X + ... + p_m X^m$、$q = q_0 + q_1 X + ... + q_m X^m$, q_m或 p_m可以为零，且 $Q[X] = (p_0, q_0) + (p_1, q_1) X + ... + (p_m, q_m) X^m$。显然, f是一个双射态射。

3) 的确，设 $p(X) \in \mathbb{Z}[X]$是一个多项式，而 $f: \mathbb{Z}_{mn}[X] \to \mathbb{Z}_m[X] \times \mathbb{Z}_n[X]$,

$f\left(\underline{p(X)}\right) = \left(\widehat{p_m\ X}(\,)\ \widetilde{p_n\ X}(\,)\right)$，其中 $\underline{\ p\ }(X)$ 是多项式 $p(X)$，其系数对 mn 取模； $p_m(X)$ 是多项式 $p(X)$，其系数 $\frown$ 对 m 取模；而 $p_n(X)$ 是多项式 $p(X)$，其系数对 n 取模。我们有， $f(p_1+p_2) = f(p_1) + f(p_2)$，且 $f(p_1p_2) = f(p_1)f(p_2)$。

4) 我们有 π： $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(n)$，典范投影，以及 i： $\mathbb{Z}/(n) \to \mathbb{Z}/(n)[X]$典范嵌入。因此，根据多项式环的泛性质，我们有环同态 f： $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}/(n)[X]$，其核 $f = n\mathbb{Z}[X] = (n) = \{$是系数为 $n\}$的倍数的多项式集合。显然， f是满射。因此，根据同构基本定理，我们有 $\frac{\mathbb{Z}[X]}{(n)} \simeq (\mathbb{Z}/(n))[X]$。

5) 由 1) 显然可知。 □

定义 1.5. ([WD; 39]) 一个（交换）剩余格是一个代数 $(L, \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$，满足：

(1) $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ 是一个有界格；(2) $(L, \odot, 1)$ 是一个交换有序幺半群；(3) $z \le x \to y$ 当且仅当 $x \odot z \le y$, 对所有 $x, y, z \in L$.

性质 (3) 称为剩余性，其中 $\le$ 是格 $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$的偏序。

在剩余格中定义了一个附加运算：对于 $x \in L$，记作$x^* = x \to 0$.

保留这些记号，对于交换含幺环，我们有 $(Id(R) \cap, +, \otimes \to, 0 = \{0\}, 1 = R)$ 是一个剩余格，其中序关系为 $\subseteq$, $I \to J = (J : I)$，且 $I \odot J = I \otimes J$，对每个 $I, J \in Id(R)$，参见 [TT;22]

在剩余格 $(L, \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ 中，我们考虑以下恒等式：

$$(prel) \quad (x \to y) \vee (y \to x) = 1 \quad (prelinearity);$$
$$(div) \quad x \odot (x \to y) = x \wedge y \quad (divisibility).$$

定义 1.6。 ([T; 99]) 1)如果剩余格 L 满足 $(prel)$ 和 (div) 条件，则称其为*BL*-代数 。

2) BL-链是全序 BL-代数，即其格序为全序的 BL-代数。

定义 1.7。 ([CHA; 58]) MV-代数是一个代数 $(L, \oplus, ^*, 0)$，满足以下公理：

(1) $(L, \oplus, 0)$ 是阿贝尔幺半群；(2) $(x^*)^* = x$;
(3) $x \oplus 0^* = 0^*$; (4) $(x^* \oplus y)^* \oplus y = (y^* \oplus x)^* \oplus x$, 对所有 $x, y \in L$.

注 1.8。 若在 BL-代数 L 中，对于每个 $x \in L$，都有 $x^{**} = x$， 且对于 $x, y \in L$, 我们记

$$x \oplus y = (x^* \odot y^*)^*,$$

于是我们得到一个 MV代数结构 $(L, \oplus, ^*, 0)$。 反过来，若 $(L, \oplus, ^*, 0)$ 是一个 *MV*-代数，则 $(L, \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ 就成为一个 BL-代数，其中对于 $x, y \in L$，我们有：

$$x \odot y = (x^* \oplus y^*)^*,$$

$$x \to y = x^* \oplus y, 1 = 0^*,$$

$x \vee y = (x \to y) \to y = (y \to x) \to x$ 和 $x \wedge y = (x^* \vee y^*)^*$,

参见 [T; 99]。

我们回顾一下，在 [NL 中; 03], Di Nolla 和 Lettieri 分析了有限BL代数的结构。他们引入了 BL-彗星的概念，这是一类有限BL代数，可视为有限BL-链的推广。利用 BL-彗星，任意有限BL代数都可以表示为 BL-彗星的直积。

定义 1.9。 1) ([NL; 03], 定义 21) 设 L 为一个 BL-代数。若 $x \odot x = x$，则称元素$x \in L$ 为幂等元 。

2) 设 L 为一个有限BL代数， $\mathcal{I}(L)$ 为 L 中幂等元的集合。对于 $x \in \mathcal{I}(L)$，我们记 $\mathcal{C}(x) = \{y \in \mathcal{I}(L)$，使得 x 和 y 可比较$\}$。我们定义集合 $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{I}(L)$ 如下:

$x \in \mathcal{D}(L)$ 当且仅当 i) $\mathcal{C}(x) = \mathcal{I}(L)$; ii) 集合 $\{y \in \mathcal{I}(L)$ $y \leq x\}$ 是一条链。显然， $\mathcal{D}(L) \neq \emptyset$，因为 $0 \in \mathcal{D}(L)$。

有限 BL-代数 L 称为 ***BL*-彗星** ，如果 $max\mathcal{D}(L) \neq 0$.

我们回顾一下，在 BL-彗星 L 中，元素 $max\mathcal{D}(L)$ 称为 L 的枢纽元，记作 $pivot(L)$。

命题 1.10。 ([NL; 03], 命题 26)设 L 是有限 ***BL*-代数**。以下断言等价:

(i) L 是一个 ***BL*-彗星**，且 $pivot(L) = 1$;

(ii) L 是 BL-链。

利用 BL-代数中布尔元的刻画，我们建立了 BL-彗星与 BL(MV)-链之间的联系。

命题 1.11. 设 L 是一个 ***BL*-彗星**。那么， L 是 BL-链，当且仅当 $pivot(L)^{**} = pivot(L)$。

证明。 若 L 是 BL-链，利用命题 1.10， $pivot(L) = 1$ ，显然，$1^{**} = 1$.

反过来，若假设 $pivot(L)^{**} = pivot(L)$，利用 BL-代数中布尔元的刻画（见 [P; 07, Proposition 3.3], ），显然 $pivot(L)$ 是 L中的一个布尔元，因此， $pivot(L) \vee pivot(L)^* = 1.$ 。我们推得 $pivot(L)^*$ 也是一个布尔元，因而是 $L.$ 中的一个幂等元。于是$pivot(L)^* \in C(pivot(x))$。由此可知， $pivot(L)$ 和 $pivot(L)^*$ 可比较。

若 $pivot(L) \leq pivot(L)^*$，则 $1 = pivot(L) \vee pivot(L)^* = pivot(L)^*$，因此， $pivot(L) = 0$，矛盾。

如果 $pivot(L)^* \leq pivot(L)$，那么 $1 = pivot(L) \vee pivot(L)^* = pivot(L)$。 利用命题 1.10， L 是一个 BL-链。 □

由命题 1.11，我们推得以下结果:

命题 1.12。 设 L是一个有限 ***MV*-代数**。以下断言等价:

(i) L 是一个***BL*-彗星**;

(ii) L 是一个 MV-链。

2. 关于交换含幺环的一些评述

定义 2.1. ([AM; 69]) 设 R 为一个交换含幺环。

1）环 R 的理想 M 若在该环 R的所有真理想中按集合包含关系极大，则称其为极大 理想。这意味着，不存在其他不同于 R 且包含于 M的理想。环 R 的理想 J 若是一个不包含任何其他非零理想的非零理想，则称其为极小理想 。

2）交换局部环 R 是具有唯一极大理想的环。

3）设 $P \neq R$是环 R中的一个理想。设 $a,\ b \in R$满足 $ab \in P$。如果有$a \in P$或 $b \in P$，那么 P称为 R的素理想。

注 2.2。设 R 是一个交换含幺环。

1）环 R 的理想 M 是极大理想，当且仅当 R/M 是域；2）环 R 的理想 P 是素理想，当且仅当 R/P 是整环。由此可知，极大理想是素理想。关于其他细节和性质，读者可参阅 [AM; 69]。

定义 2.3。i） [HLN；如果交换环 R 满足：对于 R 的任意理想 I_1，I_2，其中 $I_1 \subseteq I_2$，存在 R 的一个理想 I_3，使得$I_1 = I_2 \otimes I_3$，则称其为乘法环。

ii) 交换环 R 称为 诺特环，如果满足升链条件，也就是说，理想的每个递增序列 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_r \subseteq ...$ 最终都会稳定，即存在 q 使得 $I_q = I_{q+1} = ...$。

iii) 交换环 R 称为 阿廷环，如果满足降链条件，也就是说，理想的每个递减序列 $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_r \supseteq ...$ 最终都会稳定，即存在 q 使得 $I_q = I_{q+1} = ...$。

注 2.4。

i) ([AB; 19], 引理 3.5) 设 $R = \prod R_i$ 是环的一个直积。 R 是乘法环，当且仅当对所有 $j \in J$， R_j 都是乘法环。

ii) ([AB; 19], 引理 3.6) 设 R 是一个乘法环，且 I 是 R的一个理想 . 因此，商环 R/I 是乘法环。

注 2.5。 ([A; 76]. 推论 6.1) 设 R 是一个环。以下条件等价:

i) $R[X]$是乘法环;

ii) R 是域的有限直积。

注记 2.6。 ([AF; 92] 和 [AM; 69])

1) 若 R 是诺特环，则多项式环 $R[X]$ 是诺特环，商环 R/I 也为诺特环，其中 I 是 R的一个理想。

2）任意域和任意主理想环都是诺特环。3）诺特环 R 的每个理想都是有限生成的。4）整环 R 是阿廷环，当且仅当 R 是域。5）对于 K 为域且 t 为正整数，环 $K[X]/(X^t)$ 是阿廷环。6）交换诺特环 R 是阿廷环，当且仅当 R 是局部环的积。7）在阿廷环中，每个素理想都是极大理想。8）阿廷环是有限个阿廷局部环的直积。

命题 2.7。 设 R 是一个恰好有三个理想 $\{0\}$、I、R 的交换含幺环。 因此，我们有 $I^2 = \{0\}$。

证明。 显然， I 是 R中的唯一极小理想。由于 $I^2 \subseteq I$，我们有$I^2 = \{0\}$ 或 $I^2 = I$。同时， I 是 R 的唯一极大理想，并且 I 中的每个元素都是非单位元。假设 $I^2 = I$。取 $x \in I$ 使得 $x \neq 0$。显然， $I =< x >$ 且 $x^2 \neq 0$。我们考虑理想 $A = \{z \in R \ / \ xz = 0\}$。我们

证明 $A \neq \{0\}$。由于 $x^2 \neq 0$，因此存在元素 $y \in R$ 使得$x^2y = x$。于是 $x(xy-1) = 0$，其中 $xy-1 \neq 0$，因为 x 是 R中的非单位元。于是 $xy-1 \in A$ 且 $A \neq \{0\}$。我们有 $A \neq R$，因为 $x \notin A$ （我们有$x^2 \neq 0$）。由此我们得到 $A = I$，矛盾，因此 $I^2 = \{0\}$。□

命题 2.8. 有限交换含幺环 R中的每个非零元素都是单位元或零因子。

证明. 设 $R = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ 是一个有 n 个元素的环，且 $a \in R$ 是一个非单位元。因此，以下元素 $ax_1, ax_2, ..., ax_n$ 都不等于 1。由此可知，它们至多有 $n-1$ 个不同的值，因此至少有两个相等。于是得到 $ax_i = ax_j$，其中 $i \neq j$，因此 $a(x_i - x_j) = 0$。由于 $x_i \neq x_j$，可知 a 是一个零因子。 □

备注 2.9. (参见 [FK； 12])

1. 在交换环 R中，非单位元组成的集合是一个理想，当且仅当该环 R 是局部环。

2. 若 R 是交换诺特环，且 I 是由 R 中的零因子组成的理想，那么它的湮灭子是一个非零理想。

命题 2.10. 设 R是只有有限个理想的整环。那么 R是一个域。

证明。 设 $a \in R$是一个非零元素。我们有理想 $< a >$， $< a^2 >$，.....， $< a^k >$，.....由于理想的个数有限，因此可以在这条链中找到两个相等的理想： $< a^{k_1} > = < a^{k_2} >$。于是，存在一个元素 $r \in R$ 使得 $a^{k_1}r = a^{k_2}$。假设 $k_1 \geq k_2$，则可得 $a^{k_2}\left(a^{k_1-h_2}r - 1\right) = 0$。由于 $a \neq 0$，我们有 $a^{k_1-h_2}r - 1 = 0$，因此 a 是一个可逆元。 □

命题 2.11. 设 R是一个理想个数有限的交换含幺环。因此，理想 I 是极大理想，当且仅当它是素理想。

证明. 设 I是一个极大理想。因此， R/I是一个域，也就是说，它是一个整环，因此 I 是一个素理想。反过来，若 I 是一个素理想，则 R/I是一个理想个数有限的整环。根据上面的命题，R/I 是一个域，因此 I 是一个极大理想。 □

命题 2.12. 设 R是一个理想个数有限的交换含幺环。设 $n_m(R)$ 是 R中极大理想的个数， $n_p(R)$ 是 R 中素理想的个数，而 $n_I(R)$ 是 R中所有理想的个数。因此， $n_m(R) = n_p(R) = \alpha$ 且 $n_I(R) = \prod_{j=1}^{\alpha} \beta_j$， β_j 为正整数， $\beta_j \geq 2$。

证明。 关系 $n_m(R) = n_p(R) = \alpha$ 由上述命题得出。显然， R 是一个阿廷环，因此它是若干非零局部环的积，$R = R_1 \times ... \times R_\alpha$。因此， R中的每个理想 J都具有 $J = J_1 \times ... \times J_\alpha$ 的形式，其中 J_i是 R_i中的理想。由于每个环 R_i 至少有两个理想，我们得到 $n_I(R) = \prod_{j=1}^{\alpha} \beta_j$其中 $\beta_j \geq 2$ 是 R_j中理想的个数。 □

注 2.13. 1）首先，我们必须指出， $n_I(R_j)$可以是任意正整数$\beta_j \geq 2$。例如，环 $K[X]/\left(X^{\beta_j}\right)$ 有 β_j个理想， $\beta_j \geq 2$。

2）如果 $n_I(R)$是有限的，根据命题 2.11，我们只有以下两种可能：

-R 是一个整环，因此它是一个域；在这种情况下，我们有 $n_m(R) = n_p(R) = 1$ 且 $n_I(R) = 2$ 或者

- R 不是整环，且 $n_m(R) = n_p(R) \geq 1$ 和 $n_I(R) > 2$。

3）由上述命题可知，不存在满足 $(n_m(R)\ \ n_p(R)\ \ n_I(R))\ =(3,3,5)$ 或 $(n_m(R)\ \ n_p(R)\ \ n_I(R))\ =(2,2,5)$ 的交换含幺环，因为 5 是素数。要找到这样的例子，我们必须在非交换环中寻找。因此，只有在 $(n_m(R)\ \ n_p(R)\ \ n_I(R))\ =(1,1,5)$ 的情形下才有例子。$n_I(R)\ =7$ 的情况也相同。我们只有 $(n_m(R)\ \ n_p(R)\ \ n_I(R))\ =(1,1,7)$ 这一种情形。但是，我们可以找到满足 $(n_m(R)\ \ n_p(R)\ \ n_I(R))\ =(2,2,4)$ 的交换含幺环，也可以找到满足 $(n_m(R)\ \ n_p(R)\ \ n_I(R))\ =(1,1,4)$ 的交换含幺环。例如，对于第一种情形，环为 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 或 $\mathbb{Z}_6$；对于第二种情形，环为 $\mathbb{Z}_8$.

3. 关于 BL-环的备注

设 R 为交换含幺环，$Id(R)$ 表示环 R 的所有理想的集合。如上文所述，我们有 $(Id(R)\ \cap,\ +,\ \otimes\ \to,\ 0=\{0\},\ 1=R)$ 是一个剩余格，其中序关系为 $\subseteq$，并且对每个 $I,\ J\in Id(R)$，有 $I\to J=(J:\ I)$；交换环当且仅当 $Id(R)$ 是 BL-代数（见 [HLN; 18], 推论 2.3）。诺特乘法环是 BL-环的一个例子（见 [HLN; 18], 例 2.4, 2）。

若考虑 R_1 和 R_2 两个 BL-环及其理想格 $Id(R_1)$ 和 $Id(R_2)$，则格 $Id(R_1\times R_2)\ =Id(R_1)\times Id(R_2)$ 是一个 BL-代数，因此 $R_1\times R_2$ 是一个 BL-环。事实上，对于 $Z,\ W\ \in\ Id(R_1\times R_2)\ Z=(I_1,\ J_1)$ 和 $W=(I_2,\ J_2)$，我们定义

$$Z\to W=(I_1\to I_2,J_1\to J_2)\,,$$

and

$$Z\otimes W=(I_1\otimes J_1,I_2\otimes J_2)\,.$$

这样，我们在 $Id(R_1\times R_2)$ 上得到一个 BL-代数结构。

命题 3.1。不存在具有三个理想的交换含幺环 R，使得其作为 *BL*-代数 Id（R（$\cap$）$+$、$\otimes\ \to$、$0=\{0\}$、$1=RId$）不是 *MV*-代数。

证明。由命题 2.7 可知，如果 R 是一个恰好有三个理想的交换含幺环 $\{0\},\ I,\ R$，那么我们有 $I^2=\{0\}$。由此，我们有 $I\to 0=(0:\ I)\ =I$，并得到如下蕴涵表和乘法表

$$\begin{array}{c|ccc}\to & 0 & I & R\\ \hline 0 & R & R & R\\ I & I & R & R\\ R & 0 & I & R\end{array}\qquad\begin{array}{c|ccc}\otimes & 0 & I & R\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\\ I & 0 & 0 & I\\ R & 0 & I & R\end{array}\ , \tag{3.1.}$$

它们赋予我们一个 MV-代数结构。这样的环的一个例子是（$\mathbb{Z}_4,\ +,\ \cdot$），其中 $I=\left(\widehat{2}\right),\ 0=\left(\widehat{0}\right)$。□

注 3.2. 由上述结果可知，任意一个含有三个理想的交换含幺环 R，其代数 $Id(R)$ 总具有 MV-代数结构。因此，若要找到具有三个理想且 $Id(R)$ 是 BL-代数但不是 MV-代数的环，我们必须在非含幺环、非交换环，或二者兼有的范围内寻找，

或者将这样的代数作为无限BL代数的子集或子代数来寻找。唯一一个阶为 3 且不是 MV-代数的 BL-代数具有如下蕴涵表和乘法表：

$$\begin{array}{c|ccc} \to & 0 & I & R \\ \hline 0 & R & R & R \\ I & 0 & R & R \\ R & 0 & I & R \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \otimes & 0 & I & R \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & I \\ R & 0 & I & R \end{array} . \tag{3.2.}$$

注 3.3. 1) 回顾一下，若 K 是一个域， $K[X]$ 是多项式环，那么对于 $f \in K[X]$，商环 $A = K[X]/(f)$ 是一个 BL-环，参见 [FP; 22]。

2) 令 $n = p_1 p_2$，其中 p_1 和 p_2 是两个互不相同的素数。我们有如下 g 同构

$$R = \frac{\mathbb{Z}_{p_1 p_2}[X]}{(p_1 X^2 + p_2)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[X]}{(n,\ p_1 X^2 + p_2)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[X]}{(p_2,\ X^2)} \simeq \frac{\mathbb{Z}_{p_2}[X]}{(X^2)}.$$

这个环是一个 BL-环。

例 3.4. 下面我们给出一些 BL-环的例子，更确切地说，是一些作为 BL-环的诺特乘法环的例子。

1) 我们考虑环 $R = \frac{\mathbb{Z}_6[X]}{(X^2)}$。由上文可知， $\frac{\mathbb{Z}_6[X]}{(X^2)} \simeq \frac{\mathbb{Z}_2[X]}{(X^2)} \times \frac{\mathbb{Z}_3[X]}{(X^2)}$。环 $\frac{\mathbb{Z}_2[X]}{(X^2)}$ 有三个理想：(0),(X) 和 $\frac{\mathbb{Z}_2[X]}{(X^2)}$。环 $\frac{\mathbb{Z}_3[X]}{(X^2)}$ 也有三个理想：(0),(X) 和 $\frac{\mathbb{Z}_3[X]}{(X^2)}$ 因此，环 $\frac{\mathbb{Z}_6[X]}{(X^2)}$ 是一个有 9 个理想的 BL-环。

2) 根据上述结果，我们得到以下环同构

$$R_1 = \frac{\mathbb{Z}_6[X]}{(2X^2+3)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[X]}{(6,\ 2X^2+3)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[X]}{(3,\ X^2)} \simeq \frac{\mathbb{Z}_3[X]}{(X^2)}$$

and

$$R_2 = \frac{\mathbb{Z}_6[X]}{(3X^2+2)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[X]}{(6,\ 3X^2+2)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[X]}{(2,\ X^2)} \simeq \frac{\mathbb{Z}_2[X]}{(X^2)}.$$

事实上，由于 $X^2 = (2X^2+3)(3X^2+2)$，我们有 $(3,\ X^2) \subseteq (6,\ 2X^2+3)$。反过来，这也成立，因为 $2X^2+3 = 2 \cdot X^2 + 3$ 和 $6 = 3+3$。因此$(6,\ 2X^2+3) = (3,\ X^2)$。类似地，我们有 $(6,\ 3X^2+2) = (2,\ X^2)$。在环 R_1 和 R_2，中，我们有 $X^2 = 0$，因为 $X^2 = (2X^2+3)(3X^2+2)$。因此，在 R_1中，我们有 $3 = 0$，而在 R_2 中，我们有 $2 = 0$.

3）根据上述结果，我们得到以下环同构：

$$\frac{\mathbb{Z}_6[X]}{(2X^2+4)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[X]}{(6,\ 2X^2+4)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[X]}{(2)(3,\ X^2+2)} \simeq$$

$$\simeq \frac{\mathbb{Z}[X]}{(2)} \times \frac{\mathbb{Z}[X]}{(3,\ X^2+2)} \simeq \mathbb{Z}_2[X] \times \frac{\mathbb{Z}_3[X]}{(X^2+2)}.$$

因此，环 $\frac{\mathbb{Z}_6[X]}{(2X^2+4)}$ 是一个无限 BL-环。

同理，我们有以下环同构：

$$\frac{\mathbb{Z}_{30}[X]}{(6X^2+24)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[X]}{(30,\ 6X^2+24)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[X]}{(6)(5,\ X^2+4)} \simeq$$

$$\simeq \frac{\mathbb{Z}[X]}{(6)} \times \frac{\mathbb{Z}[X]}{(5,\ X^2+4)} \simeq \mathbb{Z}_6[X] \times \frac{\mathbb{Z}_5[X]}{(X^2+4)},$$

or

$$\frac{\mathbb{Z}_{30}[X]}{(6X^2)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[X]}{(30,\ 6X^2)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[X]}{(6)(5,\ X^2)} \simeq$$

$$\simeq \frac{\mathbb{Z}[X]}{(6)} \times \frac{\mathbb{Z}[X]}{(5,\ X^2)} \simeq \mathbb{Z}_6[X] \times \frac{\mathbb{Z}_5[X]}{(X^2)}.$$

因此，环 $\mathbb{Z}_6[X] \times \frac{\mathbb{Z}_5[X]}{(X^2+4)}$ 和 $\mathbb{Z}_6[X] \times \frac{\mathbb{Z}_5[X]}{X^2}$ 是无限 BL-环。

4) 根据上述结果，我们得到如下环同构：

$$\frac{\mathbb{Z}_6[X]}{(X^2-X)} \simeq \frac{\mathbb{Z}_6[X]}{X(X-1)} \simeq \frac{\mathbb{Z}_6[X]}{(X)} \times \frac{\mathbb{Z}_6[X]}{(X-1)} \simeq$$

$$\simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6.$$

例 3.5. 设 $R = \mathbb{Z}_6[X] \times \frac{\mathbb{Z}_5[X]}{X^2}$ 是上述例子中的一个 BL-环。因此， $Id(R)$ 是一个无限BL代数。在 R，我们考虑以下理想$\{0\}$， $I = (3) \times R$和 R，其中 $(3) = \{f \in \mathbb{Z}_6[X], f = a_nX^n + ... + a_1X + a_0$,满足 $a_0 = 0$ 或 $a_0 = 3\}$。我们有 $I^2 = I$ 且 $Ann(I) = \{0\}$。因此，$B = \{\{0\}, I, R\}$ 是代数 $Id(R)$ 的一个有限BL子代数，其蕴涵表和乘法表由关系式 (3.2.) 给出。

注3.6. 设 R 是一个恰有四个理想$\{0\}$， I， J， R的交换含幺环。因此，理想格 $Id(R)$ 可以具有图1中的 A或 B 的形式。**情形 i.** I 和 J 是极大理想。

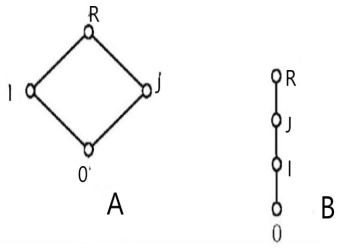


图1：有四个元素的格。

在这种情况下，我们有 $\{0\} \subset I \subset R$ 和 $\{0\} \subset J \subset R$，其中 $I + J = R$。因此， $Id(R)$ 是图1 A. 所示的格。我们有 I 和 J 互素。显然， $I \otimes J = I \cap J = \{0\}$ 和 $I^2 = I, J^2 = J$。由此可得，$Ann(I) = J$ 且 $Ann(J) = I$。此外， $J \to I = (I :\ J) = I$ 且 $I \to J = (J :\ I) = J$。因此，我们得到具有以下运算的 MV代数结构：

$\to$	0	I	J	R
0	R	R	R	R
I	J	R	J	R
J	I	I	R	R
R	0	I	J	R

$\otimes$	0	I	J	R
0	0	0	0	0
I	0	I	0	I
J	0	0	J	J
R	0	I	J	R

. (3.3.)

情形 ii. 理想格是一条链， $Id(R) = \{\{0\} \subset I \subset J \subset R\}$，如图1 B所示。

由于 $\{0\} \subset I \subset J \subset R$，该环是局部环。此外，我们注意到， I 是唯一的极小理想。令 $x \in I$， $x \neq 0$。因此， $0 \neq < x > \subseteq I$。由于 I 是极小的，我们有 $I = < x >$， 于是 I 是有限生成的。我们有以下子情形。

1) $I^2=\{0\}$, $J^2=I$, $I\otimes J=\{0\}$。我们有 $Ann(I)=(0:I)=J$，以及 $Ann(J)=(0:J)=I$。此外，$J\to I=(I:J)=J$。因此，我们得到如下运算的 MV-代数结构：

$\to$	0	I	J	R
0	R	R	R	R
I	J	R	R	R
J	I	J	R	R
R	0	I	J	R

$\otimes$	0	I	J	R
0	0	0	0	0
I	0	0	0	I
J	0	0	I	J
R	0	I	J	R

. (3.4.)

2) $I^2=\{0\}$, $J^2=I$, $I\otimes J=I$。在这种情况下，我们得不到剩余格，因为 $\otimes$ 不具结合性。例如，$I\otimes J^2=I^2=\{0\}$ 和 $(I\otimes J)\otimes J=I\otimes J=I$。

3) $I^2=\{0\}$, $J^2=J$, $I\otimes J=I$。我们有 $Ann(I)=(0:I)=I$且 $Ann(J)=(0:J)=\{0\}$。此外，$J\to I=(I:J)=I$。因此，对于 $Id(R)$，我们得到一个 BL-代数结构（它不是 MV-代数），其蕴涵表和乘法表如下

$\to$	0	I	J	R
0	R	R	R	R
I	I	R	R	R
J	0	I	R	R
R	0	I	J	R

$\otimes$	0	I	J	R
0	0	0	0	0
I	0	0	I	I
J	0	I	J	J
R	0	I	J	R

. (3.5.)

4) $I^2=\{0\}$, $J^2=J$, $I\otimes J=\{0\}$。我们有 $Ann(I)=(0:I)=J$且 $Ann(J)=(0:J)=I$。此外，$J\to I=(I:J)=I$。因此，我们有 $J\otimes(J\to I)=J\otimes I=\{0\}$且 $J\wedge I=I$，这不成立。条件 (div) 不满足。由此可知，$Id(R)$ 不是 BL-代数。

5) $I^2=\{0\}$, $J^2=\{0\}$, $I\otimes J=\{0\}$。我们有 $Ann(I)=(0:I)=J$且$Ann(J)=(0:J)=J$。此外，$J\to I=(I:J)=J$。因此，我们有 $J\otimes(J\to I)=J\otimes J=\{0\}$且 $J\wedge I=I$，这不成立。条件（div）不满足。因此，$Id(R)$ 不是 BL-代数。

6) $I^2=\{0\}$, $J^2=\{0\}$, $I\otimes J=I$，这是不可能的，因为 $I=I\otimes J\subset J^2=\{0\}$。

7) $I^2=I$, $J^2=I$, $I\otimes J=I$。我们有 $Ann(I)=(0:I)=0$且 $Ann(J)=(0:J)=0$。此外，$J\to I=(I:J)=J$。因此，对于 $Id(R)$，我们得到一个 BL-代数结构（它不是 MV-代数），其蕴涵表和乘法表如下：

$\to$	0	I	J	R
0	R	R	R	R
I	0	R	R	R
J	0	J	R	R
R	0	I	J	R

$\otimes$	0	I	J	R
0	0	0	0	0
I	0	I	I	I
J	0	I	I	J
R	0	I	J	R

. (3.6.)

8） $I^2=I$, $J^2=I$, $I\otimes J=\{0\}$，这是不可能的，因为 $I=I^2\subset I\otimes J=\{0\}$。

9) $I^2=I$, $J^2=J$, $I\otimes J=I$。我们有 $Ann(I)=(0:I)=0$且 $Ann(J)=(0:J)=0$。另外，$J\to I=(I:J)=I$。因此，对于 $Id(R)$，我们得到一个 BL-代数结构（它不是 MV-代数），其蕴涵和乘法表如下：

$\to$	0	I	J	R
0	R	R	R	R
I	0	R	R	R
J	0	I	R	R
R	0	I	J	R

$\otimes$	0	I	J	R
0	0	0	0	0
I	0	I	I	I
J	0	I	J	J
R	0	I	J	R

. (3.7.)

10) $I^2 = I$， $J^2 = J$， $I \otimes J = \{0\}$，这是不可能的，因为 $I = I^2 \subset I \otimes J = \{0\}$。11) $I^2 = I$， $J^2 = \{0\}$， $I \otimes J = I$，这是不可能的，因为 $I = I \otimes J \subset J^2 = \{0\}$。12) $I^2 = I$， $J^2 = \{0\}$， $I \otimes J = \{0\}$，这是不可能的，因为由 $I \subset J$可得$I^2 \subset J^2 = \{0\}$，所以 $I = \{0\}$，这就产生了矛盾。

备注 3.7。根据上述命题对 4 阶 BL-代数进行计数，我们得到 5 个 4 阶 BL-代数，其中两个是 MV-代数，三个是 BL-链。通过这种方式，我们重新得到了 [FP；22-2], 表 2 中的结果。由上述备注可见，所有 4 阶 BL-代数都可以作为某个交换含幺环 R的理想格得到。对于由关系式（3.3）给出的 MV-代数，甚至存在一个环的实例，该 MV-代数同构于这个环，即 $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$；而对于由关系式（3.4）给出的 MV-代数，一个实例可以是环 $\mathbb{Z}_8$ （见 [FP；22-1],表2）。有趣的是，我们可以探寻并找出是否存在这样的交换含幺环 R，使得 $Id(R)$ 是由关系式（3.5）、（3.6）、（3.7）给出的 BL-代数。

注 3.8。 a) 下面给出 BL-环的其他例子。由（[HLN； 18], 例 2.4 和注 2.5）可知，诺特乘法环是 BL-环。环 $\mathbb{Z}$ 是诺特乘法环（它是主理想环）。因此，由上述性质（$\mathbb{Z}_n$， $+$， $\cdot$）可知，它是诺特乘法环。

b) 我们考虑环（$\mathbb{Z}_n$， $+$， $\cdot$），其中 $n = p_1 p_2 ... p_r$， p_1， p_2，……， p_r 是互不相同的素数， $r \geq 2$。环 $R = \mathbb{Z}_n[X]/$ （f），其中 f 是 n 的次数为 $q \geq 2$ 的模多项式，是诺特乘法环，因此是 BL-环。由此可知，理想代数 Id（R）是 BL-代数，但不是 BL-链（$\mathbb{Z}_n$ 是域 $\mathbb{Z}_{p_i}$ 的直积）。

c) 如果 $n = p^r, r \geq 2$，则存在一个与 $\mathbb{Z}_n$ ([FP; 22-1]) 同构的 MV-代数。

d) 根据（[AB； 19], 推论 1.3），我们知道，阿廷环是乘法环，当且仅当它是有限个阿廷局部主理想环的积。此外，如果 $r = 1$,</style}环 $R = \mathbb{Z}_p[X]/(f)$ 是阿廷环（有限的）、局部主环，因此它是 BL-环。

e) 如果取环 $\mathbb{Z}_p^r = \mathbb{Z}_p \times ... \underbrace{\times \mathbb{Z}_p}$，则环 $R = \mathbb{Z}_p^r[X]/(f)_{r-time}$是诺特乘法环，因此是 BL-环。

注3.9。 设 R 是一个恰好具有五个理想的交换含幺环。因此，格 $Id(R)$ 可以具有图2和图3中的 A-E 形式。由于 5 是一个素数，采用上述记号，我们只有形如 $(n_m(R)\ \ n_p(R)\ \ n_I(R)) = (1, 1, 5)$ 的交换含幺环 R，其中 $Id(R)$ 是一个 BL-代数，也就是说， $Id(R)$ 是一条链（图E），或具有图C所示的哈斯图。此外，我们注意到，BL-代数不可能具有图C所示的形式，因为在这种情况下 $(a \to b) \vee (b \to a) = c \neq 1$, 因此（prel）条件不满足。我们得出结论， $Id(R)$ 是一条链。

在 [NL； 03], 推论28中，作者证明了每个有限BL-代数都同构于若干BL-彗星的直积。5阶BL-彗星的哈斯图如图3中的D或E所示。若考虑图3中的5阶BL-彗星D，它由交换环 R, 生成，那么 $Id(R)$有两个极大理想，这是不可能的。由此可得，由具有五个理想的交换环 R 生成的BL-彗星 $Id(R)$都是链。按照注3.6，我们可以得到所有8个5阶BL-链: 其中一个是MV代数，另外七个是由具有5个理想的环的 $Id(R)$构成的BL-链，且$(n_m(R)\ \ n_p(R)\ \ n_I(R)) = (1, 1, 5)$。这样，我们重新得到了 [FP；22-2], 表2中的结果。

注3.10。 a）使用上述记号，我们没有形如 $(n_m(R)\ \ n_p(R)\ \ n_I(R)) = (2, 2, 6)$ 且 $Id(R)$ 为 BL-代数但不是 MV-代数的交换含幺环 R的例子。事实上，若存在这样的环，则它是一个

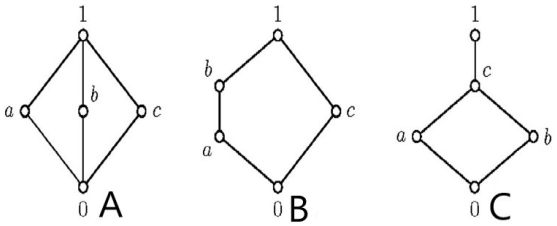


图2：含五个元素的格。

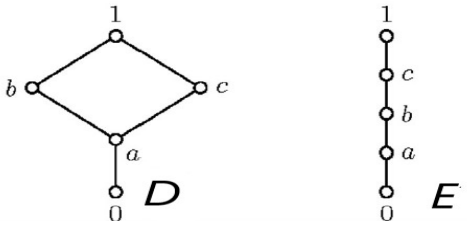


图3：含五个元素的格。

阿廷环，因此它是阿廷局部非零环的积， $R = R_1 \times R_2$。其中一个环 R_1， 有两个理想，另一个环 R_2， 有三个理想。因此， $Id(R_1)$ 和 $Id(R_2)$ 必须是 BL-代数，且至少有一个不应是 MV-代数。。但是，唯一的具有 2 个元素的 BL-代数 $Id(Z_2)$，是 MV-代数，并且根据命题 3.1，不存在具有三个理想且 $Id(R_2)$ 为 BL-代数但不是 MV- 代数的交换含幺环。在这种情况下，我们只有形如 $(n_m(R)\ \ n_p(R)\ \ n_I(R)) = (1，1，6)$ 且 $Id(R)$ 为 BL-代数但不是 MV-代数的有限交换含幺环 R 。

b) 我们只能得到形如 $(n_m(R)\ \ n_p(R)\ \ n_I(R))$ =(1,1,7) 的交换含幺 R 环，其中 $Id(R)$ 是 BL-代数，因为 7 是素数，这意味着 $Id(R)$ 是一条链。

b) 如果 $n_I(R) = 8$，我们可以得到形如 $(n_m(R)\ \ n_p(R)\ \ n_I(R))$ =(2,2,8) 或 $(n_m(R)\ \ n_p(R)\ \ n_I(R))$ $=(3,3,8)$ 的交换含幺环，其中 $Id(R)$ 是 BL-代数。

d) 对于 $n_I(R) = 9$，我们没有形如 $(n_m(R)\ \ n_p(R)\ \ n_I(R)) = (2,2,9)$ 的交换含幺环，其中 $Id(R)$ 是一个不是 MV-代数的 BL-代数，因为不存在含有三个理想的交换含幺环，使得 $Id(R)$ 是一个不是 MV-代数的 BL-代数。但我们可以得到形如 $(n_m(R)\ \ n_p(R)\ \ n_I(R)) = (1,1,9)$ 的环，这意味着 $Id(R)$ 是一条链。对于阶9的 MV-代数，存在与这些 MV-代数同构的环示例，即 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ 或 $\mathbb{Z}_9$（见 [FP；22-1], 表2）。

e) 对于 $n_I(R) = 10$，我们可以取 $(n_m(R)\ \ n_p(R)\ \ n_I(R)) = (2，2，10)$ 或 $(n_m(R)\ \ n_p(R)\ \ n_I(R))$ =(1，1，10)，使得 $Id(R)$ 是一个不是 MV-代数的 BL-代数。

例 3.11. 设 R 是一个满足 $Id(R)$ 为无限集的 BL 环，且 I 是 $R, I^2 = I$ 中的一个幂等理想。由例 3.5 可知，这样的环确实存在，并且 $\{0, I, R\}$ 构成一个阶为 3 的 BL-子代数，其乘法表由以下关系给出

(3.2)。我们考虑环 $R \times R$，因此

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{(0,0),(0,I),(0,R),(I,0),(I,I),(I,R),(R,0),(R,I),(R,R)\} \\ &= \{O,A,B,C,D,E,F,G,Z\}\end{aligned}$$

是一个阶9的 BL-子代数（见图4）。我们有以下蕴涵表和乘法表:

$\rightarrow$	O	A	B	C	D	E	F	G	Z
O	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z
A	F	Z	Z	F	Z	Z	F	Z	Z
B	F	G	Z	F	G	Z	F	G	Z
C	B	B	B	**Z**	**Z**	**Z**	**Z**	**Z**	**Z**
D	O	B	B	**F**	**Z**	**Z**	**F**	**Z**	**Z**
E	O	A	B	**F**	**G**	**Z**	**F**	**G**	**Z**
F	B	B	B	**E**	**E**	**E**	**Z**	**Z**	**Z**
G	O	B	B	**C**	**E**	**E**	**F**	**Z**	**Z**
Z	O	A	B	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**Z**

$\otimes$	O	A	B	C	D	E	F	G	Z
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
A	O	A	A	O	A	A	O	A	A
B	O	A	B	O	A	B	O	A	B
C	O	O	O	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**
D	O	A	A	**C**	**D**	**D**	**C**	**D**	**D**
E	O	A	B	**C**	**D**	**E**	**C**	**D**	**E**
F	O	O	O	**C**	**C**	**C**	**F**	**F**	**F**
G	O	A	A	**C**	**D**	**D**	**F**	**G**	**G**
Z	O	A	B	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**Z**

(3.8.)

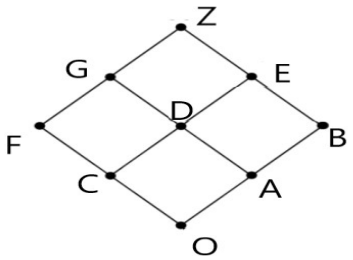


图4：含有九个元素的格。

由此，我们指出，$\{C,D,E,F,G,Z\}$ 是一个6阶BL-代数（参见关系式（3.8）中的粗体部分），它从代数 $\mathcal{B}$中提取；$\{O,D,E,G,Z\}$ 是一个5阶BL-子代数（根据下方的表格，它是一个BL-彗星）；$\{F,G,Z\}$ 是一个3阶BL-代数（如关系式（3.7）所示），它从代数 $\mathcal{B}$ 中提取（见图5）。

$\rightarrow$	O	D	E	G	Z
O	Z	Z	Z	Z	Z
D	O	Z	Z	Z	Z
E	O	G	Z	G	Z
G	O	E	E	Z	Z
Z	O	D	E	G	Z

$\otimes$	O	D	E	G	Z
O	O	O	O	O	O
D	O	D	D	D	D
E	O	D	E	D	E
G	O	D	D	G	G
Z	O	D	E	G	Z

.

结论。本文介绍了一些具有有限个理想的环，以及它们与BL-环之间的联系。BL-环是交换含幺环，其理想格可以赋予BL-代数结构。我们证明，对于给定数量的理想，某些满足 R 使得 $Id(R)$ 是BL-代数的环可以存在。作为进一步的研究，我们计划寻找更多具有此类形式、 R 且 $Id(R)$ 是有限BL-代数的环的例子。

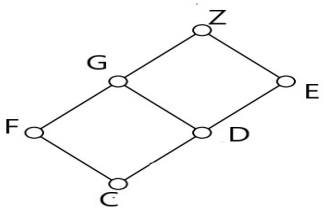


图5：具有六个元素的格。

参考文献

[AB； 19]Alsuraiheed, T., Bavula, V. V.，《具有有限个极小素理想的乘法交换环的刻画》，Communications in Algebra，47(11))(2019)，4533-4540。[A； 76] Anderson D. D.，《乘法理想、乘法环与环$R(X)$》，加拿大数学杂志，第28卷(4)(1976)，760-768。[AF； 92] Anderson, F. W., Fuller, K.，《环与模范畴》，数学研究生教材，13(1992)，第2版，施普林格出版社，纽约，1992年。[AM； 69] Atiyah, M. F., MacDonald, I. G.，《交换代数导引》，艾迪生-韦斯利出版公司，伦敦，1969年。[CHA； 58]Chang, C.C.，《多值逻辑的代数分析》，美国数学会汇刊88(1958)，467-490。[FK； 12] Filipowicz, M., Kepczyk, M.，《交换环零因子注记》，Arab J Math，1(2012)，191–194。[FP；22-1]Flaut, C., Piciu, D.，《交换环与一些逻辑代数之间的联系》，Iranian Journal of Fuzzy Systems，19(6)(2022)，93-110。[FP；22-2] Flaut, C., Piciu, D.，《利用交换环构造BL-代数的一些例子》，Mathematics 10(2022)，4739，1-15。[HLN； 18]Heubo-Kwegna, O. A., Lele, C., Ndjeya, S., Nganou, J. B.，《BL-环》，Logic Journal of the IGPL，26(3)(2018)，290–299。[H； 98]H´ajek, P.，《模糊逻辑元数学》，逻辑趋势：Studia Logica丛书4，多德雷赫特：克鲁维尔学术出版社，1998年。[NL； 03]Di Nola, A., Lettieri, A.，《有限BL代数》，离散数学，269(2003)，93-112。[NL； 05] Di Nola, A., Lettieri, A.，《BL-代数中的基于有限性的结果》，软计算9(2005)，889–896。[P； 07] Piciu, D.，《模糊逻辑代数》，Ed. Universitaria，克拉约瓦，2007年。[TT；22] Tchoffo Foka, S. V., Tonga, M.，《其模糊理想构成布尔代数的环与剩余格》，软计算，26（2022）535-539。[T； 99] Turunen, E.，《模糊逻辑背后的数学》，Physica-Verlag，1999年。[WD； 39]Ward, M., Dilworth, R.P.，《剩余格》，美国数学会汇刊45(1939)，335–354。

玛丽安娜·弗洛里奇卡林 心理学与教育科学学院,

奥维迪乌斯大学，康斯坦察，罗马尼亚，马马
亚大道124号，900527，电子邮件：
fmarianacalin@gmail.com

Cristina Flaut数学与计算机科学学院，奥维迪乌斯大学，马马亚大
道124号，900527，康斯坦察，罗马尼亚，
http://www.univ-ovidius.ro/math/ 电子邮件：
cflaut@univ-ovidius.ro；cristina flaut@yahoo.com

Dana Piciu理学院，克拉约瓦大学，A.I. Cuza街13号，200585，
克拉约瓦，罗马尼亚，http://www.math.ucv.ro/dep mate/ 电
子邮件：dana.piciu@edu.ucv.ro，
piciudanamarina@yahoo.com