arXiv:2303.03294v2 [math.AG] 1 Aug 2024

K3 曲面上的对合与导出等价

BRENDAN HASSETT 和 YURI TSCHINKEL

Abstract. 我们研究 K3 曲面上的对合在导出等价及更一般关系下的共轭，并探讨其在等变双有理几何中的应用。

1. Introduction

自同构等价群 Aut $D^b(X)$，即 K3 曲面 X 的有界导出范畴 $D^b(X)$ 的自等价群，结构十分丰富，但只有当 Picard 群 Pic(X) 的秩为一时才得到充分理解[BB17]。X 的自同构群 Aut(X) 可提升至 Aut $D^b(X)$，因此可以研究有限子群$G \subset$ Aut(X) 在共轭意义下的分类问题——共轭可以由自同构、导出等价，甚至更大的群给出。对于循环的 G，这一问题已经很有趣；对于对合亦然，例如 Enriques 对合或 Nikulin 对合。关于给定 K3 曲面 X 上这些对合的分类，已有大量文献：包括拓扑类型、带对合的极化 K3 曲面的模空间，以及单个 X 上在自同构意义下的对合分类，参见例如 [AN06], [vGS07], [Oha07], [SV20], [Zha98]。

本文研究在导出等价意义下的对合，即保持对合的导出等价。我们对“导出”现象的兴趣，源于 [Sos10]中的一项结果——存在彼此共轭、导出等价但不同构的复 K3 曲面——以及我们对 K3 曲面上算术问题的研究 [HT17], [HT23]。

一大类对合 $\sigma\colon\ X \to X$ 是商$Q = X/\sigma$ 为有理曲面的对合。例子包括 Q 一个 del Pezzo 曲面以及$X \to Q$ 沿光滑曲线分支的双覆盖 $B \in |-2K_Q|$。我们可以允许 Q 在远离 B处具有 ADE 曲面奇点，或者允许 B 具有 ADE 曲线奇点；此时，我们取 X 作为由此得到的 Q双覆盖的极小解消。Alexeev 和 Nikulin 曾研究这些对象，探讨与奇异德尔佩佐曲面分类相关的问题

日期：2024 年 8 月 2 日。

德尔佩佐曲面 [AN06]。本文的主要结果（见第 4 节）是

- 这类（X， σ）的等变导出等价实际上是等变同构（见推论 4.2）。

我们对带对合的格的稳定等价的研究，引出了斜等价这一概念，详见第 7 节。在这里，对偶性与对合相互作用，这一点反映在傅里叶–穆凯核所满足的函数方程中。第 8 节给出了反辛作用的具体例子，其商等于 $\mathbb{P}^2$。

接下来，我们关注 Nikulin 对合 ι： $X \to X$，即保持辛形式不变的对合，因此所得商 X/ι 的奇点消解 Y是一个 K3 曲面。在 [vGS07] 中可以找到对这类对合的详细研究。除极化类外，Picard 群 Pic(X) 还包含格 $E_8(-2)$；van Geemen 和 Sarti 描述了 Picard 秩 rk Pic(X) $= 9$取最小值时的模空间与几何。在第 9 节中，我们将他们的结果推广到更高的秩，并且

- 展示 Nikulin 对合之间非平凡的导出等价（命题 9.3）。

这些结果又使我们能够在第 10 节构造等变双有理同构 ϕ: $\mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$，其不变量$C_G(\phi)$ 不为零。这一概念由 [LSZ23], [LS24] 引入，并在 [KT22] 中推广到等变情形。

Enriques 对合 ϵ： $X \to X$ 的情形，即无不动点对合，使得所得商 X/ϵ 为 Enriques曲面，也已受到广泛关注。此类对合可用 Mukai 格 H(X) 参数化；对于一些有趣的特殊情形，例如 Picard 秩为 11 的 K3 曲面、乘积型 Kummer 曲面、一般Kummer曲面或奇异 K3 曲面，已有关于其共轭类在自同构群 Aut(X) 下的显式描述 [Kon92], [Oha07], [Ser05], [SV20]。在第 11 节，我们观察到

- K3 曲面上存在 Enriques 对合 X 意味着每个导出等价曲面都与 X 等变同构（命题 11.2 和 11.3）；

- 虽然不存在非平凡的等变导出自等价，但我们展示了非平凡的定向反转（即斜）等价，例如在奇异K3曲面上。

致谢：第一作者得到 Simons Foundation Award 546235 以及美国国家科学基金会（NSF）资助项目 1701659 和 1929284 的部分支持，第二作者得到美国国家科学基金会（NSF）资助项目 2000099 的支持。我们感谢 Nicolas Addington、Arend Bayer、Igor Dolgachev、Sarah Frei、Lisa Marquand 和 Barry Mazur 提供的宝贵建议。

2. Lattice results

我们回顾有关格的基本术语和结果：格是挠无的有限秩阿贝尔群 L，连同一个非退化整二次型 $(\cdot,\cdot)$，我们假设该二次型为偶二次型。基本例子包括

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

以及与邓肯图相关联的正定格（记号与邓肯图相同）。

当二次型乘以 2 时，我们记作 L(2)。令

$$d(\mathrm{L}) := \mathrm{L}^*/\mathrm{L}$$

表示判别群，并且

$$q_{\mathrm{L}} : d(\mathrm{L}) \to \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$$

诱导的判别二次型。

Nikulin 的 Witt 消去形式：

命题 2.1。 [Nik79b，推论 1.13。4] 给定一个偶格 L，L $\oplus$U 是具有相同符号和判别二次型的唯一格。

如果格 L_1 和 L_2 稳定同构——即添加具有相同符号的幺模格后变为同构——那么

$$\mathrm{L}_1 \oplus \mathrm{U} \simeq \mathrm{L}_2 \oplus \mathrm{U}.$$

Nikulin 稳定化结果：给定一个格 L，将其诱导的 p-adic 二次型记为 L $\otimes \mathbb{Z}_p$。格 L 的属是指对每个素数 p，在 $\mathbb{Z}_p$ 上以及在 $\mathbb{R}$ 上与 L 等价的所有格所组成的集合。稳定等价的格属于同一属。 p-主部分 d(L) 仅取决于 L $\otimes \mathbb{Z}_p$，记作 d(L $\otimes \mathbb{Z}_p$)。我们用 $q_{\mathrm{L}\otimes\mathbb{Z}_p}$ 表示 d(L $\otimes \mathbb{Z}_p$) 上诱导的判别二次型；当 p 为奇数时，其取值属于 p-主部分 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$；当 L 为偶格且 $p = 2$ 时，其取值属于 $\mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$ 的 2-主部分。对于有限生成阿贝尔群 A，令 $\ell(A)$ 表示其最小生成元个数。

命题2.2。 [Nik79b，定理 1.14。2] 设 L 是满足以下条件的偶不定格

- rank(L) $\geq \ell(d(\mathrm{L}\otimes\mathbb{Z}_p))+2$ 对所有 $p\neq 2$均成立;
- 若 rank(L) $=\ell(d(\mathrm{L}\otimes\mathbb{Z}_2))$，则 $q_{\mathrm{L}\otimes\mathbb{Z}_2}$ 包含 $u_{(2)}+$(2) 或 $v_{(2)}+$(2) 作为直和项，即它们的判别二次型

$$\mathrm{U}^{(2)}(2)=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{V}^{(2)}(2)=\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}.$$

那么 L 的属中存在唯一的类，且 O(L) $\to$O(q_{L}) 是满射。

注 2.3. [Nik79b, Rem. 1.14.5] 只要判别群 d(L) 含有 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ 作为直和项，就可以满足 2-adic 条件。

因此，给定一个格 L，(d(L) q_{L}) 的任意自同构都可以通过 L $\oplus$U 的自同构实现。更准确地说，给定两个秩和符号相同的格 L_1 和 L_2，以及一个同构

$$\varrho:(d(\mathrm{L}_1),q_{\mathrm{L}_1})\xrightarrow{\sim}(d(\mathrm{L}_2),q_{\mathrm{L}_2})$$

存在一个同构

$$\rho:\mathrm{L}_1\oplus\mathrm{U}\xrightarrow{\sim}\mathrm{L}_2\oplus\mathrm{U}$$

诱导出 ϱ。

Nikulin 嵌入结果:

命题 2.4. [Nik79b, 推论 1.12.3，定理 1.14.4] 设 L 是一个符号为 (t_+, t_-)、判别群为 d(L) 的偶格。如果满足以下条件，则 L 可本原嵌入到一个符号为 (ℓ_+,ℓ_-) 的幺模偶格中

- $\ell_+-\ell_-\equiv 0$ 模 8;
- $\ell_+\geq t_+$ 且 $\ell_-\geq t_-$;
- $\ell_++\ell_--t_+-t_->\ell(d(\mathrm{L}))$， d(L) 的秩。

如果满足以下条件，则该嵌入在自同构意义下唯一

- $\ell_+>t_+$ and $\ell_->t_-$;
- $\ell_++\ell_--t_+-t_-\geq 2+\ell(d(\mathrm{L}))$.

特别地，任意符号为 (1, 9) 的偶非退化格都唯一地嵌入 K3 格 $\mathrm{U}^{\oplus 3}\oplus\mathrm{E}_8(-1)^{\oplus 2}$. 中

3. Mukai lattices and derived automorphisms

以下全文均在复数域 $\mathbb{C}$上讨论。设 X 是一个射影 K3 曲面，且

$$\mathrm{Pic}(X) \subset \mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{E}_8(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathrm{U}^3$$

其 Picard 格是符号为 (3, 19) 的格的一个子格，交 pairing 取自交 pairing。Picard 格支配着 X的自同构。复合映射

$$\varpi : \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{O}(\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})) \to \mathrm{O}(\mathrm{Pic}(X))$$

具有有限循环核 [Nik79a, Kon92]。其像可以用 Pic(X) [LP81, §2]显式计算，至少可计算到有限子群为止。考虑由 (-2)-类中的反射生成的子群，也就是说，由自交数为 -2的不可分解有效除子生成的子群；它在 Pic(X)$_{\mathbb{R}}$的正锥上自然作用。于是， ϖ 的像是一个有限指数子群，其元素保持该作用的某个基本域不变，也就是说，保持丰沛锥不变。所有可能的有限 G ⊂Aut(X)均已分类，见 [BH23]。Aut(X)中元素或子群的共轭类分类归结为 Pic(X)的格论；我们将在下文的特殊情形中重新讨论。

X 的超越格是正交补

$$T(X) := \mathrm{Pic}(X)^{\perp} \subset \mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z}).$$

该格发挥着特殊作用：两个 K3 曲面 X_1、 X_2 导出等价，当且仅当存在一个格同构

$$T(X_1) \xrightarrow{\sim} T(X_2),$$

与霍奇结构 [Orl97]相容。导出等价还意味着格 Pic(X_1) 和 Pic(X_2) 属于同一属。在非闭域上，或在等变情形中，导出等价是一种微妙的性质，参见例如 [HT17], [HT23]。

我们回顾导出等价但不同构的 K3 曲面的皮卡格的标准例子

注3.1。在 Picard 秩为一的情形：不同构的导出等价曲面的数量由极化次数 $2d$的素因子数量决定；见 [HLOY04，第2.7] 条推论以及命题 2.2。同构类对应于同余的解

$$x^2 \equiv 1 \pmod{4d} \tag{3.1}$$

模 ± 1。当 $d > 1$ 时，导出等价的 K3 曲面数量为 $2^{\tau(d)-1}$，其中 τ 是 d的不同素因子个数。

在 Picard 秩为二的情形下：无平方因子判别式的格极化 K3 曲面之间的导出等价由相应实二次域 [的类群中的亏格决定（HLOY04，第 3] 节）。

以下是导出等价平凡的情形

命题 3.2. [HLOY04, Cor.2.6, 2.7] 在以下任一情形下，导出等价蕴含同构：

- 若 Picard 秩为 ≥ 12;
- 若该曲面存在带截面的椭圆纤维化；
- 若 Picard 秩为 ≥ 3 ，且皮卡群的判别群是循环的。

我们在命题 9.3 中给出另一个例子。
Let

$$\widetilde{\mathrm{H}}(X) := \mathrm{H}^0(X,\mathbb{Z})(-1) \oplus \mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{H}^4(X,\mathbb{Z})(1)$$

设其 Mukai 格为一个符号为 (4, 20) 的格，其中配对为 Mukai 配对。存在一个满同态 [HMS09, Cor. 3]

$$\mathrm{Aut}\, D^b(X) \to \mathrm{O}^+(\widetilde{\mathrm{H}}(X)) \subset \mathrm{O}(\widetilde{\mathrm{H}}(X))$$

映至有符号霍奇等距变换群，该群是 Mukai 格的正交群的子群，并保持正定 4-平面的定向。

我们沿用 [HT23, Cor. 3], 中的记号；我们曾在此讨论 K3 曲面之间等变导出等价的概念及基本性质。回顾如下：

设 X_1 和 X_2 是配备了一个一般
自由作用的有限循环群 G 的 K3 曲面。那么 X_1 和
X_2 当且仅当 G等变导出等价
存在它们的 Mukai
格

$$\widetilde{\mathrm{H}}(X_1) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}(X_2)$$

且保持霍奇结构。

注意， G作用在

$$\mathrm{H}^0(X,\mathbb{Z})(-1) \oplus \mathrm{H}^4(X,\mathbb{Z})(1).$$

即使存在同构 $X_1 \simeq X_2$，等变导出等价仍然很有意义：事实上，存在一些有限群的作用G ，它们在 Aut(X) 中不共轭，却通过 Aut D^b(X) 共轭。

因为后一个群的作用显然更大。例子见命题 9.6。

设 G 为有限群， X_1 和 X_2 为带有 G-作用的 K3 曲面。为简单起见，假设 G 通过 $\pm$I作用于 $T(X_i)$。（当超越上同调是简单的时，情况即如此。）给定一个 G-等变同构 $T(X_1) \simeq T(X_2)$，我们能否将其提升为 Mukai 格之间的 G-等变同构

$$\widetilde{\mathrm{H}}(X_1,\mathbb{Z}) \simeq \widetilde{\mathrm{H}}(X_2,\mathbb{Z}),$$

其中 G 在双曲子和上平凡作用

$$\mathrm{U} = \mathrm{H}^0 \oplus \mathrm{H}^4?$$

显然，答案是否定的。假设 $G = C_2 = \langle\epsilon\rangle$ 与$\epsilon = -1$ 特征空间稳定同构，但不同构。添加 U 并不能实现所需的稳定化。换言之，U“太小了”。我们需要添加 G 非平凡作用的直和项，才能使所有不同的等型分量都实现稳定化。关于这个问题的更多讨论，见命题 4.5。

4. Generalities concerning involutions on K3 surfaces

根据托雷利定理，设 $i: X \to X$ 是复射影 K3 曲面上的一个对合，它在 $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$ 上忠实作用。若

$$i^*\omega = \omega \quad (\text{resp. } -\omega),$$

其中 ω 是一个全纯二形式。Nikulin [Nik79a]证明，任何辛对合都有八个孤立不动点，且所有此类对合在拓扑上共轭；这些就是第 9 节研究的 Nikulin 对合。没有不动点的对合在经典上已知是由Enriques曲面的双覆盖 $X \to S$导出的 Enriques 对合。

具有不动点的反辛对合情形更为复杂。除 Enriques 情形外，Nikulin 还列举了 74 种情形；各种情形的详情参见 [AN06、BH23、AE22、Ale22] 。

给定 K3 曲面上的反辛对合 i: $X \to X$ 我们回顾 Nikulin不变量（r， a， δ） [AE22，§2]: 令 r 表示格的秩

$$S = \mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})^{i=1},$$

当 $r > 1$ 时是不定的。我们利用了这样一个事实： X 的超越类在 i 作用下是反不变的，因为商 X/i 不存在

全纯二形式。我们记

$$T = \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})^{i=-1} = S^\perp$$

对于符号为 $(2, 20-r)$ 的补格，当 $r < 20$ 时它是不定的。判别群 $d(S) \simeq d(T)$ 是一个 2-初等群；其秩记为 a。该群配有一个二次型

$$q_S : d(S) \to \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}.$$

当对每个 $x \in d(S)$ 都有 $q_S(x) \in \mathbb{Z}$ 时，余奇偶性 δ 等于 0；否则等于 1。

我们将其与几何不变量联系起来。对于反辛对合，不存在孤立不动点，因此不动点集 $R = X^i$ 是纯一维的或为空。假设它有 $k+1$ 个不可约分支，其亏格之和为 g。那么我们有（参见 [AE22，第 5] 页）

$$g = 11 - (r+a)/2 \quad k = (r-a)/2,$$

排除 Enriques 情形（r, k, δ） $= (10, 10, 0)$。

Nikulin 对偶不定 2-初等格 L 进行了分类。它们由 (r, a, δ) 唯一确定，且 O(L) $\to$ Aut(d(L)) 是满射。在定格情形下，原则上每个亏格中都有多个类，但这与我们的应用无关。事实上，可能的情况包括

- $r = a = 1$: X 是一个以六次平面曲线为分支曲线的双覆盖。
- T 为定型（$r = 20$， $a = 2$， $g = 0$， $k = 9$）的情形下，我们有 d（T）， $= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 因而等于

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

即使在这种情况下，判别群的自同构也可由格的自同构实现。

定理 4.1（Alexeev-Nikulin）。对于每组可容许的不变量（r， a， δ），在 K3 格 Λ 中嵌入的正交格对 (S,T) 在 Λ 的自同构作用下唯一。此类情形共有 75 种。

推论 4.2。具有反辛对合的 K3 曲面之间的任何等变导出等价，都会诱导底层 K3 曲面之间的等变同构。

证明。假设 (X_1, i_1) 和 (X_2, i_2) 在与各自的反辛对合相容的意义下导出等价。

事实上，导出等价表明皮卡群的不变量（分别为反不变量）子格稳定等价（分别为等价）：

$$\mathrm{Pic}(X_1)^{i_1=1}\oplus \mathrm{U}\simeq \mathrm{Pic}(X_2)^{i_2=1}\oplus \mathrm{U},\quad \mathrm{Pic}(X_1)^{i_1=-1}\simeq \mathrm{Pic}(X_2)^{i_2=-1}.$$

由于不变子格的各种可能性由其 2进不变量刻画，我们有

$$\mathrm{Pic}(X_1)^{i_1=1}\simeq \mathrm{Pic}(X_2)^{i_2=1}.$$

我们已经注意到，它们的判别式群之间所有可能的同构

$$\big(d(\mathrm{Pic}(X_1)^{i_1=1}),q_1\big)\simeq \big(d(\mathrm{Pic}(X_2)^{i_2=1}),q_2\big)$$

都可以由格的同构实现。特别地，存在一种选择与由导出等价诱导的同构相容

$$\mathrm{H}^2(X_1,\mathbb{Z})^{i_1=-1}\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^2(X_2,\mathbb{Z})^{i_2=-1}$$

。因此，我们得到中间上同调之间与对合相容的同构。托雷利定理给出一个尊重对合的同构 $X_1\xrightarrow{\sim}X_2$ 。

□

推论4.3. 设 (X_1,σ_1) 和 (X_2,σ_2) 表示带有对合的 K3 曲面，且它们是 C_2-等变导出等价的。若 X_1/σ_1 是有理的，则 X_2/σ_2 也是有理的。

事实上，商的有理性迫使该对合为反辛对合。

例4.4。具有反对称对合一般而言并非导出性质。例如，考虑皮卡格

$$A_1=\begin{pmatrix}2&13\\13&12\end{pmatrix}\quad A_2=\begin{pmatrix}8&15\\15&10\end{pmatrix}.$$

这些形式稳定等价但不同构。与评注3.1中一样——详见 [HT17，第2节3] ——取导出等价的 K3 曲面 X_1 和 X_2 ，使得 $\mathrm{Pic}(X_1)=A_1$ 且 $\mathrm{Pic}(X_2)=A_2$。注意， A_2 不表示 2，且不存在通过 ±1 作用于 $d(A_2)$ 的对合；因此 X_2 不具有对合。

这应与命题 11.2 进行比较：具有 Enriques 对合是一个导出不变量。

我们汇总一些格论观察结果，为第 7 节奠定基础：

命题 4.5. 设 (X_1, i_1) 和 (X_2, i_2) 是带有对合的 K3 曲面，且两者的对合均为辛或反辛。将这些对合扩展为作用于 Mukai 格上的作用

$$\widetilde{i_j} : \widetilde{\mathrm{H}}(X_j, \mathbb{Z}), \quad j = 1, 2,$$

其中

$$\widetilde{i_j}|\mathrm{H}^k = \begin{cases} i_j^* & if\ k = 2, \\ -\mathrm{I} & if\ k = 0, 4. \end{cases}$$

在权二霍奇结构上的这类作用之间的等价对应于一个三元组

(1) 霍奇结构的一个同构

$$t : T(X_1) \to T(X_2),$$

(2) 一个格同构

$$\pi^{+1} : \mathrm{Pic}(X_1)^{i_1=1} \to \mathrm{Pic}(X_2)^{i_2=1},$$

(3) 格的稳定等价

$$\pi^{-1} : \mathrm{Pic}(X_1)^{i_1=-1} \oplus \mathrm{U} \to \mathrm{Pic}(X_2)^{i_2=-1} \oplus \mathrm{U},$$

满足以下条件

- 由 $\pi^{\pm 1}$ 在判别群上诱导的同构在以下像上相同

$$\mathrm{Pic}(X_j) \to d(\mathrm{Pic}(X_j)^{i_j=1}) \oplus d(\mathrm{Pic}(X_j)^{i_j=-1}),$$

  它们是 2-初等群；
- 由此得到的同构

$$\mathrm{Pic}(X_1) \to \mathrm{Pic}(X_2)$$

  与判别群上的 t 相容。

这一结论通过两次应用 Nikulin格扩张理论得以证明：首先应用于皮卡群，然后应用于完整的上同调格。

固定 $T(X_j)$ 和 $\mathrm{Pic}(X_j)^{i_j=1}$ 后，可能的等价由满足在指定的 2-初等子群上限制为恒等映射的同构 π^{-1} 来标记。应用 Nikulin稳定化，具有这些数据的等价 Mukai 格由反不变 Picard 群的稳定同构类来标记，其中稳定同构在其判别群的指定 2-初等子群上限制为恒等映射。

推论 4.6。设反不变 Picard 格 P 在其属$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$中唯一。那么可能的 Mukai 格（H i）且满足 P 的情形，由在 2-初等子群上限制为恒等映射的 $d(P)$ 的自同构来标记。

这是对 [HLOY04]计数结果的等变版本。

5. Cohomological Fourier-Mukai transforms

设 X_1 和 X_2 是光滑复射影 K3 曲面。Orlov 的一项基本结果 [Orl 97] 表明，任意等价

$$\Phi : D^b(X_1) \to D^b(X_2)$$

都可通过 Fourier-Mukai 变换由一个核 $\mathcal{K} \in D^b(X_1 \times X_2)$得到

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{\mathcal{K}} : D^b(X_1) & \to & D^b(X_2) \\ \mathcal{E} & \mapsto & \pi_{2*}(\pi_1^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{K}). \end{array}$$

所有上述函子均取其导出意义。给定这样的核，也存在一个方向相反的 Fourier-Mukai 变换

$$\begin{array}{rcl} \Psi_{\mathcal{K}} : D^b(X_2) & \to & D^b(X_1) \\ \mathcal{E} & \mapsto & \pi_{1*}(\pi_2^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{K}). \end{array}$$

Mukai 已计算出逆变换的核

$$\Phi_{\mathcal{K}}^{-1} = \Psi_{\mathcal{K}^\vee[2]}$$

也就是说，它是原始核的对偶再作一次平移。详情请参见 [Muk87, 4.10],[BBHR97, § 4.3], 以及 [Huy06, p. 133] 。这一计算依赖于 Grothendieck-Serre 对偶，因此对偶化复形的出现是自然的。这套方法 [Huy06, § 3.4] 还使我们能够分析 Fourier-Mukai 变换与取对偶运算之间的相互作用：

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{K}}(\mathcal{E}^\vee) &= \pi_{2*}(\mathcal{K} \otimes \pi_1^*(\mathcal{E}^\vee)) \\ &= ((\pi_{2*}(\mathcal{K}^\vee \otimes \pi_1^*\mathcal{E}))^\vee)[-2] \\ &= ((\Phi_{\mathcal{K}^\vee}\mathcal{E})[2])^\vee \\ &= (\Phi_{\mathcal{K}^\vee[2]}\mathcal{E})^\vee \end{aligned}$$

假设 X_1 和 X_2 通过一个同构等价

$$X_2 = M_H(X_1, v_1),$$

即，具有 Mukai 向量的 X_1 上的层模空间 $\mathcal{E}_p, p \in X_2$

$$v_1 = v(\mathcal{E}_p) = (r, D, s) \in \widetilde{\mathrm{H}}(X, \mathbb{Z}),$$

相对于 X_1 上某个极化 H 为 Gieseker稳定。这里， r 是 $\mathcal{E}_p$, $D = c_1(\mathcal{E}_p)$ 的秩，而 $s = \chi(\mathcal{E}_p) - r$。我们假设还存在另一个霍奇类 $v' \in \mathrm{H}(X_1, \mathbb{Z})$，使得 $\langle v, v' \rangle = 1$；特别地， v 是本原的。（关于如何通过此类模空间实现导出等价的信息，参见 [Muk87, §4,5] 和 [Huy08, p. 385], 命题 4.1 后的讨论。）令 $\mathcal{E} \to X_1 \times X_2$ 表示一个万有层；由层的简单性可知， $\mathcal{E}$ 在张量上来自 X_2 的线丛后是唯一的。我们可以将 $\mathcal{E}$ 用作核，从而在 X_1 与 X_2 [之间诱导导出等价，参见 Huy06, 10.25]。我们关于逆的公式在将核与来自其中一个因子的线丛张量积时仍然成立。

在寻找傅里叶-向井核时，上同调 Fourier-Mukai 变换起着至关重要的作用。令 $\omega_i \in \mathrm{H}^4(X_i, \mathbb{Z})$ 表示点类，并设 [Muk87, §1], [Huy06, p. 128]

$$Z_{\mathcal{K}} := \pi_1^*(1+\omega_1)\,\mathrm{ch}(\mathcal{K})\pi_2^*(1+\omega_2) \in \mathrm{H}^*(X_1 \times X_2, \mathbb{Z}),$$

其中中间项是陈示性类。于是 $Z_{\mathcal{K}}$ 诱导出霍奇结构之间的一个整同构

$$\phi_{\mathcal{K}} : \widetilde{\mathrm{H}}(X_1, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}(X_2, \mathbb{Z})$$

且与 Mukai 配对相容；这称为上同调 Fourier-Mukai 变换。对于 $\mathcal{E} \in D^b(X_1)$，我们有恒等映射

$$\phi_{\mathcal{K}}(v(\mathcal{E})) = v(\Phi_{\mathcal{K}}(\mathcal{E})).$$

我们用 $\psi_{\mathcal{K}}$ 表示 $\Psi_{\mathcal{K}}$ 的上同调变换。

大多数上同调 Fourier-Mukai 变换都由核诱导

命题 5.1。 [Orl97,HMS09] 给定一个保持定向的整霍奇等距

$$\phi : \widetilde{\mathrm{H}}(X_1, \mathbb{Z}) \to \widetilde{\mathrm{H}}(X_2, \mathbb{Z})$$

则存在一个导出等价

$$\Phi_{\mathcal{K}} : D^b(X_1) \to D^b(X_2)$$

使得 ϕ 是 $\Phi_{\mathcal{K}}$的上同调傅里叶-穆凯变换。

假设 (X_1, f_1) 是一个次数为 $2r_0s$ 的极化K3曲面，其中r_0 和 s 是互素的正整数。令 d_0 为一个与 r_0 互素的整数，并固定各向同性向井向量

$$v_0 = (r_0, d_0 f_1, d_0^2 s) \in \widetilde{\mathrm{H}}(X_1, \mathbb{Z}).$$

由于 r_0 和 $d_0^2 s$ 互素，存在一个 Mukai 向量 $v' = (m, 0, n)$，使得 $\langle v_0, v' \rangle = 1$。令 $X_2 = M_{f_1}(X_1, v_0)$ 为模空间

，其参数空间由 Mukai 向量为 v_0、关于 f_1 Gieseker稳定的无挠层构成——它也是一个 K3 曲面。选取一个万有层 $\mathcal{E} \to X_1 \times X_2$。我们的目标是描述所诱导的同构

$$\phi_{\mathcal{E}} : \widetilde{\mathrm{H}}(X_1, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}(X_2, \mathbb{Z}).$$

根据 [HL10，第 8] 章以及 [Yos99，§2], 上 X_2 的极化由下式给出：

$$\det(\pi_{2*}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_H(s(r_0 - 2d_0))))^\vee, \quad H \in |f_1|,$$

X_2上的本原丰除子 f_2 。更一般地，我们有一个霍奇结构的同构：

$$\mathrm{H}^2(X_2, \mathbb{Z}) = (v_0^\vee)^\perp / \mathbb{Z} v_0^\vee,$$

其中，正交补空间是相对于 Mukai 配对而言的。

命题 5.2。 [Yos99] 设 (X_1, f_1) 和 (X_2, f_2) 是 Picard 秩为一的 K3 曲面，且具有上述的 $X_2 \simeq M_{f_1}(X_1, v_0)$。选取整数 d_1 和 ℓ，使得 $sd_0d_1 - r_0\ell = 1$，并取某个线丛 L （定义在 X_2上）的 $\mathcal{K} = \mathcal{E} \otimes \pi_2^* L$。相对于以下基

$$(1, 0, 0), (0, f_j, 0), (0, 0, 1) \in \widetilde{\mathrm{H}}(X_j, \mathbb{Z}) \cap \widetilde{\mathrm{H}}^{1,1}(X_j)$$

上同调傅里叶-穆凯变换的矩阵具有如下形式：

$$\phi_{\mathcal{K}} := \begin{pmatrix} d_0^2 s & 2d_0 s r_0 & r_0 \\ d_0 \ell & 2d_0 d_1 s - 1 & d_1 \\ \ell^2 r_0 & 2d_1 s \ell r_0 & d_1^2 s \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

将中间基向量的符号反转，并交换 d_0 和 d_1的角色，即可得到逆：

$$\begin{pmatrix} d_0^2 s & 2d_0 s r_0 & r_0 \\ d_0 \ell & 2d_0 d_1 s - 1 & d_1 \\ \ell^2 r_0 & 2d_1 s \ell r_0 & d_1^2 s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^2 s & -2d_1 s r_0 & r_0 \\ -d_1 \ell & 2d_0 d_1 s - 1 & -d_0 \\ \ell^2 r_0 & -2d_0 s \ell r_0 & d_0^2 s \end{pmatrix} = \mathrm{I}.$$

该公式

$$\phi_{\mathcal{K}} \psi_{\mathcal{K}^\vee} = \mathrm{I}$$

是恒等映射的上同调实现

$$\Phi_{\mathcal{K}} \Psi_{\mathcal{K}^\vee[2]} = \mathrm{I}.$$

$\phi_{\mathcal{K}}^{-1}$ 的第三列是 Mukai 向量 $v_0^\vee$，因为

$$\Phi_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathcal{O}_p) = \mathcal{E}_p^\vee, \quad p = [\mathcal{E}_p] \in X_2 = M_{f_1}(X_1, v).$$

注 5.3. 命题 5.2 中关于 Picard 群的秩的假设并不过于严格，因为命题 5.1 允许我们从秩为一的情形进行特化。只要本原上同调群同构，就存在满足 (5.1) 的导出等价

$$\mathrm{H}^2(X_1,\mathbb{Z}) \supset f_1^{\perp} \simeq f_2^{\perp} \subset \mathrm{H}^2(X_2,\mathbb{Z})$$

作为整霍奇结构。然而，这些并不是与关于某个极化的 Gieseker稳定层的显式模空间相关联的核。

例 5.4. 设 (X_1, f_1) 是一个 12 次 K3 曲面。考虑各向同性向井向量 $v = (2, f_1, 3)$，使得

$$X_2 := M_{f_1}(X_1, v)$$

也是一个与 X_1 导出等价的 K3 曲面。取

$$r_0 = 2, \quad s = 3, \quad d_0 = 1, \quad d_1 = \ell = 1,$$

我们得到

$$\begin{aligned}(1,0,0) &\mapsto (3, f_2, 2)\\ (0, f_1, 0) &\mapsto (12, 5f_2, 12)\\ (0,0,1) &\mapsto (2, f_2, 3)\end{aligned}$$

其矩阵为

$$\varphi := \begin{pmatrix} 3 & 12 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 12 & 3 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

行列式为 1，存在一个特征值为 1 的特征向量 $(1, 0, -1)$；因此这保持定向。注意，

$$(2, -f_1, 3) \mapsto (0, 0, 1)$$

由此

$$X_1 = M_{f_2}(X_2, (2, f_2, 3)), \quad X_2 = M_{f_2}(X_1, (2, -f_1, 3)).$$

由于 $(1, 0, -1)$ 的特征值为 1，得

$$X_1^{[2]} \dashrightarrow^{\sim} X_2^{[2]}.$$

6. Locally-free kernels and wall-crossing

为应用于第 7 节讨论的斜等价，我们需要由局部自由核诱导的 K3 曲面 X_1 与 X_2 之间的导出等价

$$\mathcal{E} \to X_1 \times X_2.$$

许多等价并非以这种方式产生。

例 6.1. 假设 $X_1 = X_2 = X$，并考虑通过将 X 解释为理想层的模空间 I_x、$x \in X$ 而得到的等价。这些层不是局部自由的。

关于 μ-稳定层的定义、背景及其与 Gieseker 稳定性的关系，请参阅 [HL10, §1.2] 。我们使用以下蕴含关系： [HL18, 引理 1.2.13]

μ_H-稳定 $\Rightarrow$ 关于 $H \Rightarrow$ 稳定 $H \Rightarrow \mu_H$ 关于 $H \Rightarrow \mu_H$ 半稳定。

现在，K3 曲面上的 μ-稳定层通常是局部自由的：设E 是 K3 曲面 X上的一个单层，且 $v(E)$ 各向同性，并且对某个极化 H而言是 μ_H-稳定的。那么，除理想层 I_x [外， E 都是局部自由的；参见 Muk87, 3.10], [HL18, 6.1.9]。问题在于，当存在严格 μ_H-半稳定层时，这类层的模空间 $M_H^{\mu s}(X, v)$ 并不总是紧致的。

我们回顾保证 μ 稳定性与半稳定性一致的判据。设 $v = (r, D, s)$ 是 K3 曲面 X上秩为$r > 0$ 的本原各向同性 Mukai 向量。假设 D 是本原的，且 H 是避开“墙”的极化，即不属于可表示为$\xi^\perp$ 形式的超平面，其中 $0 \neq \xi \in D^\perp$适当选取。那么，根据 [HL10, 4.C.3]，我们有

$$M_H^{\mu s}(X, v) = M_H^{\mu ss}(X, v).$$

出现的 ξ 可用 r [HL10, 4.C.2]来刻画：

例 6.2. 假设 $r = 2$ 且 E 是严格的 μ_H-半稳定对象。一种可能性是扩张

$$0 \to \mathcal{O}_X(L) \to E \to \mathcal{O}_X(D - L) \to 0,$$

其中 L 是一个除子，且满足

$$H \cdot L = H \cdot (D - L), \quad \dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(D - L), \mathcal{O}_X(L)) = 2.$$

这里 $\xi = 2L - D \in H^\perp$ 满足 $\xi^2 = -8$。记作 $\hat{s} = v(L)$，则有：

	v	$\hat{s}$
v	0	0
$\hat{s}$	0	-2

因此，对于墙外的极化，$\hat{}s$ 在 $M_{H'}(X,v)$ 的皮卡群中给出一个 (-2)-类；通常这是一个同构于 $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(D-L)\ \mathcal{O}_X(L)))$ 的有理曲线的类，该曲线在 $M_H^{\mu ss}(X,v)$ 中被收缩，其补集为 $M_H^{\mu s}(X,v)$。

另一种可能是扩张

$$0 \to \mathcal{O}_X(L) \to E \to I_x(D-L) \to 0, \tag{6.1}$$

其中 $x \in X$ 和 L 是一个除子

$$H \cdot L = H \cdot (D-L), \quad \dim \mathrm{Hom}(L,E) = 1.$$

这里 $\xi = 2L - D \in H^\perp$ 满足 $\xi^2 = -4$，记 $\hat{}s = v(L)$，我们有：

	v	$\hat{s}$
v	0	-1
$\hat{s}$	-1	-2

这里 $M_H^{\mu s}(X,v) = \emptyset$，这反映了扩张 (6.1) 可能是平凡的，也可能是非平凡的。由此得到的粗模空间同构于 X；这称为“完全半稳定”墙。

这种墙类型的二分性很常见，[Bri08, §12]（针对二维模空间）和 [BM14, Th. 5.7]（一般情形）对此作了解释；我们感谢 Bayer 指出了这一框架。所有可能的墙都与两类球类 $\hat{}s$（满足 $v(\hat{}s)^2 = -2$）相关：

- 收缩墙：

	v	$\hat{s}$
v	0	0
$\hat{s}$	0	-2

  其中，$M_H^{\mu ss}(X,v)$ 的皮卡群中含有一个可收缩的 (-2)-类；

- 全半稳定墙：

	v	$\hat{s}$
v	0	$-r$
$\hat{s}$	$-r$	-2

  $r \geq 1$，

  其中，$M_H^{\mu s}(X,v)$ 为空，但粗模空间保持不变。

Bridgeland [Bri08] 阐明了典型行为；关于由墙穿越产生、作为与（-2）类相关的球面扭曲复合而成的导出等价的详细信息，请参阅 [BM14, §6]。

例 6.3。Mukai [Muk87, 3.8]给出了第二类的例子。设 F 是一个刚性向量丛，其 $v(F) = \hat{s}, r$ 为其秩，而 E 为在 $x \in X$ 处点层上的求值映射的核：

$$0 \to E \to F^{\oplus r} \to \mathbb{C}(x) \to 0.$$

注意， E 在 x 处有局部上同调，因此不是局部自由的。

设极化在丰沛锥中变化。当我们穿过任一类型的墙时，相邻腔室对应的模空间自然同构。即使对于收缩墙，节点模空间的极小解消也与每一侧对应的模空间自然同构。由于丰沛锥是单连通的，对于所有丰沛的 H_1 和 H_2 ，我们都得到自然同构

$$\beta_{H_2,H_1} : M^{\mu ss}_{H_1}(X, v) \xrightarrow{\sim} M^{\mu ss}_{H_2}(X, v); \tag{6.2}$$

参见 [BM14, 定理 1.1] 后的讨论。这是一个普遍现象的例子：墙穿越会在曲面上向量丛的模空间之间诱导双有理映射 [HL10, 4.C.7]。然而，这些模空间上的泛层——以及它们所诱导的导出等价——会随腔室而变化（参见 [BM14, 定理 1.1(b)]）。特别是，对于高秩 K3 曲面，无法得到命题 5.2 中那样的显式公式。

墙穿越的一个应用，也是我们在第 7 节中结果的范例，是 Huybrechts 的以下结果 [Huy08, 命题 4.1]：设 X_1 和 X_2 是导出等价的 K3 曲面。那么存在一个 μ_H-稳定局部自由层的模空间，其带有泛族

$$\mathcal{E} \to M^{\mu s}_H(X_2, v) \times X_2$$

以及一个同构 $X_1 \simeq M^{\mu s}_H(X_2, v)$。

7. 反向共轭

我们继续假设 i 是 K3 曲面 X 上的反辛对合。正如我们所见，

$$T(X) \subset \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})^{i=-1},$$

其补空间为 $\mathrm{Pic}(X)^{i=-1}$，根据霍奇指数定理，该补空间是负定的。

回顾一下，Orlov 定理 [Orl97, §3]指出，对于 K3 曲面（不带群作用），超越上同调的同构可提升为导出等价

对于具有 Alexeev-Nikulin 意义下同类型反辛对合的 K3 曲面（X_1, i_1）和（X_2, i_2），同构的存在

$$T(X_1) \xrightarrow{\sim} T(X_2)$$

很少能导出等变导出等价；一个值得注意的例外是反不变 Picard 群的秩为零或一的情形。我们只能得到

$$\mathrm{Pic}(X_1)^{i_1=-1}, \quad \mathrm{Pic}(X_2)^{i_2=-1}$$

稳定等价——且与超越格判别群上的同构相容——但不一定同构。

鉴于此，我们提出对作用进行反定向共轭，以期实现超越上同调的同构。

假设 $\mathrm{Pic}(X_1)^{i_1=-1}$ 和 $\mathrm{Pic}(X_2)^{i_2=-1}$ 不同构，因此不存在 C_2-等变导出等价

$$D^b(X_1) \xrightarrow{\sim} D^b(X_2)$$

将 i_1 映至 i_2，由推论 4.2 可知。然而，令

$$\mathrm{dual}_j : D^b(X_j) \xrightarrow{\sim} D^b(X_j), \quad j = 1, 2,$$

表示该对合

$$\mathcal{E}_* \mapsto \mathcal{E}_*^\vee.$$

注意，平移与对偶彼此可交换，并且都与 K3 曲面的任意自同构可交换。dual_j 在 Mukai 格 $\mathrm{H}(X_j, \mathbb{Z})$ 上的作用在 0 次和 4 次上是平凡的，在 2 次上则是乘以 -1。回想一下，平移在所有次数上都通过 -1 作用，因此与 dual_j 复合后，在 2 次上是平凡的，在 0 次和 4 次上则是乘以 -1。

我们提出一个一般定义，然后说明它与我们对带对合的二次型的分析有何关联：

定义 7.1. 设 (X_1, i_1) 和 (X_2, i_2) 是带有对合的光滑射影簇，维数为 n，且具有平凡的典范类。若存在 $X_1 \times X_2$ 上的核 $\mathcal{K}$，诱导 X_1 与 X_2 之间的等价，并且存在一个拟同构，则称它们斜等价

$$(i_1^*, i_2^*)\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}^\vee[n]. \tag{7.1}$$

注意，对于两个投影 π_1 和 π_2，对偶化都与相对对偶化复形重合。拟同构 (7.1) 是对合的

$$\mathcal{K} \mapsto \mathcal{K}^\vee[n] \mapsto (\mathcal{K}^\vee[n])^\vee[n] \simeq \mathcal{K},$$

即，(i_1, i_2)将 $\mathcal{K}$ 映到诱导出 $\Phi_\mathcal{K}$的逆的核。由于 $\mathcal{K}$ 是简单的，且基域是代数闭的，可以对该拟同构进行归一化，使得这一复合为恒等映射。

我们的第一个性质直接由定义得到：

命题 7.2. 设(X_1, i_1)和(X_2, i_2)如定义 7.1 中所述，且 $\mathcal{K}$ 在它们之间诱导一个斜等价。考虑 X_1 上的线丛 L_1 和 L_2，它们在 i_1 和 i_2下是反不变的

$$i_j^* L_j \simeq L_j^\vee.$$

则 $\mathcal{K} \otimes (L_1 \boxtimes L_2)$同样诱导一个斜等价。

我们的下一个性质明确说明了对偶下的行为：

命题 7.3. 设 (X_1, i_1) 和 (X_2, i_2) 是配备了对合的 K3 曲面。假设 $\mathcal{K}$ 是一个核，在 X_1 与 X_2 之间诱导等价，其诱导的 Fourier-Mukai 变换为

$$\Phi_\mathcal{K} : D^b(X_1) \to D^b(X_2), \quad \Psi_\mathcal{K} : D^b(X_1) \to D^b(X_2).$$

那么以下条件等价：

- $\Phi_\mathcal{K}$ 对偶$_1$ $i_1^* =$ 对偶$_2$ $i_2^* \Phi_\mathcal{K}$;
- $i_1^* = \Psi_\mathcal{K} i_2^* \Phi_\mathcal{K}$;
- $\mathcal{K}$ 在 (X_1, i_1) 与 (X_2, i_2) 之间诱导斜等价。

证明。回顾第 5 节中对偶以及 Fourier-Mukai 等价的逆的解释。令 T_j 表示 X_j 上的平移。应用对偶于第一个表达式可得

$$T_2^{-2} \operatorname{dual}_2 \Phi_{\mathcal{K}^\vee} i_1^* = \operatorname{dual}_2 i_2^* \Phi_\mathcal{K}$$

由此

$$T_2^2 \Phi_{\mathcal{K}^\vee} i_1^* = i_2^* \Phi_\mathcal{K}. \tag{7.2}$$

这等价于

$$\Psi_\mathcal{K} \Phi_{\mathcal{K}^\vee} i_1^* = \Psi_\mathcal{K} T_2^{-2} i_2^* \Phi_\mathcal{K}$$

and

$$T_2^{-2} i_1^* = \Psi_\mathcal{K} T_2^{-2} i_2^* \Phi_\mathcal{K}$$

这与.....相同

$$i_1^* = \Psi_\mathcal{K} i_2^* \Phi_\mathcal{K}.$$

现在，公式 (7.2) 等价于

$$T_2^2\Phi_{\mathcal{K}^\vee} = i_2^*\Phi_{\mathcal{K}}i_1^*$$

即，将 $i_1^* \times i_2^*$ 变换应用于 $\mathcal{K}$，得到 $\mathcal{K}^\vee[2]$。 □

命题 7.3 中的第二项立即得出：

推论 7.4. 斜等价是带对合的 K3 曲面上的等价关系。

再次假设 X_1 和 X_2 是 K3 曲面，且 $\mathcal{K} = \mathcal{E}[1]$ 对应一个泛向量丛

$$\mathcal{E} \to X_1 \times X_2$$

该丛与同构 $X_1 = M_v(X_2)$ 相关联。那么关系（其中 $n = 2$）可转 (7.1) 化为

$$i_2^*\mathcal{E}_{i_1(x_1)} \simeq (\mathcal{E}_{x_1})^\vee. \tag{7.3}$$

定理 7.5. 设 (X_1, i_1) 和 (X_2, i_2) 是带有对合的 K3 曲面。则以下条件等价

- (X_1, i_1) 和 (X_2, i_2) 斜导出等价；
- 存在一个 Mukai 格之间的保定向等价

$$\phi : \widetilde{\mathrm{H}}(X_1, \mathbb{Z}) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}(X_2, \mathbb{Z}),$$

满足

$$\phi(i_1^*(v^\vee)) = (i_2^*\phi(v))^\vee. \tag{7.4}$$

由于对偶和拉回彼此可交换，(7.4) 中这些操作的顺序无关紧要。此外，若 ϕ 满足这一关系，则 $-\phi$ 也满足。

注 7.6. 我们并未断言每个满足 (7.4) 的上同调等价都来自斜等价。设 $X_1 = X_2 = X$ 具有相同的对合 i。考虑与 $\mathcal{O}_X$ 对应、核为 $\mathcal{I}_\Delta[1]$ 的球面扭曲，其上同调矩阵为

$$\tau_{\mathcal{O}_X} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

显然，$\tau_{\mathcal{O}_X}$ nor $-\tau_{\mathcal{O}_X}$ 都不是由具有所需自对偶性质的核实现的。当然，恒等映射诱导出（X，i）与其自身之间的一个斜等价！现在，设（X_1，i_1）和（X_2，i_2）是任意带对合的 K3 曲面。给定满足（7.4）的 ϕ，我们可以

与 $\tau_{\mathcal{O}_{X_1}}$ or$\tau_{\mathcal{O}_{X_2}}$ 进行前复合或后复合，从而得到另一个具有相同性质的矩阵。

定理 7.5 的证明。正向蕴含显然。事实上，斜等价的上同调傅里叶-穆凯变换 $\phi_{\mathcal{K}}$ 满足

$$(i_1, i_2)^* \phi_{\mathcal{K}} = \phi_{\mathcal{K}^\vee}$$

但 $\phi_{\mathcal{K}^\vee}$ 与 $\phi_{\mathcal{K}}$ 的差别在于，对合通过 $+1$ 作用于 H^0 和 H^4，并通过 -1 作用于 H^2。因此

$$\phi_{\mathcal{K}} : \widetilde{\mathrm{H}}(X_1, \mathbb{Z}) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}(X_2, \mathbb{Z})$$

满足关系 (7.4)。

对于反向蕴含，我们考虑上同调傅里叶-穆凯变换

$$\phi : \widetilde{\mathrm{H}}(X_1, \mathbb{Z}) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}(X_2, \mathbb{Z}).$$

Set

$$v_0 := \phi(0, 0, 1) = (r, a\ell, s),$$

其中 $\ell \in \mathrm{Pic}(X_2)$ 是本原的，且 $a \in \mathbb{N}$。

- 关系 (7.4) 蕴含 $i_2^* \ell = -\ell$，这意味着 $\ell^2 < 0$ 当且仅当 $\ell \neq 0$。（霍奇指数定理蕴含，反不变除子上的交形式是负定的。）

- 写作 $\phi(1, 0, 0) = (r', D', s')$，我们有

$$a(\ell \cdot D') - rs' - sr' = -1$$

因此 $\gcd(r, s, a\ell \cdot D') = 1$，其中某个反不变除子 D'位于 X_2上。因此 $\gcd(r, s, a) = 1$ 也成立。

- 若 $\ell \neq 0$，则 r 和 s 均非零，因为 v_0 是各向同性的。若 $\ell = 0$，则 $r = 0$ 或 $s = 0$，但二者不能同时为零。经过一次扭曲 $\tau_{\mathcal{O}_{X_2}}$ 后，我们可以假设 $r \neq 0$。

- 若 $r < 0$，我们可以用 $-\phi$替换 ϕ。因此，从现在起我们假设 $r > 0$。

我们沿用 [Huy08] 第4节的方法，将问题化约到可以进行第6节墙交叉分析的情形。

情形I：Picard 群$(X_2)^{i_2 = -1} = 0$

这种情况——其中有 $\ell = 0$ ——已在上文讨论过。

情形II：Picard 群$(X_2)^{i_2=-1}=1$

取 ℓ 为生成元，所有可能的等价均可通过 Mukai 向量实现

$$v_0=(r,\ell,s),\quad \gcd(r,s)=1.$$

事实上，这可由推论 4.6 得出：写作 $\ell^2=-2d$，并将$d=\prod_{j=1}^m p_j^{e_j}$分解为互不相同的素数，我们便可看到，$d(\mathbb{Z}\ell)$ 的自同构群为 C_2^m。

因此，只需考虑第一陈类为本原的 Mukai 向量，此时墙穿越适用。

情形III：Picard 群$(X_2)^{i_2=-1}\geq 2$

(1) 假设 $v_0=(r,a\ell,s)$，且 $\gcd(r,a)=1$。那么，在 X_2 上存在一个反不变除子 E，使得 $D=rE+a\ell$ 为本原。特别地，在张量乘以 $\mathcal{O}_X(E)$ 后，第一陈类是本原的。然而，张量乘以线丛不会影响 μ-稳定性。

(2) 如果只有 $\gcd(s,a)=1$，那么应用扭曲 $^{\tau}\mathcal{O}_{X_2}$ 后，我们有 $\gcd(r,a)=1$。

(3) 假设 $\gcd(r,a)=\alpha>1$，并记

$$v_0=(r,a\ell,s)=(\alpha r',\alpha a'\ell,s).$$

如前所述，选取一个反不变除子 E，使得 $a'\ell+r'E$是本原的。对 E 做张量积，得到

$$\begin{aligned}\exp(E)v_0&=(r,a\ell+rE,\tilde{s}:=s+aE\cdot\ell+r\frac{E\cdot E}{2})\\&=(r,\alpha(a'\ell+r'E),\tilde{s}).\end{aligned}$$

Now

$$1=\gcd(r,a,s)=\gcd(r,a,\tilde{s})=\gcd(\alpha,\tilde{s})$$

因此，我们归结为前一种情形。

总而言之，除去对最终结果没有影响的 $\mathcal{O}_{X_2}$ 扭曲，对于每个诱导导出等价的 Mukai 向量 v，我们总能使其满足

$$M_H^{\mu s}(X_2,v)=M_H^{\mu ss}(X_2,v)$$

对于避开墙的极化 H。这就完成了情形III。

我们回到这样的情形： $v_0 = (r, a\ell, s)$，其中 ℓ 反不变，并应用第6节的墙穿越技术。考虑 $M_H^{\mu s}(X_2, v_0)$，这是一个与 X_2 导出等价的K3 曲面，其中 H 是 X_2 上的一个避开墙的极化。我们通过复合同构，构造这个模空间上的一个对合 j

$$M_H^{\mu s}(X_2, v_0) \to M_H^{\mu s}(X_2, -v_0) \to M_{i_2^* H}^{\mu s}(X_2, v_0) \to M_H^{\mu s}(X_2, v_0),$$

其中，第一个同构由对偶性诱导，第二个由 i_2 诱导，第三个则是 (6.2) 中引入的 $\beta_{i_2^* H,\ H}$。为验证这是一个对合，注意到 $\beta_{H,\ i_2^* H} = \beta_{i_2^* H,\ H}^{-1}$，并利用 i_2 与对偶性都是对合且彼此可交换这一事实。

我们分析 j 在上同调上的作用

$$\mathrm{H}^2(M_H^{\mu s}(X_2, v_0), \mathbb{Z}) = (v_0^\vee)^\perp / \mathbb{Z} v_0^\vee. \tag{7.6}$$

同构 β 使我们能够在 H 变化时固定这些识别，即使跨越墙也是如此。i_2 在 Mukai 格及相关上同调群上的作用由函子性给出；请回忆 i_2 将 v_0 映为其对偶。对于对偶化

$$M_H^{\mu s}(X_2, v_0) \to M_H^{\mu s}(X_2, -v_0)$$

其作用为

$$\begin{aligned} (v_0^\vee)^\perp / \mathbb{Z} v_0^\vee &\to (v_0)^\perp / \mathbb{Z} v_0 \\ \gamma &\mapsto -\gamma^\vee. \end{aligned}$$

事实上，[HL18, 8.1.1] 中的 (7.6) 的构造以及 K3 曲面的 Serre对偶——忽略二次平移后，层的对偶的上同调是其上同调的对偶——表明这就是诱导映射。总之，j^* 的作用如下：

- 乘以 $+1$在
$$\mathrm{H}^2(X_2, \mathbb{Z})^{i_2 = 1} \subset \mathrm{H}^2((M_H^{\mu s}(X_2, v_0)), \mathbb{Z});$$
- 乘以 -1在
$$(v_0^\vee)^\perp \cap \mathrm{H}^0(X_2, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{H}^4(X_2, \mathbb{Z});$$
- 乘以 -1在
$$(v_0^\vee)^\perp \cap \mathrm{H}^2(X_2, \mathbb{Z})^{i_2 = -1}.$$

我们沿用 [Huy06，第 235] 页。考察复合的上同调 Fourier-Mukai 变换

$$\widetilde{\mathrm{H}}(X_1, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}(X_2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}(M_H^{\mu s}(X_2, v_0), \mathbb{Z}),$$

它将 (0, 0, 1) 映至 (0, 0, 1)，托雷利定理保证 $X_1 \simeq M_H^{\mu s}(X_2, v_0)$。对于 ϕ，函数关系 (7.4) 保证 i_1在此同构下与 j 重合。

我们的模空间存在一个万有层 [Huy06，命题 10。20]

$$\mathcal{E} \to X_2 \times M_H^{\mu s}(X_2, v_0),$$

在模空间上线丛的张量积意义下唯一。另一方面，

$$(i_2, I)^*\mathcal{E}^\vee \to X_2 \times M_{i_2^* H}^{\mu s}(X_2, v_0),$$

也是一个万有层，正如

$$(i_2, j)^*\mathcal{E}^\vee \to X_2 \times M_H^{\mu s}(X_2, v_0).$$

对 X_1 应用该同构，我们得到

$$(i_2, i_1)^*\mathcal{E}^\vee \simeq \mathcal{E} \otimes L_1,$$

对于 X_1 上的某个线丛 L_1。这等价于

$$(i_2, i_1)^*\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}^\vee \otimes L_1^\vee$$

and

$$\mathcal{E} \simeq (i_2, i_1)^*\mathcal{E}^\vee \otimes i_1^* L_1^\vee$$

因此，L_1 必然在 i_1作用下对称。

将 $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E} \otimes N_1$重新缩放后，对于 X_1上的线丛 N_1，得到

$$L_1 \mapsto L_1 \otimes N_1 \otimes i_1^* N_1.$$

先验而言，获得该关系的障碍

$$(i_2, i_1)^*\mathcal{E}^\vee \simeq \mathcal{E}$$

是一个取值于 $H^2(\langle i_1 \rangle$, Picard 群$(X_1))$ 的余循环。然而，任何此类障碍都会在上同调上显现，因此由关系 (7.4) 可知它并不存在。

□

推论 7.7. 在上述假设下，函子 $\mathrm{dual}_1 \circ i_1$和 $\mathrm{dual}_2 \circ i_2$ 是 C_2-等变导出等价的。

这促使我们采用命题 4.5 的表述。

注 7.8. 正如我们在第 3 节回顾的，导出等价保持 Mukai 格 [HMS 09] 上的定向。反定向共轭以特定方式违反了定向条件。对偶性是典型的反定向霍奇等基。

我们在第 8 节和第 11 节中给出此类等价的例子。

8. 有理商与斜等价

我们的首要任务是利用定理 7.5 给出斜等价的例子。提醒读者查阅命题 4.5，了解相关的格理论工具。

最简单的例子出现在秩二情形。设 (X_1, h_1) 和 (X_2, h_2) 是二次 K3 曲面，其对应的对合分别为 i_1 和 i_2，且满足 $T(X_1) \simeq T(X_2)$。假设

$$\mathrm{Pic}(X_j)^{i_j} = \mathbb{Z}\ell_j, \quad \ell_j^2 = -d;$$

注意，$\mathrm{Pic}(X_j)$ 或为 $\langle h_j, \ell_j \rangle$ 或为 $\left\langle h_j, \frac{h_j+\ell_j}{2} \right\rangle$，也就是说，特征 2-初等子群是平凡的或循环的。根据推论 4.6，可能的例子对应于保持同构

$$d(\mathbb{Z}\ell_1) \simeq d(\mathbb{Z}\ell_2)$$

保持特征子群——由于判别群是循环的，这一条件自动满足。因此 (X_1, i_1) 和 (X_2, i_2) 是斜等价的。

注 8.1。在许多例子中，对于 $v_0 = (r, \ell, s)$，$M_{h_j}^{\mu s}(X_j, v_0)$ 会自动是紧的，其中 $r < |s|$ 且 $\gcd(r, s) = 1$，因为 h_j 恰好不在某条墙上。

下一组例子源自非平凡的稳定同构。我们给出带对合的格极化 K3 曲面（X_1, i_1）和（X_2, i_2），其反不变 Picard 群稳定等价但并不等价。

具体而言，我们假设 X_1 和 X_2 是次数二 K3 曲面，满足

$$\mathrm{Pic}(X_j) = \mathbb{Z}h_j \oplus A_j(-1), \quad h_j^2 = 2,$$

其中，对合固定 h_j，并将 A_j 的符号反转。若 A_1 和 A_2 是稳定等价但不等价的正定格，则（X_1, i_1）和（X_2, i_2）斜等价。

与普通等价（见 4.2）不同，存在具有非平凡斜等价的反辛作用。由此得到的商是有理曲面，事实上，$\mathbb{P}^2$。

例 8.2（显式矩阵）。在基 p_j, q_j 下，$j = 1, 2$ 的矩阵为

$$A_1 := \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

我们得到一个稳定同构

$$A_1 \oplus \mathrm{U} \simeq A_2 \oplus \mathrm{U}, \quad \mathrm{U} = \langle u_1, v_1 \rangle, \text{ with matrix } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

首先，我们给出一个同构

$$A_1 \oplus \langle e_1 \rangle \simeq A_2 \oplus \langle e_2 \rangle, \quad e_1^2 = -2.$$

令

$$p_1 \mapsto p_2 + e_2,$$

并声称它们的正交补是等价的不定格。事实上，

$$p_1^\perp = \langle p_1 - 4q_1, e_1 \rangle = \begin{pmatrix} 188 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (p_2 + e_2)^\perp = \langle p_2 - 6q_2, 2q_2 + e_2 \rangle &= \begin{pmatrix} 282 & -94 \\ -94 & 30 \end{pmatrix} \\ = \langle p_2 + 3e_2, 2q_2 + e_2 \rangle &= \begin{pmatrix} -12 & -4 \\ -4 & 30 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

它们通过约化型的高斯循环而等价

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 18 & & 8 & & 4 \\ 188 & & & -2 & & 26 & & -12 & & 30 \end{array}$$

其中所示的基元素为

$$p_1 - 4q_1, \quad e_1, \quad p_1 - 4q_1 - 9e_1, \quad p_1 - 4q_1 - 10e_1, \quad 2(p_1 - 4q_1) - 19e_1.$$

复合后的同构为

$$\begin{aligned} p_1 - 4q_1 - 10e_1 &\mapsto p_2 + 3e_2, \\ 2(p_1 - 4q_1) - 19e_1 &\mapsto 2q_2 + e_2 \\ p_1 &\mapsto p_2 + e_2 \\ e_1 &\mapsto (2q_2 + e_2) - 2(p_2 + 3e_2) = 2(q_2 - p_2) - 5e_2 \\ q_1 &\mapsto 5(p_2 - q_2) + 12e_2. \end{aligned}$$

我们将上面的同构扩展到 $e_i = u_i - v_i$

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &\mapsto u_2 + v_2 \\ u_1 - v_1 &\mapsto 2(q_2 - p_2) - 5(u_2 - v_2) \\ p_1 &\mapsto p_2 + (u_2 - v_2) \\ q_1 &\mapsto 5(p_2 - q_2) + 12(u_2 - v_2) \end{aligned}$$

由此可得

$$u_1 \mapsto (q_2 - p_2) - 2u_2 + 3v_2$$
$$v_1 \mapsto (p_2 - q_2) + 3u_2 - 2v_2.$$

9. Nikulin involutions

一般性质。在 K3 曲面 X 上的对合 ι 若定义于 $\mathbb{C}$ 并保持辛形式，则称为 Nikulin 对合。我们沿用 [vGS07]，回顾此类对合的基本事实：

- ι 有 8 个孤立不动点；
- （奇点消解） $Y \to X/\iota$ 是一个 K3 曲面，并包含在如下图表中

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\beta} & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow\pi \\ X/\iota & \leftarrow & Y \end{array}$$

  其中， β 将不动点炸开，且竖直箭头的次数为二；

- 关于 ι 在 $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$ 上的作用是唯一确定的，并且存在一个分解

$$\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z}) = (\mathrm{U}^{\oplus 3})_1 \oplus (\mathrm{E}_8(-1) \oplus \mathrm{E}_8(-1))_P,$$

  其中第一项是不变量，第二项是关于 ι的置换模；

- H^2 的不变部分和反不变部分具有如下形式：

$$\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})^{\iota=1} \simeq \mathrm{U}^3 \oplus \mathrm{E}_8(-2), \quad \mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})^{\iota=-1} = \mathrm{E}_8(-2)$$

令 $E_1, \ldots, E_8$ 表示 β 的例外因子，并令 $N_1, \ldots, N_8$ 表示 Y 上对应的 (-2)-曲线。并集 $\cup N_i$ 是 π 的分歧轨迹，因此存在一个除子

$$\hat{N} = (N_1 + \cdots + N_8)/2$$

将 $\langle N_1, \ldots\ldots, N_8\rangle \subset \mathrm{Pic}(Y)$ 饱和化；包含这些除子的最小本原子格称为 Nikulin格，记为 N。根据 [vGS07，命题 1.8]

$$\begin{array}{rcl} \pi_* : \mathrm{H}^2(\widetilde{X},\mathbb{Z}) & \to & \mathrm{H}^2(Y,\mathbb{Z}) \\ \mathrm{U}^3 \oplus \mathrm{E}_8(-1) \oplus \mathrm{E}_8(-1) \oplus \langle -1\rangle^8 & \to & \mathrm{U}(2)^3 \oplus \mathrm{N} \oplus \mathrm{E}_8(-1) \\ (u,x,y,z) & \mapsto & (u,z,x+y) \end{array}$$

and

$$\begin{array}{rcl} \pi^* : \mathrm{H}^2(Y,\mathbb{Z}) & \to & \mathrm{H}^2(\widetilde{X},\mathbb{Z}) \\ \mathrm{U}(2)^3 \oplus \mathrm{N} \oplus \mathrm{E}_8(-1) & \to & \mathrm{U}^3 \oplus \mathrm{E}_8(-1) \oplus \mathrm{E}_8(-1) \oplus \langle -1 \rangle^8 \\ (u,n,x) & \mapsto & (2u,x,x,2\tilde{n}) \end{array}$$

其中，如果 $n = \sum n_i N_i$，那么 $\tilde{n} = \sum n_i E_i$。因此我们得到一个特殊的饱和子格

$$\mathrm{E}_8(-2) \subset \mathrm{Pic}(X)$$

与 $\iota = -1$ 部分重合。

命题 9.1。取一个包含 $\mathrm{E}_8(-2)$ 作为原始子格的格 L；假设 L 是某个射影 K3 曲面的 Picard 格。则存在一个带有 Nikulin 对合 ι 的 K3 曲面 X，使得

$$\mathrm{L} = \mathrm{Pic}(X) \supset \mathrm{Pic}(X)^{\iota=-1} = \mathrm{E}_8(-2).$$

证明。令 A 表示 L 中 $\mathrm{E}_8(-2)$ 的正交补。L 上存在唯一的对合 ι，满足

$$\mathrm{L}^{\iota=1} = \mathrm{A}, \quad \mathrm{L}^{\iota=-1} = \mathrm{E}_8(-2).$$

现在，ι 在 $d(\mathrm{L})$ 上作用平凡——请注意，$d(\mathrm{E}_8(-2))$ 是一个二初等群——因此我们可以自然地将 ι 延拓到整个 K3 格上。（它在 $\mathrm{L}^\perp$. 上作用平凡。）这些格极化 K3 曲面构成了我们的族。

Nikulin [Nik79a, §4] 说明了如何为带有格极化 L 的一般 K3 曲面构造对合。选取一个曲面 X，使得 $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{L}$——该族中非常一般的成员具有这一性质。显然，$X$ 是射影的——它含有自交数为正的除子。我们断言存在一个丰除子 $H \in \mathrm{A}$。事实上，X 的丰沛锥由以下方式刻画：它是正除子锥中由与不可分解的 (-2) 类 E 相关、且正度数 [LP81] 的反射所生成的群确定的室。每个 (-2) 类 E 都垂直于一条唯一的射线，该射线位于

$$\mathrm{A} \otimes \mathbb{R} \cap \{ \text{ cone of positive divisors } \}$$

由元素 $a_E \in \mathrm{A}$ 生成。注意，A 不可能包含于 $E^\perp$，因为 $\mathrm{E}_8(-2)$ 没有 (-2)-类。我们得出结论：A 与正锥分解中的每个室都有交——任何 $\mathrm{E}^\perp$ 都不可能将它与丰沛锥分隔开。

有了丰沛锥后，我们便可通过托雷利定理得出 X 的自同构群：它由霍奇等距变换组成，

这些变换将丰沛锥映到自身。特别地，任何固定 H 的霍奇等距变换都是一个自同构。因此，ι 是 X 的一个自同构。□

命题 9.2. 设 L 是一个偶双曲格，包含 $\mathrm{E}_8(-2)$ 作为饱和子格。假设 d(L) 的秩至多为 11。那么 L 在其亏格中唯一，且同态

$$\mathrm{O}(\mathrm{L}) \to \mathrm{O}(q_{\mathrm{L}})$$

是满射。

对于 K3 曲面 X 的 Picard 格，$d(L)$ 的秩满足上述条件。我们有

$$\mathrm{Pic}(X) \subset \mathrm{U}^{\oplus 3} \oplus \mathrm{E}_8(-1)^{\oplus 2}$$

其秩为 22；$d(\mathrm{Pic}(X)) \simeq d(T(X))$，因此这两个群都由 ≤ 11 个元素生成。

证明。我们应用命题2.2。对于奇素数 p，条件很容易验证，因为 L 的秩 r 大于 p-主部分 d(L) 的秩。若 $r \geq 12$，则判别群由 ≤ 10个元素生成，结论成立。因此我们重点考察 $p = 2$ 情形，其中$r = 9$、10 或 11。

令 A 表示 L 中 $\mathrm{E}_8(-2)$ 的正交补。过

$$\mathrm{L} \supset \mathrm{A} \oplus \mathrm{E}_8(-2)$$

格对应于一个各向同性子群

$$\mathrm{H} \subset d(\mathrm{A}) \oplus d(\mathrm{L})$$

关于 $q_{\mathrm{A}} \oplus q_{\mathrm{L}}$。投影映射将 H 单射地映入每个直和项——我们可以将这些投影视为自然映射的核

$$d(\mathrm{A}) \to d(\mathrm{L}), \quad d(\mathrm{E}_8(-2)) \to d(\mathrm{L}).$$

因此，H 是一个秩至多为三的 2-初等群。由此可知，d(L) 至少包含五个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的副本。注 2.3 表明，这验证了命题2.2的假设。□

关于判别群秩的假设可以替换为对其阶的界 [CS99，推论 22，第 395] 页——至少在证明每个属中只有一个类时如此。

秩为九的例子。我们着重讨论 Picard 秩为九的例子，遵循 [vGS07，命题 2。2]其中列出了可能的格。设 $\mathrm{Pic}(X)^{\iota=1} = \mathbb{Z}f$，其中 $f^2 = 2d$；由于不存在（-2）类，因此它必然是充足的

$$\mathrm{Pic}(X)^{\iota=-1} = \mathrm{E}_8(-2).$$

我们有格

$$\Lambda := (2d) \oplus \mathrm{E}_8(-2),$$

~对所有 d均成立。对于偶数 d，我们有二重指标上格 $\Lambda \supset \Lambda$，其生成元为

$$\frac{f+e}{2},$$

其中， f 是 $(2d)$ 的一个生成元，而 $e \in \mathrm{E}_8(-2)$ 是一个满足以下条件的本原元素

$$(e,e) = \begin{cases} -4 & \text{if } d = 4m+2 \\ -8 & \text{if } d = 4m. \end{cases}$$

我们利用了这样的事实：格 E_8 具有长度为 2 和 4 的本原向量。采用简写

$$q(v) = q_{\mathrm{E}_8(-2)}(v) \pmod{2\mathbb{Z}},$$

元素 $0 \neq v \in e_8(-2) := d(\mathrm{E}_8(-2))$ 分为两类

- 120 具有 q（v）类型的 v 元素，
- 135 具有 q（v）类型的 v 元素。

~注意， Λ 是使 E_8（-2）仍保持饱和的唯一上格。

命题 9.3. 设 (X_1, f_1) 和 (X_2, f_2) 是次数为 $2d$ 的极化 K3 曲面，它们通过注 3.1中构造的特化而导出等价。若 X_1 存在一个固定 f_1 的 Nikulin 对合，则

- X_2 存在一个固定 f_2的 Nikulin 对合；
- 存在一个同构

$$\varphi : X_1 \xrightarrow{\sim} X_2.$$

证明。导出等价诱导出一个带有霍奇结构的格同构

$$\mathrm{H}^2(X_1, \mathbb{Z}) \supset f_1^{\perp} \simeq f_2^{\perp} \subset \mathrm{H}^2(X_2, \mathbb{Z}),$$

这意味着 $f_2^{\perp} \cap \mathrm{Pic}(X_2)$ 包含一个与$E_8(-2)$ 同构的子格。因此存在一个霍奇对合

$$\iota_2^* : \mathrm{H}^2(X_2, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(X_2, \mathbb{Z})$$

其反不变直和项等于这个 $\mathrm{E}_8(-2)$ 的副本。托雷利定理——参见 [vGS07，第 2.3] 条命题——表明 X_2 存在一个对合ι_2：$X_2 \to X_2$。

K3 曲面同构在族 [MM64，第 I 章]中具有专门化性质。这使我们只需证明 X_j 的 Picard 秩为九时的结果，从而归结到命题 9.2 的情形。[HLOY04，第 §2] 节中的计数公式——利用命题 9.2 的结论——表明，X_1 的所有傅里叶-穆凯伙伴都同构于 X_1。□

注 9.4。我们并未断言 $\varphi^* f_2 = f_1$！设 X_1和 X_2 的 Picard 秩均为九，这是可能的最小秩。那么

$$\varphi^* f_2 \equiv \alpha f_1 \pmod{\mathrm{E}_8(-2)}$$

其中，α（模 $4d$）是同余式（3.1）对应的解。

因此，即使在秩九的情况下，我们也得到了非平凡的 Nikulin 曲面之间的导出等价！

秩十的例子。转向秩十，我们给出 [vGS07，命题 2.3] 的一个推广：

命题 9.5。取一个秩二不定偶格 A 及其一个偶扩张

$$\mathrm{L} \supset \mathrm{A} \oplus \mathrm{E}_8(-2)$$

在 ι下不变；此处 ι 固定 A，并在 $\mathrm{E}_8(-2)$ 上按乘以 -1 的方式作用。那么存在一个 K3 曲面 X，带有 Nikulin 对合 ι，使得

$$\mathrm{A} = \mathrm{Pic}(X)^{\iota=1} \subset \mathrm{Pic}(X) = \mathrm{L} \supset \mathrm{Pic}(X)^{\iota=-1} = \mathrm{E}_8(-2).$$

证明。由命题 2.4，格 L 可唯一地嵌入 K3 格。命题 9.1 给出了所需的带对合的 K3 曲面。□

我们在命题 9.2 中注意到，格 L 在其属中唯一，且存在自同构可实现整个群 $\mathrm{O}(d(\mathrm{L}))$。重复命题 9.3 的推理，我们得到：

命题 9.6. 由将命题 9.5 应用于 A_1，而得到的带有对合 ι_1 的 K3 曲面 X，将具有与 A_2 相关联的另一个对合 ι_2。此外，(X, ι_1) 与 (X, ι_2) 并非等变导出等价。

我们进一步讨论命题 9.5 的假设中出现的超格 L。给定 A，可能出现哪些格？每个 L 都源自一个 2-初等

$$\mathrm{H} \subset d(\mathrm{A}) \oplus e_8(-2)$$

关于 $q_{\mathrm{A}} \oplus q_{\mathrm{E}_8}(-2)$ 各向同性。

我们考察

$$\mathrm{H} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \subset e_8(-2)$$

在格的自同构作用下的轨道。这些轨道反映了 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ 上可能的二次型。我们列举了各种可能性，依据是对 $\mathrm{O}_8^+(2)$ 的单群的极大子群（$e_8(-2)$ 的自同构）[CCN+85，第 85] 页，以及与反射相关的 $W(\mathrm{E}_8)$（一个密切相关的群）的子群 [DPR13，表 5] 的描述。供读者参考，我们将括号中的子群所对应的根系列出：

（1）各向同性子空间，其中 $q|\mathrm{H}$ 是平凡的——1575 个元素（$\mathrm{D}_4+\mathrm{D}_4$ 型）；（2）秩一子空间，其中 $q|\mathrm{H}$ 有一个核，例如 $q(x,y) = x^2 - 3780 = 28 \times 135$ 个元素（$\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_1+\mathrm{D}_6$ 型）；（3）“负直线”满秩非分裂子空间，例如 $q(x,y) = x^2+xy+y^2 - 1120 = 28 \cdot 120/3$ 个元素（$\mathrm{A}_2+\mathrm{E}_6$ 型）；（4）满秩分裂子空间，例如 $q(x,y) = xy$ –4320 个元素。

作为检验，格拉斯曼流形 Gr(2, 8) 的贝蒂数为

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1$$

因此，根据韦伊猜想，有 10795 个 $\mathbb{F}_2$ 点。注意

$$10795 = 1575 + 3780 + 1120 + 4320.$$

任意秩的情形又如何？设 A_1 和 A_2 是同一属中秩为 $r \geq 2$ 的不定格。考虑超格

$$\mathrm{L}_1 \supset \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{E}_8(-2), \quad \mathrm{L}_2 \supset \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{E}_8(-2)$$

与同一轨道中的子空间 $\mathrm{H} \subset e_8(-2)$ 相关联，因此我们有 $d(\mathrm{L}_1) \simeq d(\mathrm{L}_2)$。由此可得，只要 $d(\mathrm{L}_i)$ 的秩至多为 11（见命题 9.2），就有 $\mathrm{L}_1 \simeq \mathrm{L}_2$；这对于 $K3$ 曲面的皮卡格成立。假设 L_1 和 L_2 是 K3 曲面的皮卡格，则可得到与命题 9.3 和 9.6 中类似的结果。

最后，我们再作一条观察：

命题 9.7. 若导出等价类中的一个成员存在 Nikulin 结构，则该等价类中的所有 K3 曲面都具有 Nikulin 结构。

假设 X_1 和 X_2 导出等价，且 X_1 具有 Nikulin 对合。命题 9.2 推出

$$\mathrm{Pic}(X_1) \simeq \mathrm{Pic}(X_2)$$

并且我们得到 $\mathrm{E}_8(-2) \subset \mathrm{Pic}(X_2)$ 的一个副本。命题 9.1 保证X_2 也具有 Nikulin 对合。

10. 几何应用

本节将介绍关于 Nikulin 对合的研究在导出等价意义下的一个几何应用。

设 (X_1, f_1) 和 (X_2, f_2) 表示两个 12 次的导出等价 K3 曲面，它们具有 Nikulin 对合 ι_j：对于 $j = 1, 2$，$X_j \to X_j$ 且 $\iota_j^* f_j = f_j$。我们假设 Picard 群

$$\mathrm{Pic}(X_j) = \mathbb{Z} f_j \oplus \mathrm{E}_8(-2).$$

注意，导出等价在 $\mathrm{Pic}(X_1)$ 和 $\mathrm{Pic}(X_2)$ 的 $\mathrm{E}_8(-2)$ 直和项之间诱导出自然的同一化。特别地，我们得到不动点轨迹之间的双射

$$X_1^{\iota_1} = X_2^{\iota_2}.$$

令 $Z_j \subset X_j$ 表示与这些双射相容的不动点三元组。假设 X_j 是一般的，即由 $\mathbb{P}^7$ 中的二次方程定义，则这些不动点不共线。

从 Z_j 作投影得到曲面

$$\mathrm{Bl}_{Z_j}(X_j) \to Y_j \subset \mathbb{P}^4$$

其中，爆破使投影的像正规化。这些构造与两侧的对合相容。

我们断言，[HL18] 的构造给出一个克雷莫纳变换

$$\phi : \mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$$

使得

- ϕ 的不定性为 Y_1；
- ϕ^{-1} 的不定性为 Y_2；
- ϕ 与由$\mathbb{P}^4$中的 ι_1 和 ι_2 所诱导的对合相容。

事实上，该构造诱导了由 ϕ给出的 $\mathrm{H}^2(X_1,\mathbb{Z})$ 与 $\mathrm{H}^2(X_2,\mathbb{Z})$ 之间的同源，并将其限制为本原上同调的同构

$$f_1^{\perp} \xrightarrow{\sim} f_2^{\perp}.$$

该构造需要指定与相关对象相 $Z_j' \in X_j^{[3]}$ 容的投影轨迹

$$X_1^{[3]} \dashrightarrow X_2^{[3]},$$

我们规定 Z_j 由适当的不动点组成，从而得到相容的投影轨迹。

设 $\phi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ 是双有理的，且关于有限群 G的作用是等变的。在这种情况下，[KT22，定理 1] 引入了一个定义良好的不变量

$$C_G(\phi) := \sum_{\substack{E\in \mathrm{Ex}_G(\phi^{-1})\\ \mathrm{gen.stab}(E)=\{1\}}} [E \circlearrowleft G] - \sum_{\substack{D\in \mathrm{Ex}_G(\phi)\\ \mathrm{gen.stab}(D)=\{1\}}} [D \circlearrowleft G] \in \mathbb{Z}[\mathrm{Bir}_{G,n-1}], \tag{10.1}$$

其取值于由维数为 $n-1$ 的代数簇的 G-双有理同构类生成的自由阿贝尔群。在这种情况下，各项是 Y_1 和 Y_2 的射影化法丛，符号相反。值得一提的是，根据命题 9.3，底层的 K3 曲面X_1 和 X_2 同构；在导出等价下，群作用彼此共轭，但在自同构下则不然。由下文的命题 10.1 可知，(10.1) 中例外轨迹的类之差非零。这给出了一个实例，说明在 [LSZ23], [LS24] 中利用群作用对不变量 $c(\phi)$ 进行细化，能够带来新的信息。

命题 10.1（参见定理 2, [LS10]）。设 X_1 和 X_2 是光滑射影的 G-簇，且不是单有理的。那么，任意 G-等变稳定双有理等价

$$X_1 \times \mathbb{P}^r \dashrightarrow X_2 \times \mathbb{P}^s,$$

（其在第二因子上的作用平凡）都源自一个 G-等变双有理等价

$$X_1 \dashrightarrow X_2.$$

证明。我们的假设—— X_1 和 X_2 不是单有理的——意味着

$$X_1 \times \mathbb{P}^r \to X_1, \quad X_2 \times \mathbb{P}^s \to X_2$$

是极大有理连通（MRC）纤维化。由于 $X_1 \times \mathbb{P}^r \dashrightarrow X_2 \times \mathbb{P}^s$, MRC纤维化的函子性 [Kol96, IV.5.5] 给出了一个自然的双有理映射

$$X_1 \dashrightarrow X_2.$$

当这些簇带有 G-作用时，诱导的双有理映射与这些作用相容。□

11. Enriques involutions

设 S 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的 Enriques曲面。其万有覆盖是一个 K3 曲面 X，带有覆盖对合 $\epsilon\colon X \to X$；这是一个无不动点的二阶自同构，称为 Enriques 对合。

将 Enriques 曲面 S 按导出等价分类，归结为将二元组（X, ϵ）按 C_2-等变导出等价分类 [BM01, §6]（以及更一般的情形 [BM17]）。导出等价的 Enriques 曲面彼此同构 [BM01, 命题 6.1]。

许多作者对给定 K3 曲面 X 上的 Enriques 对合进行了分类，分类是模去其自同构群 Aut(X)：

- Dolgachev [Dol84] 给出了首批自同构群 Aut(S) 有限的例子；Kondo [Kon92]则提供了其他类型的例子。关于更多历史，包括 Fano 的早期贡献，请参见 [DKo23, Ch. 8] 的参考文献注记。
- Ohashi 证明，这类对合只有有限多个 Aut(X)-轨道。在 Kummer 情形中，可能的商由 N´eron-Severi 群 NS(X) 的判别群中的非零元素分类。一般乘积型 Kummer 曲面有 15 个，一般 Jacobian Kummer 曲面有 31 个，但这个数通常没有上界 [Oha07], [Oha09]。
- Shimada 和 Veniani 研究奇异（即秩为 20）的 K3 曲面；他们的一项结果是对 Enriques 对合集合上的 Aut(X)-轨道进行参数化；这类轨道的数量仅取决于超越格的属 $T(X)$[SV20, Thm. 3.19]。

这些结果基于格论：K3 曲面上的两个 Enriques 对合 X 通过 Aut(X) 共轭，当且仅当相应的 Enriques商同构 [Oha07，命题 2.1]。

Let

$$\mathrm{M} := \mathrm{U} \oplus \mathrm{E}_8(-1)$$

是秩为 10 的唯一偶的幺模双曲格；我们有

$$\mathrm{Pic}(S)/\mathrm{torsion} \simeq \mathrm{M}$$

and

$$\mathrm{Pic}(X) \supseteq \mathrm{M}(2)$$

作为一个本原子格。这与不变子格一致

$$\mathrm{Pic}(X)^{\epsilon=1} \subset \mathrm{Pic}(X)$$

在对合 ϵ 作用下。令 N 表示 M 在 $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$ 中的正交补，它与 $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})^{\epsilon=-1}$ 一致；注意 $T(X) \subset \mathrm{N}$。我们有

$$\mathrm{N} \simeq \mathrm{U} \oplus \mathrm{U}(2) \oplus \mathrm{E}_8(-2)$$

其符号为 (2, 10)。因此

$$\mathrm{Pic}(X)^{\epsilon=-1} = T(X)^{\perp} \subset \mathrm{N}$$

具有负定交叉型。以下结果给出了存在 Enriques 对合的判据 [Keu16, 定理 1], [Oha07, 定理 2.2], [SV20, 定理 3.1.1]:

命题 11.1. 设 X 为一个 K3 曲面。X 上的 Enriques 对合对应于以下数据：本原嵌入

$$T(X) \subset \mathrm{N} \subset \mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$$

使得 N 中 $T(X)$ 的正交补不包含 (-2)-类。

特别地，设 X 是具有 Enriques 对合的 K3 曲面。那么：

- $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(X) \geq 10$,
- 若 $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(X) = 10$，则这样的对合唯一，
- 若 $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(X) = 11$，则 $\mathrm{Pic}(X)$ 同构于 $\mathrm{U}(2) \oplus \mathrm{E}_8 \oplus \langle -2n \rangle$, $n \geq 2$，或 $\mathrm{U} \oplus \mathrm{E}_8(2) \oplus \langle -4n \rangle$, $n \geq 1$。

命题 11.2. 设 X 和 Y 是导出等价的 K3 曲面。假设 X 具有一个 Enriques 对合。那么 X 与 Y 同构。特别地，Enriques 对合的存在性是一个导出不变量。

证明. 在 Picard 秩 ≥ 12 的情形下，导出等价蕴含同构。若 X 和 Y 是秩为 10 的导出等价曲面，且 X 具有一个 Enriques 对合，则 $T(X)$ 与 $\simeq T(Y)$ 以及 Pic(X) 和 Pic(Y) 稳定同构。在 Picard 秩为 10 和 11 的情形下，只需证明格 M(2) 在其属中唯一，且判别群的自同构（d(M(2))$^{q_{\mathrm{M}(2)}}$）都可提升为 M(2) 的自同构。这由 [Nik79b，定理 1.14.2] 推出。事实上，[SV20，引理 3.1.7] 表明，只要 X 具有一个 Enriques 对合，Pic(X) 就满足这两个条件。□

推论 4.2 意味着（参见 [BM01，第 6] 节）：

命题11.3. 任何 C_2-等变导出自等价

$$(X, \epsilon_1) \sim (X, \epsilon_2)$$

都源自 X 的一个自同构。

我们注意到命题2.2的一个推论：设 (X_1, ϵ_1) 和 (X_2, ϵ_2) 表示带有 Enriques 对合的 K3 曲面。若它们满足以下条件，则称它们是定向反转（即斜）共轭的：

- τ：作为格的 $T(X_1) \xrightarrow{\sim} T(X_2)$，且具有相容的霍奇结构；
- Pic(X_1)$^{\epsilon_1=-1}$ 与 Pic(X_2)$^{\epsilon_2=-1}$ 具有相同的判别式二次型。

我们在奇异（秩为 20）K3 曲面的情形下对这一点作更详细的探讨。奇异 K3 曲面上对合的存在性由以下条件决定：

命题11.4。[Ser05] 设 X 是一个奇异 K3 曲面，其超越格为 $T(X)$，判别式为 d。当且仅当 $d \equiv 3$（模 8）或.....时，X 上不存在 Enriques 对合。

$$T(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \ or \ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

“最代数的例子”，即允许存在 Enriques 对合的最小判别式，具有

$$T(X) \simeq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

在这种情况下有两种可能。我们将极大子格记为

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{Pic}(X)$$

使得对合 ϵ 通过 -1 作用。

我们遵循 [SV20，表 31]中的记号。我们考虑格

$$N_{10,7}^{144}(2), \quad N_{10,7}^{242}(2)$$

其中

$$N_{10,7}^{242}(-1) \simeq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \oplus \mathrm{E}_8$$

其中 E_8 为正定，并且

$$N_{10,7}^{144}(2)(-1) \simeq \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

根据 `magma`，这两个格并不等价，但属于同一个旋量属，因此是稳定等价的。

这些对合并非导出等价。事实上，转到 Mukai 格会添加一个双曲子和 U，在该子和上对合的作用是平凡的。然而，在当前情形下，我们稳定化的是 (-1)-特征空间。因此，从第 7 节的意义上说，这些对合是“斜等价”的。

12. Postscript on involutions in higher dimensions

许多论文探讨了高维不可约全纯辛簇上的对合结构。

- $K3^{[n]}$型簇上的辛对合及其不动点轨迹已在 [KMO22]中得到分类。
- 对于源自阿贝尔曲面的Kummer型簇，与 ± 1 on A 相关的对合已在 [HT13, Th. 4.4] 和 [KMO22, Th. 1.3]中进行了分析。
- $K3^{[n]}$型次数二簇上的反辛对合已在 [FMOS22]中得到研究。
- Enriques 对合的高维类似物在 [OS11] 中得到研究。

- [Mar23] 研究了三次四维簇上的对合，包括辛对合（参见 [LZ22] 和 [HT10]）以及反辛对合。文中明确描述了相应的格作用。

- O'Grady型例子上的对合见于 [MM22]中讨论。

很自然会考虑，K3 曲面上的对合之间的导出等价 X_1 和 X_2 ，是否可以通过支撑于一点的希尔伯特概形及其他模空间上所诱导对合之间的等价来理解。

References

[AE22] Valery Alexeev 和 Philip Engel。《K3 曲面带非辛对合的模空间的镜像对称紧化》，2022年。arXiv:2208.10383.[Ale22] Valery Alexeev。《亏格为 0 的 2初等K3曲面的考克斯特图》，2022年。arXiv:2209.09110.[AN06] Valery Alexeev 和 Viacheslav V. Nikulin。《Del Pezzo 曲面与 $K3$ 曲面》，日本数学会回忆录第 15 卷。日本数学会，东京，2006年。[BB17] Arend Bayer 和 Tom Bridgeland。《Picard 秩为 1 的 K3 曲面的导出自同构群》。Duke Math. J., 166(1):75–124，2017年。[BBHR97] C. Bartocci、U. Bruzzo 和 D. Hernández Ruipérez。《 $K3$ 曲面上稳定向量丛的 Fourier-Mukai 变换》。J. Reine Angew. Math., 486:1–16，1997年。[BH23] Simon Brandhorst 和 Tommy Hofmann。《K3 曲面的有限自同构子群》。Forum Math. Sigma, 11:Paper No. e54, 57，2023年。[BM01] Tom Bridgeland 和 Antony Maciocia。《具有等价导出范畴的复曲面》。Math. Z., 236(4):677–697，2001年。[BM14] Arend Bayer 和 Emanuele Macrì。《通过墙穿越研究 K3 曲面上层模空间的极小模型纲领： nef 锥与可动锥、拉格朗日纤维化》。Invent. Math., 198(3):505–590, 2014年。[BM17] Tom Bridgeland 和 Antony Maciocia。《商簇的 Fourier-Mukai 变换》。J. Geom. Phys., 122:119–127，2017年。[Bri08] Tom Bridgeland。《 $K3$ 曲面上的稳定条件》。Duke Math. J., 141(2):241–291, 2008年。[CCN+85] J. H. Conway、R. T. Curtis、S. P. Norton、R. A. Parker 和 R. A. Wilson。《有限群 $\mathbb{ATLAS}$ 》。牛津大学出版社，恩舍姆，1985年。单群的极大子群与普通特征标，计算工作由 J. G. Thackray 协助。[CS99] J. H. Conway 和 N. J. A. Sloane。《球堆积、格与群》，数学科学基础丛书第 290 卷。*[数学科学基本原理]*。Springer出版社，纽约，第三版，1999年。另有 E. Bannai、R. E. Borcherds、J. Leech、S. P. Norton、A. M. Odlyzko、R. A. Parker、L. Queen 和 B. B. Venkov 的补充贡献。

[DKo23]Igor Dolgachev 和近藤繁之。《Enriques 曲面 II》，2023年。未出版书稿，见 https://dept.math.lsa.umich.edu/~idolga/EnriquesTwo.pdf。[Dol84] I. Dolgachev。《Enriques 曲面的自同构》。Invent. Math., 76(1):163–177, 1984年。[DPR13] J. Matthew Douglass、Götz Pfeiffer 和 Gerhard Röhrle。《有限 Coxeter 群的反射子群》。Comm. Algebra, 41(7):2574–2592，2013年。[FMOS22] Laure Flapan、Emanuele Macrì、Kieran G. O'Grady 和 Giulia Sacco。《反辛对合的几何 I》。Math. Z., 300(4):3457–3495，2022年。[HL10] Daniel Huybrechts 和 Manfred Lehn。《层模空间的几何》。剑桥数学文库。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2010年。[HL18] Brendan Hassett 和 Kuan-Wen Lai。《K3 曲面的 Cremona 变换与导出等价》。Compos. Math., 154(7):1508–1533，2018年。[HLOY04] 细野忍、Bong H. Lian、Keiji Oguiso 和丘成桐。《K3 曲面的傅里叶–穆凯数》。载于《代数结构与模空间》，CRM 会议论文集讲义第 38 卷，第 177–192 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2004年。[HMS09] Daniel Huybrechts、Emanuele Macrì 和 Paolo Stellari。《$K3$ 曲面的导出等价与定向》。Duke Math. J., 149(3):461–507，2009年。[HT10] Brendan Hassett 和 YURI TSCHINKEL。《全纯辛四维簇上的翻转与行列式三次超曲面》。J. Inst. Math. Jussieu, 9(1):125–153，2010年。[HT13] Brendan Hassett 和 YURI TSCHINKEL。《广义 Kummer 四维簇上的霍奇理论与拉格朗日平面》。Mosc. Math. J., 13(1):33–56, 189，2013年。[HT17] Brendan Hassett 和 YURI TSCHINKEL。《K3 曲面上的有理点与导出等价》。载于《Brauer 群与障碍问题》，Progr. Math. 第 320 卷，第 87–113 页。Birkhäuser/Springer，查姆，2017年。[HT23] Brendan Hassett 和 YURI TSCHINKEL。《等变导出等价与 K3 曲面上的有理点》。Commun. Number Theory Phys., 17(2):293–312，2023年。[Huy06] D. Huybrechts。《代数几何中的 Fourier-Mukai 变换》。牛津数学专著。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，牛津，2006年。[Huy08] Daniel Huybrechts。《$K3$ 曲面的导出等价与阿贝尔等价》。J. Algebraic Geom., 17(2):375–400，2008年。[Keu16] 琴海金。《K3 曲面自同构的阶》。Adv. Math., 303:39–87，2016年。[KMO22] Ljudmila Kamenova、Giovanni Mongardi 和 Alexei Oblomkov。《$K3^{[n]}$ 型流形与 Kummer n 型流形的辛对合》。Bull. Lond. Math. Soc., 54(3):894–909，2022年。

[Kol96] J´anos Koll´ar. 代数簇上的有理曲线，《数学及其边界领域成果》第32卷，第3辑，《现代数学专题综述丛书》。Springer出版社，柏林，1996年。[Kon92] Shigeyuki Kond¯o. 在皮卡群上作用平凡的代数 $K3$ 曲面的自同构。《日本数学会杂志》44(1):75–98，1992年。[KT22] Andrew Kresch 和 Yuri Tschinkel. 双有理映射的 Burnside群与轨形不变量，2022年。arXiv:2208.05835。[LP81] Eduard Looijenga 和 Chris Peters. K¨ahler $K3$曲面的 Torelli定理。《Compositio Mathematica》42(2):145–186，1980/81年。[LS10] Qing Liu 和 Julien Sebag. 簇的 Grothendieck环与分片同构。《数学杂志》265(2):321–342，2010年。[LS24] Hsueh-Yung Lin 和 Evgeny Shinder. 双有理映射的动机不变量。《数学年刊》（第2辑）199(1):445–478，2024年。[LSZ23] Hsueh-Yung Lin、Evgeny Shinder 和 Susanna Zimmermann. 维数2中的分解中心与簇的 Grothendieck环。《代数几何》10(6):666–693，2023年。[LZ22] Radu Laza 和 Zhiwei Zheng. 三次四维簇的自同构与周期。《数学杂志》300(2):1455–1507，2022年。[Mar23] Lisa Marquand. 带有对合的三次四维簇。《美国数学会汇刊》376(2):1373–1406，2023年。[MM64] T. Matsusaka 和 D. Mumford. 关于极化簇变形的两个基本定理。《美国数学杂志》86:668–684，1964年。[MM22] Lisa Marquand 和 Stevell Muller. $OG10$ 型流形的辛双有理对合分类，2022年。arXiv:2206.13814。[Muk87] S. Mukai. 关于 $K3$曲面上的向量丛模空间。I. 收录于《代数簇上的向量丛》（孟买，1984年），《塔塔基础研究所数学研究丛书》第11卷，第341–413页。塔塔基础研究所，孟买，1987年。[Nik79a] V. V. Nikulin. K¨ahlerian $K3$ 曲面的有限自同构群。《莫斯科数学会会刊》38:75–137，1979年。[Nik79b] V. V. Nikulin. 整数对称双线性型及其若干几何应用。《苏联科学院院报：数学辑》43(1):111–177，238，1979年。英文译本：《苏联数学辑》14(1):103–167（1980年）。[Oha07] Hisanori Ohashi. 一个 $K3$ 曲面上的 Enriques商数量。《数学科学研究所刊物》43(1):181–200，2007年。[Oha09] Hisanori Ohashi. 被 Jacobian Kummer 曲面覆盖的 Enriques 曲面。《名古屋数学杂志》195:165–186，2009年。[Orl97] D. O. Orlov. 导出范畴与 $K3$ 曲面之间的等价。《数学科学杂志》（纽约）84(5):1361–1381，1997年。代数几何，第7卷。[OS11] Keiji Oguiso 和 Stefan Schr¨oer. Enriques流形。《纯粹与应用数学杂志》661:215–235，2011年。[Ser05] Ali Sinan Sert¨oz. 哪些奇异 $K3$ 曲面覆盖 Enriques 曲面？《美国数学会会刊》133(1):43–50，2005年。[Sos10] Pawel Sosna. 导出等价的共轭 $K3$ 曲面。《伦敦数学会通报》42(6):1065–1072，2010年。

[SV20] Ichiro Shimada 和 Davide CesareVeniani. 小判别式奇异 K3 曲面上的 Enriques 对合。《比萨高等师范学校科学 კლას》（第5辑）21:1667–1701，2020年。[vGS07] Bert van Geemen 和 Alessandra Sarti. $K3$ 曲面上的 Nikulin 对合。《数学杂志》255(4):731–753，2007年。[Yos99] Kota Yoshioka. Fourier-Mukai 变换诱导的同构的一些例子，1999年。arXiv:math/9902105v1。[Zha98] D.-Q. Zhang. $K3$ 曲面对合取商。《日本数学杂志》（新系列）24(2):335–366，1998年。

Department of Mathematics, Brown University Box 1917, 151 ThayerStreet, Providence, RI 02912, USA电子邮箱地址：brendan hassett@brown.edu

Courant Institute, New York University, New York, NY 10012, USA电子邮箱地址：tschinkel@cims.nyu.edu

Simons Foundation, 160 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA