概率博弈论交通路径规划

Emilio Benenati 和 Sergio Grammatico，*IEEE* 高级会员

arXiv:2303.03295v2 [eess.SY] 7 May 2024

摘要——**我们研究采用随机决策策略的自利车辆的路径规划问题。通过近似道路延迟函数并进行非线性变量变换，我们将该问题建模为聚合博弈。我们刻画了近似误差，并针对涵盖当前研究问题的一大类博弈，推导出一种新的单调性条件。随后，我们提出一种半分散式算法，将路径规划计算为变分广义纳什均衡，并通过数值仿真展示该解的优势。对于线性延迟函数所对应的特殊情形——势博弈，我们探讨路径规划问题的滚动时域表述，展示了车辆渐近收敛至目的地的性质，并通过数值仿真分析闭环性能对时域长度的依赖关系。**

索引词——**交通控制、博弈论、变分方法**

I. 引言

TRAFFIC 通拥堵给社会带来了沉重负担[1]，而汽车交通已占欧盟交通基础设施成本的很大一部分 [2],，因此，在不扩建现有基础设施的情况下缓解道路拥堵势在必行。人们日益能够实时获取道路网络状态信息，这有望实现更高效的交通感知路径规划。

相关工作：既有研究考虑了优化系统整体效率指标的路径规划策略 [3]–[5]。这种方法的一个缺点是，驾驶员可能会找到比所分配路径更有利的路径，因此他们可能不会遵从这种外部施加的方案。解决这一问题的一种办法是限制给用户造成的不便 [4], [5]。然而，这种方法仍未能充分解决该问题固有的竞争性；正如奠基性工作 [6] 所指出的那样，更恰当的建模方式是将其视为一场博弈。关键在于，在相对宽松的条件下，博弈存在一组纳什均衡（如果假设每个智能体对道路延迟的影响可忽略不计，则为 Wardrop 均衡），即一组决策策略，任何智能体都没有动机单方面偏离，因此无需外部强制施加。基于 Wardrop 均衡的路径规划方法最早在 [6], 中得到研究，而[7]表明其具有有界的系统层面低效性。 [8]考虑了容量约束的纳入。路径规划问题的 Wardrop 均衡通常通过将该问题重构为等价的优化问题 [9] 或变分不等式 [10], 来求解，而容量约束可通过拉格朗日对偶处理[11]。然而，这些重构方法要求预先计算每个起讫点对之间所有可用的路线，这对于大型网络而言可能十分繁琐。相比之下， [12], [13] 提出了一种无需预先计算路径的马尔可夫决策过程（MDP）模型。 [14],进一步阐述了这一思想，其中该问题被表述为一个（单调、聚合型）广义纳什均衡问题（GNEP）。从计算角度看，后一种方法尤其具有吸引力，因为算法博弈论的最新发展提供了大量高效的纳什均衡求解算法，从而能够进行去中心化计算 [15]。

贡献：受 [14], 启发，我们将车辆路由 $\text{probl}^{\text{问题表述为一个}}$ GNEP. $\text{O}^{\text{我们的控制}}$ ibution is threefold:

- 在第三节中，我们证明了常用的路由目标函数（例如 [12]–[14]以及本文所采用的目标函数）是预期通行时间的一种近似，并刻画了近似误差。
- 在第四节中，我们在一个比 [14,引理 1]中推导出的条件限制更弱的条件下，建立了博弈的单调性。从技术上讲，我们通过仔细刻画一类矩阵的特征值来实现这一点，这类矩阵的结构源于伪梯度的雅可比矩阵（引理 8）。随后，我们通过惯性前向-反射-后向（I-FoRB）算法求解该博弈 [15], ；与 [14] 中采用的算法（即预条件前向-后向算法 [16]）不同，该算法不要求伪梯度具有余强制性，因此无需二次正则化项 [14,方程 5]即可收敛。
- 在第 V 节中，我们针对势博弈 [17]这一特定情形，提出了一种问题的改进表述，使智能体能够以滚动时域的方式逐步重新计算路径（而不是一次计算出整条路径）。博弈的这一性质使我们能够将滚动时域博弈构建为模型预测控制器，因此，通过谨慎选择终端代价，我们证明了渐近收敛。这种新方法能够缩短决策时域，从而随着车辆前进降低计算负担。

最后，在第六节中，我们通过对比数值仿真验证了理论结果。

II. 符号说明

对于矩阵 X，我们将其第 (i,j) 个元素记为 $[X]_{(i,j)}$，将其谱范数记为 $\|\cdot\|$。算子 $\text{col}(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 和 $\text{row}(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 分别表示 $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 的按列堆叠和按行堆叠。我们将以 $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 为块的块对角矩阵记为 $\text{diag}(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$。我们定义 $\text{avg}((x_i)_{i\in\mathcal{I}}) := \frac{1}{|\mathcal{I}|}\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i$。 $\mathbb{R}^n$ 中所有元素均为 1 （ 0 ）的向量记为 $\mathbf{1}_n$ （$\mathbf{0}_n$）。维度明确时省略下标。我们将偏梯度记为

作者来自荷兰代尔夫特理工大学（TU Delft）代尔夫特系统与控制中心（DCSC）。电子邮箱： {e.benenati, s.grammatico} @tudelft.nl。该工作部分由欧洲研究理事会（ERC）研究项目 COSMOS（802348）资助。

f 关于 x 的偏梯度记为 $\nabla_x f$。若 f 是标量，其一阶导数记为 f'。我们将 F 的雅可比矩阵记为 DF。笛卡尔积记为 $\times$，闵可夫斯基和记为 $+$。

算子理论：给定 $C \subset \mathbb{R}^n$, N_C 表示其法锥[18, Def. 6.38]。到 C 上的欧几里得投影记为 $\mathrm{proj}_C(x)$。对于算子 $T: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$，我们将 $\mathrm{zer}(T) := \{x \in \mathbb{R}^n | \mathbf{0}_n \in T(x)\}$记为。算子 $T: C \to C$ 在 C上是（m-强）单调的，如果 $\langle T(x) - T(y)\ x - y\rangle \geq m\|x-y\|^2$ 对所有 $x,\ y \in C$均成立，其中某个 $m \geq 0\ (> 0)$。

概率论：给定一个概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$，其样本空间为 Ω，事件集为 $\mathcal{F}$，令 $A,\ B \in \mathcal{F}$。于是，$\mathbb{P}[A]$表示 A的概率，$\mathbb{P}[A|B]$ 表示在 B条件下A 的概率，$\mathbb{P}[A, B]$ 表示 A与 B 的联合概率，$\mathbb{E}[X]$ 表示 $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 的期望值，其中某个 $n \in \mathbb{N}$。我们将 $\Delta^n := \{x \in [0,1]^n : \mathbf{1}_n^\top x = 1\}$记为。

III. 将交通路由建模为广义纳什均衡问题

设 $\mathcal{R}(\mathcal{N},\ \mathcal{E})$ 是一个用于描述道路网络的有向图，其节点 $\mathcal{N}$表示交叉路口，每条边 $(a,\ b) \in \mathcal{E}$ 表示从 a 到 b的道路。我们研究 N车辆群体的路由问题 $\mathcal{I} := \{1, ..., N\}$。记作$\mathcal{I}_{-i} := \mathcal{I} \setminus \{i\}$ 对所有 $i \in \mathcal{I}$均成立。每个群体由 V辆车辆组成，同一群体中的车辆 $i \in \mathcal{I}$ 具有相同的初始位置 $b_i \in \mathcal{N}$和目的地 $d_i \in \mathcal{N}$。

备注 1. 不失一般性，假设每个群体包含相同数量的车辆。事实上，设每个群体包含 $(V_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 辆车辆，并令 $V \in \mathbb{N}$ 满足对所有 i均有 $V_i/V \in \mathbb{N}$ 。那么，我们可以将每个群体 i 拆分为 V_i/V个规模相同的群体 V。

接下来，我们确保每个目的地节点均可到达：

假设 1。 $\mathcal{R}(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ 是强连通的，且对每个 $a \in \mathcal{N}$，都有 $(a, a) \in \mathcal{E}$。

车辆的目标是在时间范围 T 内到达目的地。控制动作决定受控车辆驶经某条道路的概率，并且对同一群体中的每辆车都相同。在这种设定下，每个群体作为一个整体行动，因此我们将每个群体称为一个智能体。需要强调的是，每辆车的路线都是概率控制动作的一次实现，因此由同一智能体表示的车辆可能采取不同的路线。为对此进行形式化，记智能体 i 的第 v 辆车在时间 t 访问的路口为 $s^{i,\ v}_{t}$，它是一个事件空间为 $\mathcal{N}$、概率向量为 $\rho^i_t \in \Delta^{|\mathcal{N}|}$ 的随机变量，即，对任意 $a \in \mathcal{N}$，$[\rho^i_t]_a := \mathbb{P}[s^i_t = a]$。控制动作为列随机矩阵 $\Pi^i_t \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}|\times|\mathcal{N}|}$，定义如下：

$$[\Pi^i_t]_{(b,a)} = \mathbb{P}[s^{i,v}_{t+1} = b | s^{i,v}_t = a] \quad \text{for all } a, b \in \mathcal{N}.$$

根据全概率公式，

$$\rho^i_{t+1} = \Pi^i_t \rho^i_t \quad \text{for all } i \in \mathcal{I}. \tag{1}$$

智能体 i 的初始状态为 ρ^i_1，唯一的非零元素为$[\rho^i_1]_{b_i} = 1$。在本节余下部分，我们将说明，在对（1）进行适当的重新表述后，所提出设置下产生的问题可以转化为GNEP。

A. 系统动力学的仿射形式

类似于 [19],中的方法，我们利用变换后的变量重构(1)中的非线性动力学

$$M^i_{t,(a,b)} := [\Pi^i_t]_{(b,a)} [\rho^i_t]_a \tag{2}$$

其定义对所有 $i \in \mathcal{I}$，$(a,\ b) \in \mathcal{E}$，$t \in \mathcal{T} := \{1, ..., T\}$均成立。根据条件概率的定义，我们有

$$M^i_{t,(a,b)} = \mathbb{P}[s^{i,v}_{t+1} = b, s^{i,v}_t = a]. \tag{3}$$

换言之，$M^i_{t,\ (a,b)}$ 表示在时刻 t，智能体 i 从 a 行经至 b的道路的概率。记 $\mathcal{T}^+ := \mathcal{T} \cup \{T + 1\}$，则每个智能体的决策变量为：

$$\omega_i := \begin{bmatrix} \mathrm{col}(M^i_{t,(a,b)})_{(a,b)\in\mathcal{E}, t\in\mathcal{T}} \\ \mathrm{col}\left(\rho^i_t\right)_{t\in\mathcal{T}^+} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

不失一般性，(4)中的 ω_i 不包括任何与 $[\Pi^i_t]_{(b,a)}$ 对应的变量，其中$(a,\ b) \notin \mathcal{E}$，因为行经不存在道路的概率为零。我们用粗体表示对 $\mathcal{I}$ 的拼接，并用带索引的粗体表示对 $\mathcal{I}_{-i}$的拼接，例如 $\boldsymbol{\omega} := \mathrm{col}(\omega_i)_{i\in\mathcal{I}}$，$\boldsymbol{\omega}_{-i} := \mathrm{col}(\omega_j)_{j\in\mathcal{I}_{-i}}$。我们还定义 $n_\omega := T|\mathcal{E}| + (T+1)|\mathcal{N}|$。以下引理指出，通过对 $\boldsymbol{\omega}$施加适当的线性约束，(2)中的变换可以逆转，且所得矩阵 Π^i_t 与(1)中的动力学一致。所有证明均见附录。

引理 1. 令 ω_i *in*(4) 满足：

$$\textstyle\sum_{a:(a,b)\in\mathcal{E}} M^i_{t,(a,b)} = [\rho^i_{t+1}]_b \quad \textit{for all } b \in \mathcal{N},\ t \in \mathcal{T}; \tag{5a}$$

$$\textstyle\sum_{b:(a,b)\in\mathcal{E}} M^i_{t,(a,b)} = [\rho^i_t]_a \quad \textit{for all } a \in \mathcal{N},\ t \in \mathcal{T}; \tag{5b}$$

$$M^i_{t,(a,b)} \geq 0 \quad \textit{for all } (a,b) \in \mathcal{E},\ t \in \mathcal{T}; \tag{5c}$$

$$\rho^i_1 \in \Delta^{|\mathcal{N}|},\ [\rho^i_1]_{b_i} = 1. \tag{5d}$$

则，$\omega_i \in (\Delta^{|\mathcal{E}|})^T \times (\Delta^{|\mathcal{N}|})^{(T+1)}$ 以及一个$(\Pi^i_t)_{i\in\mathcal{I}, t\in\mathcal{T}}$ 的取值，使得 ρ^i_t 遵循(1) 中的动力学方程：

$$[\Pi^i_t]_{(b,a)} = \begin{cases} \frac{1}{|\mathcal{N}|} & \textit{if } [\rho^i_t]_a = 0 \\ \frac{M^i_{t,(a,b)}}{[\rho^i_t]_a} & \textit{if } [\rho^i_t]_a \neq 0 \end{cases} \tag{6}$$

对于所有$(a, b) \in \mathcal{E}, t \in \mathcal{T}, i \in \mathcal{I}$。

注意，在（6）中，Π^i_t 的第 a 列只要满足 $[\rho^i_t]_a = 0$，就可以取任何各项之和为 1 的值，因为这些值不会影响车辆分布的演化。

B. 控制目标与约束W

e enforce th^e rou ting of each

通过约束目的地以高概率到达，来定义智能体：

$$\left[\rho^i_{T+1}\right]_{d_i} \geq 1 - \varepsilon, \tag{7}$$

其中 ε 是一个自由设计参数。引入延迟函数 $\ell_{(a,b)}$：$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，该函数将道路上的车辆比例映射为通行时间。一种常见模型是公共交通局（BPT）函数 [20]:

$$\ell^{\mathrm{BPT}}_{(a,b)}(\sigma) := \tau_{(a,b)} \left(1 + 0.15 \left(\frac{\sigma + \zeta_{(a,b)}}{c_{(a,b)}}\right)^{\xi+1}\right), \tag{8}$$

其中，$c_{(a,b)}$ 和 $\tau_{(a,b)}$ 分别是（$a,\ b$）的通行能力和自由流通行时间，$\zeta_{(a,b)} \geq 0$ 是道路上非受控车辆数量除以 VN 所得的归一化值，$\xi \geq 0$ 是一个通常设为 $\xi = 3$ 的参数，例如 [5], [20]。更一般地，我们考虑满足以下条件的函数：

假设 2。 对于每个 $(a、b) \in \mathcal{E}$，延迟函数 $\ell_{(a,b)}$ 是 C^2、非负、单调不减且凸的。

在时间 t，经过道路 (a,b) 的车辆数量服从泊松二项分布，其中包含 NV 次试验，分为 N 组，每组有 V 次成功概率相同的试验 $M^i_{t,(a,b)}, i \in \{1,...,N\}$。因此，其期望值为 $\sum_{i\in\mathcal{I}} VM^i_{t,(a,b)}$ [21,式 15]，而道路 (a,b) 上的车辆比例的期望值为 $\sum_i M^i_{t,(a,b)}/N =: \sigma^{\mathrm{M}}_{(a,b),t}$。令 $\hat{\sigma}^{\mathrm{M}}_{t,(a,b)}$ 表示时间 t 道路 (a,b) 上的车辆比例（实际值）。期望通行时间为 $\mathbb{E}[\ell_{(a,b)}(\hat{\sigma}^{\mathrm{M}}_{(a,b),t})]$。通常难以计算该值：我们转而考虑 $\ell_{(a,b)}$ 在其自变量的期望值附近的一阶近似。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\ell_{(a,b)}(\hat{\sigma}^{\mathrm{M}}_{(a,b),t})] &\simeq \mathbb{E}\left[\ell_{(a,b)}(\sigma^{\mathrm{M}}_{(a,b),t}) + \right.\\ &\left.\nabla\ell_{(a,b)}(\sigma^{\mathrm{M}}_{(a,b),t})(\hat{\sigma}^{\mathrm{M}}_{(a,b),t} - \sigma^{\mathrm{M}}_{(a,b),t})\right] \overset{\{1\}}{=}\\ &\ell_{(a,b)}(\sigma^{\mathrm{M}}_{(a,b),t}) + \nabla\ell_{(a,b)}(\sigma^{\mathrm{M}}_{(a,b),t})(\mathbb{E}[\hat{\sigma}^{\mathrm{M}}_{(a,b),t}]\\ &- \sigma^{\mathrm{M}}_{(a,b),t}) \overset{\{2\}}{=} \ell_{(a,b)}(\sigma^{\mathrm{M}}_{(a,b),t})\end{aligned} \tag{9}$$

其中，在式 (9) 中，$\{1\}$ 是由期望值的线性性质以及 $\sigma^{\mathrm{M}}_{(a,b),t}$ 为确定性量这一事实得出的，而 $\{2\}$ 则由 $\mathbb{E}[\hat{\sigma}^{\mathrm{M}}_{(a,b),t}] = \sigma^{\mathrm{M}}_{(a,b),t}$ 得出。尽管此前曾将拥塞的非线性函数用作道路通行成本 [12]–[14]，但据我们所知，式 (9) 所给出的解释是新的。为论证式 (9) 中的近似合理，我们利用随机函数泰勒级数的已知结果 [22, §6]，以证明近似误差会随车辆数量 NV 增加而趋于零：

命题 1 设每个智能体以概率 $M^i_{t,(a,b)}$ 独立于其余车辆抽取事件 $(s^i_{t+1} = a)$。那么，$\mathbb{E}[(\ell_{(a,b)}(\sigma^{M}_{(a,b)\,t}) - \ell_{(a,b)}(\sigma^{M}_{(a,b)\,t}))^2] = \mathcal{O}(\mathcal{O}(NV))$，其中 $y_{NV} + z_{NV}$ 且 $\mathbb{E}[y_{NV}] \le \frac{1}{4NV}\nabla\ell_{(a,b)}(\sigma^{M}_{(a,b)\,t})^2$ $\mathcal{O}(\cdot)$，并且对于每个 $\epsilon > 0$，存在 $K_\epsilon > 0$，使得

$$\sup_{NV\in\mathbb{N}}\left(\mathbb{P}\left[|z_{NV}| \ge \frac{K_\varepsilon}{8(NV)^{3/2}}\right]\right) \le \epsilon.$$

现在定义在时刻 t 穿越 (a,b) 的成本：

$$J_{(a,b)}(M^i_{t,(a,b)}, \boldsymbol{M}^{-i}_{t,(a,b)}) := M^i_{t,(a,b)}\ell_{(a,b)}(\sigma^{\mathrm{M}}_{(a,b),t}). \tag{10}$$

因此，每个智能体追求的目标函数如下：

$$J_i := f_i(\omega_i) + \sum_{(a,b)\in\mathcal{E},t\in\mathcal{T}} J_{(a,b)}(M^i_{t,(a,b)}, \boldsymbol{M}^{-i}_{t,(a,b)}), \tag{11}$$

其中 $f_i : \mathbb{R}^{n_\omega} \to \mathbb{R}$ 表示智能体 i的局部成本。式 5] 中的 [14,考虑了二次成本。我们考虑一类更一般的函数。

假设 3。 $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 中(11) 的函数为凸的，且C^2。

最后，我们引入最大容量约束

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} M^i_{t,(a,b)} \le \bar{c}_{(a,b)} \quad \text{for all } t \in \mathcal{T}, (a,b) \in \mathcal{E} \tag{12}$$

我们通过适当定义的矩阵将其重新表述为 $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$，$A_i \in \mathbb{R}^{T|\mathcal{E}|\times n_\omega}$，$b \in \mathbb{R}^{T|\mathcal{E}|}$，$A := \text{行}(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$：

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} A_i\omega_i = A\boldsymbol{\omega} \le b. \tag{13}$$

C. 广义纳什均衡问题

将第 III-A 节和第 III-B 节推导出的模型形式化后，每个智能体都会求解局部优化问题

$$\forall i \in \mathcal{I}: \begin{cases} \min\limits_{\omega_i\in\Omega_i} & J_i(\omega_i, \boldsymbol{\omega}_{-i}) & \text{(14a)}\\ \text{s.t.} & A_i\omega_i \le b - \sum_{j\in\mathcal{I}_{-i}} A_j\omega_j, & \text{(14b)}\end{cases}$$

其中，$\Omega_i := \{\omega \in \mathbb{R}^{n_\omega} | (5), (7) \text{ 对所有 } i \text{均成立}\}$。(14) 中 N 个优化问题之间的耦合既体现在成本函数中，也体现在约束中，从而定义了一个广义博弈 [23]。具体而言，该博弈是聚合型的，因为成本函数之间的耦合仅取决于平均决策$\sigma^{\mathrm{M}}_{(a,b),\,t}$，对于所有 $(a,\ b)$ 和 t。一个理想的解是广义纳什均衡（GNE）$\boldsymbol{\omega}^*$，在该均衡下，没有任何智能体有动机单方面偏离。

定义 1。 若对每个 $i \in \mathcal{I}$，集体策略 $\boldsymbol{\omega}^* \in \boldsymbol{\Omega} := \left(\bigtimes_{i\in\mathcal{I}} \Omega_i\right) \bigcap \{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^{N n_\omega} | A\boldsymbol{\omega} \le b\}$ 满足以下条件，则它是(14) 中博弈的纳什均衡：

$$J_i\left(\omega^*_i, \boldsymbol{\omega}^*_{-i}\right) \le J_i\left(\omega_i, \boldsymbol{\omega}^*_{-i}\right)$$

对于任意 $\omega_i \in \Omega_i \bigcap \{y \in \mathbb{R}^{n_\omega} | A_i y \le b - \sum_{j\in\mathcal{I}_{-i}} A_j\omega^*_j\}$。

IV. 广义纳什均衡求解

现在，我们将注意力转向推导一种分布式算法，以求解问题 (14) 的广义纳什均衡（GNE）。下面给出可行性假设：

假设 4。 集合 $\boldsymbol{\Omega}$ 非空，并满足斯莱特约束资格条件 *[18,式 (27)50]*。

定义 1 中的 $\boldsymbol{\Omega}$ 是紧凸集，因为它由线性方程定义。此外，局部成本函数是凸的，具体如下：

引理 2。 设假设 *2*、*3* 成立。对于每个 $i \in \mathcal{I}$，$J_i(\omega_i, \boldsymbol{\omega}_{-i})$，其在 $\omega_i \in \Omega_i$ 上是凸的，对所有 $\boldsymbol{\omega}_{-i} \in \bigtimes_{j\in\mathcal{I}_{-i}} \Omega_j$ 均成立。

根据假设 4 和引理 2，我们得出结论：若博弈映射 [24, Prop.12.11]

$$F(\boldsymbol{\omega}) := \operatorname{col}\left(\nabla_{\omega_i} J_i(\omega_i, \boldsymbol{\omega}_{-i})\right)_{i\in\mathcal{I}} \tag{15}$$

是单调的，则存在广义纳什均衡。博弈映射的单调性是推导有效广义纳什均衡求解算法所需的最宽松条件之一。

[14] 的作者 $\ell^{\mathrm{BPT}}_{(a,b)}$ 表明，对于所有 (a,b)，若道路 [14, Eq. 18],上有足够多的非受控车辆，则按照式 (8) 定义的博弈是单调的，但有一个限制：非受控车辆的数量必须随受控车辆数量成比例增加。如果受控车辆占比较大，这或许并不合理。接下来，我们将推导一个更宽松的条件。

A. 博弈的单调性

为研究所提出形式化的单调性，我们针对每条道路 (a,b) 和时刻 t 定义算子

$$F_{(a,b),t}(\boldsymbol{M}_{t,(a,b)}) := \operatorname{col}(J'_{(a,b)}(\cdot, \boldsymbol{M}^{-i}_{t,(a,b)})|_{M^i_{t,(a,b)}})_{i\in\mathcal{I}} \tag{16}$$

其中我们计算

$$\begin{aligned}J'_{(a,b)}(\cdot, \boldsymbol{M}^{-i}_{(b,a),t})|_{M^i_{t,(a,b)}} &= \ell_{(a,b)}(\sigma^{\mathrm{M}}_{(a,b),t}) + \\ &\frac{1}{N} M^i_{t,(a,b)}\ell'_{(a,b)}(\sigma^{\mathrm{M}}_{(a,b),t}).\end{aligned} \tag{17}$$

现在，我们将 F 的单调性与每个$F_{(a,b),\ t}$的单调性联系起来。

引理 3。 如果$F_{(a,b),\ t}$ 在（16）中对每个（a、 b）以及 t都是单调的，则（15）中的算子 F 是单调的。

对于某一类 $\ell_{(a,b)}$ （其中包括（8）中的 $\ell^{\text{BPT}}_{(a,b)}$ ），我们得到以下单调性条件：

引理 4。 令 ℓ： $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 定义为

$$\ell(\sigma) = \tau + \tfrac{k}{\xi+1}(\sigma+\zeta)^{\xi+1} \tag{18}$$

对于某些 τ、 k、 ξ和$\zeta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。令

$$T(\boldsymbol{y}) := \operatorname{col}\left(\ell(\operatorname{avg}(\boldsymbol{y})) + \tfrac{1}{N} y_i \nabla \ell(\operatorname{avg}(\boldsymbol{y}))\right)_{i\in\mathcal{I}}. \tag{19}$$

则，当 T 满足 $[0,1]^N$ 时， T 在 $[0,1]^N$ 上是单调的

$$\zeta \geq \max\left(\tfrac{\xi^2-8}{8N}, \tfrac{\xi-2}{2N}\right). \tag{20}$$

备注 2。 对任意 ζ ，只要 $\xi \leq 2$， （20）就成立。

备注 3. 我们将(20) 中的条件与 *[14]* 中针对延迟函数 $\ell^{BPT}_{(a,b)}$ （其中 $\xi = 3$）推导出的已知单调性条件进行比较。根据(20)，若对所有(a,b)都有 $\zeta_{(a,b)} \geq \frac{1}{2N}$，则该博弈是单调的；只要每条道路上至少有 $\frac{N}{2}$ 辆非受控车辆通行，这一条件便能满足。相比之下，考虑到 *[14]* 考虑了 $V = 1$，将*[14,*式 *18]* 中的界限换算到我们的设定后，要求每条道路上有 $\frac{3NV}{8}$ 辆非受控车辆。应用引理 *4* 后，可以得出比 *[14,*定理 *1]*中所述条件更一般的 *[14,*算法 *1]* 收敛条件。

鉴于引理 4，我们作如下假设：

假设 5. 对于$(a,b)\in\mathcal{E}$, $\ell_{(a,b)}$，(10) 具有如下形式

$$\ell_{(a,b)}(\sigma) = \tau_{(a,b)} + \tfrac{k_{(a,b)}}{\xi+1}(\sigma+\zeta_{(a,b)})^{\xi+1}$$

其中 ξ、 $\tau_{(a,b)}$、 $k_{(a,b)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和 $\zeta_{(a,b)}$ 满足(20)。

假设 2 可由假设 5 推出。对于每个 $(a,b) \in\mathcal{E}$， $t \in \mathcal{T}$， $F_{(a,b),t}$ 均具有 (19) 中的形式，这可通过将 (17) 代入 (16) 得出。因此，根据引理 4， $F_{(a,b),t}$ 在 $[0,1]^N$ 上是单调的。根据引理 1， $\boldsymbol{\Omega} \subset [0,1]^{Nn_\omega}$，由引理 3 可立即得到以下结论：

引理 5。在假设 *5* 下，*(15)* 中的 F 在**Ω**上是单调的。

引理 5 是确保第四节 B 节提出的广义纳什均衡求解算法收敛的关键。

B. 半分散式均衡求解

为求解 (14) 中的博弈，我们着重于计算变分广义纳什均衡（ v-GNE） [23, 定义 3。10], ，即满足 KKT 条件的广义纳什均衡子集

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \lambda\end{bmatrix} \in \operatorname{zer}\left(\begin{bmatrix}\bigtimes_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{N}_{\Omega_i}(\omega_i) + F(\boldsymbol{\omega}) + \operatorname{col}(A_i^\top\lambda)_i\\ \mathrm{N}_{\mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}_{\geq 0}}(\lambda) - A\boldsymbol{\omega} + b\end{bmatrix}\right) \tag{21}$$

其中， $\lambda \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}_{\geq 0}$ 是与（12）中的共享约束相关联的对偶变量。v-GNE 具有实现智能体之间公平性的理想特征，并且已有多种高效算法可用于其计算。特别地，鉴于其收敛速度快且计算复杂度低，我们采用惯性前向-反射-后向算法（I-FoRB） [15],。I-FoRB 算法可在（非严格）单调博弈这一大类中实现收敛。相反，该算法

算法 1 用于交通路由的 I-FoRB GNE 求解

初始化。 $\forall i \in \mathcal{I}$设置 $\omega_i^{(0)}$， $\omega_i^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_\omega}$； $\lambda^{(1)}$， $\lambda^{(0)} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}_{\geq 0}$。

对于 $k \in \mathbb{N}$:

1）每个智能体 $i \in \mathcal{I}$ 接收 $\sigma^{(k)}$、 $\lambda^{(k)}$ 并计算：

$$r_i^{(k)} = 2\nabla_{\omega_i} J_i(\omega_i^{(k)}, \boldsymbol{\omega}_{-i}^{(k)}) - \nabla_{\omega_i} J_i(\omega_i^{(k-1)}, \boldsymbol{\omega}_{-i}^{(k-1)}) \tag{22a}$$

$$\omega_i^{(k+1)} = \operatorname{proj}_{\Omega_i}(\omega_i^{(k)} - \alpha_i(r_i^{(k)} + A_i^\top\lambda^{(k)}) + \theta(\omega_i^{(k)} - \omega_i^{(k-1)})) \tag{22b}$$

$$d_i^{(k+1)} = 2A_i\omega_i^{(k+1)} - A_i\omega_i^{(k)} - b_i. \tag{22c}$$

2) 聚合器接收 $(\boldsymbol{\omega}^{(k+1)}$， $\boldsymbol{d}^{(k+1)})$ 并计算：

$$\sigma^{(k+1)} = \operatorname{avg}(\boldsymbol{\omega}^{(k+1)}) \tag{23a}$$

$$\lambda^{(k+1)} = \operatorname{proj}_{\mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}_{\geq 0}}(\lambda^{(k)} + \beta\operatorname{avg}(\boldsymbol{d}^{(k+1)}) + \theta(\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)})) \tag{23b}$$

在 [14] 中提出的方法仅当博弈强单调时才收敛，因此必须采用加性二次成本，而我们的模型不需要这一条件。智能体使用带惯性项的拉格朗日函数反射投影梯度下降法 (22b)。随后，智能体将原变量和辅助变量 $\boldsymbol{d}$ 发送给聚合器。聚合器则通过带惯性的反射对偶上升法 (23b) 更新聚合变量和对偶变量，并将其发送给智能体。现在给出本节的主要结果，其中记 L_i^f 为 f_i 的利普希茨常数，对所有 $i \in \mathcal{I}$ 均成立（根据假设 3 和**Ω**的紧凑性，该常数存在）：

命题 2。 设假设 *3*、*4*、*5* 成立，并且

$$L_{(a,b)} \geq \tfrac{k_{(a,b)}}{N}((1+\zeta_{(a,b)})^\xi + \xi(1+\zeta_{(a,b)})^{\xi-1})$$
$$L \geq \max_i(L_i^f) + \max_{(a,b)\in\mathcal{E}}(L_{(a,b)})$$
$$\theta \in [0, \tfrac{1}{3}), \quad \delta > 2L/(1-3\theta).$$

那么，由采用步长的算法 *1* 生成的$(\boldsymbol{\omega}^{(k)}, \lambda^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$

$$0 < \alpha_i \leq (\|A_i\| + \delta)^{-1} \quad \textit{for all } i \in \mathcal{I}$$
$$0 < \beta \leq N(\textstyle\sum_{i=1}^N \|A_i\| + \delta)^{-1}$$

收敛到$\operatorname{col}(\boldsymbol{\omega}^*, \lambda^*)$ ，其中 $\boldsymbol{\omega}^*$ 是(14)的一个 *v-GNE*。

V. 滚动时域博弈公式

由于式 (7) 中的约束，只有当对于所有 i，目的地 d_i 可在 $T+1$ 步内从起始节点 b_i 到达时，问题 (14) 才有解。在常见应用中，选择足够大的 T 以保证问题可行，可能会带来沉重的计算负担。本节提出问题 (14) 的一种替代表述：去除式 (7) 中的约束，将其表示为 N 个耦合的有限时域最优控制问题（FHOCPs），并将其称为有限时域多阶段博弈（FHMSG）。受模型预测控制（MPC）文献的启发，我们提出以滚动时域方式反复求解 FHMSG，并迭代地应用所计算序列中的第一个输入。通过终端代价对智能体与其目的地之间的距离进行惩罚，从而引导智能体前往目的地。值得注意的是，

引入终端代价让人联想到 MPC 的经典稳定性要求 [25, 第 2] 节。

A. 等价的有限时域最优控制问题

我们将所考虑的、以初始分布 $\rho_{\text{in}}^i \in \Delta^{|\mathcal{N}|}$ 为参数的博弈形式化如下:

$$\text{for all } i \in \mathcal{I}: \min_{\omega_i \in \mathcal{Y}_i} J_i(\omega_i, \boldsymbol{\omega}_{-i}) \tag{24}$$

其中 $\mathcal{Y}_i := \{\omega \in \mathbb{R}^{n_\omega} | \text{(5a)}, \text{(5b)}, \text{(5c)}\, \rho_1^i = \rho_{\text{in}}^i\}$。我们强调，我们不包含式 (12) 中的约束：由于采用概率控制动作，一次不利的随机结果可能导致该约束在后续时间步不可行。相反，对于任意 ρ_{in}^i， $\mathcal{Y}_i$ 均非空。排除式 (12) 后，问题 (24) 成为一个（非广义）博弈。本节将证明问题 (24) 等价于一个有限时域最优控制问题。首先，我们将定义 $\mathcal{Y}_i$ 的方程改写为受约束线性系统的状态空间表示。我们将期望分布 ρ_{eq}^i 定义为所有车辆均位于各自目的地时的分布，即 $[\rho_{\text{eq}}^i]_a = \delta_{d_i}(a)$，其中 δ_{d_i} 是以 d_i 为中心的克罗内克 δ 函数；相应的平衡输入 $u_{\text{eq}}^i := \text{col}(\delta_{d_i}(a)\delta_{d_i}(b))_{(a,b)\in\mathcal{E}}$，即与以概率 1 留在目的地节点 d_i 相对应的边转移向量。我们定义状态 $x_t^i \in \mathbb{R}^{n_{\text{x}}}$ 和输入 $u_t^i \in \mathbb{R}^{n_{\text{u}}}$，使原点与期望分布和平衡输入重合，即:

$$x_t^i := \rho_t^i - \rho_{\text{eq}}^i \tag{25}$$

$$u_t^i := \text{col}(M_{t,(a,b)}^i)_{(a,b)\in\mathcal{E}} - u_{\text{eq}}^i. \tag{26}$$

我们定义选择向量 $S^{(a,b)} \in \mathbb{R}^{n_{\text{u}}}$，适用于所有满足 $(a,b) \in \mathcal{E}$ 且 $(S^{(a,b)})^\top(u_t^i + u_{\text{eq}}^i) = M_{t,(a,b)}^i$ 的情形，以及

$$B := \text{col}(\textstyle\sum_{a:(a,b)\in\mathcal{E}} (S_{\text{edge}}^{(a,b)})^\top)_{b\in\mathcal{N}}$$

$$P := \text{col}(\textstyle\sum_{b:(a,b)\in\mathcal{E}} (S_{\text{edge}}^{(a,b)})^\top)_{a\in\mathcal{N}}.$$

可以验证 $Bu_{\text{eq}}^i = Pu_{\text{eq}}^i = \rho_{\text{eq}}^i$，因此，将 B 和 P 的定义代入可得:

$$\text{(5a)} \Leftrightarrow x_{t+1}^i = Bu_t^i \tag{27a}$$

$$\text{(5b)} \Leftrightarrow x_t^i = Pu_t^i. \tag{27b}$$

将 (26) 代入 (27a)，可知当采取动作 $M_{t,(d_i,d_i)}^i = 1$ 时，期望状态 $x_t^i = 0$ 是一个均衡。接下来，我们通过假设自环没有通行成本，确保当初始状态为原点时，这种动作对所有智能体都不产生成本（因而显然是纳什均衡策略）。以下引理还给出了对成本函数的另一项限制：对于 (14) 中的博弈成为势博弈， $\ell_{(a,b)}$ 必须是仿射的（见第 2] 节）。这项性质对于将 (24) 改写为单个优化问题至关重要。

引理 6. 假设 *2* 成立。当且仅当对于每个$(a,b) \in \mathcal{E}$，(10) 中的 $\ell_{(a,b)}$ 是仿射的，(24) 中的博弈才是势博弈。

鉴于这些要求，我们提出以下假设（该假设蕴含假设 5）：

假设6。 对于每个 $(a,b) \in \mathcal{E}$，拥塞函数$\ell_{(a,b)}$ 的形式为 $\ell_{(a,b)}(\sigma) = \tau_{(a,b)} + k_{(a,b)}\sigma$，其中 $\tau_{(a,a)} = 0$、$k_{(a,a)} = 0$ 和 $\tau_{(a,b)} > 0$ 对所有 $a \in \mathcal{N}$、 $b \in \mathcal{N} \setminus \{a\}$均成立。

交通路由问题中的线性（化）边 traversing 成本见于 [5], [12] ，并用于[14]的数值分析。显然，假设6意味着每个智能体的最优策略都是停留在其初始状态。接下来，我们规定，除非某节点是智能体的目的地，否则智能体不能选择停留在该节点:

$$(S_{\text{edge}}^{(a,a)})^\top u_t^i = 0 \quad \forall\, a \in \mathcal{N} \setminus \{d_i\},\ i \in \mathcal{I},\ t \in \mathcal{T}. \tag{28}$$

我们可以将 $\mathcal{Y}_i$ 与附加约束 (28) 紧凑地改写为具有初始状态 $x_1^i = \rho_{\text{in}}^i - \rho_{\text{eq}}^i$和约束集 $\mathbb{Z}_i$ 的动态方程 (27a)，其中约束集定义为

$$\mathbb{X}_i := \Delta^{|\mathcal{N}|} - \{\rho_{\text{eq}}^i\},$$

$$\mathbb{U}_i := \{u \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{|\mathcal{E}|} - \{u_{\text{eq}}^i\} | S_{\text{edge}}^{(a,a)\top} u = 0\ \forall a \in \mathcal{N} \setminus \{d_i\}\},$$

$$\mathbb{Z}_i := \{(x,u) \in \mathbb{X}_i \times \mathbb{U}_i | u \in \text{null}(P) + \{P^\dagger x\}\}.$$

为了进一步构建多阶段决策问题，我们将成本 J_i 改写为阶段成本，即改写为仅取决于时间步 $t \in \mathcal{T}$处变量的各项之和。我们作出以下技术假设，这在多阶段决策问题中很常见:

假设 7. 局部成本 $f_i(\omega_i)$ 关于 t可分离，即 $f_i(\omega_i) = \sum_{t\in\mathcal{T}} f_i^S(x_t^i, u_t^i) + f_i^F(x_{T+1}^i)$。此外， f_i^S和 f_i^F均为非负数，且 $f_i^S(0,\ 0) = f_i^F(0) = 0$。

我们将网络参数汇总为 $\bar{\tau}$: $= \sum_{a\ b} \tau_{(a,b)} S^{(a,b)}$ $C = \sum_{a\ b} k_{(a,b)} S^{(a,b)}\ S^{(a,b)\ \top}$ $=$ $(,)$ 条边以及 $:(,)$ 条边 (边)。随后可以证明（见附录C），在假设6、7下，(24)中的 J_i 可以用阶段成本表示为:

$$J_i(x_1^i, (\boldsymbol{u}_t)_{t\in\mathcal{T}}) = f_i^F(x_{T+1}^i) + \sum_{t\in\mathcal{T}} f_i^S(x_t^i, u_t^i) + \bar{\tau}^\top u_t^i + \text{avg}(\boldsymbol{u}_t)^\top C u_t^i. \tag{29}$$

然后，我们针对任意 $x_1^i \in \mathbb{X}_i$ 构造 FHMSG $\mathcal{G}(\boldsymbol{x}_1)$:

$$\forall i: \begin{cases} \min\limits_{(u_t^i)_{t\in\mathcal{T}}} J_i(x_1^i, (\boldsymbol{u}_t)_{t\in\mathcal{T}}) & \text{(30a)} \\ \text{s.t.} \quad (x_t^i, u_t^i) \in \mathbb{Z}_i \quad \forall t \in \mathcal{T}, & \text{(30b)} \end{cases}$$

该问题等价于带有(28)中附加约束的(24)。接下来，我们证明 (30)中的博弈等价于一个有限时域最优控制问题（FHOCP）。回顾 $\boldsymbol{x}_t$ =col$(x_t^i)_{i\in\mathcal{I}}$，并注意到 $\boldsymbol{x}_t$ 根据集体动力学 $\boldsymbol{x}_{k+1} = (I_N \otimes B)\boldsymbol{u}_k$演化。定义集体状态和输入的约束集:

$$\mathbb{X} := \{\boldsymbol{x} | x_i \in \mathbb{X}_i \ \text{ for all } i\}$$

$$\mathbb{U} := \{\boldsymbol{u} | u_i \in \mathbb{U}_i \ \text{ for all } i\}$$

$$\mathbb{Z} := \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) | (x_i, u_i) \in \mathbb{Z}_i \ \text{ for all } i\}.$$

在下面的引理7中，我们找到了一个共同的控制目标p，智能体在求解博弈 $\mathcal{G}$时，虽未意识到这一点，却都自愿地试图将其最小化:

引理7。 对于任意 $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{X}$， $\mathcal{G}(\boldsymbol{x}_1)$ 在(30) 中的伪梯度等于 $\nabla_{\boldsymbol{u}} p$，其中

$$p^S(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{u}_t) := \tfrac{1}{2N}\|\boldsymbol{u}_t\|^2_{(I_N + \mathbf{1}\mathbf{1}^\top)\otimes C} + \textstyle\sum_{i\in\mathcal{I}} f_i^S(x_t^i, u_t^i) + \bar{\tau}^\top u_t^i \tag{31a}$$

$$p^F(\boldsymbol{x}_{T+1}) := \textstyle\sum_{i\in\mathcal{I}} f_i^F(x_i) \tag{31b}$$

$$p(\boldsymbol{x}_1, (\boldsymbol{u}_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}) := p^F(\boldsymbol{x}_{T+1}) + \textstyle\sum_{t\in\mathcal{T}} p^S(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{u}_t).$$

势函数 p 使我们能够得出结论：根据引理7和 [26, 定理 2],, $\mathcal{G}(\boldsymbol{x}_1)$ 的一个纳什均衡是一个解

对于定义如下的有限时域最优控制问题 $\mathcal{O}(\boldsymbol{x}_1)$:

$$\begin{cases} \min\limits_{(\boldsymbol{u}_t)_{t\in\mathcal{T}}} \quad p(\boldsymbol{x}_1,(\boldsymbol{u}_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}) & \text{(32a)} \\ \text{s.t.} \quad (\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{u}_t)\in\mathbb{Z} \quad \forall t\in\mathcal{T}. & \text{(32b)} \end{cases}$$

现在，我们通过标准的模型预测控制结果证明式（32）的滚动时域解具有渐近稳定性，进而证明式（30）也具有渐近稳定性。

B. 滚动时域纳什均衡控制的稳定性

在每个时间步，智能体都会应用对应于式（30）中博弈的一个纳什均衡的第一个输入。以下控制动作对此进行了形式化描述:

$$\kappa_i : y \mapsto u_1^{i*} \text{ where } \operatorname{col}(u_t^{i*})_{t\in\mathcal{T},i\in\mathcal{I}} \text{ is a NE of } \mathcal{G}(y). \quad (33)$$

直观而言，κ_i 会引导第 i个智能体达到期望的均衡，前提是智能体有足够强的动机前往各自的目的地。为此，我们假设每个智能体都知道一条通往其目的地的路径，并通过映射 $(\mathrm{KP}_i)_{i\in\mathcal{I}}:\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ 将其形式化，该映射具有以下特征:

$$\begin{aligned} &\mathrm{KP}_i(d_i)=d_i;\ (a,\mathrm{KP}_i(a))\in\mathcal{E};\\ &\exists\ T_i^P\in\mathbb{N} \text{ such that } \mathrm{KP}_i^t(a) := \underbrace{\mathrm{KP}_i\circ\ldots\circ\mathrm{KP}_i}_{t \text{ times}}(a)=d_i\\ &\text{for all } a\in\mathcal{N},\ t\geq T_i^P. \end{aligned}$$

一个例子是根据边权重τ计算出的最短路径。我们定义从每个节点出发、沿已知路径通过下一条边以及走完整条路径所需的时间:

$$\begin{aligned} \tau_i^{\mathrm{kp}}&\in\mathbb{R}_{\geq 0}^{|\mathcal{N}|};\ \ [\tau_i^{\mathrm{kp}}]_a := \tau_{(a,\mathrm{KP}_i(a))},\\ \mu_i^{\mathrm{kp}}&\in\mathbb{R}_{\geq 0}^{|\mathcal{N}|};\ \ [\mu_i^{\mathrm{kp}}]_a := \textstyle\sum_{t=0}^{\infty}[\tau_i^{\mathrm{kp}}]_{\mathrm{KP}_i^t(a)}, \end{aligned}$$

以及以下辅助输入，其设计目的是使每辆车都沿已知路径通过下一条边:

$$u_i^{\mathrm{kp}}:\mathbb{X}_i\to\mathbb{U}_i \text{ for all } i \text{ such that}$$

$$S_{\mathrm{edge}}^{(a,b)^\top}u_i^{\mathrm{kp}}(x_i)=\begin{cases}[x_i]_a-\delta_{d_i}(a) & \text{if } b=\mathrm{KP}_i(a)\\ 0 & \text{if } b\neq\mathrm{KP}_i(a).\end{cases} \quad (34)$$

接下来，我们提出以下技术假设，它说明每个智能体都通过已知路径来评估终端状态与目的地之间的距离:

假设8。 局部成本满足假设 7，其中

$$\begin{aligned} f_i^F(x)&=\sigma_i^F((\mu_i^{\mathrm{kp}})^\top x)\\ f_i^S(x,u_i^{\mathrm{kp}}(x))&\leq\sigma_i^S((\tau_i^{\mathrm{kp}})^\top x), \end{aligned}$$

其中，σ_i^F是 m_F-强单调函数，σ_i^S是 L_S-利普希茨连续函数，对所有 i均成立，且 $\sigma_i^F(0)=\sigma_i^S(0)=0$。

例如，假设8由 $f_i^F(x)=\gamma_1\,\mu_i^{\mathrm{kp}\,\top}x$ $\gamma_1>0$ $f_i^S\,x\,u=\gamma_2\,\tau_i^{\top}x$) ( )、with 和 (，) (kp)、with$\gamma_2\geq 0$ 满足。在本节的主要结果中，我们证明，如果智能体有足够强的动机前往目的地（由终端代价 m_F 的强单调性常数编码），那么由（33）中定义的滚动时域纳什均衡控制 $(\kappa_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 控制的（27a）中的系统会渐近地到达原点（即每辆车都以概率 1 到达其目的地时的状态）。证明基于（30）与（32）之间的等价性。具体而言，我们证明，对于从输入到状态的映射为的集体系统，p^F 是关于控制动作 u^{kp} 的控制李雅普诺夫函数。

算法 2 用于交通路由的滚动时域纳什均衡搜索

初始化。 对每个 $i\in\mathcal{I}$，将 ρ_1^i 设为式 (5d) 中的值。

对于 $\tau\in\mathbb{N}$:

1) **智能体控制计算**:
   a) $\mathcal{G}(\boldsymbol{\rho}_\tau)$ 的一个纳什均衡
   $$([\mathrm{row}(M_t^{i*}{}_{,(a,b)})_{(a,b)\in\mathcal{E},t\in\mathcal{T}},\mathrm{row}(\rho_t^{i*\top})_{t\in\mathcal{T}^+}]^\top)_{i\in\mathcal{I}}$$
   使用算法 1 计算，其中每个 $(\Omega_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 中 (22b) 被替换为 $\{\omega_i\in\mathcal{Y}_i|(28) \text{ 成立}\}$，$\lambda^{(1)}=\mathbf{0}$ 并忽略对偶更新 (23b)。
   b) 每个智能体 i 按照 (6) 计算Π_1^{i*}。
2) **车辆节点更新**:
   对于所有 $v\in\{1,\ldots,V\}$, $i\in\mathcal{I}$，从概率分布 col($[\Pi_1^{i*}]_{(b,s_\tau^{i,v})})_{b\in\mathcal{N}}$ 中抽取 $s^i{}_{,\tau+1}^{\ v}\in\mathcal{N}$
3) **智能体状态更新**:
   每个智能体都会更新经验分布:
   $$\pi_{n,i}=|\{v\in\{1,\ldots,V\} \text{ s.t. } s_{\tau+1}^{i,v}=n\}| \text{ for all } n\in\mathcal{N}$$
   $$\rho_{\tau+1}^i=\operatorname{col}(\pi_{n,i}/V)_{n\in\mathcal{N}}$$

是 $I_N\otimes B$ （参见（27a））。随后，我们应用模型预测控制理论中的一个已知结果 [25, 定理 2。19]，从而得出渐近稳定性。

定理 1。 记 $k:=$ 最大值$_{(a,b)}(k_{(a,b)})$ 以及 $\tau_{min}:=$最小值$_{(a,b),a\neq b}\,\tau_{(a,b)}$。在满足假设 *1*、*3*、*6–8* 且

$$m_F\geq 1+L_S+\tfrac{k(N+1)}{2N\tau_{\min}}, \quad (35)$$

那么，对于所有 $i\in\mathcal{I}$，系统 $x_{t+1}^i=B\kappa_i$（$\boldsymbol{x}_t$）的原点都是渐近稳定的，其中 κ_i 如（33）所示。

我们在算法 2 中介绍所得的方法。

VI. 数值研究[1]

我们研究算法 1 在多个随机生成的简单场景中的表现，以便更好地观察解的特性。我们为$N=8$ 智能体构建了一个包含 12 个节点和 27 条边的随机有向图。我们考虑智能体在选择道路时仅考虑通行时间的情况，因此对所有 i均设置 $f_i\equiv 0$。通过令 (8) 中的 BPT 延迟函数满足 $\ell_{(a,b)}$、$\tau_{(a,b)}=0.1$、$\zeta_{(a,b)}=\frac{1}{N}$、$c_{(a,b)}=0.1$，我们将所有道路设为具有相同的长度和通行能力，其中适用于所有 $(a,b)\in\mathcal{E}$ 和 $\xi=3$。(12) 中的道路限制定义为$c_{(a,b)}=0.2$。我们针对智能体的 100 组随机初始状态和目的地，求解 (14) 中的问题。随后，将 (14) 中博弈的解与在没有交通信息时通过最短路径得到的路由进行比较，即对于所有 $(a,b)\in\mathcal{E}$，边权重为 $\tau_{(a,b)}$。从图 1 可以看出，基准解往往导致部分道路过度拥挤（参见边 6），而其他道路利用不足（参见边 3）；相比之下，所提出的广义纳什均衡路由利用交通信息，使网络的使用更加均匀。图 2 展示了使用 (9) 计算的行程时间归一化近似误差。每条链路 $(a,b)\in\mathcal{E}$ 在时刻 t 的近似误差计算为 $|\ell_{(a,b)}(\sigma_{(a,b),t}^{\mathrm{M}})-\ell_{(a,b)}(\hat{}\sigma_{(a,b),t}^{\mathrm{M}})|$，其中 $\sigma_{(a,b),t}^{\mathrm{M}}$ 是 §III-B 中定义的预期道路占用

[1]代码可在 https://github.com/bemilio/MDP traffic nonlinear 获取

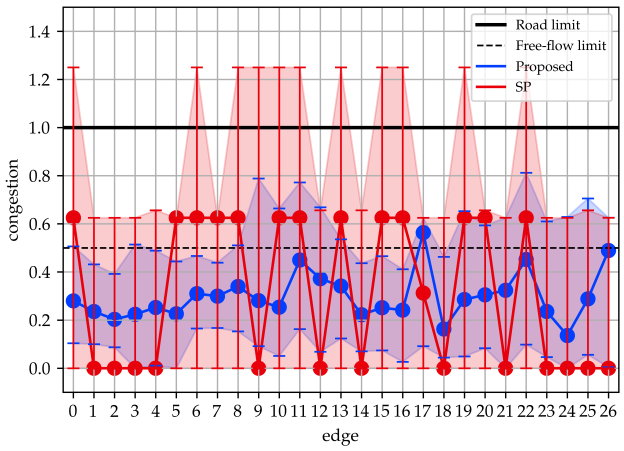

图 1：$\max_t \sigma^t_{(a,b)}/\bar{c}_{(a,b)}$，与最短路径路由产生的拥塞相比。虚线表示$c_{(a,b)}/\bar{c}_{(a,b)}$。圆点表示中位数。阴影区域表示 95 %置信区间。图中用红色标出最短路径解（SP）的性能。

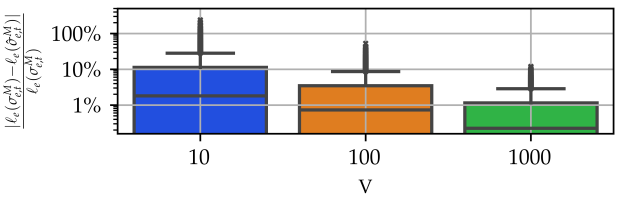

图 2：V（每个群体中的车辆数）变化时，近似行程时间与经验行程时间之间的差异。

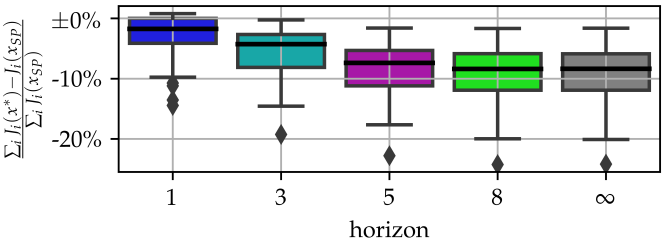

图 3：智能体产生的总成本与不考虑交通信息时的最短路径成本的比较。

而 $\hat{\sigma}^{\mathrm{M}}_{(a,b),t}$ 是时刻 t 位于 (a,b) 上的实际车辆数除以 NV。显然，增加群体规模会降低近似误差。随后，我们对 $\tau \in \{1,\dots,10\}$ 应用算法 2，采用终端代价 $f^F_i(x) = \gamma(\mu^{\mathrm{kp}}_i)^\top x$，并令 γ 取 (35) 右侧的值，从而确保满足定理 1 的假设。我们将结果与预先计算的、未施加 (12) 中约束的问题 (14) 的开环解进行比较，并以相对于不含交通信息的最短路径解的相对总通行时间缩减作为比较指标，其中该解以 ∞ 范围表示。图 3 显示，与最短路径解相比，实际通行时间有所缩短，且这一优势会随着时间范围的增加而扩大。从实际角度看，图 1 和图 3 的结果表明，实时交通信息有助于减少高负载路段的拥塞，并缩短驾驶员经历的总通行时间。

VII. 结论

利用延迟函数的一阶近似，可将多辆车的交通路由建模为具有混合策略的聚合博弈。随着受控车辆数量增加，近似误差会减小。在温和条件下，道路延迟函数的特定结构可保证博弈的单调性，因此可以使用现有的均衡求解算法求解。如果延迟函数是线性的，那么只要局部目标函数满足一组源自模型预测控制文献的条件，就可以采用滚动时域求解该博弈。数值仿真表明，与在没有交通信息的情况下计算出的最优路由相比，所提出的方案能够降低整体网络拥塞和通行时间。

附录

引理 8。 矩阵的唯一非零特征值

$$A(\boldsymbol{y}) := 2(\sigma+\zeta)\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^\top + \tfrac{\xi}{N}(\boldsymbol{y}\mathbf{1}_N^\top + \mathbf{1}_N\boldsymbol{y}^\top) \tag{36}$$

where $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^N_{\geq 0}$, $\sigma := \frac{1}{N}\sum_i [y]_i$, $\zeta \geq 0$, *are* $\lambda_- := \xi\sigma + \gamma_-$ *and* $\lambda_+ := \xi\sigma + \gamma_+$, *where*

$$\gamma_\pm := N(\sigma+\zeta) \pm \sqrt{N^2(\sigma+\zeta)^2 + 2N\xi(\sigma+\zeta)\sigma + \tfrac{\xi^2\|\boldsymbol{y}\|^2}{N}}. \tag{37}$$

证明（概要）：由于 $A(\boldsymbol{y})$ 是 3 个秩一矩阵之和，因此其秩至多为 3。我们验证 $\lambda_\pm$ 是特征值，其对应的特征向量为 $\xi\boldsymbol{y}+\gamma_\pm\mathbf{1}_N$。由于 $\mathrm{trace}(A(\boldsymbol{y})) = \lambda_- + \lambda_+$，不存在第三个非零特征值。■

A. 第三节的证明

引理 *1* 的证明：我们证明，按照 (6) 计算的矩阵满足 (1) 和 (2)。注意，若 $[\rho^i_t]_{\bar{a}} = 0$ 对于某个 $\bar{a} \in \mathcal{N}$ 成立，则根据 (5b)，$\sum_{b:(\bar{a},\,b)\in\mathcal{E}} M^i_{t,\,(\bar{a},\,b)} = 0$，并且根据 (5c)，对于所有 $b \in \mathcal{N}$，$M^i_{t,\,(\bar{a},b)} = 0$。代入 (6)，得到 (2)：

$$[\Pi^i_t]_{(b,a)}[\rho^i_t]_a = \begin{cases} 0 & \text{if } [\rho^i_t]_a = 0 \\ M^i_{t,(a,b)} & \text{if } [\rho^i_t]_a \neq 0 \end{cases} = M^i_{t,(a,b)}$$

展开乘积 $\Pi^i_t\rho^i_t$，并代入后者和 (5a)，即可得到 (1)。最后，分别对所有 $b \in \mathcal{N}$ 和 $a \in \mathcal{N}$，将 (5a) 和 (5b) 两边求和，得到：

$$\textstyle\sum_{b\in\mathcal{N}}[\rho^i_{t+1}]_b = \sum_{(a,b)\in\mathcal{E}} M^i_{t,(a,b)} = \sum_{a\in\mathcal{N}}[\rho^i_t]_a.$$

通过归纳法，$\rho^i_t \in \Delta^{|\mathcal{N}|}$和列 $(M^i_{t,\,(a,\,b)})_{(a,b)\in\mathcal{E}} \in \Delta^{|\mathcal{E}|}$。■

命题 *1* 的证明：由于 $\hat{\sigma}^{\mathrm{M}}_{(a,b),\,t}$ 服从缩放系数为 NV 的泊松二项分布，根据 [21, 公式 15] 以及 $M^i_{(a,b),\,t} \in [0,1]$，

$$\mathrm{Var}(\hat{\sigma}^{\mathrm{M}}_{(a,b),t}) = \tfrac{1}{(NV)^2}\textstyle\sum_{i,v}(1 - M^i_{(a,b),t})M^i_{(a,b),t} \leq \tfrac{1}{4NV}.$$

根据切比雪夫不等式，对于任意 $\epsilon > 0$ 和 $K_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$，

$$\mathbb{P}\left[(\sigma^{\mathrm{M}}_{(a,b),t} - \hat{\sigma}^{\mathrm{M}}_{(a,b),t}) \geq \tfrac{K_\epsilon}{2\sqrt{NV}}\right] \leq \epsilon.$$

然后，利用 [22,定理 6.2.3]，使用$r_n = \frac{1}{2\sqrt{NV}}$和 $\boldsymbol{a} = \sigma^{\mathrm{M}}_{(a,b),\,t}$（采用参考文献中的符号说明），即可得到该结果。■

B. 第四节的证明

引理2的证明（概要）：对一般的 $(a,\ b)$ t，i 计算 $J''_{(a,b)}(\cdot,\ \boldsymbol{M}^{-i}{}_{(a,\ b)\ t})$，并注意到根据假设 2，该值非负。由此，再根据 [18, 命题 8.14,8,17],和假设 3，即可得到该结果。■

引理3的证明：我们来计算 F:

$$F(\boldsymbol{\omega}) = \operatorname{col}\left(\nabla f_i(\omega_i)\right)_{i\in\mathcal{I}} + \operatorname{col}\left(\begin{bmatrix}\operatorname{col}\left(J'_{(a,b)}(\cdot,\boldsymbol{M}^{-i}_{t,(a,b)})|_{M^i_{t,(a,b)}}\right)_{(a,b),t}\\ \mathbf{0}_{|\mathcal{N}|(T+1)}\end{bmatrix}\right)_{i\in\mathcal{I}}, \tag{38}$$

其中，出现零向量是因为时延函数不依赖于 $(\rho^i_t)_{t,\ i}$。根据假设 3 和 [18, 例 20.3]，∇f_i 对每个 i都是单调的。因此，根据 [18, 命题 20.23]，$\operatorname{col}(\nabla f_i)_i$ 是单调的。将 (38) 中的第二个加项记作 $T(\boldsymbol{\omega})$。根据 [18, 命题 20.10]，如果 T 是单调的，那么 F 也是单调的。定义置换矩阵 P，使得

$$P\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix}\operatorname{col}(\boldsymbol{M}_{t,(a,b)})_{(a,b)\in\mathcal{E},t\in\mathcal{T}}\\ \operatorname{col}(\boldsymbol{\rho}_t)_{t\in\mathcal{T}^+}\end{bmatrix}.$$

根据$F_{(a,b),\ t}$的定义，有：

$$PT(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix}\operatorname{col}(F_{(a,b),t}(\boldsymbol{M}_{t,(a,b)}))_{(a,b)\in\mathcal{E},t\in\mathcal{T}}\\ \mathbf{0}_{N|\mathcal{N}|(T+1)}\end{bmatrix}. \tag{39}$$

由于 $PP^\top = I$，对所有 $\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{y}$:

$$\langle T(\boldsymbol{\omega}) - T(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{y}\rangle = \langle PT(\boldsymbol{\omega}) - PT(\boldsymbol{y}), P\boldsymbol{\omega} - P\boldsymbol{y}\rangle = \sum_{(a,b),t}\langle F_{(a,b),t}|_{\boldsymbol{\omega}} - F_{(a,b),t}|_{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{M}_{t,(b,a)}|_{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{M}_{t,(b,a)}|_{\boldsymbol{y}}\rangle$$

当 $F_{(a,b),\ t}$ 关于 $\forall(a,\ b)$ t单调时，它是非负的。■

引理 4 的证明：根据 [27,命题 12。3]，T 在 (19) 中是单调的，当且仅当 $DT(\boldsymbol{y}) + DT(\boldsymbol{y})^\top \succeq 0\ \forall \boldsymbol{y}$。记 $\sigma = \operatorname{avg}(\boldsymbol{y})$。

$$DT(\boldsymbol{y}) = \tfrac{1}{N}\ell'(\sigma)(I_N + \mathbf{1}\mathbf{1}^\top) + \tfrac{1}{N^2}\ell''(\sigma)(\boldsymbol{y}\mathbf{1}^\top). \tag{40}$$

由于 $\ell'(\sigma) = k(\sigma+\zeta)^\xi$，$\ell''(\sigma) = k\xi(\sigma+\zeta)^{\xi-1}$，我们计算得

$$DT(\boldsymbol{y}) + DT^\top(\boldsymbol{y}) = \tfrac{2k}{N}(\sigma+\zeta)^\xi I_N + \tfrac{k}{N}(\sigma+\zeta)^{\xi-1}(2(\sigma+\zeta)\mathbf{1}\mathbf{1}^\top + \tfrac{\xi}{N}(\boldsymbol{y}\mathbf{1}^\top + \mathbf{1}\boldsymbol{y}^\top)). \tag{41}$$

根据引理 8，当且仅当 $DT(\boldsymbol{y}) + DT^\top(\boldsymbol{y}) \succeq 0$ 时

$$\tfrac{2k}{N}(\sigma+\zeta)^\xi + \tfrac{k}{N}(\sigma+\zeta)^{\xi-1}(\xi\sigma + \gamma_-(\boldsymbol{y})) \geq 0, \tag{42}$$

其中，γ_- 在 (37) 中定义。排除平凡情形 $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$，$\zeta = 0$ 后，我们除以 $\frac{k}{N}(\sigma+\zeta)^\xi$，得到

$$(42) \Leftrightarrow 2 + \tfrac{\xi\sigma}{\sigma+\zeta} + \tfrac{\gamma_-(\boldsymbol{y})}{\sigma+\zeta} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$2 + \tfrac{\xi\sigma}{\sigma+\zeta} + N \geq \sqrt{N^2 + 2\tfrac{N\xi\sigma}{\sigma+\zeta} + \tfrac{\xi^2\|\boldsymbol{y}\|^2}{N(\sigma+\zeta)^2}} \Leftrightarrow$$

$$4 + \tfrac{\xi^2\sigma^2}{(\sigma+\zeta)^2} + \cancel{N^2} + \tfrac{4\xi\sigma}{\sigma+\zeta} + 4N + \cancel{\tfrac{2N\xi\sigma}{\sigma+\zeta}} \geq \cancel{N^2} + \cancel{\tfrac{2N\xi\sigma}{\sigma+\zeta}} + \tfrac{\xi^2\|\boldsymbol{y}\|^2}{N(\sigma+\zeta)^2} \Leftrightarrow$$

$$f(\boldsymbol{y}) := 4(N+1) + \tfrac{\xi^2\sigma^2}{(\sigma+\zeta)^2} + \tfrac{4\xi\sigma}{\sigma+\zeta} - \tfrac{\xi^2\|\boldsymbol{y}\|^2}{N(\sigma+\zeta)^2} \geq 0. \tag{43}$$

我们寻找后一个不等式左侧的最小值。注意到 $\nabla_{\boldsymbol{y}}\sigma = \frac{1}{N}\mathbf{1}_N$。于是，

$$\nabla f(\boldsymbol{y}) = \tfrac{2\xi^2}{N}\tfrac{\sigma(\sigma+\zeta)^2 - \sigma^2(\sigma+\zeta)}{(\sigma+\zeta)^4}\mathbf{1}_N - \tfrac{4\xi}{N}\tfrac{\zeta}{(\sigma+\zeta)^2}\mathbf{1}_N - \xi^2\tfrac{2N\boldsymbol{y}(\sigma+\zeta)^2 - 2(\sigma+\zeta)\|\boldsymbol{y}\|^2\mathbf{1}_N}{N^2(\sigma+\zeta)^4}.$$

由于 $\nabla f(\boldsymbol{y})$ 中包含与 $\mathbf{1}_N$ 或 $\boldsymbol{y}$相乘的项，因此对于某个 $\alpha \in (0,1]$ 而言，必须满足 $\boldsymbol{y} = \alpha\mathbf{1}_N$，才能使 $\boldsymbol{y}$ 成为驻点。因此，$f(\boldsymbol{y})$ 的最小值要么在 $\boldsymbol{y} = \alpha\mathbf{1}_N$处取得，要么在 $[0,1]^N$的极点处取得，即 $\boldsymbol{y} = \sum_{i\in\mathcal{Q}}\boldsymbol{e}_i$，其中 $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^N$ 只有一个非零元素 $[\boldsymbol{e}_i]_i = 1$，且 $\mathcal{Q} \subset \{1,\dots,N\}$。下面分别研究这两种情况：情况 $\boldsymbol{y} = \alpha\mathbf{1}_N$：在这种情况下，$\sigma = \alpha$ 且 $\|\boldsymbol{y}\|^2 = \alpha^2 N$。将这些值代入（43）式可得

$$f(\boldsymbol{y}) = 4(N+1) + \cancel{\tfrac{\xi^2\alpha^2}{(\alpha+\zeta)^2}} + \tfrac{4\xi\alpha}{\alpha+\zeta} - \cancel{\tfrac{\xi^2\alpha^2 N}{N(\alpha+\zeta)^2}} \geq 0.$$

情形 $\boldsymbol{y} = \sum_{i\in\mathcal{Q}}\boldsymbol{e}_i$：在此情形下，定义 $q := |\mathcal{Q}|$，我们计算得到 $\sigma = \frac{q}{N}$ 和 $\|\boldsymbol{y}\|^2 = q$。然后代入 (43) 可得

$$f(\boldsymbol{y}) = 4N + 4 + \tfrac{\xi^2 q^2}{(q+N\zeta)^2} + \tfrac{4\xi q}{q+N\zeta} - \tfrac{\xi^2 qN}{(q+N\zeta)^2} \geq 0.$$

后者的一个充分条件是第一项大于负一，而当且仅当以下条件成立时，该条件成立

$$g(q) := 4(q+\zeta N)^2 - q\xi^2 \geq 0.$$

下面研究 g的一阶导数:

$$g'(q) = 8(q+\zeta N) - \xi^2 \leq 0 \Leftrightarrow q \leq \tfrac{\xi^2}{8} - \zeta N.$$

我们得出结论：若，则 $g\ q$ $q = 1$ $\zeta \geq ()$ $\frac{\xi^2-8}{8N}$ 在处取得最小值。接着注意到，若，则()。因此，若(20)成立，一卅对所有 $g\ 1 \geq 0$ $\zeta \geq \frac{\xi-2}{2N}$ $q \in \{1,\dots,N\}$，$g(q) \geq 0$均成立；这进而保证对所有 $\boldsymbol{y} \in [0,1]^N$，(42)成立。■

命题 2 的证明：由于$F_{(a,b),\ t}$ (16)中的t 具有(19)中的形式，$DF_{(a,b),\ t}$可按(40)计算。记 $\sigma = \operatorname{avg}(\boldsymbol{y})$。对于 $\boldsymbol{y} \in [0,1]^N$，$\sigma \leq 1$和 $\|\boldsymbol{y}\|^2 \leq N$。因此，

$$\|\boldsymbol{y}\mathbf{1}_N^\top\| = \sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{y}\mathbf{1}_N^\top\mathbf{1}_N\boldsymbol{y})} = \sqrt{N\|\boldsymbol{y}\|^2} \leq N$$

根据次可加性，$\|\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^\top\| = N$ 以及后者，

$$\max_{y\in[0,1]^N}\|DF_{(a,b),t}(\boldsymbol{y})\| \leq \max_{y\in[0,1]^N}\tfrac{1}{N}\ell'_{(a,b)}(\sigma)\|I + \mathbf{1}\mathbf{1}^\top\| + \tfrac{1}{N^2}\ell''_{(a,b)}(\sigma)\|\boldsymbol{y}\mathbf{1}^\top\| \leq \max_{y\in[0,1]^N}\tfrac{1}{N}\ell'_{(a,b)}(\sigma)(1+N) + \tfrac{1}{N^2}\ell''_{(a,b)}(\sigma)N \overset{(\sigma\leq 1)}{\leq} \tfrac{k_{(a,b)}}{N}((1+\zeta_{(a,b)})^\xi + \xi(1+\zeta_{(a,b)})^{\xi-1}) = L_{(a,b)}.$$

$F_{(a,b),\ t}$因此依据 [27, 定理 9.2、9.7]，在 $[0,1]^N$上是 $L_{(a,b)}$-利普希茨连续的。由于$\boldsymbol{\Omega} \subset [0,1]^{Nn_\omega}$，可以证明，式 (38) 的第二个加项是利普希茨连续的，其常数为 $\max_{(a,b)\in\mathcal{E}} L_{(a,b)}$，因此 F 是 L−利普希茨连续的。根据引理 5 和 [18,推论 20.28]，F是极大单调的。最后，应用引理 2 后，[15,定理 1] 的所有假设均得到满足，结论得证。■

C. 第 V 节的证明

引理 6 的证明：记 F为式 (24) 的伪梯度。我们计算

$$DF(\boldsymbol{\omega}) = \operatorname{diag}(\nabla^2 f_i(\omega_i))_{i\in\mathcal{I}} + \tfrac{1}{N}(I_N + \mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^\top)\otimes\begin{bmatrix}\operatorname{diag}(\ell'_{(a,b)})_{t\in\mathcal{T},(a,b)\in\mathcal{E}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix} + \tfrac{1}{N^2}\operatorname{col}\left(\mathbf{1}_N^\top\otimes\begin{bmatrix}\operatorname{diag}(M^i_{t,(a,b)}\ell''_{(a,b)})_{t\in\mathcal{T},(a,b)\in\mathcal{E}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\right)_{i\in\mathcal{I}}.$$

第二个加项中 col 的参数通常对每个 $i \in \mathcal{I}$ 都不同。因此，$DF(\boldsymbol{\omega})$ 仅当$\ell''_{(a,b)} \equiv 0$时才是对称的。该论点随后由 [17, 定理 4.5]得出。■

Derivation of (29): From Assm. 6 and 7 and $S^{(a,b)\top}_{\text{edge}}(u^i_t +$

$u^i_{\text{eq}}) = M^i_{t,\ (a,b)}$，我们将 (11) 中的 J_i 改写为:

$$J_i(\omega_i) = f_i^F(x^i_{T+1}) + \sum_t \Big\{ f_i^S(x^i_t, u^i_t) + \sum_{(a,b)} \big[(\tau_{(a,b)} + \tfrac{k_{(a,b)}}{N} \sum_j \Big[S^{(a,b)\top}_{\text{edge}} (u^j_t + u^j_{\text{eq}}) \Big] \Big) S^{(a,b)\top}_{\text{edge}} (u^i_t + u^i_{\text{eq}}) \Big] \Big\}.$$

利用 C 和 $\bar\tau$ 的定义并重新整理,

$$\begin{aligned} J_i(x^i_1, \boldsymbol{u}) =& f_i^F(x^i_{T+1}) + \textstyle\sum_t f_i^S(x^i_t, u^i_t) + \\ & (\bar\tau^\top + \text{avg}(\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}_{\text{eq}})^\top C)(u^i_t + u^i_{\text{eq}}). \end{aligned}$$

根据假设6以及 C 和 $\bar\tau$的定义， $Cu^i_{\text{eq}} = \mathbf{0}$，对于任意 $\bar\tau^\top u^i_{\text{eq}} = 0$ $i \in \mathcal{I}$ 29 ■，因此( )成立。

引理7的证明：记 $u^i := \text{col}(u^i_t)_{t\in\mathcal{T}}$； $\boldsymbol{u} = \text{col}(u^i)_{i\in\mathcal{I}}$. 我们可以将式(29)中的智能体成本改写为

$$\begin{aligned} J_i(x^i_1, \boldsymbol{u}) =& (f_i^F(x^i_{T+1}) + \textstyle\sum_{t\in\mathcal{T}} f_i^S(x^i_t, u^i_t) + \bar\tau^\top u^i_t) \\ & + \textstyle\sum_{j\in\mathcal{I}} \frac{1}{N} (u^j)^\top (I_T \otimes C) u^i \end{aligned}$$

式(30)的伪梯度可写为 [15, 式 32]

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u}) =& \text{col}(\nabla_{\boldsymbol{u}_i} (f_i^F(x^i_{T+1}) + \textstyle\sum_t f_i^S(x^i_t, u^i_t) + \bar\tau^\top u^i_t))_{i\in\mathcal{I}} \\ & + \tfrac{1}{N} (I_N + \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^\top) \otimes (I_T \otimes C) \boldsymbol{u}. \end{aligned}$$

通过展开二次型，可以验证

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{t=1}^N \|\boldsymbol{u}_t\|^2_{\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^\top \otimes C} &= \|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^\top \otimes (I_T\otimes C)} \\ \textstyle\sum_{t=1}^N \|\boldsymbol{u}_t\|^2_{I_N\otimes C} &= \|\boldsymbol{u}\|^2_{I_{TN}\otimes C} \end{aligned}$$

将后者代入 p的定义，可得

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u}) =& \textstyle\sum_i \big(f_i^F(x^i_{T+1}) + \sum_t f_i^S(x^i_t, u^i_t) + \bar\tau^\top u^i_t \big) + \\ & + \tfrac{1}{2N} \|\boldsymbol{u}\|^2_{(I_N + \mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^\top)\otimes(I_T\otimes C)}. \end{aligned}$$

然后可以计算 $\nabla_{\boldsymbol{u}} p$ ，以验证其结果为 F。 ■

定理 *1* 的证明：通过验证 [25, 定理 2.19] 的假设即可得出定理 1。具体而言，我们证明阶段成本的一个下界（引理10），并证明终端代价是集体系统$\boldsymbol{x}_{t+1} = (I_N \otimes B)\boldsymbol{u}_t$ 的控制李雅普诺夫函数（引理 11）。我们先在引理9中展示一些技术关系:

引理9. 以下结论对所有 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{Z}, i \in \mathcal{I}$ 均成立:

$$\textstyle\sum_{a\neq b} (S^{(a,b)}_{\text{edge}})^\top u_i = -(S^{(d_i,d_i)}_{\text{edge}})^\top u_i; \tag{44a}$$

$$[x_i]_{d_i} \geq (S^{(d_i,d_i)}_{\text{edge}})^\top u_i \ ; \tag{44b}$$

$$-[x_i]_{d_i} \geq \max_{a\in\mathcal{N}} [x_i]_a. \tag{44c}$$

证明。 (44a): 根据 $\mathbb{Z}$, $Pu_i = x_i$ 的定义。代入 P 的定义并对每一行求和,

$$\textstyle\sum_a \sum_{b:(a,b)\in\mathcal{E}} S^{(a,b)\top}_{\text{edge}} u_i = \sum_a [x_i]_a = 0 \tag{45}$$

其中使用了 $\mathbb{X}_i$ 和 $\sum_{a\in\mathcal{N}} \rho^i_{\text{eq}} = 1$ 的定义。利用 $\mathbb{U}$的定义, 注意到以下事实即可得出 (44a):

$$\textstyle\sum_{a\neq b} S^{(a,b)\top}_{\text{edge}} u_i = \sum_{(a,b)\in\mathcal{E}} \{S^{(a,b)\top}_{\text{edge}} u_i\} - S^{(d_i,d_i)\top}_{\text{edge}} u_i.$$

(44b): 根据 $u_i \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}_{\geq 0} - \{u^i_{\text{eq}}\}$ 和 $[u^i_{\text{eq}}]_a = 0$，对于每个与边 (d_i, d_i) 无关的 a，可得 $(S^{(d_i,b)}{}_{\text{边}})^\top u_i \geq 0$，对所有 $b \in \mathcal{N} \setminus \{d_i\}$ 均成立。由于 $x_i = Pu_i$, 根据 P 的定义:

$$[x_i]_{d_i} = \textstyle\sum_{b:(d_i,b)\in\mathcal{E}} (S^{(d_i,b)}_{\text{edge}})^\top u_i \geq (S^{(d_i,d_i)}_{\text{edge}})^\top u_i.$$

(44c): 由 $x_i + \rho^i_{\text{eq}} \in \Delta^{|\mathcal{N}|}$ 和 ρ^i_{eq}的定义可得 $[x_i]_a \geq 0 \ \forall\ a \neq d_i$ 和 $[x_i]_{d_i} \leq 0$。因此,

$$-[x_i]_{d_i} \overset{(45)}{=} \textstyle\sum_{b\in\mathcal{N}\setminus\{d_i\}} [x_i]_b \geq [x_i]_a \ \ \forall\ a \in \mathcal{N}. \quad ■$$

引理10. 对于所有$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{Z}$, (31a) 中的阶段成本满足

$$p^S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \geq \tfrac{\tau_{min}\|\boldsymbol{x}\|}{N n_x}. \tag{46}$$

证明。 根据 $C \succeq 0$ 和假设7, $p^S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \geq \sum_i \bar\tau^\top u_i$。因此,

$$\begin{aligned} p^S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) &\geq \textstyle\sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{(a,b)\in\mathcal{E}} \tau_{(a,b)} (S^{(a,b)}_{\text{edge}})^\top u_i \\ &\overset{\text{Ass. 6}}{\geq} \tau_{\min} \textstyle\sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{(a,b)\in\mathcal{E}, a\neq b} (S^{(a,b)}_{\text{edge}})^\top u_i. \end{aligned} \tag{47}$$

接下来注意到

$$\textstyle\sum_{a\neq b} S^{(a,b)\top}_{\text{edge}} u_i \overset{(44a)}{=} -S^{(d_i,d_i)\top}_{\text{edge}} u_i \overset{(44b)}{\geq} -[x^i]_{d_i} = |[x^i]_{d_i}|.$$

代入（47），

$$p^S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \geq \tau_{\min} \textstyle\sum_{i\in\mathcal{I}} |[x_i]_{d_i}|. \tag{48}$$

由（44c）， $|[x_i]_{d_i}| = \|x_i\|_\infty$。代入（48），

$$p^S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \geq \tau_{\min} \textstyle\sum_{i\in\mathcal{I}} \|x_i\|_\infty.$$

回顾 $\boldsymbol{x} = \text{col}_{i\in\mathcal{I}}(x_i)$, 因此

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{i,a} |[x_i]_a| = \max_{i\in\mathcal{I}} \|x_i\|_\infty \leq \textstyle\sum_{i\in\mathcal{I}} \|x_i\|_\infty.$$

于是得到 $p^S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \geq \tau_{\min}\|\boldsymbol{x}\|_\infty$. 对于任意 $y \in \mathbb{R}^n$, $n\|y\|_\infty \geq \|y\|_2$ 且由于 $x \in \mathbb{R}^{Nn_x}$，我们得到（46）。■

引理11。 设 p^F 如(31b) 所示，并且假设*8*和方程(35) 成立。对于所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{\text{kp}}(x)) \in \mathbb{Z}$ 和

$$p^F((I_N \otimes B)\boldsymbol{u}^{\text{kp}}(\boldsymbol{x})) - p^F(\boldsymbol{x}) \leq -p^S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{\text{kp}}(\boldsymbol{x})). \tag{49}$$

证明。为简洁起见，我们省略 $\boldsymbol{u}^{\text{kp}}$ 对$\boldsymbol{x}$ 的依赖，并令 $\boldsymbol{x}^+ = (I_N \otimes B)\boldsymbol{u}^{\text{kp}}$。定义从每个节点到已知路径 KP_i上所有父节点的映射:

$$\text{PK}_i : \mathcal{N} \rightrightarrows \mathcal{N}, \ \ \text{PK}_i : b \mapsto \{a : b = \text{KP}_i(a)\}.$$

于是，根据 B 的定义和 (34),

$$\begin{aligned} [x^+_i]_b &= \textstyle\sum_{a:(a,b)\in\mathcal{E}} (S^{(a,b)}_{\text{edge}})^\top u^{\text{kp}}_i(x_i) \\ &= \textstyle\sum_{a\in\text{PK}_i(b)} [x_i]_a - \delta_{d_i}(a). \end{aligned}$$

根据μ^{kp}_i 的定义,

$$[\mu^{\text{kp}}_i]_{\text{KP}_i(a)} = [\mu^{\text{kp}}_i]_a - [\tau^{\text{kp}}_i]_a. \ \text{ for all } a \in \mathcal{N}. \tag{50}$$

于是,

$$\begin{aligned} (\mu^{\text{kp}}_i)^\top x_i &= \textstyle\sum_{a\in\mathcal{N}} [\mu^{\text{kp}}_i]_a [x_i]_a \\ &= \textstyle\sum_{a\in\mathcal{N}} ([\mu^{\text{kp}}_i]_{\text{KP}_i(a)} + [\tau^{\text{kp}}_i]_a)[x_i]_a \\ &= (\tau^{\text{kp}}_i)^\top x_i + \textstyle\sum_{a\in\mathcal{N}} [\mu^{\text{kp}}_i]_{\text{KP}_i(a)} [x_i]_a \\ &= (\tau^{\text{kp}}_i)^\top x_i + \textstyle\sum_{b\in\mathcal{N}} [\mu^{\text{kp}}_i]_b \sum_{a\in\text{PK}_i(b)} [x_i]_a \\ &= (\tau^{\text{kp}}_i)^\top x_i + \textstyle\sum_{b\in\mathcal{N}} [\mu^{\text{kp}}_i]_b ([x^+_i]_b + \delta_{d_i}(b)). \end{aligned}$$

注意到 $\text{KP}_i(d_i) = d_i$, 因此根据假设6, $[\mu^{\text{kp}}_i]_{d_i} = 0$, 从而对于所有 b, $[\mu^{\text{kp}}_i]_b \delta_{d_i}(b) = 0$。于是,

$$(\mu^{\text{kp}}_i)^\top x_i = (\tau^{\text{kp}}_i)^\top x_i + (\mu^{\text{kp}}_i)^\top x^+_i$$

并且，根据假设8,

$$\begin{aligned} p^F(\boldsymbol{x}) - p^F(\boldsymbol{x}^+) &= \textstyle\sum_i \sigma^F_i((\mu^{\text{kp}}_i)^\top x_i) - \sigma^F_i((\mu^{\text{kp}}_i)^\top x^+_i) \\ &\geq m_F((\boldsymbol{\mu}^{\text{kp}})^\top \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{\mu}^{\text{kp}})^\top \boldsymbol{x}^+) = m_F(\boldsymbol{\tau}^{\text{kp}})^\top \boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{51}$$

根据 $\bar\tau$ 的定义以及根据$\tau_{(d_i,d_i)} = 0$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$,

$$\begin{aligned} \bar\tau^\top u^{\text{kp}}_i &= \textstyle\sum_{(a,b)} \tau_{(a,b)} (S^{(a,b)}_{\text{edge}})^\top u^{\text{kp}}_i \overset{(34)}{=} \\ & \textstyle\sum_{a\in\mathcal{N}} \tau_{(a,\text{KP}_i(a))} ([x_i]_a - \delta_{d_i}(a)) = (\tau^{\text{kp}}_i)^\top x_i. \end{aligned}$$

根据假设8，并记 $\bar{C} = (I_N + \mathbf{1}\mathbf{1}^\top) \otimes C$，

$$\begin{aligned} p^{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^{\mathrm{kp}}) &= \tfrac{\|\boldsymbol{u}^{\mathrm{kp}}\|^2_{\bar{C}}}{2N} + \textstyle\sum_i f_i^{\mathrm{S}}(x_i, u_i^{\mathrm{kp}}) + (\tau_i^{\mathrm{kp}})^\top x_i \\ &\leq \textstyle\sum_{i\in\mathcal{I}} (L_S + 1)(\tau_i^{\mathrm{kp}})^\top x_i + \tfrac{1}{2N}\|\boldsymbol{u}^{\mathrm{kp}}\|^2_{\bar{C}}. \end{aligned} \tag{52}$$

由（51）和（52）可知，当满足以下条件时，（49）成立：

$$(m_F - 1 - L_{\mathrm{S}})(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{kp}})^\top \boldsymbol{x} \geq \tfrac{1}{2N}\|\boldsymbol{u}^{\mathrm{kp}}\|^2_{\bar{C}}. \tag{53}$$

我们来求（53）左端的下界。

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{kp}})^\top \boldsymbol{x} &= \textstyle\sum_{i,a} [\tau_i^{\mathrm{kp}}]_a [x_i]_a \overset{\text{Ass.6}}{=} \sum_i \sum_{a\neq d_i} [\tau_i^{\mathrm{kp}}]_a [x_i]_a \\ &\geq \tau_{\min} \textstyle\sum_i \sum_{a\neq d_i} [x_i]_a \overset{(45)}{=} \tau_{\min} \sum_i (-[x_i]_{d_i}). \end{aligned} \tag{54}$$

现在将（53）的右端重写为：

$$\|\boldsymbol{u}^{\mathrm{kp}}\|^2_{\bar{C}} = \textstyle\sum_i \left((u_i^{\mathrm{kp}})^\top C u_i^{\mathrm{kp}} + \sum_j \left((u_j^{\mathrm{kp}})^\top C u_i^{\mathrm{kp}} \right) \right). \tag{55}$$

然后注意到，根据 C 的定义，对于所有 $i,\ j \in \mathcal{N}$：

$$(u_j^{\mathrm{kp}})^\top C u_i^{\mathrm{kp}} = \textstyle\sum_{(a,b)} k_{(a,b)} (u_j^{\mathrm{kp}})^\top S_{\mathrm{edge}}^{(a,b)} (S_{\mathrm{edge}}^{(a,b)})^\top u_i^{\mathrm{kp}}. \tag{56}$$

由（ 34 $u_j^{\mathrm{kp}\ \top} S^{(a,b)} \leq 1$ $a\ b$ $S^{(a,b)\ \top} u_i^{\mathrm{kp}} =$ ）可知，当 0 a 56 $b \neq \mathrm{KP}_i$（ ）时，对于所有（，）和（边），（ ）成立。我们从（ ）继续：

$$\begin{aligned} &\leq \textstyle\sum_{a\in\mathcal{N}} k_{(a,\mathrm{KP}_i(a))} S_{\mathrm{edge}}^{(a,\mathrm{KP}_i(a))} u_i^{\mathrm{kp}} \\ &= \textstyle\sum_{a\in\mathcal{N}} k_{(a,\mathrm{KP}_i(a))} ([x_i]_a - \delta_{d_i}(a)) \\ &= \textstyle\sum_{a\neq d_i} k_{(a,\mathrm{KP}_i(a))} [x_i]_a \leq \bar{k} \sum_{a\neq d_i} [x_i]_a \overset{(45):}{=} -\bar{k}[x_i]_{d_i} \end{aligned}$$

其中，根据假设6，我们注意到 $k_{(d_i,\mathrm{KP}_i(d_i))} = k_{(d_i,d_i)} = 0$。将后者代入（55），

$$\|\boldsymbol{u}^{\mathrm{kp}}\|^2_{\bar{C}} \leq (N+1)\bar{k} \textstyle\sum_{i\in\mathcal{I}} (-[x_i]_{d_i}). \tag{57}$$

由（57）和（54）可知，在（35）条件下，（53）成立。 ■

现在可以给出定理 1 的证明：

证明。 根据 [26, 定理 2], , 对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$， $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ 的解也是 $\mathcal{O}(\boldsymbol{x})$ 的解。于是，col $(\kappa_i(\boldsymbol{x}))_i$ 是一个序列的第一个输入，该序列求解（32），且初始状态为 $\boldsymbol{x}$。问题（32）在假设 3 和 6 下满足[25, 假设 2.2、2.3]。根据引理11， [25, 假设 2.14a]成立。根据假设 3， p^F 是利普希茨连续的。因此，根据引理10， [25, 假设 2.14b] 得到满足。通过对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$计算 $(I \otimes B)\ \boldsymbol{u}^{\mathrm{kp}}(\boldsymbol{x})$ 可验证， $\mathbb{X}$ 对于 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{kp}}(\cdot)$ 是控制不变的。应用 [25, 命题 2.16], 即可满足 [25, 假设 2.17] 。由 [25,定理 2.19]可得结论。■

参考文献

[1] M. Barth 和 K. Boriboonsomsin，《交通拥堵与温室气体》，*Access Magazine*，第 1 卷第 35 期，第 2–9 页，2009 年。[2] 欧盟委员会及交通与运输总司，可持续交通基础设施收费与交通外部性内部化：执行摘要。2019 年。[3] O. Jahn、R. H. M¨ohring 和 A. S. Schulz，《拥堵网络中具有长度限制的交通流最优路由》，载于运筹学研究会议论文集，第 437–442 页，施普林格，1999 年。[4] O. Jahn、R. H. M¨ohring、A. S. Schulz 和 N. E. Stier-Moses，《具有用户约束的拥堵网络中交通流的系统最优路由》，运筹学，第 53 卷第 4 期，2005 年。[5] E. Angelelli、V. Morandi、M. Savelsbergh 和 M. Speranza，《使用线性规划实现具有用户约束的交通流系统最优路由》，《欧洲运筹学杂志》，第 293 卷，第 863–879 页，2021 年 9 月。[6] J. G. Wardrop，《道路交通研究的若干理论方面》，英国土木工程师学会会刊，第 3 期，1952 年。[7] T. Roughgarden 和 E. V. Tardos，《自私路由有多糟糕? 》，《美国计算机协会会刊》，第 49 卷第 2 期，2002 年。[8] R. Correa 和 N. E. Stier-Moses，《容量受限网络中的自私路由》，《运筹学数学》，第 29 卷第 4 期，2004 年。[9] S. C. Dafermos，《多用户类别交通网络的交通分配问题》，交通科学，第 6 卷第 1 期，1972 年。[10] S. Dafermos，《交通均衡与变分不等式》，交通科学，第 14 卷，第 42–54 页，1980 年 2 月。[11] T. Larsson 和 M. Patriksson，《用于链路容量侧约束交通分配问题的增广拉格朗日对偶算法》，《交通研究*B*辑：方法论》，第 29 卷第 6 期，1995 年。[12] D. Calderone 和 S. S. Sastry，《马尔可夫决策过程路由博弈》，第八届国际信息物理系统会议，2017 年 4 月。[13] S. H. Q. Li、Y. Yu、D. Calderone、L. Ratliff 和 B. Acrkmese，《马尔可夫决策过程拥堵博弈中用于约束满足的收费》，载于美国控制会议，IEEE，2019 年 7 月。[14] B. G. Bakhshayesh 和 H. Kebriaei，《电动汽车联合路径规划与目的地规划的分散式均衡寻求：一种受约束聚合博弈方法》，《*IEEE*智能交通系统汇刊》，2021 年。[15] G. Belgioioso 和 S. Grammatico，《单调聚合博弈中的半分散式广义纳什均衡寻求》，*IEEE*《自动控制汇刊》，第 68 卷，2023 年 1 月。[16] G. Belgioioso 和 S. Grammatico，《聚合博弈中广义均衡寻求的投影梯度算法是预条件化的前向-后向方法》，载于欧洲控制会议，IEEE，2018 年。[17] D. Monderer 和 L. Shapley，《势博弈》，《博弈与经济行为》，第 14 卷，第 124–143 页，1996 年。[18] H. H. Bauschke 和 P. L. Combettes，希尔伯特空间中的凸分析与单调算子理论。CMS数学丛书，瑞士，施普林格国际出版公司，2017 年。[19] E. Benenati、M. Colombino 和 E. Dall'Anese，《存在恒温控制负载时多时段线性化最优潮流的可处理建模》，决策与控制会议，2019 年。[20] 美国公共道路局，《适用于大型高速计算机的交通分配手册》，美国商务部，公共道路局，1964 年。[21] Y. H. Wang，《独立试验中的成功次数》，《中华统计学志》，第 3 卷，第 295–312 页，1993 年。[22] K. M. Wolter，方差估计导论。社会与行为科学统计学，纽约：施普林格，第 2 版，2007 年。[23] F. Facchinei 和 C. Kanzow，《广义纳什均衡问题》，《运筹学年鉴》，第 175 卷，第 177–211 页，2010 年 3 月。[24] D. P. Palomar 和 Y. C. Eldar，信号处理与通信中的凸优化。2009 年。[25] J. B. Rawlings、D. Q. Mayne 和 M. Diehl，模型预测控制：理论、计算与设计。威斯康星州麦迪逊：Nob Hill 出版社，第 2 版，2017 年。[26] G. Scutari、S. Barbarossa 和 D. Palomar，《势博弈：具有耦合约束的矢量功率控制问题的框架》，载于国际声学、语音与信号处理会议论文集，IEEE，2006 年。[27] R. Rockafellar、M. Wets 和 R. Wets，变分分析。数学科学基础丛书，施普林格柏林海德堡，2009 年。



Emilio Benenati 是荷兰代尔夫特理工大学代尔夫特系统与控制中心的博士生。他于2016年获得意大利卡塔尼亚大学学士学位，并于2019年获得瑞士苏黎世联邦理工学院硕士学位。他曾于2018年访问美国科罗拉多大学博尔德分校，并于2024年访问美国加州大学圣塔芭芭拉分校。2019至2020年，他在意大利热那亚意大利技术研究院担任研究职务。



Sergio Grammatico 是荷兰代尔夫特理工大学系统与控制中心的副教授。他分别于2008年、2009年和2013年获得意大利比萨大学学士、硕士和博士学位。2012至2017年间，他曾在美国加州大学圣塔芭芭拉分校、瑞士苏黎世联邦理工学院和荷兰埃因霍温理工大学担任研究职务。Grammatico博士荣获2021年Roberto Tempo最佳论文奖。他是IEEE《自动控制汇刊》和IFAC《Automatica》的副编辑。