arXiv:2303.03299v1 [math.NT] 6 Mar 2023

与 p–进 Stark 猜想的两次邂逅

Benedict H Gross 和 Samit Dasgupta

2023年3月7日

目录

1 高斯和与 Stickelberger 定理 2 2 p-进伽马函数与 p-进 L-函数 3 3 虚二次情形 5 4 Artin L 级数的斯塔克猜想 6 5 关于 p-进 Artin L 级数的猜想 7 6 阿贝尔秩一情形 9 7 整群环中的调节子 11 8 从整群环到 p-进 L 函数 13 9 显式公式 14 10 秩一 Gross–Stark 猜想 14 11 高秩情形 17 12 积分猜想 19

在这篇短文中，我们讲述自己与 p进斯塔克猜想的相遇经历。Gross 介绍了他在 1977年 至 1986年 年间逐步形成这些猜想的过程（§1–8）；Dasgupta 则介绍了 1998年 至 2021年年间他与他人合作，最终证明这些猜想的过程（§9–12）。

1 高斯和与 Stickelberger 定理

我读研究生院三年级时，正在为学位论文寻找方向，便花了很多时间与刚到任的助理教授 David Rohrlich 和 Neal Koblitz 交谈。我（Benedict Gross）想看看 Barry Mazur 的重要论文《模曲线与艾森斯坦理想》中的一些方法，能否用于研究费马曲线。David 已在他的博士论文中确定了尖点群的对应物[32], , 这算是一个开端。我们很快意识到，我们需要理解 L-函数，而这涉及高斯和与雅可比和的理论[26],[37]。

回顾奇素数 p处二次剩余符号的欧拉同余：

$$\left(\frac{x}{p}\right) \equiv x^{(p-1)/2} \pmod{p}.$$

这可以推广为关于 N 次剩余符号的同余，其中 $N > 2$，如下所示。设 $\mathfrak{p}$ 是环 $A = \mathbb{Z}[\mu_N]$ 中的一个素理想，$q = p^f$ 是剩余域$\mathbb{F}_\mathfrak{p} = A/\mathfrak{p}$中元素的个数。我们总是假设剩余特征与 $2N$互素。于是，在模 $\mathfrak{p}$约化下，A 中的 N^{th}次单位根同构映射到 $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ 中的 N^{th} 次单位根。因此 $q \equiv 1$ 模 N。

对于剩余域中的任意非零元素 x，幂 $x^{(q-1)/N}$ 在（循环）群 $\mathbb{F}_\mathfrak{p}^*$ 中的阶为 N。因此，在环 A 中存在唯一的 N^{th} 阶单位根，记作 $\left(\frac{x}{\mathfrak{p}}\right)_N$，它满足

$$\left(\frac{x}{\mathfrak{p}}\right)_N \equiv x^{(q-1)/N} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

映射 $\chi(x) = \left(\frac{x}{\mathfrak{p}}\right)_N$ 是 $\mathbb{F}_\mathfrak{p}^*$ 的一个乘法特征，其取值于 $\mu_N \subset A^*$。

所讨论的高斯和具有如下形式

$$g(a, \mathfrak{p}) = -\sum_{x \in \mathbb{F}_\mathfrak{p}^*} \chi(x)^{-a} \ \psi(\mathrm{Tr}(x))$$

其中，a 是 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 中的非零类，且 $\psi: \ \mathbb{F}_p \to \mu_p$ 是非平凡加法特征。由于求和中的每一项都是一个 N^{th} 单位根与一个 p^{th} 单位根的乘积，因此和 $g(a, \mathfrak{p})$是数域 $\mathbb{Q}(\mu_N, \mu_p)$中的代数整数。利用伽罗瓦理论的一个简单论证可知，雅可比和

$$J(a, \mathfrak{p}) = g(a, \mathfrak{p})^N$$

是 $\mathbb{Q}(\mu_N)$中整数环 $A = \mathbb{Z}[\mu_N]$的一个元素，且与加法特征 ψ的选取无关。

Stickelberger 定理给出了由 $J(a,\mathfrak{p})$ 生成的 A 的主理想的因式分解。由于

$$g(a,\mathfrak{p})\overline{g(a,\mathfrak{p})} = q = p^f$$

这种因式分解只涉及整除有理素数 p 的素数。令 ζ 为一个本原 N^{th} 次单位根，对于 $u \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$，令 σ_u 为 $A = \mathbb{Z}[\zeta]$ 的自同构，它将 ζ 映到 ζ^u。由于 σ_p 生成素数 $\mathfrak{p}$ 的分解子群，A 中整除 p 的素数具有 $\sigma_u(\mathfrak{p})$ 的形式，其中 $u \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*/\langle p\rangle$。

对于非零类 a 在 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 中，我们令 $\langle a\rangle$ 为介于 0 和 N 之间且与 a 模 N同余的唯一整数。于是 [37]:

$$(J(a,\mathfrak{p})) = \prod_{u\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \sigma_u^{-1}(\mathfrak{p})^{\langle ua\rangle}.$$

特别地：$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, J(a,\mathfrak{p}) = \langle a\rangle + \langle pa\rangle + \ldots + \langle p^{f-1}a\rangle$.

由于 $J(a,\mathfrak{p}) = g(a,\mathfrak{p})^N$，这可由关于高斯和的类似结果推出。我们将 $g(a,\mathfrak{p})$ 看作 $\mathbb{Q}(\mu_N,\mu_p)$ 在唯一整除 $\mathfrak{p}$ 的素数处的完备化中的元素。于是 $g(a,\mathfrak{p})$ 属于子域 $\mathbb{Q}_p(\mu_p)$。这是 $\mathbb{Q}_p$ 的一个库默尔扩张，通过添加 $-p$ 的 $(p-1)^{st}$ 次根得到。令 $\zeta_p = \psi(1)$，并令 π 为 $-p$ 的唯一 $(p-1)^{st}$ 次根，它模 $(\zeta_p-1)^2$ 与 (ζ_p-1) 同余。于是

$$g(a,\mathfrak{p}) = \pi^{(p-1)(\langle a\rangle+\langle pa\rangle+\ldots+\langle p^{f-1}a\rangle)/N}\, E(a,\mathfrak{p}),$$

其中 π 的指数是整数，而 $E(a,\mathfrak{p})$ 是 $\mathbb{Z}_p^*$ 中的一个单位。

Stickelberger 找到了这个单位模 p 的一个公式。由于 $\langle a\rangle/N$ 是介于 0 和 1 之间的有理数，整数 $(p^f-1)\langle a\rangle/N$ 有一个 p-进展开式

$$(p^f-1)\langle a\rangle/N = z_0 + z_1 p + z_2 p^2 + \ldots z_{f-1}p^{f-1}$$

其中 $0 \le z_i < p$。然后（参见 [28, 第 1] 章）

$$\mathrm{ord}_\pi(g(a,\mathfrak{p})) = z_0 + z_1 + \ldots + z_{f-1},$$
$$E(a,\mathfrak{p}) \equiv 1/z_0!z_1!\ldots z_{f-1}! \pmod p.$$

2 p-进 Gamma 函数与 p-进 L-函数

Neal Koblitz 和我发现了 Stickelberger 阶乘公式的一种扩展，适用于 $E(a,\mathfrak{p})$，并使用了 p进伽马函数 [25]。我们的论证关键依赖于雅可比和的一个极限公式；Nick Katz 通过研究费马曲线的晶体上同调得到了该公式（参见 [28, Ch 15]）。

函数 $\Gamma_p(x)$ 是一个从 $\mathbb{Z}_p$ 到 $\mathbb{Z}_p^*$的连续函数，其取值由正整数 m（一个稠密集）上的函数值确定。对于 $1 \leq m \leq p$，我们有 $\Gamma_p(m) = (-1)^m(m-1)!$ 这与经典伽马函数类似。一般来说，$\Gamma_p(m)$ 等于 $(-1)^m$ 乘以所有小于 m 且与 p互素的正整数的乘积。根据威尔逊定理，函数 Γ_p 在 p进拓扑下连续，而 Γ_p 在负整数处的取值可以由以下公式得到

$$\Gamma_p(z)\Gamma_p(1-z) = (-1)^{m(z)}$$

其中 $m(z)$ 是满足 $0 < m(z) \leq p$ 且模 z 同余于.....的唯一整数 p.

我们关于单位 $E(a,\mathfrak{p})$ 的公式涉及分母为 N、介于 0 和 1 之间的有理数处的 Γ_p 值。回想一下，剩余域 $A/\mathfrak{p}$ 的基数为 $q = p^f$。于是

$$E(a,\mathfrak{p}) = \prod_{n=0}^{f-1} \Gamma_p(\langle p^n a\rangle/N).$$

大约在我们发现这个公式的同时，Ralph Greenberg 和 Bruce Ferrero 也发现了一个公式，将 p-进对数与相同的这些 p-进伽马函数的值联系起来，并将其与 p-进 L-函数 [18]的一阶导数联系起来。这些 p-进 L-函数由 Kubota 和 Leopoldt 引入，并与狄利克雷特征相关联。设 $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ 是导子为N的奇狄利克雷特征。那么，复狄利克雷 L-函数 $L(\chi, s)$ 在 $s = 0$ 处不为零，并且

$$L(\chi,0) = -\sum_{a=1}^{N} \chi(a)(a/N) = -B_{1,\chi},$$

$$L'(\chi,0) = \sum_{a=1}^{N} \chi(a)\log\Gamma(a/N) + B_{1,\chi}\log N.$$

Greenberg 和 Ferrero 为与偶 p-进特征 $\chi\omega$ 相关联的 p-进 L 函数找到了这些公式的类似结果，其中 ω 是 Teichmüller 特征：

$$L_p(\chi\omega,0) = -(1-\chi(p))B_{1,\chi},$$

$$L_p'(\chi\omega,0) = \sum_{a=1}^{N} \chi(a)\log_p\Gamma_p(a/N) + (1-\chi(p))B_{1,\chi}\log_p(N),$$

其中 $\log_p$ 是岩泽对数，且 $\log_p(p) = 0$。由于 $B_{1,\chi} \neq 0$，当且仅当 $\chi(p) \neq 1$时，$s = 0$ 处的取值非零。

当 $\chi(p) = 1$ 时，导数可由以下更简单的公式给出

$$L_p'(\chi\omega,0) = \sum_{a=1}^{N} \chi(a)\log_p\Gamma_p(a/N) = \sum_{a\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*/<p>} \chi(a)\log_p\prod_{n=0}^{f-1}\Gamma_p(\langle p^n a\rangle/N).$$

利用 p-进伽马函数与高斯和之间的关系，以及岩泽对数满足 $\log_p(p) = 0$ 这一事实，可得

$$L'_p(\chi\omega, 0) = \sum_{a\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*/<p>} \chi(a)\log_p g(a,\mathfrak{p}) = (1/N) \sum_{a\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*/<p>} \chi(a)\log_p J(a,\mathfrak{p}).$$

随后，Greenberg 和 Ferrero 运用代数数对数的线性形式中的一个论证，证明了 $L'_p(\chi\omega,\ 0) \neq 0$。（下一节中我们将给出一个简单的例子。）因此，$L'_p(\chi\omega,\ s)$在 $s = 0$ 处的阶，当 $\chi(p) \neq 1$ 时为零，当 $\chi(p) = 1$时为一。Greenberg 早先一篇关于岩泽模的论文已经预言了这一点 [20]。

3 虚二次情形

考虑奇狄利克雷特征 χ 为二次特征、导子为 D 的情形。那么，χ 决定了素数在虚二次域 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 中的分解方式。事实上，当且仅当 $-D$ 是模 p 的一个（非零）平方时，素数 p 才分裂。然而，二次互反律意味着，当且仅当 $\chi(p) = 1$ 时，p 才分裂。

考察欧拉乘积后，我们得到一个因式分解

$$\zeta_K(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s)L(\chi, s).$$

但是 $\zeta_{\mathbb{Q}}(0) = -1/2$ 和 $\zeta_K(0) = -h/w$，其中 h 是类数，而 w 是整数环 A_K的单位群的阶。（这些恒等式是一个更一般公式的推论，该公式描述了 ζ函数在 $s = 0$处的取值，我们将在下一节回顾这一公式。）利用这两个值，我们得到狄利克雷关于 K的类数的优美公式：

$$L(\chi, 0) = 2h/w = -B_{1,\chi} = -\sum_{a=1}^{D} \chi(a)(a/D) = \sum_{\chi(a)=-1} \langle a\rangle/D \ - \sum_{\chi(a)=+1} \langle a\rangle/D.$$

其中，最后两个求和是对 $a \in (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^*$取遍所有项。

在 p-进情形中，当 $\chi(p) = -1$时，$s = 0$ 处的值为 $L_p(\chi\omega,0) = 4h/w.$。另一方面，当$\chi(p) = +1$ 时，p-进 L 函数在 $s = 0$ 处为零，并且

$$L'_p(\chi\omega, 0) = (1/D) \sum_{a\in(\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^*/<p>} \chi(a)\log_p J(a,\mathfrak{p}) = (1/D)\log_p\Big(\prod_{\chi(a)=+1} J(a,\mathfrak{p})/\prod_{\chi(a)=-1} J(a,\mathfrak{p})\Big),$$

其中，乘积现在是对商群 $(\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^*/ < p >$中的 a 取遍所有项。

虚二次域 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 是 $\mathbb{Q}(\mu_D)$ 的子域，而 $\mathbb{Q}(\mu_D)/K$ 的伽罗瓦群是 $a \in (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^*$ 的子群，其中 $\chi(a)$ 为 $= +1$。因此，导数表达式中的雅可比和之积属于 K。这个乘积生成理想 $\mathfrak{q}/\overline{\mathfrak{q}}$ 的一个幂，其中 $\mathfrak{q}$ 是

p 中可被 $\mathfrak{p}$ 整除的因子。我们可以利用雅可比和的理想分解以及 $B_{1,\chi}$ 的类数公式来确定这个幂：

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\Big(\prod_{\chi(a)=+1} J(a,\mathfrak{p})/\prod_{\chi(a)=-1} J(a,\mathfrak{p})\Big) = \sum_{\chi(a)=+1}\langle a\rangle - \sum_{\chi(a)=-1}\langle a\rangle = -D2h/w.$$

若令 α 生成主理想 $(\mathfrak{q})^h$，则

$$L_p'(\chi\omega,0) = (-2/w)\log_p(\alpha/\overline{\alpha}) = (4/w)\log_p(\overline{\alpha}),$$

其中 K 通过位置 $\mathfrak{q}$嵌入到 $\mathbb{Q}_p$ 中。由于 $\overline{\alpha}$ 在这个嵌入下是一个非单位根的单位，$\log_p(\overline{\alpha}) \neq 0$，且一阶导数不为零。

4 Artin L 级数的斯塔克猜想

在学习 Ferrero 和 Greenberg 的成果的同时，我还在哈佛大学参加了一系列关于斯塔克猜想的讲座[35]。Harold Stark 从麻省理工学院前来作了三场入门讲座，其中包括他最近关于权1全纯模形式的 L 函数的计算。随后 John Tate 从另一个角度介绍了这些猜想 [36]。

斯塔克猜想关注 Artin L 函数在 $s=0$ 处的行为，并试图推广狄利克雷和戴德金关于 ζ 函数的研究。设 K 为一个具有 r_1 个实嵌入和 r_2对不等价复嵌入的数域。那么，$\zeta_K(s)$ 在 $s=0$ 处的阶等于 $r=(r_1+r_2-1)$。这也等于整数环 A的单位群 A^* 的秩。此外，$\zeta_K(s)$ 在 $s=0$ 处泰勒展开的首项等于 $(-hR/w).s^r$，其中 h 是 A的类数，w是 A^*中单位根的个数，而调节子 R 是一个$r\times r$ 矩阵行列式的绝对值，该矩阵的元素是单位的对数。（当 K 为虚二次数域时，如上一节所述，由于群 A^* 是有限群且 $R=1$，因此 $\zeta_K(0) = -h/w$。）

Stark 惊人的想法，是试图按照 ζ函数of K 可分解为 Artin L 函数乘积的相同方式，对 $s=0$ 处的首项进行因式分解。若 K 是群为 G的 k 的伽罗瓦扩张，则 Artin 得到了以下因式分解：

$$\zeta_K(s) = \prod_V L(V,s)^{\dim V}$$

其中，乘积遍历 G的不可约复表示 V。函数 $L(V,s)$ 是一个 Artin L 级数，在 s 的实部大于 1 的半平面内定义，其定义方式是对域 k的有限素点取欧拉乘积：

$$L(V,s) = \prod_{\mathfrak{p}} \det(1 - Fr_{\mathfrak{p}}(N\mathfrak{p})^{-s}|V^{I_{\mathfrak{p}}})^{-1}.$$

要确定 $L(V,s)$ 在 $s=0$ 处的首项，首先要确定其在该处的消失阶。对于 k 的每个阿基米德素点 v，令 G_v 为

G 中的一个分解子群（阶为 1 或 2）。若 V 是平凡表示，则 $L(V,s) = \zeta_k(s)$ 在 $s = 1$ 处有一个简单极点。若 V 是非平凡不可约表示，则函数 $L(V,s)$ 在 $s = 1$ 处正则且非零。由联系 s 与 $1-s$ 的函数方程中的阿基米德因子可得，对任意 V：

$$\operatorname{ord}_{s=0} L(V,s) = \sum_v \dim V^{G_v} - \dim V^G$$

将这个消失阶记为 $r(V)$。

令 Y 为 K 的阿基米德素点 v 上生成的自由阿贝尔群，并令 X 为Y的子群，由满足 $\sum a_v = 0$ 的元素 $\sum a_v.v$ 组成。作为 G的有理表示， $Y \otimes \mathbb{Q}$ 是集合 G/G_v 上的置换表示之和，而 $X \otimes \mathbb{Q}$ 则是这个直和减去平凡表示。由弗罗贝尼乌斯互反律，我们得到公式

$$\dim(X \otimes V)^G = \sum_v \dim V^{G_v} - \dim V^G = r(V)$$

Stark 猜想， $L(V,s)$在 $s = 0$ 处的首项的主分量应当是一个调节子 $R(V)$——即一个 $r(V) \times r(V)$单位对数矩阵的行列式，其中该矩阵位于 K的单位 A^* 的 V-同型分量中。特别地，在 $r(V) = 1$ 的特殊情形下，导数 $L'(V,0)$ 应当确定伽罗瓦扩张 K 中的一个单位（的对数）。这开辟了一条全新的途径来解决 Hilbert 关于构造类域的 12th 问题!

以下是 Tate 对 Stark 主猜想的表述方式。定义 G 同态

$$\lambda : A^* \to X \otimes \mathbb{R}$$

由公式 $\lambda(\epsilon) = \sum_v \log|\epsilon|_v.v$ 给出，其中 $||_v$ 是处 v处的典范绝对值。狄利克雷单位定理指出，λ 的核是挠子群（由单位根组成），其像是 $X\otimes\mathbb{R}$的一个余紧子群。对于 K，经典调节子就是该子群的余体积。狄利克雷定理的另一种表述是，诱导映射 λ： $A^* \otimes \mathbb{R} \to X \otimes \mathbb{R}$ 是一个 $\mathbb{R}[G]$-模同构。

由于两个有理 G 模 $A^* \otimes \mathbb{Q}$ 和 $X \otimes \mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$上同构，因此它们具有相同的特征，并且在 $\mathbb{Q}$上同构。取这样一个 G-同构 ϕ: $X \otimes \mathbb{Q} \to A^* \otimes \mathbb{Q}$，对于 G 的一个不可约复表示 V，考虑复向量空间的同构

$$(1 \otimes \lambda\phi)_V : (V \otimes X)^G \to (V \otimes X)^G.$$

Stark 调节子 $R(V)$ 是映射 $(1 \otimes \lambda\phi)_V$ 的行列式，而主猜想认为， $L(V,s)$ 在 $s = 0$ 处的首项是 $R(V)A(V)$ 这种形式的乘积，其中 $A(V)$ 是属于 V 的特征标生成的域中的一个代数数。

5 关于 p-进 ArtinL函数的猜想

这一表述如此优美，以至于我开始思考，能否将其推广到 p- 进 L 函数的情形。在这种情形下，我们假设基域 k 是全实的，并且伽罗瓦扩张

K 是一个 CM 域，其复共轭为 $c \in G$。我们只考虑全奇表示 V，其中 $c = -1$。

若将 V视为一个复表示，则 $r(V) = 0$ 且 $L(V, 0) \neq 0$。事实上，由 Siegel 的结果，$L(V, 0) = A(V)$ 是属于由 V 的特征标生成的域的一个代数数。与 p-进 L 函数更相关的是部分 L 函数 $L_S(V, s)$，它定义为对不在 S 中的素位取欧拉乘积，其中 S 是 k 中整除 ∞ 和 p的素位集合。因此

$$L_S(V, s) = \prod_{\mathfrak{p}} \det(1 - Fr_{\mathfrak{p}}(N\mathfrak{p})^{-s} | V^{I_{\mathfrak{p}}})\ L(V, s)$$

其中有限乘积取遍 k 中整除 p的素数 $\mathfrak{p}$。该函数在

$$r_p(V) = \sum \dim V^{G_{\mathfrak{p}}}$$

$s = 0$ 处消失的阶为，且首项具有如下形式

$$\prod_{\mathfrak{p}} (-\log p)^{\dim V^{G_{\mathfrak{p}}}}\ A_p(V)$$

其中 $A_p(V)$ 是属于由 V 的特征标生成的域的一个代数数，并且与数值 $L(V, 0)$ 密切相关

此后我们将 V视为定义在 G 上的 $\mathbb{C}_p$表示。由 p-进 L 函数 $L_p(V\omega, s)$ 由德利涅-Ribet [17] 和 Cassou Nogues [4], 定义，据猜想其取值为

$$L_p(V\omega, 0) = \prod_{\mathfrak{p}} \det(1 - Fr_{\mathfrak{p}} | V^{I_{\mathfrak{p}}})\ L(V, 0) = L_S(V, 0)$$

在 $s = 0$ 处，其中乘积遍历 k 中满足 p 可除有理素数的素数 $\mathfrak{p}$。当 G 为阿贝尔时，这一点已知成立；在此情形下，奇不可约表示 V 就只是 G 的一个特征 χ，满足 $\chi(c) = -1$，并且

$$L_p(\chi\omega, 0) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \chi(\mathfrak{p}))\ L(\chi, 0) = L_S(\chi, 0)$$

我们注意到，[17] 中为证明存在连续函数 $L_p(\chi\omega, s)$ 所需的同余关系——该函数定义在 $\mathbb{Z}_p$ 上，并且在负整数处取正确的值——所采用的证明使用了 Hilbert Eisenstein 级数的傅里叶展开。

在阿贝尔情形下，Greenberg 猜想 $L_p(\chi\omega)$ 在 $s = 0$ 处的消失阶等于 $\#\{\mathfrak{p} : \chi(\mathfrak{p}) = 1\}$ [20]。更一般地，我猜想 $L_p(V\omega, s)$ 在 $s = 0$ 处的消失阶应等于 $r_p(V)$。我还定义了一个 p-adic 调节子 $R_p(V)$，它是一个 $r_p(V) \times r_p(V)$ 矩阵的行列式，该矩阵的元素是扩张域 K 中“负 p-单位”的 p-adic 对数；并猜想其在 $s = 0$ 处的首项等于乘积 $R_p(V)A_p(V)$。这就是 p-adic Stark 猜想 [23], 的最早版本，下面给出一个精确表述。

负 p 单位 U^{-1} 是满足 $a^{1+c} = 1$的 K 的 S-单位 a。它们在所有无限素位以及所有不整除 p的有限素数处的赋值均为零。令 Y为由这些元素生成的自由阿贝尔群

在 K 中整除 p 的素位 $\mathfrak{q}$，并令 X 为满足 $\sum a(\mathfrak{q}) = 0$的 Y中那些 $\sum a(\mathfrak{q}).\mathfrak{q}$ 所成的子群。类比复数情形中的同态 λ，我定义了一个 G-同态 λ_p：$U^{-1} \to \mathbb{Q}_p \otimes X^{-1}$，其公式为

$$\lambda_p(a) = \sum_{\mathfrak{q}} \log_p(N_{K_\mathfrak{q}/\mathbb{Q}_p}(a)).\ \mathfrak{q}$$

并猜想此映射给出 G-模 $\mathbb{Q}_p \otimes U^{-1} \to \mathbb{Q}_p \otimes X^{-1}$ 的一个同构。这是关于单位的 Leopold猜想的一个类似版本，要证明它恐怕也同样困难。

存在一个整 G-同态 g：$U^{-1} \to X^{-1}$，其定义公式为

$$g(a) = \sum_{\mathfrak{q}} f_\mathfrak{q} \operatorname{ord}_\mathfrak{q}(a).\ \mathfrak{q}$$

其中 $f_\mathfrak{q}$ 表示剩余域次数。这给出了 G-模 $\mathbb{Q}\otimes U^{-1} \to \mathbb{Q} \otimes X^{-1}$ 的一个同构，我们将与 V 相关的调节子定义为

$$R_p(V) = \det(1 \otimes \lambda_p g^{-1} : (V \otimes X^{-1})^G). \tag{1}$$

由于 X^{-1} 是在由被 p 整除的素数构成的置换表示上，c 的负特征子空间，因此空间 $(V \otimes X^{-1})^G$ 的维数为 $r_p(V)$。

提出一般猜想时，我以先前讨论过的特殊情形为指引：其中 $k = \mathbb{Q}$,K 是一个虚二次域，而 V 对应于伽罗瓦群的非平凡特征 χ。假设有理素数 p 在 K 中分裂：$(p) = \mathfrak{q}\overline{\mathfrak{q}}$。那么 $L_S(\chi, s) = (1-\chi(p)p^{-s})L(\chi, s)$ 在 $s = 0$ 处的一阶消失，而 $L'_S(\chi, 0) = (\log p)L(\chi, 0) = (\log p)(2h/w)$。因此，上文定义的代数数 $A_p(\chi)$ 等于 $-(2h/w)$。另一方面，若 α 是主理想 $(\mathfrak{q})^h$ 的生成元，则比值 $\alpha/\overline{\alpha}$ 是 K 中的一个负特征 p 单位。我们有 $R_p(\chi) = (1/h) \log_p(\alpha/\overline{\alpha})$，其中 $\alpha/\overline{\alpha}$ 被视为完备化 $K_\mathfrak{q} = \mathbb{Q}_p$ 中的元素。猜想预言 $L'_p(\chi, 0) = R_p(\chi)A_p(\chi) = (-2/w) \log_p(\alpha/\overline{\alpha})$，而我们已看到这确实成立。利用关于高斯和的一般结果，我验证了只要 K 是 $\mathbb{Q}$ 的阿贝尔扩张，该猜想也成立。

6 阿贝尔秩一情形

Stark 在其猜想中指出了一个特别有趣的特殊情形：伽罗瓦扩张K/k 是阿贝尔的，其群为 G，并且 L-函数 $L_S(\chi, s)$ 在 $s = 0$处的一阶处消失。这个情形也有一个 p-进的表述。在此，我们假设 k 是全实的，并且 K 是一个 CM 域。令 S 表示 k的一个有限集，其中包含所有阿基米德赋值、所有整除 p的素位，以及在 K中分歧的所有素位。

我们进一步假设存在一个整除 p 的素位 $\mathfrak{p}$，它在 K中完全分裂，并固定 $\mathfrak{p}$ 在 K中的一个素因子$\mathfrak{q}$。由于 $\mathfrak{p}$ 分裂，对 G的所有特征 χ，我们有 $r(\chi) = r_p(\chi) \geq 1$。我们将考察复数 L 函数和 p-进 L 函数在 $s = 0$处的一阶导数。事实上，我们将考察由 G中的元素 σ 索引的部分 ζ 函数：

$$\zeta_S(\sigma, s) = \sum_{(\mathfrak{a},S)=1, \sigma_\mathfrak{a}=\sigma} N(\mathfrak{a})^{-s}$$

令 $U_{\mathfrak{p}}$ 为 K 中减号 S 单位 ϵ 构成的子群，其中对于所有不整除 $\mathfrak{p}$的素位 v，均满足 $|\epsilon|_v = 1$。Stark 猜想存在一个 $U_{\mathfrak{p}}$ 中的元素 ϵ，具有以下性质。首先，对于所有 G中的 σ

$$\log |\epsilon^{\sigma}|_{\mathfrak{q}} = -\, W\, \zeta'_S(\sigma, 0).$$

其中，W是 K中的单位根数。如果这一恒等式成立，它将确定 K的所有素位处 ϵ的绝对值，从而将 ϵ 确定到相差一个单位根的程度。Stark 进一步猜想，ϵ的 W^{th}根属于 k的一个阿贝尔扩张。当 $k = \mathbb{Q}$和 $K = \mathbb{Q}$（μ_N）时，ϵ是一个雅可比和，而其 N^{th}根是一个高斯和。

由于 $\zeta'_S(\sigma, 0) = (\log N\mathfrak{p})\zeta_{S'}(\sigma, 0)$，其中 $S' = S - \{\mathfrak{p}\}$，该猜想断言 ϵ是生成理想 $\prod_\sigma \sigma^{-1}(\mathfrak{q})^{W\,\zeta_{S'}(\sigma,0)}$的负单位。通过考察 p-进部分 ζ 函数的导数，我们可以进一步了解这个负单位；对此我猜想

$$\log_p(N_{K_{\mathfrak{q}}/\mathbb{Q}_p}\epsilon^{\sigma}) = -\, W\, \zeta'_p(\sigma, 0). \tag{2}$$

7 整群环中的调节子

我在 p-进 Stark 猜想以及秩一精化，并于1979年提出了它们。我在接下来的一年里，通过计算检验了这些猜想；其中一些情形的基域 k 是实二次域。我与我的学生 Leslie Federer 一起，验证了对于岩泽模[19]，相应的表述也成立。但我无法在一般性证明方面取得任何进展，于是转而关注其他课题，例如模曲线上的海格纳点。

1985年夏天，我重返这一课题，并参加了在哈佛大学举行的一个研讨班，与 Barry Mazur 和 John Tate 一起探讨我们所称的“精化猜想”。他们有意精化 Birch 和 Swinnerton-Dyer 关于椭圆曲线 L 函数的猜想（参见 [29]），而我则有意精化 Artin L 级数的斯塔克猜想 [24]。这两种情形最终都形成了一种通用框架，其中涉及有限阿贝尔群的整群环上的某种演算。这一表述蕴含了我先前关于 p-进 L 函数的猜想，但与素数 p 的选择无关。

我首先研究了整体域 k 的 ζ函数，因为 David Hayes 当时也在参加研讨班，而且他想了解函数域上的猜想。设 S 是 k 的一组非空素位 v，其中包含所有阿基米德赋值。k 的 ζ函数 ζ_S 由欧拉乘积定义

$$\zeta_S(s) = \prod_{v \notin S} (1 - Nv^{-s})^{-1}$$

在 s 的实部大于 1 的半平面内。它可以亚纯延拓到整个复平面，并在 $s = 1$处有一个简单极点。它在该点的零点阶数为

$$n = n(S) = \#S - 1$$

在点 $s = 0$处，其首项为 $(-h_S R_S / w)$。这里，h_S 是域 A_S 中 S-整数的 Dedekind整环的理想类群的阶，w 是 k中的单位根个数，而 R_S是狄利克雷在单位上的调节子的一种推广。令 $U_S = A_S^*$ 为 S-单位群，X_S为 S的素位所生成的自由阿贝尔群中次数为 0 的元素构成的子群。U_S 和 X_S 都是秩为 $n(S)$ 的有限生成群。A_S^* 的挠子群是阶为 w 的循环群，而群 X_S 是无挠的。调节子 $R(S)$ 是同态 $\lambda_S\colon U_S \to X_S \otimes \mathbb{R}$ 的行列式，其定义为

$$\lambda_S(\epsilon) = \sum_{v \in S} \log |\epsilon|_v \, v.$$

这个行列式取自自由部分的一组基，这些基的定向使结果为正。

这个公式唯一的瑕疵，是首项的分母中出现了 w；这反映了 $\zeta_S(s)$ 在 $s = 1$ 处有一个简单极点。我们可以通过引入一个非空且与 S 不相交的有限素位集 T 来修正这一点，并考虑在 T 处修正后的 ζ函数

$$\zeta_{S,T}(s) = \prod_{v \in T} (1 - Nv^{1-s}) \zeta_S(s).$$

它在 $s = 0$ 处的阶仍为 $n = n(S)$，但现在首项为 $-h_{S,\,T} R_{S,\,T} / w_T$，其中 $h_{S,\,T}$是带有在 T 处的投射模平凡化的修正理想类群的阶，而 $R_{S,\,T}$是

S-单位在子群$U_{S,\ T}$上的行列式，这些单位在 T 中的所有素位处都同余于 1。如果我们选取足够大的 T，使得这个子群无挠，那么 $w_T = 1$，并且无需处理分母。

“细化”这一公式的基本思路是考虑其他同态$U_{S,\ T} \to X_S \otimes G$，其中$G$ 是有限阿贝尔群。（Barry 和 John 考虑的是取值于 G 的高度配对。） λ_S 中的 $\log |\epsilon|_v$ 值来自阿代尔范数 N：$\mathbb{A}^*/k^* \prod_v A_v^* \to \mathbb{R}^*$ 的局部成分。对于 k 的一个有限阿贝尔扩张 L，它在 S 之外不分歧，伽罗瓦群为 G，我们有整体类域论的互反同态

$$F : \mathbb{A}^*/k^* \prod_{v \notin S} A_v^* \to G.$$

利用这一点，我们可以定义一个类似的同态$U_{S,\ T} \to X_S \otimes G$，其定义为

$$\lambda_F(\epsilon) = \sum_{v \in S} F_v(\epsilon)\ v.$$

这里， F_v 是将 F 限制到 $\mathbb{A}^*$ 的子群 k_v^* 上所得的映射。

λ_F相对于自由阿贝尔群$U_{S,\ T}$和 X_S 的定向基所对应的 $n \times n$ 矩阵，由 G 中的 n^2 个元素组成。令 $\mathbb{Z}[G]$ 为 G 的整群环，并令 I 为其中所有次数为零的元素构成的增广理想。从 G 到 I 的映射定义为 $g \to (g) - (1)$，它给出了阿贝尔群的一个同构 $G \cong I/I^2$。（我是在与 John Tate 一起于 Mystic Lakes 帆板运动时，从他那里学到这个上同调事实的。）因此，我们可以将矩阵的元素视为 I/I^2 的元素，并将其行列式（由通常的、关于 n 个变量的 n 次多项式定义）视为 I^n/I^{n+1} 的一个元素，我们将其记作 $\det(\lambda_F)$。（Barry 和 John 最初在群 $\mathrm{Sym}^n(G)$ 中定义他们的调节子，但我最终说服他们改用群 I^n/I^{n+1}。）

精化猜想将这个调节子与一个元素$\theta_{S,\ T}$联系起来，该元素属于 $\mathbb{Z}[G]$，并源自阿贝尔扩张 L。这个元素具有如下性质：对于所有特征 χ of G

$$\chi(\theta_{S,T}) = L_{S,T}(\chi^{-1}, 0).$$

根据 Deligne-Ribet [17] 和 Cassou-Nogues [4]的结果，它属于整群环。我猜想$\theta_{S,\ T}$ 属于 $\mathbb{Z}[G]$的理想 I^n，其中 $n = \#S - 1$，并且模 I^{n+1} 同余于$-h_{S,\ T} \det(\lambda_F)$。

今后我们将假设 $n \geq 1$，因为在少数几个 $n = 0$的情形下，检验该猜想很容易。那么 I^n/I^{n+1} 是一个有限阿贝尔群，其素因子与 G相同。如果G 是循环的，那么对于所有 $n \geq 1$， I^n/I^{n+1} 都同构于 G。一般而言，当 n足够大时，群 I^n/I^{n+1} 会稳定下来，这取决于 G。例如，若 $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$，则对 $n \leq p$有 $I^n/I^{n+1} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{n+1}$，而对 $n \geq p$有$I^n/I^{n+1} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{p+1}$。

在数域情形下，这个猜想归结为一个关于 2-群的问题。事实上，如果 k 有一个复位置 v，那么对于所有 S-单位 ϵ， $F_v(\epsilon) = 1$ 属于 G。因此， λ_F的矩阵中有一整行属于 I^2，其行列式属于 I^{n+1}。在这种情况下，对于所有 χ，我们还有 $L_{S,\ T}(\chi, 0) = 0$，所以 $\theta_{S,\ T} = 0$ 属于 $\mathbb{Z}[G]$，猜想成立。如果我们假设 k 是全实的，那么除非 L 是全复的，否则猜想也显然成立。接着，对于每个实位置 v， $F_v(\epsilon)$ 在 G中的阶为 1 或 2，具体取决于

单位的符号 ϵ 在 v处。因此 $2\det(\lambda_F)$ 属于 I^{n+1}。类似地，$L_{S,\,T}(\chi,\,0)=0$，除非 χ 是全奇的。我利用德利涅和 Ribet 关于 L值的 2 可除性的一些精妙结果，在许多这类情形下验证了猜想 [24, §5], ，后来广濑证明了猜想在一般情形下成立 [27]。

8 从整群环到 p-阿贝尔 L 函数

如前所述，上一节中的表述由于阿基米德考量，并不能推出 p-阿贝尔 Stark 猜想。不过，我们可以稍作修改，使其能够推出该猜想 [24, §8]。这里我们讨论这样的情形： k 是 CM 域 K的全实子域，而 χ 是伽罗瓦群的非平凡特征。设 L 是 k 的有限阿贝尔扩张，其伽罗瓦群为 G。假设 L 不包含 K，并设 S 是 k 的一个非空有限素位集，其中包含所有阿基米德赋值以及 LK中所有分歧的素位。最后，设 T 是一个与 S 不相交的有限素位集，它能区分 k 的任何在 S之外不分歧的阿贝尔扩张中的单位根。

我们考虑 k 上的一维环面 H，它在 K上分裂。它可以定义在 S 整数环A_S 上，而阿贝尔群 $H(A_S)$ 是有限生成的，其秩等于 S 中在 K中分裂的素位 $\mathfrak{p}$ 的个数 n 。这与自由群 $X_{S,\,K}^{-}$的秩相同。注意，所有分裂的素位 $\mathfrak{p}$都是有限素位，因为 K 是全实域 k的全复扩张。 L/k 的伽罗瓦群G 同时也是阿贝尔扩张 LK/K的伽罗瓦群，因此根据整体类域论，我们有一个满同态 $F\colon \mathbb{A}_K^*/K^*\prod_{v\notin S}A_{K,\,v}^*\to G$。这给出了一个同态

$$\lambda_F : H(A_S)_T \to X_{S,K}^{-}\otimes G$$

由 $\lambda_F(\epsilon)=\sum_{v\in S}F_v(\epsilon)\ v.$ 定义。为秩为 n 的自由群选取基，我们得到一个元素属于 $G=I/I^2$ 的 $n\times n$ 矩阵。因此，$\det(\lambda_F)$ 属于 I^n/I^{n+1}。

关于环面 H 的猜想将这个调节子与一个 θ元素 $\theta_{S,\,T}$ 联系起来，该元素属于 $\mathbb{Z}[G]$ ，由阿贝尔 L 函数的值构造而成。对于 G 的每个特征 ρ，我们要求 $\rho(\theta_{S,\,T})=L_{S,\,T}(\chi.\rho^{-1},0)$。同样，这个元素是整的，这是一个非平凡的定理。关于环面 H 的精化猜想指出，这个元素属于理想 I^n，并且模 I^{n+1} 后等于 $\det(\lambda_F)$ 与一个来自 χ 的复 L 函数的整数值的乘积。

如果我们假设集合 S 包含 p 的所有素因子，就可以将 $L=L_m$ 取为 k 的第 m 个圆分扩张，其伽罗瓦群同构于循环群 $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$。精化猜想与域扩张相容，因此我们得到一列元素 $\theta_{S,\,T}$ ，它们属于 $I^n/I^{n+1}=\mathbb{Z}/p^m/\mathbb{Z}$ ，并收敛到 $\mathbb{Z}[[\mathbb{Z}_p]]$ 中的一个整测度。该测度对分圆特征的积分给出 p 进 L 函数 $L_p(\chi\omega,s)$，而我们的群环猜想归结为 p 进 Stark 猜想。

此时，我对 p-进 Stark 猜想及其精化形式已经感到满意，但还看不出该如何取得任何进展。因此，我把这个问题交给了我的优秀学生。在他的博士论文中，Henri Darmon 证明了 Kolyvagin 为在 Selmer 群中构造类和湮灭子而引入的方法，在精化猜想的框架下完全行得通。而在他的本科论文中，Samit Dasgupta 开始研究 Stark 的原始猜想及其 p-进类比。下面就让他继续讲述这个故事吧。

9 显式公式

1998年春天，我（Samit Dasgupta）请我的本科导师 Dick Gross 为我建议一个高年级荣誉论文的题目和导师。他建议我阅读 Tate 关于 Stark 猜想的著作 [36]，并与 Brian Conrad 合作。Stark 猜想令我着迷，完成学位论文后[10]，我在研究生院期间仍继续思考这些猜想。2001年夏天，我参加了 Henri Darmon 一系列精彩的讲座 [7]，主题是他最近提出的关于“Stark–Heegner 点”的猜想 [8]。在会议上，我与他讨论了可能的学位论文题目，他建议可以将他的构造推广到 Stark 单位的背景中。

我的博士论文（由 Darmon 和 Ken Ribet 共同指导）研究了实二次域 k 以及一个在 p 中惰性 k的素数。我提出了一个关于 Brumer– Gross–Stark 单位的猜想性精确公式 u_p 在 k_p^*中，将 Gross 猜想（2）推广到 $\mathrm{N}_{k_p/\mathbb{Q}_p}(u_p) \in \mathbb{Q}_p^*$。这个猜想的一大意义在于，我证明了所有 Brumer–Stark 单位（对固定的基域 F和所有素数 p），连同一些简单的平方根，生成了 F 的最大阿贝尔扩张。因此，我的猜想为希尔伯特第十二问题提供了一种 p-进视角。

我的学位论文采用了 Greenberg 和 Stevens 在研究$\mathscr{L}$-不变量以及 Mazur、Tate 和 Teitelbaum 的猜想[21]时提出的核心新视角。他们的一个关键思想是，用于定义 p-进 L-函数的 $\mathbb{Z}_p^*$ 上的测度可以延拓到 $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$，然后再提升到

$$(\mathbb{Z}_p^2)' = \mathbb{Z}_p^2 - p\mathbb{Z}_p^2,$$

它是一个 $\mathbb{Z}_p^*$-丛，覆叠在 $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$上。这类提升由称为 Hida 族的 p-进模形式族确定。特别是，他们发现， p-进 L-函数在平凡零点处的首项受模形式的无穷小变形控制。

10 秩一格罗斯–斯塔克猜想

2003 年秋，在完成学位论文写作并申请博士后职位期间，我与 Darmon 一同访问了普林斯顿，参加关于 Birch–Swinnerton-Dyer 猜想的专题学期。Darmon、Wiles 和 Skinner 开设了一门课程，轮流讲授模形式、伽罗瓦表示及其算术应用。Wiles 讲授费马大定理，Darmon 讲授 Stark–Heegner 点，Skinner 则讲授他与 Urban 在椭圆曲线的岩泽理论主猜想方面的工作。Skinner–Urban 方法推广了 Mazur–Wiles 和 Wiles 关于 Deligne–Ribet p-进 L-函数的岩泽主猜想的工作。Wiles 运用 Ribet 方法，在希尔伯特模形式的 Hida 族这一框架下，证明了全实域的主猜想。

Ribet 在具有变革意义的论文 [30] 中确立了他的方法，并证明了 Herbrand 定理的逆命题。该结果表明，若 p 是奇素数，且 $k > 0$ 是满足$k \not\equiv 0$ (模 $p-1$)的偶整数，那么 $p \mid \zeta(1-k)$ 蕴含 $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\mu_p))$ 的 $\otimes \mathbb{F}_p$ 分量（伽罗瓦通过 χ^{1-k} 作用于该分量）是非平凡的，其中 χ 是模 p 分圆特征。Ribet 的技巧承袭 Siegel，首先将 $\zeta(1-k)$ 认作艾森斯坦级数 E_k 的常数项，该级数定义在

$SL_2(\mathbb{Z})$ 上。Ribet 证明，整除关系 $p \mid \zeta(1-k)$ 蕴含 p模 p同余于一个权为 2 且 nebentypus 特征为 ω^{k-2}的尖点特征形式 f。与该特征形式相联系的是一个伽罗瓦表示（在 Ribet 撰写论文时，这些伽罗瓦表示的存在性及其性质尚未得到充分确立，因此 Ribet 运用了一些精妙的代数几何方法，构造出具备所需性质的表示）。尖点形式与艾森斯坦级数之间的同余关系意味着，该伽罗瓦表示在剩余意义下可约，从而给出模 $\mathbb{F}_p(\chi^{1-k})$的一个伽罗瓦上同调类。此外，关于该伽罗瓦表示的局部考量使人能够证明，此上同调类处处不分歧。整体类域论将这种非零上同调类的存在，与 $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\mu_p)) \otimes \mathbb{F}_p$中所期望分量的不消失联系起来。Mazur–Wiles（以及后来的 Wiles）将 Ribet 的技巧应用于 p-进模形式族的背景下，从而按照岩泽主猜想的预言，将 p-进 L-函数与某些伽罗瓦模的特征理想联系起来。

鉴于我刚刚在 Darmon 和 Ribet 指导下完成的学位论文工作，以及我们当时正在听 Skinner 的课程，Darmon 和我不禁思考：Ribet/Mazur–Wiles 方法是否可以用来证明 Gross 猜想，即关于 p-进 L-函数的猜想。如果 p-进 L-函数可被 T^r 整除，其中 $T=0$ 对应于在某个 $s \in \mathbb{Z}_p$ 处取值，那么 Wiles 证明了存在一个尖点形式族，其模 T^r 与某个艾森斯坦级数同余。Greenberg–Stevens 方法表明，在一个平凡零点处，应研究是否存在模 T^{r+1} 的这种同余。这确实是我们所发现的；为简单起见，让我们在基域 $\mathbb{Q}$ 上描述这一点。

设 χ 为一个奇狄利克雷特征，满足 $\chi(p) = 1$。对于每个奇的 $k \geq 1$，存在一个权为 k 的艾森斯坦级数

$$E_k(1,\chi)(z) = \frac{L(\chi, 1-k)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d \mid n} \chi(d) d^{k-1} \right) q^n.$$

这些形式的普通 p-稳定化

$$E_k^*(1,\chi)(z) = \frac{L_p(\chi\omega, 1-k)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d \mid n, p \nmid d} \chi(d) d^{k-1} \right) q^n$$

插值到一个 p-进族中。接下来应用 Serre 的一个观察。考虑将 χ 替换为平凡特征所定义的类似族（因此，当 $k \geq 2$ 为偶数时，其特化是经典的）：

$$E_k^*(1,1)(z) = \frac{\zeta_p(1-k)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d \mid n, p \nmid d} d^{k-1} \right) q^n.$$

定义归一化 $G_k^* = {\zeta_p}^{2}{}_{(1-k)} E_k^*$~~(1, 1),~~ 使其常数项为 1：

$$G_k^* = 1 + \frac{2}{\zeta_p(1-k)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d \mid n, p \nmid d} d^{k-1} \right) q^n.$$

p-adic ζ函数在 $s=1$ 处有一个极点，这意味着族 G_k^* 在 $k=0$ 处的特化只是常数 1。这是 Serre 的观察。

我们用此来定义线性组合：

$$F_k^* = E_k^*(1,\chi) - \frac{L_p(\chi\omega, 1-k)}{L(\chi,0)} \cdot E_1(1,\chi)G_k^*. \tag{3}$$

我们作出以下几点观察：

1. 这些系数经过选择，使常数项相互抵消。形式 F_k^* 在无穷远点尖点。

2. 由于 $L_p(\chi\omega, 1-k)$ 在 $k=1$ 处有一个平凡零点，形式 F_k^* 在权 1 下特化为 $E_1^*(1,\chi)$。

3. 事实上，由于 $G_0^* = 1$，族 F_k^* 在权 $k=1$ 的无穷小邻域内是一个 Hecke特征形式；也就是说，若我们将其展开为关于 $(k-1)$ 的泰勒级数并模 $(k-1)^2$ 约化，它仍然是一个特征形式。

F_k^*的“模 $(k-1)^2$ 海克特征值”可以显式计算。对于素数 $\ell \nmid pN$，其中N是 χ 的导子，该特征值与 $E_k^*(1,\chi)$ 的特征值相同，即

$$1 + \chi(\ell)\ell^{k-1} \equiv 1 + \chi(\ell) + \chi(\ell)\log_p(\ell)(k-1) \pmod{(k-1)^2}.$$

对于 U_p-算子，其特征值更有意思：

$$1 - \frac{L_p'(\chi\omega, 0)}{L(\chi,0)}(k-1) \pmod{(k-1)^2}.$$

比值 $-L_p'(\chi\omega, 0)/L(\chi,0)$ 恰好出现在 Gross 猜想中。Greenberg–Stevens 方法展示了如何利用与尖点族相关联的伽罗瓦表示，将该族的 U_p-算子的导数与某个伽罗瓦上同调类联系起来。在我们的情形中，这个伽罗瓦上同调类可以通过库默尔理论与 Brumer–Gross–Stark 单位 u_χ 联系起来。因此，证明 Gross 猜想所需的各个环节都已齐备。然而存在一个问题——族 F_k^* 在无穷远点尖点，但它并不是尖点的。

此时我在哈佛大学做博士后，并开始与波士顿大学的 Robert Pollack 讨论如何修改这一构造，以得到一个尖点族。怀尔斯方法是应用某个海克算子，从“在无穷远点尖点”过渡到“尖点”，但这个算子实际上会湮灭我们的形式。Pollack 在黑板上写下……之后，我们发现了解决办法

“Ribet 会怎么做？”

我回家后，研究了 Ribet 在其原始构造中证明该形式具有尖点性的 Ribet 方法。在 Ribet 的情形下，很容易枚举 $\Gamma_0(p)$ 上的艾森斯坦级数，并利用同余关系排除所构造的形式是其中任何一个的可能性。随后我意识到，我们的情形存在一个问题——还有另一个艾森斯坦族，我们无法利用同余关系将其排除。也就是说，这个族

$$E_k^*(\chi,1) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n, p\nmid d}\chi(n/d)d^{k-1}\right)q^n$$

也专门化为 $E_1^*(1,\chi)$ 在权重 1，因此必须在该线性组合（3）中加入适当的倍数。定义

$$H_k^* = E_k^*(1,\chi) - \frac{L_p(\chi\omega, 1-k)}{L(\chi,0)} \cdot E_1(1,\chi)G_k^* - \frac{L_p(\chi\omega,1-k)L(\chi^{-1},0)}{L_p(\chi^{-1}\omega,1-k)L(\chi,0)}E_k^*(\chi,1). \tag{4}$$

事实证明，该线性组合在 ∞ 和 $1/p$处的常数项均为零。如果

$$\frac{L_p'(\chi\omega,0)}{L(\chi,0)} + \frac{L_p'(\chi^{-1}\omega,0)}{L(\chi,0)} \neq 0, \tag{5}$$

那么可以定义一个海克算子 t，使得 $t \cdot H_k^*$ 成为一个尖点普通族模形式，并按如下意义进行归一化：$a_1(H_k^*) = 1$。我们还保留了 H_k^* 是一个“模（$k-1$）^{2}-特征形式”的性质，不过其海克特征值与上文 F_k^* 中列出的略有不同。整个构造在希尔伯特模形式的背景下也能更一般地成立。将这一构造与 Greenberg–Stevens 的思想相结合，我们得到了以下结果（[13, 定理 2]）。

定理 10.1 设 F为一个全实域，$\mathfrak{p}$ 为 F中位于 p之上的一个素理想，χ 为 F 的一个全奇特征，且满足 $\chi(\mathfrak{p}) = 1$。假设 Leopoldt 猜想对于 F在 p处成立，并且条件（5）也成立。设 K 为一个包含 χ的不变域的 CM 域，并在 K中固定 $\mathfrak{p}$ 的一个素因子 $\mathfrak{q}$。设 u_χ 为一维 $\mathbb{C}_p$-向量空间 $(\mathscr{O}_K[1/\mathfrak{p}]^* \otimes \mathbb{C}_p)^{\chi^{-1}}$的一个生成元。那么

$$\frac{\log_p(N_{K_\mathfrak{q}/\mathbb{Q}_p}(u_\chi))}{\mathrm{ord}_\mathfrak{q}(u_\chi)} = -\frac{L_p'(\chi\omega,0)}{L(\chi,0)}. \tag{6}$$

不难看出，(6) 等价于 §6中陈述的 Gross 猜想 (2)。假设 F、p) 的 Leopoldt 猜想成立，便可确保 p-进 ζ函数在 F处有极点 $s=1$（Colmez 已证明这两项事实等价[6]）。这一点被用于构造族G_k^*，使其在权 $k=0$处特化为常数 1。

11 高秩情形

2012 年 2 月，我访问 UCLA 进行了一些演讲，并结识了 Chandrashekhar Khare 的研究生 Kevin Ventullo。Kevin 对我与 Darmon 和 Pollack 的合作研究很感兴趣。他提出了一个很好的想法：通过其他方法构造族 G_k^*，从而去掉定理 10.1 中对 Leopoldt 猜想的假设。运用希尔伯特模形式的代数几何视角，可以在足够高的权数下定义哈斯不变量的一个提升，然后通过取这个形式的幂来构造 p-进族。

我很高兴 Kevin 已经从我们的结果中去除了 Leopoldt 猜想这一假设，并认为他的工作将会成为一篇出色的学位论文。几个月后，当他寄给我一份手稿时，我感到极为惊讶：他不仅去除了这一假设，还去除了假设（5）！换言之，Kevin 使秩 1 阿贝尔 Gross–Stark 猜想的证明完全摆脱了任何未证实的前提。

Kevin 去除条件（5）的想法是，直接设想该条件不成立时会发生什么。在这种情况下，形式 H_k^* 并不是模 $(k-1)^2$, 下的归一化特征形式，而我们此前正是利用这一点，构造了从 Hida的Hecke代数到对偶数环 $\mathbb{C}_p[T]/T^2$的同态。然而，我们可以研究该形式的 Hecke轨道，并分析 Hecke代数在这个空间上的作用。这就给出了一个从 Hecke代数到矩阵代数的同态。令我感到颇为不可思议的是，这个同态的像竟再次与对偶数环同构！因此，证明可以像之前一样继续进行。

读到 Kevin 的证明后，我意识到同样的思想可以用来研究高秩Gross猜想。沿用§5中的记号，设 χ 是阿贝尔群 $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ 的一个（1维）特征。Gross 猜想 $L_p(\chi\omega, s)$ 在 $s = 0$ 处至少以 $r = r_p(\chi)$ 阶消失，其中 r 是 $\mathfrak{p}$ 中满足 $\chi(\mathfrak{p}) = 1$ 的、位于 p 之上的素数 k 的数量。注意，根据 Wiles 的证明，即岩泽主猜想（另见 [5] 和 [33], ，它们提供了另一种方法，并特别处理了 $p = 2$ 的情形），我们知道 $L_p(\chi\omega, s)$ 在 $s = 0$ 处至少以 r 阶消失。如§5所述，Gross 还猜想了 $L_p^{(r)}(\chi\omega, 0)$ 的一个精确公式。

当 $r > 1$时，[13] 中采用并在§10中描述的策略会遇到困难。不可能写出一个在权 1 的无穷小邻域内为 Hecke特征形式的单个形式。不过，可以写出一组 Hecke稳定的形式，并构造一个从 Hecke代数到某个矩阵环的同态。在这种情况下，该同态的像是对偶数环的一种推广，其中对每个素数 $\mathfrak{p}$ 都包含一个无穷小变量。精确定义见 [16] 。这个同态还能够“看到” p-adic L-函数的首项。因此，我当时相当有希望沿用 [13] 的方法来证明高秩猜想。

我就这个想法联系了 Kevin，当然，他早已发现了完全相同的构造。我们决定携手合作。尽管付出了许多努力，我们还是卡在了证明的代数部分，无法完成。在 [13], 中，我们利用与尖点Hilbert模形式相关的伽罗瓦表示，构造了一个伽罗瓦上同调类；按照一种意义来说，该类是圆分的，即它在 p 处分解群上的限制是分圆特征的对数的倍数。若在秩 r 情形中直接采用同样的策略，就需要构造 r 个线性无关的此类上同调类。然而，在这种情形下，我们一个圆分类也无法构造；秩1情形所具有的某种刚性，此时已不复存在。经过数月的共同努力，我们的进展陷入停滞，我便开始专注于其他项目。

2013年3月，Mahesh Kakde 来到加州大学圣克鲁兹分校拜访我，讨论另一个与 p-进 L级数 [11] 的因式分解有关的项目。顺便一提，他提到伦敦的数论组曾举办研讨班，研读我与 Darmon 和 Pollack 合写的论文；他想知道我对高秩情形有什么看法。我向他介绍了我和 Kevin 的研究进展，以及我们遇到的瓶颈。回到伦敦后，我们开始通过电子邮件讨论这个问题。我前往伦敦参加2015年岩澤会议期间，我们取得了一些重要进展；我们在某些附加假设下找到了一个秩2情形，使我们能够模仿秩 1 情形中存在的“刚性”。

回到圣克鲁兹后，我开设了一门研究生课程，讲解 Dasgupta–Darmon–Pollack证明。我希望通俗易懂地解释单位与上同调类之间的联系

，并像论文那样避免使用 Poitou–Tate 对偶性。我仅凭类域论的 adelic 陈述，给出了单位与上同调类之间正交性的显式证明。讲课时，我突然想到，同样的思路也可以用于高秩情形。我们不必要求自己构造圆分上同调类，只需考虑出现的上同调类，并写下它们消去 p-单位群的一组基的陈述。由此得到的 r 方程可以理解为：某个矩阵（上同调类在局部对单位取值所构成的矩阵）的行和为零。当然，这必然意味着该矩阵的行列式为零；展开这个等式，恰好就得到所需结论：单位范数对数的行列式等于p-adic L函数的首项。关于这一论证的更多细节，见 [16, §1。4] 我们由此得到了 Gross 猜想的证明，该猜想涉及 Deligne–Ribet p-adic L-函数在 $s = 0$处的（预期）首项，详见上文 §5 。

定理 11.1 我们有：

$$\frac{L_p^{(r)}(\chi\omega, 0)}{r!L(\chi, 0)} = R_p(\chi) \prod_{\chi(\mathfrak{p})\neq 1} (1 - \chi(\mathfrak{p})). \tag{7}$$

我们合作完成的论文 [16] 是我参与过的最有趣的合作之一——虽然我们三人都为这个项目作出了重要贡献，但 Mahesh 和 Kevin 直到论文完成后才真正见过面！

在（7）中，R_p（χ）是（1）中定义的 Gross 调节子。这个量不为零，即 Gross–Kuz'min 猜想；已知它可由超越理论中的标准猜想（例如 p-进 Schanuel 猜想）推出。根据定理 11.1，R_p（χ）不为零等价于以下陈述：L_p（$\chi\omega$，s）在 $s = 0$处的零点阶恰为 r 。

12 积分猜想

自 2000 年代中期与 Darmon 和 Pollack 合作以来，我一直试图为这些构造建立一个整版本，以证明 §8中所述的 Gross 的积分 Stark 猜想，至少在秩 1 情形下如此。技术问题总是阻碍我取得成功，尤其是辅助形式 G_k^* （见（3））的恰当构造。Kevin 完成相关工作后，我意识到，采用更理论化的方法来构造，避开 Serre 利用p-进 ζ函数极点所作的观察，或许会有成效。然而，要将 Kevin 的方法用于整情形仍有困难，尤其是在存在一般层结构时。

2019年1月，Mahesh 来 Duke 拜访我。当时我几个月前刚搬到那里，他向我展示了 David Burns 的一篇有趣论文 [2]。这篇论文建立在 Burns 此前与 Masato Kurihara 和 Takamichi Sano 的合作成果 [3]之上。Burns 证明了一个等变主猜想，在假设 μ-不变量为零且 Gross– Kuz'min 猜想成立（即 Gross 调节子不为零）的情况下，该猜想蕴含 Brumer–Stark 猜想。Mahesh 提议，也许我们可以从 Burns 的结果中去掉 μ-不变量这一条件。

事实上，我们的目标还要更宏大一些。我们没有从 Iwasawa 理论的角度开展研究，而是考察了关于 F的群环模形式。给定一个有限 CM 阿贝尔扩张 K/F，满足 $G = \mathrm{Gal}(K/F)$，其定义如下。我们考察 F 上的希尔伯特模形式 f，其 level 等于 K 的导子，weight 等于某个奇整数 $k \geq 1$，且傅里叶系数取自群环 $\mathbb{Z}_p[G]$；对于 G 的每个奇特征 χ，形式 $\chi(f)$ 都具有 nebentypus 特征 χ。形式 f 的系数属于 $\mathbb{Z}_p[G]$ 这一事实，意味着形式 $\chi(f)$ 满足模 p的某些同余关系。

Burns–Kurihara–Sano 工作中的一个重要环节，是研究 Tate 序列中各模的性质；这些 Tate 序列最初由 Ritter and Weiss 定义 [31]。Mahesh 和我很感激 Sano 让我们了解到 Ritter–Weiss 的论文，并建议这些论文或许对我们的工作有所帮助。另一个恰逢其时的机缘是，我迎来了一位新博士后加入 Duke：Jesse Silliman，他是希尔伯特模簇代数几何方面的专家。Jesse 帮我解决了关于构造群环值模形式（即 G_k^* [34] 的推广形式）时遇到的难题。

解决 Brumer–Stark 猜想和整系数 Gross–Stark 猜想所需的条件已经齐备，但又一次遇到了重要的技术难题。应用 Ribet 方法时，必须证明所构造的 p-进上同调类在 p 处不分歧。根据类域论，分歧由一个有限的类群控制。在特征 0 的域上工作时，例如$\mathbb{Q}_p$，与该域作张量积会消去这种有限分歧。然而，在 $\mathbb{Z}_p$上工作时，这种有限分歧却是一个重要障碍。在 Wiles 对岩泽主猜想的证明中，他巧妙地使用了以导子与 p 互素的辅助特征进行扭曲的方法。但这一技巧同样会引入有限的误差项，因此需要附加条件才能得到完整的无条件结果（参见 [22]）。

问题在于，直接应用 Wiles 在研究主猜想时证明的同余关系的类比所构造的上同调类，实际上在 p 处分歧。Mahesh 和我发现，幸运的是，还存在一个“额外同余关系”，它是 $s = 0$ 处 p-进 L-函数的平凡零点的映现。更准确地说，我们定义了一个非零因子 $x \in \mathbb{Z}_p[G]^-$，使得某个尖点形式与艾森斯坦级数模 $x\theta$ 同余，其中 θ 是 Stickelberger 元，而不只是模 θ 同余。这样得到的上同调类所在的模，比仅使用模 θ 的同余关系时更大。这个上同调类在 p 处分歧，但我们证明，除去 p 处惯性群的像后，模的大小（就 Fitting 理想而言）恰好缩小了同一个因子 x。因此，我们得到了所需的上同调类，它在 p 处不分歧，并生成一个 Fitting 理想为 $(x\theta)/x = \theta$ 的模。

作为我们结果的推论，我们得到如下结论（见 [14] 和 [15]）：

定理 12.1 我们有如下结论：

- Brumer–Stark 猜想在 $\mathbb{Z}[1/2]$上成立。
- 沿用 §8中的记号，假设集合 S 恰好包含 $n = 1$ 个素数 $\mathfrak{p}$，这些素数属于 k 且在 K中完全分裂。假设 $\mathfrak{p}$ 位于 p 之上，且 p 是奇数。那么整系数 Gross–Stark 猜想（即 §8中的猜想）在 $I/I^2 \otimes \mathbb{Z}_p$ 中成立。
- 再次假设素数 $\mathfrak{p}$ 在 k 中完全分裂。假设 $p \nmid 2\,\mathrm{disc}(F)$。关于

在 $k_{\mathfrak{p}}^*$ 中给出的 Brumer–Stark 单位的精确 *[9]* 和 *[12],* 中的公式，以及上文第 §*9* 节提及的公式，除一个单位根外均成立。

如上所述，第三个要点给出了任意全实域的最大阿贝尔构造的显式 p-进构造。

最后需要指出的是，最近 Bullach、Burns、Daoud 和 Seo [1] 作出了一个很好的观察：我与 Kakde 关于 Brumer–Stark 猜想的结果（更准确地说，是 Kurihara 所猜想的关于 Fitting 理想的“强 Brumer–Stark 猜想”）蕴含了 K/k 在 $\mathbb{Z}[1/2]$上的等变 Tamagawa 数猜想的负部分。ETNC 基本上是这一方向上最强的结果，并且已知它能够蕴含这一背景下大多数（如果不是全部）猜想。特别是，现在已经能够证明 $I^n/I^{n+1} \otimes \mathbb{Z}[1/2]$中的 Gross 积分猜想。

剩下的问题是处理棘手的素数 $p = 2$，并获得关于 $\mathbb{Z}$ 而非 $\mathbb{Z}[1/2]$的结果。在这一背景下，主要问题是，当试图通过表示 ρ_2 构造表示 ρ_1 的扩张时，如果这些表示“剩余不可区分”，即它们模 p 的约化同构，Ribet 方法会遇到严重困难。对于 K/k的负侧，我们考虑的是全奇特征 χ，并试图构造 1 通过 χ的扩张。由于当 p 为奇数时，$\chi(c) = -1 \neq 1$ (模 p)，Ribet 方法运作良好。在剩余不可区分的情形下还需要新的思路；这目前正与 Kakde、Jesse Silliman 和 Jiuya Wang 合作研究中。

参考文献

[1] D. Bullach、D. Burns、A. Daoud、S. Seo。狄利克雷 L级数在 $s = 0$ 处的值与欧拉系统的稀缺性，https://arxiv.org/abs/2111.14689[2] D. Burns，关于 p进 L级数在 $s = 0$处的导数。《纯粹与应用数学杂志》762（2020），53–104。[3] D. Burns、M. Kurihara、T. Sano，关于 $\mathbb{G}_m$的 ζ 元素。《文献数学》21（2016），555–626。[4] P. Cassou-Nogues，ζ函数 p进函数在负整数 n 处的值。《数学发明》51（1979），29–59。[5] P. Charollois、S. Dasgupta。GL_n上的整 Eisenstein 余循环，I：Sczech 余循环与全实域的 p进L函数。《剑桥数学杂志》2（2014），第1期，49–90。[6] P. Colmez。p 进 ζ函数在 s=1 处的留数。《数学发明》91（1988），第2期，371–389。[7] H. Darmon，模椭圆曲线上的有理点，《CBMS 数学区域会议系列》，2004年，129页。[8] H. Darmon，$\mathscr{H}_p \times \mathscr{H}$上的积分与算术应用。《数学年刊》（第2辑）154（2001），第3期，589–639。[9] H. Darmon、S. Dasgupta。实二次域的椭圆单位。《数学年刊》（第2辑）163（2006），第1期，301–346。

[10]S. Dasgupta，Stark 猜想。学士论文，哈佛大学，1999年。
https://services.math.duke.edu/~dasgupta/papers/Dasguptaseniorthesis.pdf。[11] S. Dasgupta，p进 Rankin L级数的因式分解。《数学发明》205（2016），第1期，221–268。[12] S. Dasgupta，Shintani ζ 函数与全实域的 Gross-Stark 单位。《杜克数学杂志》143（2008），第2期，225–279。[13] S. Dasgupta、H. Darmon、R. Pollack，希尔伯特模形式与 Gross-Stark 猜想。《数学年刊》（第2辑）174（2011），第1期，439–484。[14] S. Dasgupta、M. Kakde，关于 Brumer–Stark 猜想。https://arxiv.org/abs/2010.00657
[15]S. Dasgupta、M. Kakde，Brumer–Stark 单位与希尔伯特第十二问题。
https://arxiv.org/abs/2103.02516[16] S. Dasgupta、M. Kakde、K. Ventullo，关于 Gross–Stark 猜想。《数学年刊》（第2辑）188（2018），第3期，833–870。[17] P. Deligne、K. Ribet，全实域上阿贝尔 L 函数在负整数处的值。《数学发明》59（1980），227–286。[18] B. Ferrero、R. Greenberg，关于 p进 L函数在 $s = 0$处的行为。《数学发明》50（1978），91–102。[19] L. Federer、B. Gross，调节子与岩泽模。《数学发明》62（1981），443–457。[20] R. Greenberg，关于某个 ℓ进表示。《数学发明》21（1973），117–124。[21] R. Greenberg、G. Stevens。 p进 L函数与模形式的 p进周期。《数学发明》111（1993），第2期，407–447。[22] C. Greither。全实域的阿贝尔 CM 扩张的 Brumer 猜想的若干情形。《数学杂志》233（2000），第3期，515–534。[23] B. Gross， p进 L函数在 $s = 0$ 处的值。《东京大学理学部学报》 28 （ 1981 ），979–994。[24] B. Gross，关于阿贝尔 L 函数在 $s = 0$处的值。《东京大学理学部学报》35（1988），177–197。[25] B. Gross、N. Koblitz，高斯和与 p进 Gamma 函数。《数学年刊》109（1979），569–581。[26] B. Gross、D. Rohrlich，关于费马曲线的雅可比簇的 Mordell-Weil 群的一些结果。《数学发明》44（1978），201–224。[27] M. Hirose，Gross 精化类数的证明。
https://arxiv.org/abs/1608.04718[28] S. Lang，分圆域 I 与 II。Springer GTM 121。[29] B. Mazur、J. Tate，Birch–Swinnerton-Dyer 型精化猜想。《杜克数学杂志》54（1987），711–750。

[30] K. Ribet，关于 $\mathbb{Q}(\mu_p)$ 的非分歧 p-扩张的模构造。《数学发明》34（1976），第 3 期，151–162 页。[31] J. Ritter，A. Weiss，全局单位的 Tate 序列。《组合数学》102（1996），第 2 期，147–178 页。[32] D. Rohrlich，费马曲线上的无穷远点。《数学发明》39（1977），95–127 页。[33] M. Spiess，新谷上循环与 p-进 Hecke L-级数在 $s = 0$ 处的消失阶。《数学年刊》359（2014），第 1–2 期，239–265 页。[34] J. Silliman，群环值模形式，https://arxiv.org/abs/2009.14353。[35] H. Stark，$s = 1$ I–IV 处的 L 函数。《数学进展》7（1971），301–343 页；17（1975），60–92 页；22（1976），64–84 页；35（1980），15–56 页。[36] J. Tate，《关于 $s = 0$ 上 Artin 函数的 Stark 猜想》。Birkhauser，1984。[37] A. Weil，作为格罗森特征的雅可比和。《美国数学会汇刊》73（1952），487–495 页。