对称群双覆盖的阿贝尔亏缺 RoCK 块的分解数

MATTHEW FAYERS、ALEXANDER KLESHCHEV 和 LUCIA MOROTTI

摘要。我们计算了具有阿贝尔亏缺的对称群双覆盖的 RoCK块的（超）分解矩阵，从而验证了第一作者的一个猜想。为此，我们利用第二作者与 Livesey 的一个定理：RoCK块 $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 与某个箭图（超）代数和对称群 $\mathfrak{S}_d$的缠绕超积 Morita超等价。我们发展了这一缠绕超积的表示理论，以计算其 Cartan 不变量。随后，我们直接构造 $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 的射影特征标，以计算其分解矩阵（相差一个三角调整），并通过比较 Cartan 不变量证明该调整是平凡的。

arXiv:2303.03304v1 [math.RT] 6 Mar 2023

目录

1. 引言 2 2. 组合预备知识 3 2.1. 组合与分拆 3 2.2. Littlewood–Richardson 系数、Specht模与置换模 4 2.3. Kostka 多项式 6 3. Rouquier 条形核 7 3.1. 定义与基本性质 7 3.2. Rouquier 条形核与支配序 7 3.3. Rouquier 条形核与分拆的包含关系 9 4. 超代数、超模与花环超积 10 4.1. 超空间 11 4.2. 超代数 11 4.3. 超模 12 4.4. 花环超积 W_d 13的表示 4.5. W_d 14的超 Cartan 矩阵 5. 对称群双覆盖的表示 16 5.1. 对称群的双覆盖 16 5.2. 分支规则与权 17 5.3. 虚射影特征标 17 5.4. 来自 q变形 Fock 空间的射影特征标 18 5.5. 双覆盖的 RoCK 块与 Kleshchev–Livesey Morita 等价 19 5.6. 正则化定理 19 6. 射影特征标 19 6.1. RoCK 块中的射影特征标 $\hat{}\varphi^{\mu}$ 20 6.2. Gelfand–Graev 归纳 21 6.3. 通过归纳得到的射影特征标 24 6.4. 双射 $\lambda \mapsto \lambda_\circ$ 266.5. 调整矩阵 28 7. Cartan 矩阵与主定理的证明 31 7.1. 超 Cartan 矩阵与调整矩阵 31 7.2. 未调整的 Cartan 矩阵中的项 31

2020 数学主题分类。 20C30、20C20、05E10。作者感谢艾萨克·牛顿数学科学研究所和剑桥在“群、表示与应用：新视角”项目期间给予的支持与热情接待，本文的相关工作即在此期间完成。第一作者获得英国工程与物理科学研究委员会拨款 no 和 EP/W005751/1 的资助。第二作者获得美国国家科学基金会拨款 DMS-2101791、 高等研究院查尔斯·西莫尼捐赠基金以及西蒙斯基金会的资助。在完成本文写作期间，第三作者任职于杜塞尔多夫海因里希·海涅大学的数学研究所。

7.3. 主定理的证明。参考文献 33
33

1. 引言

在对称群及其双覆盖的模表示论中，核心的未解问题是分解数问题：确定普通不可约表示在p模约化后的合成因子。即使对于对称群，这一问题似乎也远未解决，但有一类特殊的块已经解决了这一问题。这类块称为*RoCK* 块。它们以组合方式通过算盘模型定义，并由 Rouquier [**R**] 指出具有特别重要的意义。RoCK 块在若干结果的证明中发挥了关键作用，其中最重要的是证明了 Brou´e 关于对称群阿贝尔亏缺群的猜想 [**CR**]。这依赖于 Chuang 和 Kessar [**CK**] 的证明：亏缺为$d < p$ 的 RoCK 块与缠绕积 $\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_d$的主块 Morita 等价。由此可得 Chuang–Tan [$\mathbf{CT}_2$] 给出的 RoCK 块分解数公式。Leclerc–Miyachi 与 Chuang–Tan [$\mathbf{CT}_1$,**LM**]各自独立地计算某些典范基系数时，也得到了同一个公式。

近年来，对称群双覆盖的表示论（或等价地，对称群射影表示的研究）得到了广泛研究。设$p = 2\ell+1$ 为奇素数（关于特征为 2 时的相应结果，见 [$\mathbf{Fa}_2$]），并设 $\mathbb{F}$ 为特征p的代数闭域。令 $\hat{\mathfrak{S}}_n$ 表示对称群 $\mathfrak{S}_n$的某个真双覆盖群，其中$n \geqslant 4$；令$z \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ 表示其阶为 2 的中心元。不可约 $\mathbb{F}\hat{\mathfrak{S}}_n$-模 M 若z 在M上作用为 -1，则称其为自旋模；若 $\mathbb{F}\hat{\mathfrak{S}}_n$ 的一个块包含自旋模，则称其为自旋块。事实上，研究自旋模时，将 $\mathbb{F}\hat{\mathfrak{S}}_n$ 视为超代数（即 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次代数），并研究自旋超模和自旋超块，会更为自然。Brundan 与第二作者通过$\mathbf{BK}_1$,$\mathbf{BK}_2$]中提出的两种不同方法（后来第二作者与 Shchigolev [**KS**]将其统一），发展了$\hat{\mathfrak{S}}_n$ 的模自旋表示论。这一理论的组合部分围绕p-严格分拆的组合性质展开。

第二作者和 Livesey [**KL**]，给出了 $\hat{\mathfrak{S}}_n$ 的旋量 RoCK 块的定义，并证明了 Chuang 和 Kessar 的 Morita等价结果的一个类似结论，据此证明 Brou´e 猜想对旋量 RoCK 块成立。本文旨在给出阿贝尔亏缺旋量 RoCK 块的（超）分解数公式；特别地，我们证明了第一作者在 [$\mathbf{Fa}_3$] 中基于典范基系数的计算所提出的一个公式猜想。

为陈述主定理，我们先简要介绍一些记号。对于严格分拆 λ，记 $\mathrm{S}(\lambda)$ 为由 λ 标记的 $\mathbb{C}\hat{\mathfrak{S}}_n$ 的不可约旋量超模的 p-模约化；对于受限的 p-严格分拆 μ，记 $\mathrm{D}(\mu)$ 为由 μ 标记的 $\mathbb{F}\hat{\mathfrak{S}}_n$ 的不可约旋量超模；有关这些内容的详情见第 5 节。

若 λ 是任意分拆，我们用 $h(\lambda)$ 表示 λ 的正部个数，而 $a(\lambda) = 0$ 或 1，取决于 λ 的正偶部个数为偶数还是奇数。最后，$\mathsf{c}(\alpha;\sigma,\tau)$ 表示对应于分拆 α、σ、τ 的 Littlewood–Richardson 系数，而 $K^{-1}_{\tau\sigma}(q)$ 表示对应于 σ、τ 的逆 Kostka 多项式；详情见 §2.2 和 §2.3。

第 3 节将讨论 Rouquier p-bar-核——它们对应于对称群双覆盖的旋量 RoCK 块。现在可以陈述主定理如下。

主定理。设 $p = 2\ell+1$ 是奇素数，且 $1 \leqslant d < p$，并且 ρ 是一个 d-Rouquier$p$-bar-核。设 λ 是一个严格分拆，μ 是一个受限 p-严格分拆，二者均具有 p-bar-核 ρ 和 p-bar-权 d。令 p-bar-商分别为 λ、μ 的 $(\lambda^{(0)},\dots,\lambda^{(\ell)})$ 和 $(\mu^{(0)},\dots,\mu^{(\ell)})$。那么分解数 $[\mathrm{S}(\lambda):\mathrm{D}(\mu)]$ 等于

$$2^{\lfloor \frac{1}{2}(h(\lambda^{(0)})+a(\lambda))\rfloor} \sum K^{-1}_{\lambda^{(0)}\sigma^{(0)}}(-1) \prod_{i=1}^{\ell} \mathsf{c}(\lambda^{(i)};\sigma^{(i)},\tau^{(i)})\,\mathsf{c}(\mu^{(i-1)};\sigma^{(i-1)},\tau^{(i)\prime})$$

其中的求和遍及所有分拆$\sigma^{(0)}$、……、$\sigma^{(\ell-1)}$、$\tau^{(1)}$、……、$\tau^{(\ell)}$，并将$\sigma^{(\ell)}$ 读作$\varnothing$。

我们注意到，定理中所作的假设$d \geqslant 1$并无妨碍——它仅仅意味着我们讨论的是具有非平凡亏缺的块；另一方面，假设$d < p$等价于这样的假设：我们所讨论的块具有阿贝尔亏缺群。

我们的主定理的证明分为两部分。

首先，我们运用 Kleshchev–Livesey 的 Morita等价结果，该结果表明，具有 p-条带权 $d < p$ 的 RoCK块$\mathcal{B}^{\rho,d}$ 与缠绕超积 $\mathrm{W}_d = \mathrm{A}_\ell \wr \mathfrak{S}_d$ Morita超等价，其中 A_ℓ 是一个明确给出的箭图超代数。在第 4 节中，我们发展了 Chuang 和 Tan 关于缠绕积表示论结果的超代数类比。特别是，通过明确构造不可分解射影超模，我们能够确定当 $d < p$时 W_d 的（超）Cartan 矩阵，进而确定 $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 的（超）Cartan 矩阵（但不包含行和列标签的任何信息）。

在证明的第二部分（第 6 节）中，我们明确考察 $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 的射影特征标。Leclerc–Thibon [**LT**] 关于分解数与典范基系数的比较结果，加上第一作者关于旋量 RoCK 块对应的典范基系数的公式，表明我们的主定理在“列运算”意义下成立；也就是说， $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 的分解矩阵可由主定理所声称的矩阵右乘一个方阵 A 得到。通过用归纳法明确构造射影特征标，并将其与关于分解数的已知一般结果进行比较，我们能够证明 A 是一个具有非负整数项的三角矩阵。随后，我们计算主定理所预言的 Cartan 矩阵的各项，并证明它们与当 $d < p$时 W_d 的 Cartan 矩阵各项一致，由此可推得 A 是单位矩阵，从而得到主定理。

2. 组合预备知识

记 $\mathbb{N} := \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 和 $\mathbb{N}_0 := \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。全文中，我们均在特征为 $p > 2$ 的代数闭域 $\mathbb{F}$ 上工作。记

- $\ell := (p-1)/2$,
- $I := \{0, 1, \ldots, \ell\}$,
- $J := \{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$.

对于 $n \in \mathbb{N}_0$，记 I^n 为词集合 $i_1 \ldots i_n$，其中 $i_1, \ldots, i_n \in I$。

2.1. 组合与分拆。 组合 是一个无限序列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$，其元素均为非负整数，且从某项起恒为零。任意组合 λ 的和 $|\lambda|$都是有限的，我们称 λ 是 $|\lambda|$的一个组合。记 $\mathscr{C}$ 为所有组合构成的集合；对于每个 $d \in \mathbb{N}_0$，记 $\mathscr{C}(d)$ 为所有 的组合构成的集合。书写组合时，我们可以用上标将连续相等的部分合并表示，并省略无限个尾随的 0。记 $\varnothing$ 为组合$(0, 0, \ldots)$。

一个分拆是各部分按弱递减排列的合成。我们用 $\mathscr{P}$ 表示所有分拆的集合，用 $\mathscr{P}$（d）表示 d 的所有分拆构成的集合。

如果一个分拆没有重复的正部，则称其为严格分拆。我们用 $\mathscr{P}_0$（d）表示 d 的所有严格分拆构成的集合。若严格分拆 λ 具有偶数个正偶部，则称其为偶的；否则称其为奇的。现在记作

$$a(\lambda) := \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda \text{ is even,} \\ 1 & \text{if } \lambda \text{ is odd.} \end{cases} \tag{2.1}$$

对于集合 S，令 $\mathscr{P}^S$(d) 表示 d 的所有 S-多重分拆构成的集合。因此， $\mathscr{P}^S$(d) 中的元素是满足 $\sum_{s\in S} |\lambda^{(s)}| =$ d 的分拆元组$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(s)})_{s\in S}$。在特殊情形 S $=$ I 中，我们将 $\mathscr{P}$I (d) 的元素写成元组 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell)})$，对 $\mathscr{P}$ J (d) 也同样如此。我们将 $\lambda^{(i)}$称为 $\boldsymbol{\lambda}$ 的第 i 个分量。我们把 $\mathscr{P}$J(d) 视为 $\mathscr{P}$I (d) 的子集，该子集由满足 $\lambda^{(\ell)} = \varnothing$ 的 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathscr{P}$I (d) 中的元素组成。

我们在分拆上使用以下二元运算：若 $\lambda, \mu \in \mathscr{P}$，则将分拆$(\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ldots)$记作 $\lambda + \mu$，将由 λ和 μ 的各部分合并并按弱递减顺序排列所得的分拆记作 $\lambda \sqcup \mu$。例如，$(3, 1) + (4, 1^2) = (7, 2, 1)$，而$(3, 1) \sqcup (4, 1^2) = (4, 3, 1^3)$。

分拆 λ 的杨图是集合 $\{(r, c) \in \mathbb{N}^2 \mid c \leqslant \lambda_r\}$，其中的元素称为 λ 的节点。我们使用英式约定，将杨图绘制成方格阵列；在该约定中，r 沿页面向下递增，c 从左向右递增。我们经常将分拆与其杨图等同起来；例如，我们可以写 $\lambda \subseteq \mu$，表示对于所有r， $\lambda_r \leqslant \mu_r$。

如果 λ 是一个分拆，则其共轭分拆 λ' 可通过将 λ 的杨图沿主对角线反射得到。

支配序是定义在 $\mathscr{P}$上的偏序 $\trianglerighteq$。如果$|\lambda| = |\mu|$ 且对所有$r \geqslant 1$都有 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r \geqslant \mu_1 + \cdots + \mu_r$，我们记作 $\lambda \trianglerighteq \mu$ （并称支配 μ）。这可以用杨图解释如下： $\lambda \trianglerighteq \mu$ 当且仅当， μ 的杨图可以通过将若干节点向左移动而得到 λ 的杨图，参见 **[JK，1.4.10]**。根据 **[JK，1.4.11]**，，共轭会反转支配序： $\lambda \trianglerighteq \mu$ 当且仅当 $\mu' \trianglerighteq \lambda'$。

现在我们将素数p 引入组合学中。如果一个分拆的重复部分都能被p整除，则称该分拆为p-严格。一个p-严格分拆 λ 若对所有r ，要么 $\lambda_r - \lambda_{r+1} < p$ ，要么$\lambda_r - \lambda_{r+1} = p$ 且$p \nmid \lambda_r$，则称其为受限。我们用 $\mathscr{P}_p(n)$ 表示p-严格分拆n的集合，用 $\mathscr{RP}_p(n)$ 表示p-严格分拆n中受限者的集合。

我们还引入一些新术语：如果一个p-严格分拆 λ 是一个p'-分拆（或简称为 λ 是p'），则称其为p'-分拆，如果它没有可被p整除的正部。

设 λ 是一个p-严格分拆。对 λ 移除一个 p-条意味着以下两种情况之一：

◇ 将一个部 $\lambda_r \geqslant p$ 替换为 $\lambda_r - p$，并将各部按降序重新排列，或者◇ 删除两个和为p的部。

在第一种情况下，我们假设$p \mid \lambda_r$ 或 $\lambda_r - p$ 不是 λ的一个部，从而所得分拆是p-严格的。

λ 的p-条核是通过反复移除p-条，直到无法再移除任何p-条而得到的分拆——根据 **[MY$_1$, 定理 1]**，这是良定义的。 λ 的p-棒权是为得到其p-条核而移除的p-条的数量。

如果 ρ 是一个p-条核且$d \geqslant 1$，我们记作：

◇ $\mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{d}$表示具有 ρ 作为 p-条形核且 d 作为 p-条形权的 p-严格分拆集合；

◇ $\mathscr{RP}^{\rho}{}_{,p}{}^{d}$表示 $\mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{d}$ 中受限分拆的集合；◇ $\mathscr{P}^{\rho}{}_{,0}{}^{d}$ 表示 $\mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{d}$ 中严格分拆的集合；◇ $\mathscr{P}^{\rho}{}_{,d\,p'}$ 表示 $\mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{d}$ 中 p'-分拆的集合。

注意， $\mathscr{P}^{\rho}{}_{,d\,p'} \subseteq \mathscr{P}^{\rho}{}_{,0}{}^{d}$。

现在我们考察单个节点。位于第 c 列的节点的剩余是 $c-1$ 和 $-c$ 模 p所得剩余类中较小的一个。因此，节点的剩余类呈现如下重复模式：

$$0, 1, \ldots, \ell-1, \ell, \ell-1, \ldots, 1, 0, 0, 1, \ldots, \ell-1, \ell, \ell-1, \ldots, 1, 0, \ldots$$

在杨图的每一行中，从左向右依次排列。注意，节点的剩余总是被解释为 I 中的一个元素。对于 $i \in I$，i-节点指剩余为 i 的节点。

2.2. **Littlewood–Richardson 系数、Specht模与置换模**。对于分拆 $\lambda, \mu^1, \ldots, \mu^r$，我们用 $\mathrm{c}(\lambda; \mu^1, \ldots, \mu^r)$ 表示相应的 Littlewood–Richardson 系数；除非 $|\lambda| = |\mu^1| + \cdots + |\mu^r|$，否则该系数为零。事实上，$\mathrm{c}(\lambda; \mu^1, \ldots, \mu^r)$ 与分拆 $\mu^1, \ldots, \mu^r$ 的排列顺序无关，且仅取决于多重集 $\{\mu^1, \ldots, \mu^r\}$。因此，对于任意分拆多重集 M，我们也将采用记号 $\mathrm{c}(\lambda; M)$。若 $M = \{\mu^1, \ldots, \mu^r\}$ 与 $N = \{\nu^1, \ldots, \nu^s\}$ 是两个分拆多重集，我们还可以考虑

$$\mathrm{c}(\lambda; M \sqcup N) := \mathrm{c}(\lambda; \mu^1, \ldots, \mu^r, \nu^1, \ldots, \nu^s).$$

下文将使用 Littlewood–Richardson 系数的各种标准结果，例如可见于 **[M$_2$, I.9]**或 **[Fu**第 5**]** 节。

我们将经常使用涉及特征零下对称群表示的计算。对于任意群 G，令 $\mathbf{1}_G$ 表示平凡 G-模。对于群代数 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$，不可约模为 ***Specht***模 $\mathcal{S}^{\lambda}$，其中 $\lambda \in \mathscr{P}(n)$。特别地， $\mathcal{S}^{(n)}$ 是平凡 $\mathfrak{S}_n$-模，而$\mathcal{S}^{(1^n)}$ 是符号模，我们也将其记为 sgn。众所周知，

$$\mathcal{S}^{\lambda} \otimes \mathrm{sgn} \cong \mathcal{S}^{\lambda'} \tag{2.2}$$

对所有 λ 都成立，见 **[J$_2$, 6.7]**。给定一个 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$-模 M 及任意分拆 λ，若 $|\lambda| = n$，则记 $[M : \mathcal{S}^{\lambda}]$ 为 $\mathcal{S}^{\lambda}$ 作为 M 的一个合成因子的重数；否则记为 0。

我们经常在 $\mathfrak{S}_n$ 及其杨子群之间诱导和限制模。如果 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathscr{C}(n)$，那么杨子群 $\mathfrak{S}_\alpha$ 是 $\mathfrak{S}_n$的自然嵌入子群 $\mathfrak{S}_{\alpha_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\alpha_r}$。现在

给定分别对应于 $\mathfrak{S}_{\alpha_1}$、……、$\mathfrak{S}_{\alpha_r}$ 的模 $M_1, \ldots\ldots M_r$，我们得到一个对应于 $\mathfrak{S}_\alpha$ 的模 $M_1 \boxtimes \cdots \boxtimes M_r$，以及诱导模

$$M_1 \circ \cdots \circ M_r := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} M_1 \boxtimes \cdots \boxtimes M_r.$$

例如，若 $\lambda \in \mathscr{C}(n)$，则 $\mathcal{S}^{(\lambda_1)} \circ \mathcal{S}_{(\lambda_2)} \circ \cdots$ 是 $\mathcal{M}^\lambda$ 中定义的置换模 [**J**$_2$,4.1]，如今称为 杨置换模。一般而言，给定分拆 α^1、……、α^r 和 λ，重数 $[\mathcal{S}^{\alpha^1} \circ \cdots \circ \mathcal{S}^{\alpha^r} \colon \mathcal{S}^\lambda]$ 是 Littlewood–Richardson 系数 $\mathrm{c}(\lambda;\, \alpha^1, \ldots\ldots,\, \alpha^r)$。根据弗罗贝尼乌斯互反律，这也可写作 $[\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_{(|\alpha^1|,\ldots,|\alpha^r|)}} \mathcal{S}^\lambda \colon \mathcal{S}^{\alpha^1} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{S}^{\alpha^r}]$。

稍后我们将需要以下结果。

引理 2.1. 设$\alpha \in \mathscr{P}$和$\beta, \gamma \in \mathscr{C}$。那么

$$\mathrm{c}(\alpha; (1^{\beta_1}), (1^{\beta_2}), \ldots, (\gamma_1), (\gamma_2), \ldots) = \left[(\mathcal{M}^\beta \otimes \mathtt{sgn}) \circ \mathcal{M}^\gamma : \mathcal{S}^\alpha \right].$$

证明。 左边等于

$$\begin{aligned}
&\left[(\mathcal{S}^{(1^{\beta_1})} \circ \mathcal{S}^{(1^{\beta_2})} \circ \cdots) \circ (\mathcal{S}^{(\gamma_1)} \circ \mathcal{S}^{(\gamma_2)} \circ \cdots) : \mathcal{S}^\alpha \right] \\
&= \left[\big((\mathcal{S}^{(\beta_1)} \otimes \mathtt{sgn}) \circ (\mathcal{S}^{(\beta_2)} \otimes \mathtt{sgn}) \circ \cdots \big) \circ (\mathcal{S}^{(\gamma_1)} \circ \mathcal{S}^{(\gamma_2)} \circ \cdots) : \mathcal{S}^\alpha \right] \\
&= \left[\big((\mathcal{S}^{(\beta_1)} \circ \mathcal{S}^{(\beta_2)} \circ \cdots) \otimes \mathtt{sgn} \big) \circ (\mathcal{S}^{(\gamma_1)} \circ \mathcal{S}^{(\gamma_2)} \circ \cdots) : \mathcal{S}^\alpha \right] \\
&= \left[(\mathcal{M}^\beta \otimes \mathtt{sgn}) \circ \mathcal{M}^\gamma : \mathcal{S}^\alpha \right].
\end{aligned}$$

□

引理 2.2。 设$\lambda \in \mathscr{C}$和τ，$\sigma \in \mathscr{P}$。则

$$\sum_{\mu \in \mathscr{P}} [\mathcal{M}^\lambda : \mathcal{S}^\mu][\mathcal{S}^\tau \circ \mathcal{S}^\sigma : \mathcal{S}^\mu] = \sum_{\substack{\beta, \gamma \in \mathscr{C} \\ \beta + \gamma = \lambda}} [\mathcal{M}^\beta : \mathcal{S}^\tau][\mathcal{M}^\gamma : \mathcal{S}^\sigma].$$

证明。 令 $n = |\lambda|$。不妨设 $|\tau| + |\sigma| = n$ 也成立（否则两边显然都为零），并且可以将左边求和的范围限制为 $\mu \in \mathscr{P}(n)$。根据 $\mathcal{M}^\lambda$的定义，有 $[\mathcal{M}^\lambda \colon \mathcal{S}^\mu] = [\mathcal{S}_{(\lambda_1)} \circ \mathcal{S}^{(\lambda_2)} \circ \cdots \colon \mathcal{S}^\mu]$。另一方面，若定义 K为杨子群 $\mathfrak{S}_{(|\tau|,|\sigma|)}$，则由弗罗贝尼乌斯互反律可得 $[\mathcal{S}^\tau \circ \mathcal{S}^\sigma \colon \mathcal{S}^\mu] = [\mathrm{Res}_K \mathcal{S}^\mu \colon \mathcal{S}^\tau \boxtimes \mathcal{S}^\sigma]$。由于不可约 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$-模恰好是对于 $\mu \in \mathscr{P}(n)$的模 $\mathcal{S}^\mu$，左边给出了重数

$$[\mathrm{Res}_K \mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_\lambda} : \mathcal{S}^\tau \boxtimes \mathcal{S}^\sigma].$$

根据 Mackey 定理，这与下式相同

$$\sum_H [\mathrm{Ind}^K \mathbf{1}_H : \mathcal{S}^\tau \boxtimes \mathcal{S}^\sigma],$$

对形如 K-共轭类代表元的子群 $H \leqslant K$ 求和，其中 $(\mathfrak{S}_\lambda)^x \cap K$，且$x \in \mathfrak{S}_n$。我们可以取这些代表元为群 $\mathfrak{S}_\beta \times \mathfrak{S}_\gamma$，其中 β、γ遍历满足 $|\beta| = |\tau|$、$|\gamma| = |\sigma|$ 且对每个r都有 $\beta_r + \gamma_r = \lambda_r$ 的组合。现在，由模 $\mathcal{M}^\beta$和 $\mathcal{M}^\gamma$ 的定义即可得出结果。□

我们有以下关于 Littlewood–Richardson 系数的“Mackey 公式”。

引理 2.3. 设α、β、γ、$\delta \in \mathscr{P}$。则

$$\sum_{\lambda \in \mathscr{P}} \mathrm{c}(\lambda; \alpha, \beta)\, \mathrm{c}(\lambda; \gamma, \delta) = \sum_{\varphi, \chi, \psi, \omega \in \mathscr{P}} \mathrm{c}(\alpha; \varphi, \chi)\, \mathrm{c}(\beta; \psi, \omega)\, \mathrm{c}(\gamma; \varphi, \psi)\, \mathrm{c}(\delta; \chi, \omega).$$

证明。 $\alpha = (r)$ 的特殊情形已由 Chuang 和 Tan [**CT**$_1$, 引理 2.2(3)], 证明，但他们的证明适用于一般情形。□

2.3. **Kostka 多项式**。给定 $\lambda, \sigma \in \mathscr{P}$，我们用 $K_{\lambda\sigma}^{-1}(t)$ 表示由 λ, σ 标记的逆 *Kostka* 多项式；该多项式出现在对称函数理论中：当 Hall–Littlewood 对称函数 P_λ 用 Schur 函数表示时，它是 Schur 函数 s_σ 的系数。关于 Kostka 多项式的更多信息，请参阅 [**M**$_2$, III.6]；特别指出，$K_{\lambda\sigma}^{-1}(t)$ 除非 $\lambda \trianglerighteq \sigma$，否则为零；并且 $K_{\lambda\lambda}^{-1}(t) = 1$；参见 [**Fa**$_3$, 引理 3.4]。

对我们而言，尤为重要的是计算$K_{\lambda\sigma}^{-1}(t)$ 在$t = -1$处的值。因此，$K_{\lambda\sigma}^{-1}(-1)$ 是 Schur P 函数P_λ中s_σ 的系数。

我们注意到两个稍后会用到的引理。

引理 2.4. 设$\sigma \in \mathscr{P}(n)$。那么，对所有$\lambda \in \mathscr{P}_0(n)$，都有$K_{\lambda\sigma}^{-1}(-1) \in \mathbb{N}_0$；并且至少存在一个 $\lambda \in \mathscr{P}_0(n)$，使得$K_{\lambda\sigma}^{-1}(-1) > 0$。

证明。Stembridge 的 [**S**定理 9.3(b)] 表明，$K_{\lambda\sigma}^{-1}(-1)$ 等于某一类杨氏表的数量；这尤其意味着$K_{\lambda\sigma}^{-1}(-1) \in \mathbb{N}_0$。Stembridge 的公式尤其表明，当 λ 为一个部分是 σ的对角钩长的严格分拆时，$K_{\lambda\sigma}^{-1}(-1) > 0$。□

引理 2.5. 假设$\xi, \pi \in \mathscr{P}$。则

$$\sum_{\lambda \in \mathscr{P}_0} 2^{h(\lambda)} K_{\lambda\xi}^{-1}(-1) K_{\lambda\pi}^{-1}(-1) = \sum_{\beta,\gamma \in \mathscr{P}} \mathrm{c}(\xi; \beta, \gamma')\, \mathrm{c}(\pi; \beta, \gamma).$$

证明。我们考虑无限变量集 X上的对称函数。令s_π 表示以 $\pi \in \mathscr{P}$为指标的 Schur 函数。由于 Schur 函数线性无关，只需证明对每个 ξ，下列对称函数等式成立：

$$\sum_{\substack{\lambda \in \mathscr{P}_0 \\ \pi \in \mathscr{P}}} 2^{h(\lambda)} K_{\lambda\xi}^{-1}(-1) K_{\lambda\pi}^{-1}(-1) s_\pi = \sum_{\beta,\gamma,\pi \in \mathscr{P}} \mathrm{c}(\xi; \beta, \gamma')\, \mathrm{c}(\pi; \beta, \gamma) s_\pi.$$

取不定元t，考虑对称函数

$$\sum_{\lambda,\pi \in \mathscr{P}} b_\lambda(t) K_{\lambda\xi}^{-1}(t) K_{\lambda\pi}^{-1}(t) s_\pi,$$

其中$b_\lambda(t)$ 是 [**M**$_2$, (2.12) 中 p.210] 上定义的多项式。根据 [**M**$_2$, p.241], 中的过渡矩阵，这与“对偶 Schur 函数”$S^\xi(t)$一致。现在令t 取值为 -1。由$b_\lambda(t)$ 的定义立即可得

$$b_\lambda(-1) = \begin{cases} 2^{h(\lambda)} & \text{if } \lambda \in \mathscr{P}_0 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

因此我们得到

$$S_\xi(-1) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathscr{P}_0 \\ \pi \in \mathscr{P}}} 2^{h(\lambda)} K_{\lambda\xi}^{-1}(-1) K_{\lambda\pi}^{-1}(-1) s_\pi.$$

记$S^\xi(-1)$为 $\bar{S}^\xi$。根据 [**M**$_2$, III.8，例 7(a)]，$\bar{S}^\xi$等于函数$s^\xi(X/-X)$，该函数定义于 [**M**$_2$, I.5，例 23]。由 [*loc. cit.*] 中的等式 (1)，我们得到

$$s^\xi(X/-X) = \sum_{\beta \in \mathscr{P}} s_\beta s_{\xi'/\beta'},$$

其中斜施尔函数 $s_{\xi'/\beta'}$ 等于 $\sum_{\gamma \in \mathscr{P}} \mathrm{c}(\xi';\ \beta', \gamma) s_\gamma$。此外 $s_\beta s_\gamma = \sum_{\pi \in \mathscr{P}} \mathrm{c}(\pi;\ \beta, \gamma) s_\pi$（事实上，这是 Littlewood–Richardson 系数最常见的定义），因此

$$\sum_{\substack{\lambda \in \mathscr{P}_0 \\ \pi \in \mathscr{P}}} 2^{h(\lambda)} K_{\lambda\xi}^{-1}(-1) K_{\lambda\pi}^{-1}(-1) s_\pi = \sum_{\beta.\gamma \in \mathscr{P}} \mathrm{c}(\xi'; \beta', \gamma)\, \mathrm{c}(\pi; \beta, \gamma) s_\pi.$$

现在，标准结果 $\mathrm{c}(\xi';\ \beta', \gamma) = \mathrm{c}(\xi;\ \beta, \gamma')$ gives the required equality. □

3. ROUQUIER 条形核

3.1. 定义及首要性质。 对于任意 p-严格分拆 ρ，定义

$$r_i(\rho) := |\{ r \in \mathbb{N} \mid \rho_r \equiv i \pmod{p}\}|$$

对于 $i \in \{1,\ldots,p-1\}$。若 ρ 是一个p-条核，则 ρ 由整数$r_i(\rho)$确定。仿照 **[KL]**,给定$d \geqslant 1$的方式，我们称一个p-条核 ρ 为*d-Rouquier* ，如果

- $r_1(\rho) \geqslant d$, and
- $r_i(\rho) \geqslant r_{i-1}(\rho) + d - 1$ for $2 \leqslant i \leqslant \ell$.

（这自动意味着，对于$i > \ell$，有$r_i(\rho) = 0$，因为一个p-条核不能有两个部分，其和能被p整除。）

设 ρ 是一个 d-Rouquier p-条核，且 $\lambda \in \mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{d}$。我们要定义 λ的 p-条商。首先注意，对每个 $1 \leqslant i \leqslant \ell$，$r_i(\lambda) = r_i(\rho)$，因为 $r_i(\rho) \geqslant d$，参见 [KL，引理 4.1.1.(i)]。现在定义$\lambda^{(0)}$ 为这样一个分拆：取出 λ 中所有能被 p 整除的部分，并将它们除以 p。对 $1 \leqslant i \leqslant \ell$，令 $r := r_i(\lambda)$，令 $\lambda_{k_1} > \cdots > \lambda_{k_r}$为 λ 中模 p 同余于 i 的部分，并定义分拆

$$\lambda^{(i)} := \left(\frac{\lambda_{k_1} - (r-1)p - i}{p}, \frac{\lambda_{k_2} - (r-2)p - i}{p}, \ldots, \frac{\lambda_{k_r} - i}{p} \right).$$

λ 的p-钩商是多重分拆$(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell)}) \in \mathscr{P}_I(d)$。

例。设 $p = 5$且 $\rho = (32, 27, 22, 17, 16, 12, 11, 7, 6, 2, 1)$。那么 ρ 是 4-Rouquier，其 $(r_1(\rho), r_2(\rho), r_3(\rho), r_4(\rho)) = (4, 7, 0, 0)$。分拆 $\lambda = (37, 32, 22, 17, 16, 12, 11, 10, 7, 6, 2, 1)$ 属于$\mathscr{P}^{\rho},_{4\,0}$，且其 5-钩商为 $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) = ((2), \varnothing, (1^2))$。

引理 3.1。 设ρ是一个d-Rouquier p-钩芯，且$\lambda \in \mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{d}$的$p$-钩商为$(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell)})$。那么：

(i) λ是严格的，当且仅当$\lambda^{(0)}$是严格的；(ii) λ是p'，当且仅当$\lambda^{(0)} = \varnothing$；(iii) λ是受限的，当且仅当$\lambda^{(\ell)} = \varnothing$。

证明。 前两条结论直接由定义得出，因此我们只需证明第三条。注意，根据整数$r_i(\rho)$的给定性质， ρ 的最大d 部分都与 ℓ模p同余，并且对任何满足 $\lambda_k \neq \ell$ (模p)的k，都有 $\rho_k < \rho_1 - (d-1)p$。

通过添加d p-条，我们从 ρ 得到 λ。因此，对于满足 $\lambda_k \neq \ell$ (模p) 的任一部分 λ_k，都有 $\lambda_k < \rho_1 + p$。若 $\lambda^{(\ell)} = \varnothing$，则 $\lambda_1 < \rho_1 + p$；而 λ 包含所有整数 ℓ、$\ell + p$、……、ρ_1，所以 λ 是受限的。

若 $\lambda_1^{(\ell)} \neq \varnothing$，则选择一个使得 $\lambda_a^{(\ell)} > \lambda^{(\ell)}{}_{a+1}$。于是 $|\lambda^{(\ell)}| \geqslant a$，因此对于任意$i \neq \ell$，都有 $|\lambda^{(i)}| \leqslant d - a$。这意味着任何部分 $\lambda_k \neq \ell$ (模 p) 都满足 $\lambda_k < \rho_1 - (a-1)p = \rho_a$。所以 λ 包含部分 $\lambda_a = \rho_a + \lambda_a^{(\ell)}p$，但不包含任何满足 λ_k 且 $\rho_a + (\lambda_a^{(\ell)} - 1)p \leqslant \lambda_k < \rho_a + \lambda_a^{(\ell)}p$ 的部分，因此不是受限的。□

显然， $\lambda \in \mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{d}$由 ρ 和 p-条形商 $(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell)})$ 决定；反过来，给定一个多重分拆 $(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell)}) \in \mathscr{P}_I(d)$，存在一个分拆 $\lambda \in \mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{d}$，其 p-条形商为 $(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell)})$。由此以及引理 3.1 可知

$$|\mathscr{P}_p^{\rho,d}| = |\mathscr{P}^I(d)| \qquad \text{and} \qquad |\mathscr{P}_{p'}^{\rho,d}| = |\mathscr{R}\mathscr{P}_p^{\rho,d}| = |\mathscr{P}^J(d)|. \tag{3.1}$$

3.2. Rouquier 条形核与支配序。 对于我们在 RoCK 块中的计算，引入 $\mathscr{P}_I(d)$上的一个偏序将会有所帮助：给定 $\mathscr{P}_I(d)$中的两个多重分拆 $(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell)})$和 $(\mu^{(0)}, \ldots, \mu^{(\ell)})$，若……，则记作 $(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell)}) \succcurlyeq (\mu^{(0)}, \ldots, \mu^{(\ell)})$

$$|\lambda^{(0)}| + \cdots + |\lambda^{(k-1)}| + {\lambda^{(k)}}'_1 + \cdots + {\lambda^{(k)}}'_c \geqslant |\mu^{(0)}| + \cdots + |\mu^{(k-1)}| + {\mu^{(k)}}'_1 + \cdots + {\mu^{(k)}}'_c$$

对所有 $0 \leqslant k \leqslant \ell$ 和 $c \geqslant 1$均成立。此顺序可通过从左到右依次排列$\lambda^{(0)}$、……、$\lambda^{(\ell)}$ 的杨图来直观表示；当且仅当$(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell)})$可由$(\mu^{(0)}, \ldots, \mu^{(\ell)})$ 将节点进一步向左移动得到时，$(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell)}) \succcurlyeq (\mu^{(0)}, \ldots, \mu^{(\ell)})$。

引理 3.2。 设 ρ是一个d-Rouquier p-条核心。假设分拆λ和μ属于$\mathscr{P}^{\rho}{}_{p}{}^{d}$，其$p$-条商分别为$(\lambda^{(0)},\dots,\lambda^{(\ell)})$和$(\mu^{(0)},\dots,\mu^{(\ell)})$。那么$(\lambda^{(0)},\dots,\lambda^{(\ell)}) \succcurlyeq (\mu^{(0)},\dots,\mu^{(\ell)})$当且仅当$\lambda \trianglelefteq \mu$。

证明。 对于$i = 0,\dots,\ell$，令r_i为与i模p同余且不超过ρ的最大部分。我们还记$\boldsymbol{\lambda} := (\lambda^{(0)},\dots,\lambda^{(\ell)})$，$\boldsymbol{\mu} := (\mu^{(0)},\dots,\mu^{(\ell)})$。

我们通过依次添加p-条形，从ρ构造λ。相应地，通过添加节点，从$(\varnothing,\dots,\varnothing)$得到$p$-条形商$\boldsymbol{\lambda}$；向$\lambda^{(i)}$添加节点$(r,c)$，对应于向$\lambda$的列中添加节点

$$\begin{cases} r_i+(c-r)p+1, r_i+(c-r)p+2,\dots, r_i+(c-r+1)p & \text{if } i>0 \\ (c-1)p+1,(c-1)p+2,\dots,cp & \text{if } i=0. \end{cases} \tag{3.2}$$

现在证明引理的“仅当”部分。容易看出，若$\boldsymbol{\lambda} \succcurlyeq \boldsymbol{\mu}$，则我们可以通过一系列操作从$\boldsymbol{\mu}$得到$\boldsymbol{\lambda}$，其中每次都将一个节点进一步向左移动；因此只需考虑这样的一次移动，并证明该移动对应于将μ中的节点向左移动。设$\boldsymbol{\lambda}$由$\boldsymbol{\mu}$得到：将第j个分量中的节点(s,c)替换为第i个分量中的节点(r,b)，其中$i \leqslant j$。

如果 $0 < \mathrm{i} = \mathrm{j}$，那么 $\mathrm{b} - \mathrm{r} < \mathrm{c} - \mathrm{s}$，因此根据 (3.2)，$\lambda$ 可由 μ 再向左移动 p 个节点得到。如果 $0 = \mathrm{i} = \mathrm{j}$，则使用不等式 $\mathrm{b} < \mathrm{c}$ 可应用类似论证。如果 $0 < \mathrm{i} < \mathrm{j}$，那么 $\mathrm{b} - \mathrm{r} \geq \mathrm{c} - \mathrm{s} + \mathrm{d} - 1$，因为 $\mu^{(i)}_1 + \mu^{(j)\prime}_1 \leqslant \mathrm{d}$。现在，(3.2) 以及 $\mathrm{r}_i < \mathrm{r}_j + (\mathrm{d}-1)\mathrm{p}$ 这一事实意味着，λ 可由 μ 再向左移动 p 个节点得到。如果 $0 = \mathrm{i} < \mathrm{j}$，则通过不等式 $\mathrm{b} \geq \mathrm{c} - \mathrm{s} + \mathrm{d}$ 使用类似论证。

无论哪种情况，我们都得到 $\lambda \lhd \mu$，如所要求的。

We n现在证明引理的“如果”部分。假设 $\boldsymbol{\lambda} \not\succcurlyeq \boldsymbol{\mu}$；那么我们必须证明 $\lambda \not\trianglelefteq \mu$.

情形 *1*： 存在 $k \in I$ 使得 $|\lambda^{(0)}| + \cdots + |\lambda^{(k)}| < |\mu^{(0)}| + \cdots + |\mu^{(k)}|$。

注意，在此情形下 $k < \ell$。令 $a = |\lambda^{(0)}| + \cdots + |\lambda^{(k)}|$ 和 $b = |\mu^{(0)}| + \cdots + |\mu^{(k)}|$。现在令$\nu$、$\xi \in \mathscr{P}^{\rho}$、$_{p}{}^{d}$由下式给出

$$\nu^{(i)} = \begin{cases} (1^a) & \text{if } i = 0 \\ (1^{d-a}) & \text{if } i = k+1 \\ \varnothing & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad \xi^{(i)} = \begin{cases} (b) & \text{if } i = k \\ (d-b) & \text{if } i = \ell \\ \varnothing & \text{otherwise.} \end{cases}$$

则 $(\nu^{(0)}$、……、$\nu^{(\ell)}) \succcurlyeq \boldsymbol{\lambda}$ 且 $\boldsymbol{\mu} \succcurlyeq (\xi^{(0)}$、……、$\xi^{(\ell)})$。因此（由引理的“⇒”部分），为了证明 $\lambda \not\trianglelefteq \mu$，只需证明 $\nu \not\trianglelefteq \xi$。为此，令 r 满足 $\rho_r = r_{k+1} - (d-a-1)p$，并将 $\nu_1 + \cdots + \nu_r$ 与 $\xi_1 + \cdots + \xi_r$ 进行比较。我们得到

$$\begin{aligned} \nu_1 + \cdots + \nu_r &= \rho_1 + \cdots + \rho_r + (d-a)p, \\ \xi_1 + \cdots + \xi_r &= \rho_1 + \cdots + \rho_r + (d-b)p + \max\{r_k - r_{k+1} + (d+b-a-1)p, 0\}, \end{aligned}$$

现在，假设$r_{k+1} > r_k + (d-1)p$ 且$a < b$，可得 $\nu_1 + \cdots + \nu_r > \xi_1 + \cdots + \xi_r$，因此$\nu \not\trianglelefteq \xi$。

情形 *2*： $|\lambda^{(0)}| + \cdots + |\lambda^{(k)}| \geqslant |\mu^{(0)}| + \cdots + |\mu^{(k)}|$ 对每个 $k \in I$。

假设 $\boldsymbol{\lambda} \not\succcurlyeq \boldsymbol{\mu}$，这意味着我们可以找到$k \in I$和$c \geqslant 1$，使得

$$\sum_{i=0}^{k-1} |\lambda^{(i)}| + \lambda^{(k)\prime}_1 + \cdots + \lambda^{(k)\prime}_c < \sum_{i=0}^{k-1} |\mu^{(i)}| + \mu^{(k)\prime}_1 + \cdots + \mu^{(k)\prime}_c. \tag{3.3}$$

首先，我们假设$k > 0$。

令$r = \lambda^{(k)\prime}_c$，并令$s = r_k + (c - r + 1)p$；则我们断言 $\lambda'_1 + \cdots + \lambda'_s < \mu'_1 + \cdots + \mu'_s$，因此 $\lambda \not\trianglelefteq \mu$。

我们利用 (3.2) 计算 $\lambda'_1 + \cdots + \lambda'_s - (\rho'_1 + \cdots + \rho'_s)$。对于 $0 \leq \mathrm{i} < \mathrm{k}$，$\lambda^{(i)}$ 中的每个节点都为此和贡献 p。此外，$\lambda^{(k)}$ 中满足 $\mathrm{b} - \mathrm{t} \leq \mathrm{c} - \mathrm{r}$ 的每个节点 (t, b) 也为此和贡献 p。（由于不等式 $\mathrm{r}_{k+1} - \mathrm{r}_k > (\mathrm{d}-1)\mathrm{p}$，$\lambda^{(i)}$ 中 $\mathrm{i} > \mathrm{k}$ 对应的节点不作贡献。）令 $\mathrm{T}_{r,c} = \sum_{x=1}^{r-1} \min\{\mathrm{x}, \mathrm{c}\}$，我们得到

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda'_i - \sum_{i=1}^{s} \rho'_i = \left(\sum_{i=0}^{k-1} |\lambda^{(i)}| + \sum_{t \geqslant \max\{1, r-c\}} \min\{\lambda^{(k)}_t, t+c-r\} \right) p$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{k-1} |\lambda^{(i)}| + \sum_{d=1}^{c} {\lambda^{(k)}}'_d - T_{r,c} \right) p,$$

第二个等号来自这样一个事实：${\lambda^{(k)}}'_c = r$。

我们以相同的方式计算 $\mu'_1 + \cdots + \mu'_s - (\rho'_1 + \cdots + \rho'_s)$。假设 $|\mu^{(0)}| + \cdots + |\mu^{(k-1)}| \leqslant |\lambda^{(0)}| + \cdots + |\lambda^{(k-1)}|$ 意味着，对于 $i < k$，$\mu^{(i)}$ 的每个节点对此和贡献 p，而对于 $i > k$，$\mu^{(i)}$ 的节点则不作贡献。因此，与 λ的情形一样，我们得到

$$\sum_{i=1}^{s} \mu'_i - \sum_{i=1}^{s} \rho'_i = \left(\sum_{i=0}^{k-1} |\mu^{(i)}| + \sum_{t \geqslant \max\{1, r-c\}} \min\{\mu_t^{(k)}, t + c - r\} \right) p.$$

由此可得

$$\sum_{t \geqslant \max\{1, r-c\}} \min\{\mu_t^{(k)}, t + c - r\} \geqslant \sum_{d=1}^{c} {\mu^{(k)}}'_d - T_{r,c}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{s} \mu'_i - \sum_{i=1}^{s} \rho'_i \geqslant \left(\sum_{i=0}^{k-1} |\mu^{(i)}| + \sum_{d=1}^{c} {\mu^{(k)}}'_d - T_{r,c} \right) p.$$

我们得到所需的 $\lambda'_1 + \cdots + \lambda'_s < \mu'_1 + \cdots + \mu'_s$。

现在改为假设 $k = 0$。则我们声称 $\lambda'_1 + \cdots + \lambda'_{cp} < \mu'_1 + \cdots + \mu'_{cp}$。与上述情形一样，我们利用 (3.2) 计算 $\lambda'_1 + \cdots + \lambda'_s - (\rho'_1 + \cdots + \rho'_s)$。$\lambda^{(0)}$ 的每个节点 (t,b)，若 $b \leqslant c$，则对此和贡献 p；而对于 $i \geqslant 1$，$\lambda^{(i)}$ 的节点不作贡献，这是由于不等式$r_1 > dp$ 以及 $|\lambda^{(0)}| \geqslant c$这一事实。因此我们得到

$$\sum_{i=1}^{cp} \lambda'_i - \sum_{i=1}^{cp} \rho'_i = \sum_{i=1}^{c} {\lambda^{(0)}}'_i.$$

将 μ 代入 λ，即可得到相同的公式。 □

3.3. **Rouquier 条形核与分拆的包含关系**。 我们需要以下对 [**KL** 引理 4.1.2] 的推广。

命题 3.3. 设ρ 是一个d-Rouquier p-条形核。设$\lambda \in \mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{a}$和$\alpha \in \mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{b}$，其中$a$、$b \leqslant d$，并设$(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell)})$ 和 $(\alpha^{(0)}, \ldots, \alpha^{(\ell)})$ 分别是 λ 和 α 的 p- 条形商。则以下条件等价：

(i) $\lambda \subseteq \alpha$；(ii) 对所有$j \in I$，$\lambda^{(j)} \subseteq \alpha^{(j)}$；(iii) α可由λ通过依次添加p-条形得到。

证明。 显然，(iii)⇒(i)。同样很容易看出，(ii)⇒(iii)：在p-条形商的某个分量中添加一个节点，相当于将分拆的某一部分增加p，这是一种添加p-条形的方式。

因此，只需证明 (i)⇒(ii)。（我们注意到，当 $b - a = 1$ 时，该情形已在 [**KL**，引理 4.1.2] 中得到证明。）

我们对 a 使用归纳法。$a = 0$ 的情形是平凡的，因此我们假设 $a > 0$，并假设将 a 替换为任意更小的值时结论仍成立。假设 $\lambda \subseteq \alpha$。

设 $\mu \in \mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{a-1}$，且 μ的 p-条-商 $(\mu^{(0)}, \ldots, \mu^{(\ell)})$ 由 λ 的 p-条-商移除一个节点得到。于是，根据 (ii)⇒(iii)⇒(i) 的事实，有 $\mu \subset \lambda$，从而 $\mu \subset \alpha$；归纳假设给出对所有 j均有 $\mu^{(j)} \subseteq \alpha^{(j)}$。因此，$(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell)})$ 中唯一可能不是 $(\alpha^{(0)}, \ldots, \alpha^{(\ell)})$ 中节点的节点，就是为得到 μ而移除的节点。特别地，如果存在至少两个这样的分拆 μ（也就是说，如果 $(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell)})$ 至少有两个可移除节点），那么对所有 j都有 $\lambda^{(j)} \subseteq \alpha^{(j)}$，如所要求。

因此，我们可以假设 $(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell)})$ 只有一个可移除节点。这意味着存在 $\mathrm{k} \in \mathrm{I}$，使得 $\lambda^{(k)}$ 是一个矩形分拆 $(\mathrm{x}^{\mathrm{y}})$，其中 $\mathrm{x}, \mathrm{y} \geqslant 1$，而对于 $\mathrm{j} \neq \mathrm{k}$，$\lambda^{(j)} = \varnothing$ 均如此。根据上一段的论证，我们可以假设 $\alpha^{(k)}$ 包含分拆 $(\mathrm{x}^{\mathrm{y}-1}, \mathrm{x} - 1)$。若反设 $\lambda^{(k)} \not\subseteq \alpha^{(k)}$，则 $\alpha^{(k)}$ 中满足 $\mathrm{c} - \mathrm{r} = \mathrm{x} - \mathrm{y}$ 的节点 (r, c) 少于 $\min\{\mathrm{x}, \mathrm{y}\}$ 个。

对于每个j，我们定义r^j为ρ中与j模p同余的最大部分。正如引理 3.2 中所观察到的，将节点(r,c)添加到$\lambda^{(j)}$的第j个分量，相当于在λ的若干列中添加节点

$$r_j+(c-\hat{r})p+1,\ r_j+(c-\hat{r})p+2,\ \dots,\ r_j+(c-\hat{r}+1)p,$$

其中，当$j=0$时，我们记为$\hat{r}=1$；否则记为$\hat{r}=r$。

首先假设$k\geqslant 1$。那么，假设$\lambda\subseteq\alpha$以及上文可得

$$\alpha'_{r_k+(x-y)p+1}-\rho'_{r_k+(x-y)p+1}\geqslant\lambda'_{r_k+(x-y)p+1}-\rho'_{r_k+(x-y)p+1}=\min\{x,y\}.$$

由于$\alpha^{(k)}$中满足$c-r=x-y$的(r,c)节点少于$\min\{x,y\}$，因此必定存在某个$j\neq k$，使得$\alpha^{(j)}$有一个节点(r,c)满足

$$r_k+(x-y)p+1=\begin{cases}r_j+(c-\hat{r})p+k-j+1 & \text{if } j<k,\\ r_j+(c-r)p+p+k-j+1 & \text{if } j>k.\end{cases}$$

事实上，对于$j>k$，这是不可能的，因为它会得到

$$(r-c-1+x-y)p+j-k=r_j-r_k\geqslant(d-1)p+j-k,$$

因此

$$r-c+x-y\geqslant d.$$

但是$|\alpha^{(j)}|\geqslant r-c+1$和$|\alpha^{(k)}|\geqslant x+y-2$，于是得到$|\alpha^{(k)}|+|\alpha^{(j)}|\geqslant d+1$，这与假设$\alpha\in\mathscr{P}^{\rho}_{p^b}$且$b\leqslant d$矛盾。

因此改为$j<k$。现在我们得到

$$(c-\hat{r}+y-x)p+k-j=r_k-r_j\geqslant(d-1)p+k-j,$$

使得

$$c-\hat{r}+y-x\geqslant d-1.$$

但是$|\alpha^{(j)}|\geqslant c-\hat{r}+1$和$|\alpha^{(k)}|\geqslant x+y-2$以及$|\alpha^{(j)}|+|\alpha^{(k)}|\leqslant d$，因此处处取等号，特别是$|\alpha^{(j)}|+|\alpha^{(k)}|=d$。

现在我们利用$\alpha'_{r_k+(x-y+1)p}-\rho'_{r_k+(x-y+1)p}\geqslant\min\{x,y\}$这一事实进行类似计算。现在存在$j'\neq k$，使得（若$j'=0$，则记作$\check{r}=1$；否则记作$\check{r}=r$）

$$r_k+(x-y+1)p=\begin{cases}r_{j'}+(c-\check{r})p+k-j' & \text{if } j'<k,\\ r_{j'}+(c-r)p+p+k-j' & \text{if } j'>k.\end{cases}$$

现在，情形$j'<k$会导致矛盾（与上面的情形$j>k$类似），因此j'必须大于k。但现在我们有指标$j<k<j'$，其中$|\alpha^{(j)}|+|\alpha^{(k)}|+|\alpha^{(j')}|\geqslant d+1$，这再次与假设$\alpha\in\mathscr{P}^{\rho}_{p^d}$矛盾。在情形$k\geqslant 1$下，结论成立。

情形$k=0$类似，但更简单。在这种情况下

$$\alpha'_{(x-1)p+1}-\rho'_{(x-1)p+1}\geqslant\lambda'_{(x-1)p+1}-\rho'_{(x-1)p+1}=y,$$

但$\alpha^{(0)}$的 f 少于列x中的y个节点，因此存在$j>0$，使得$\alpha^{(j)}$有一个节点(r,c)，满足

$$(x-1)p+1=r_j+(c-r)p+p+1-j$$

因此

$$(r-c+x-2)p+j=r_j\geqslant(d-1)p+j$$

使得

$$r-c+x-2\geqslant d-1.$$

但现在，$|\alpha^{(0)}|\geqslant x-1$和$|\alpha^{(j)}|\geqslant r-c+1$这一事实导致矛盾。因此，结论在$k=0$的情形下也成立。□

4. 超代数、超模与缠绕超积

对称群双覆盖的表示论最好通过超代数来研究。本节回顾一般理论，随后研究一些特殊的缠绕超积$A_\ell\wr\mathfrak{S}_d$的表示；这些缠绕超积在对称群双覆盖的 RoCK（超）块中发挥着关键作用，参见定理 5.4。我们的目标是在$d<p$的情形下，以 Littlewood-Richardson 系数计算$A_\ell\wr\mathfrak{S}_d$的 Cartan 不变量，参见推论 4.11。

4.1. 超空间。我们记作 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$。若$V$ 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，则V 上的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次 是一个直和分解：$V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$。向量超空间 是带有指定 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 分次的向量空间。对于 $\varepsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，若$v \in V_\varepsilon$，我们记作 $|v| = \varepsilon$，并称v 是宇称为 ε 的齐次 元素。

若V 和W 是超空间，且 $\varepsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，则线性映射$f: V \to W$ 称为宇称为 ε 的齐次超空间同态，若对于所有 $\delta \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，都有$f(V_\delta) \subseteq W_{\delta+\varepsilon}$。超空间同态 $f: V \to W$ 表示映射$f = f_{\bar{0}} + f_{\bar{1}}$，其中对于 $\varepsilon = \bar{0}$、$\bar{1}$，映射$f_\varepsilon: V \to W$是宇称为 ε的齐次超空间同态。我们用“偶同态”表示“宇称为 $\bar{0}$的齐次同态”，奇同态也类似。

我们将 Π 记作宇称变换函子，参见例如 **[Kl, §12.1]**。因此，对于超空间V，超空间 ΠV 作为向量空间等于V，但宇称互换。我们定义超空间的一个奇同构

$$\sigma_V : V \longrightarrow \Pi V,\ v \longmapsto (-1)^{|v|} v.$$

若$V_1, \ldots, V_d$是超空间，则$V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$是一个超空间，其中 $|v_1 \otimes \cdots \otimes v_d| = |v_1| + \ldots |v_d|$。（在此处以及下文类似情形中，我们假设元素$v_k$ 都是齐次的，并在必要时按线性延拓。）若$f_i: V_i \to W_i$是关于$i = 1, \ldots, d$的超空间同态，则

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_d : V_1 \otimes \cdots \otimes V_d \to W_1 \otimes \cdots \otimes W_d$$

是一个定义在.....上的超空间同态

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_d)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = (-1)^{\sum_{1 \leqslant r < s \leqslant d} |f_s||v_r|} f_1(v_1) \otimes \cdots \otimes f_d(v_d).$$

设$V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ 为一个超空间，且$d \in \mathbb{N}$。对称群 $\mathfrak{S}_d$ 通过以下方式作用于$V^{\otimes d}$

$$^w(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) := (-1)^{[w; v_1, \ldots, v_d]} v_{w^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{w^{-1}(d)},$$

其中对于$w \in \mathfrak{S}_d$和$v_1, \ldots, v_d \in V$，有

$$[w; v_1, \ldots, v_d] := \sum_{\substack{1 \leqslant a < c \leqslant d \\ w(a) > w(c)}} |v_a||v_c|.$$

现在很容易验证

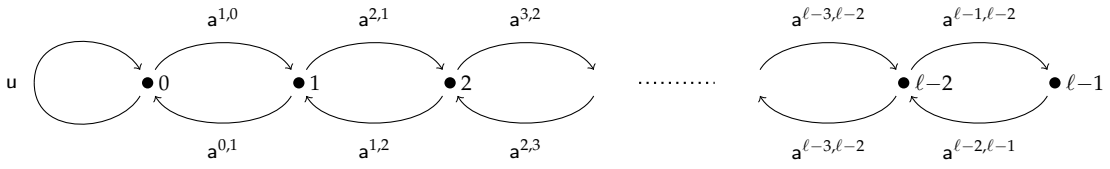
$$\sigma_V^{\otimes d}(^w(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d)) = \mathtt{sgn}(w)\Big(^w\big(\sigma_V^{\otimes d}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d)\big)\Big). \tag{4.1}$$

4.2. 超代数。$\mathbb{F}$-超代数 是一个带有指定的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$分次$A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$的 $\mathbb{F}$-代数，满足$ab \in A^{|a|+|b|}$（只要a、$b \in A$ 都是齐次元素）。若A 和B 是 $\mathbb{F}$-超代数，则一个超代数同态 $f: A \to B$ 是一个偶保单位代数同态。

若 $A_1, \ldots, A_d$ 是超代数，则超空间 $A_1 \otimes \cdots \otimes A_d$ 是一个乘法为

$$(a_1 \otimes \cdots \otimes a_d)(b_1 \otimes \cdots \otimes b_d) = (-1)^{\sum_{1 \leqslant r < s \leqslant d} |a_s||b_r|} a_1 b_1 \otimes \cdots \otimes a_d b_d.$$

例4.1. 我们考虑如下箭图



并定义布劳尔树代数 A_ℓ 为该箭图的路径代数，它由长度为 0 的路径$\{\mathrm{e}^j \mid j \in J\}$以及长度为 1 的路径 u 和 $\{\mathrm{a}^{k,k+1}, \mathrm{a}^{k+1,k} \mid 0 \leqslant k \leqslant \ell - 2\}$生成，模去以下关系：

(i) 所有长度为三或更长的路径均为零；(ii) 所有不是环的长度为二的路径均为零；(iii) 以顶点 $i \in \{1, \ldots, \ell - 2\}$ 为基点的长度为二的环相等；

(iv) 若$l \geqslant 2$，则 $\mathrm{u}^2 = \mathrm{a}^{0,1}\mathrm{a}^{1,0}$。

例如，若 $\ell = 1$，则代数 A_ℓ 是截断多项式代数 $\mathbb{F}[\mathrm{u}]/(\mathrm{u}^3)$。代数 A_ℓ 被视为超代数，其中 u 为奇元，所有其他生成元均为偶元。

例4.2. 对于 $d \in \mathbb{N}$，我们考虑<|endoftext|>缠绕超积 $\mathrm{W}_d := \mathrm{A}_\ell \wr \mathfrak{S}_d$。作为向量超空间，它恰为 $\mathrm{A}_\ell^{\otimes d} \otimes \mathbb{F}\mathfrak{S}_d$，其中 $\mathbb{F}\mathfrak{S}_d$ 集中于次数 $\bar{0}$。乘法由以下要求确定：

(1) $z \mapsto z \otimes 1$ 定义了一个超代数嵌入 $\mathrm{A}_\ell^{\otimes d} \to \mathrm{A}_\ell^{\otimes d} \otimes \mathbb{F}\mathfrak{S}_d$；我们通过此嵌入将 $\mathrm{A}_\ell^{\otimes d}$视为 W_d 的一个超子代数。(2) $x \mapsto 1 \otimes x$ 定义了一个超代数嵌入 $\mathbb{F}\mathfrak{S}_d \to \mathrm{A}_\ell^{\otimes d} \otimes \mathbb{F}\mathfrak{S}_d$；我们通过此嵌入将 $\mathbb{F}\mathfrak{S}_d$ 视为 W_d 的一个超子代数。(3) $w(\mathrm{z}_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{z}_d) = w(\mathrm{z}_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{z}_d)w$ 对于所有 $w \in \mathfrak{S}_d$ 以及所有 $\mathrm{z}_1, \ldots, \mathrm{z}_d \in \mathrm{A}_\ell$。

4.3. **超模**。设A 为一个超代数。A-超模 是指一个A-模V，带有选定的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次$V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$，使得对所有（齐次的）$a \in A$ 和$v \in V$，都有$av \in V^{|a|+|v|}$。

若V 和W 是A-超模，则超空间之间的同态$f\colon V \to W$ 是A-超模的同态，当且仅当$f(av) = (-1)^{|f||a|}af(v)$，其中$a \in A$ 且$v \in V$。

对于 A-超模 V，超空间 ΠV 通过新的作用 $\mathrm{a} \cdot \mathrm{v} = (-1)^{|a|}\mathrm{av}$（其中 $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ 且 $\mathrm{v} \in \Pi\mathrm{V} = \mathrm{V}$）被视为 A-超模。映射 $\sigma_V : \mathrm{V} \to \Pi\mathrm{V}$ 因而是超模的奇同构；特别地，对于 $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ 和 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$，有 $\sigma_V(\mathrm{av}) = (-1)^{|a|}\mathrm{a} \cdot \sigma_V(\mathrm{v})$。

我们用“$\simeq$”表示 A-超模之间的偶同构，用“$\cong$”表示 A-超模之间的任意同构，参见 **[Kl，第 12] 章**。

A-超模 V 的一个超子模 是一个 A-子模 $W \subseteq V$，满足 $W = (W \cap V_{\bar{0}}) \oplus (W \cap V_{\bar{1}})$。如果一个 A-超模恰好有两个超子模，则称其为不可约 。

不可约超模分为两种不同的类型：如果一个不可约超模作为模是不可约的，则称其为M 型；否则称其为Q 型（此时，它作为模是两个不同构的不可约模的直和，例如参见 **[Kl，第 12.2] 节**）。每个不可约模都可以由某个不可约超模通过上述方式得到（例如参见 **[Kl，推论 12.2.10]**），因此，理解不可约超模（及其类型）本质上等价于理解不可约模。

若L 是有限 维不可约A-超模，则L 是 M 型，当且仅当$L \not\simeq \Pi L$，参见 **[Kl，引理 12.2.8]**。

若$A_1, \ldots, A_d$ 是超代数，且$V_1, \ldots, V_d$ 分别是$A_1, \ldots, A_d$ 上的超模，则有一个$A_1 \otimes \cdots \otimes A_d$上的超模$V_1 \boxtimes \cdots \boxtimes V_d$，它作为超空间是$V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$，其作用定义为

$$(a_1 \otimes \cdots \otimes a_d)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = (-1)^{\sum_{1 \leqslant r < s \leqslant d} |a_s||v_r|} a_1 v_1 \otimes \cdots \otimes a_d v_d.$$

若$f_i\colon V_i \to W_i$ 是A-超模同态，其中$i = 1, \ldots, d$，则

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_d : V_1 \boxtimes \cdots \boxtimes V_d \to W_1 \boxtimes \cdots \boxtimes W_d$$

是超模在 $A_1 \otimes \cdots \otimes A_d$ 上的同态。特别地，

$$\sigma_{V_1} \otimes \cdots \otimes \sigma_{V_d} : V_1 \boxtimes \cdots \boxtimes V_d \to (\Pi V_1) \boxtimes \cdots \boxtimes (\Pi V_d) \tag{4.2}$$

是 $(A_1 \otimes \cdots \otimes A_d)$-模的同构（宇称为 d (模 2)）。

如果 V 是有限维 A-超模，则 V 的一个合成序列是子超模序列 $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$，满足对于所有$k = 1, \ldots\ldots, n$，$V_k/V_{k-1}$ 都是不可约超模。如果 $L_1, \ldots\ldots L_n$ 是不可约 A-模（不一定互异），满足对于$k = 1, \ldots\ldots, n$，$V_k/V_{k-1} \simeq L_k$，则称 V 具有合成因子 $L_1, \ldots\ldots L_k$。这些合成因子在偶同构和置换意义下是良定义的。因此，如果 L 是不可约 A-超模，则我们有良定义的合成重数

$$[V : L] := \{k \mid L_k \cong L\}.$$

（如果L 是 M 型，使得$L \not\simeq \Pi L$，我们可以考虑更精细的分次合成重数$[V : L]_\pi = m + n\pi$，其中$m = \{k \mid L_k \simeq L\}$ 且$n = \{k \mid L_k \simeq \Pi L\}$，因此 $[V : L] = m + n$，不过本文不会用到这一点。）

设A 是一个有限维超代数，且L 是一个不可约A-超模，我们用P_L表示L 的射影覆盖。它是正则超模的一个直和项，其顶为L，参见 **[Kl，命题 12.2.12]**。主不可分解超模P_L 的合成因子在本文中至关重要。特别地，A 的超卡当不变量 定义为重数

$$c_{L,L'} := [P_L : L']$$

对于所有不可约 A-超模 L，L'。A 的超 ***Cartan*** 矩阵 即为由A的所有超卡当不变量构成的矩阵 $(c_{L,L'})$。

对于例4.1中的超代数 A_ℓ，在偶同构和奇偶移位 Π意义下，A_ℓ-超模的一个完备不可约系为

$$\{L_j \mid j \in J\} \tag{4.3}$$

其中 L_j 由一个偶向量 v_j 张成，满足 $\mathrm{e}_j v_j = v_j$，而 A_ℓ 的所有其他标准生成元在 v_j 上的作用均为零。现在注意，对每个 j，超模 L_j 都是 M 型，且 $P_j := \mathrm{A}_\ell \mathrm{e}_j$ 是 L_j的射影覆盖。我们可以轻易写出每个 P_j的一组基:

$$\begin{aligned}
P_0 &= \langle \mathrm{e}_0, \mathrm{ue}_0, \mathrm{a}^{1,0}\mathrm{e}_0, \mathrm{u}^2\mathrm{e}_0 \rangle && \text{(omitting } \mathrm{a}^{1,0}\mathrm{e}_0 \text{ if } \ell = 1), \\
P_j &= \langle \mathrm{e}_j, \mathrm{a}^{j-1,j}\mathrm{e}_j, \mathrm{a}^{j+1,j}\mathrm{e}_j, \mathrm{a}^{j,j+1}\mathrm{a}^{j+1,j}\mathrm{e}_j \rangle && \text{for } 1 \leqslant j \leqslant \ell - 2, \\
P_{\ell-1} &= \langle \mathrm{e}_{\ell-1}, \mathrm{a}^{\ell-2,\ell-1}\mathrm{e}_{\ell-1}, \mathrm{a}^{\ell-1,\ell-2}\mathrm{a}^{\ell-2,\ell-1}\mathrm{e}_{\ell-1} \rangle && \text{if } \ell \geqslant 2.
\end{aligned}$$

由此，我们可以立即读出每个 P_j的合成因子:

引理 4.3。 P_0 的合成因子为 $L0, \Pi L_0, L_1, L_0$（若 $\ell = 1$，则略去 L_1），P_i 的合成因子为 L_i、L_{i-1}、L_{i+1}、L_i，其中$1 \leqslant i \leqslant \ell - 2$；而 $P_{\ell-1}$的合成因子为 $L_{\ell-1}$、$L_{\ell-2}$、$L_{\ell-1}$，若$\ell \geqslant 2$。

4.4. 缠绕超积的表示 W_d。 从现在起直到第 4 节结束，我们假设 $d < p$ 或 $p = 0$。我们的目标是发展例4.2中缠绕超积代数 W_d 的表示论，并最终计算 W_d的超 Cartan 矩阵。我们的工作受到 Chuang 和 Tan 的论文 [$\mathbf{CT}_2$] 的启发；我们的许多结果都是将他们的结果直接推广到超模的情形。

给定 $\boldsymbol{j} = j_1 \dots j_d \in J^d$，我们定义幂等元

$$\mathrm{e}_{\boldsymbol{j}} := \mathrm{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{e}_{j_d} \in \mathrm{A}_\ell^{\otimes d} \subseteq \mathrm{W}_d.$$

于是我们在 W_d 中有正交幂等元分解:

$$1 = \sum_{\boldsymbol{j} \in J^d} e_{\boldsymbol{j}}. \tag{4.4}$$

对于 ($\delta = \delta_1, \dots, \delta_k$) 的合成，其中 d，我们有一个杨子群 $\mathfrak{S}_\delta = \mathfrak{S}_{\delta_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\delta_k} \leqslant \mathfrak{S}_d$ 及其对应的抛物子代数

$$\mathrm{W}_\delta := \mathrm{A}_\ell^{\otimes d} \otimes \mathbb{F}\mathfrak{S}_\delta \subseteq \mathrm{W}_d.$$

注意，$\mathrm{W}_\delta \cong \mathrm{W}_{\delta_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{W}^{\delta_k}$ 是超代数的张量积。若 $V_1, \dots, V_k$ 分别是 $\mathrm{W}^{\delta_1}, \dots, \mathrm{W}^{\delta_k}$ 的超模，则我们有 $\mathrm{W}_{\delta_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{W}^{\delta_k}$ = W_δ 上的超模 $V_1 \boxtimes \cdots \boxtimes V_k$，因此可以构造 W_d-超模

$$V_1 \circ \cdots \circ V_k := \mathrm{Ind}_{\mathrm{W}_\delta}^{\mathrm{W}_d}(V_1 \boxtimes \cdots \boxtimes V_k).$$

注意，运算“$\circ$”满足交换律，即 $V \circ V' \simeq V' \circ V$。

回忆一下，如果 $\lambda \in \mathscr{P}(d)$，我们将相应的 $\mathbb{F}\mathfrak{S}_d$ 的 Specht模记为 $\mathcal{S}^\lambda$。我们对 p 的假设意味着 $\mathcal{S}^\lambda$ 是不可约的，因此可以选取一个本原幂等元 $f^\lambda \in \mathbb{F}\mathfrak{S}_d$，使得 $\mathbb{F}\mathfrak{S}_d f^\lambda \cong \mathcal{S}^\lambda$。

现在，给定 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathscr{P}_J(d)$，定义 $\delta := (\delta_0, \dots, \delta_{\ell-1}) = (|\lambda^{(0)}|, \dots, |\lambda^{(\ell-1)}|)$。于是我们有一个本原幂等元

$$f^{\boldsymbol{\lambda}} := f^{\lambda^{(0)}} \otimes \cdots \otimes f^{\lambda^{(\ell-1)}} \in \mathbb{F}\mathfrak{S}_{\delta_0} \otimes \cdots \otimes \mathbb{F}\mathfrak{S}_{\delta_{\ell-1}} = \mathbb{F}\mathfrak{S}_\delta,$$

由此我们定义一个幂等元

$$e(\boldsymbol{\lambda}) := e_0^{\otimes \delta_0} \otimes \cdots \otimes e_{\ell-1}^{\otimes \delta_{\ell-1}} \otimes f^{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathrm{W}_d. \tag{4.5}$$

设 V 是有限维 A_ℓ-超模，且 $\lambda \in \mathscr{P}(d)$。记:

$$V(\lambda) := V^{\otimes d} \otimes \mathcal{S}^\lambda$$

视为经由以下方式作用的 W_d-超模

$$\begin{aligned}
z(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \otimes y) &= z(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) \otimes y, \\
w(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \otimes y) &= {}^w(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) \otimes wy
\end{aligned}$$

对于所有$z \in \mathrm{A}_\ell^{\otimes x}$、$w \in \mathfrak{S}_d$、$v_1, \dots\dots, v_d \in V$、$y \in \mathcal{S}^\lambda$。这一构造的两个重要特例是$V = L_j$和$V = P_j$，分别为在第4.3节中构造的简单 A_ℓ-模及其射影覆盖；它们给出 W_d-超模$L_j(\lambda)$ 和$P_j(\lambda)$。对于一般的V，我们有以下两个结果。

引理 4.4. 设V 是有限维 A_ℓ-超模，且$\lambda \in \mathscr{P}(d)$。则$(\Pi V)(\lambda) \cong V(\lambda')$。

证明。 由 (2.2)，我们有 $\mathcal{S}^{\lambda'} \cong \mathcal{S}^\lambda \otimes \mathrm{sgn}$，因此可以将 $\mathcal{S}^{\lambda'}$ 与 $\mathcal{S}^\lambda$ 视为向量空间，但赋予新的作用 $w \cdot d = \mathrm{sgn}(w)wd$。现在，我们考虑线性同构

$$\varphi := \sigma_V^{\otimes d} \otimes \mathrm{id} : V(\lambda') = V^{\otimes d} \otimes \mathcal{S}^{\lambda'} \xrightarrow{\sim} (\Pi V)^{\otimes d} \otimes \mathcal{S}^\lambda = (\Pi V)(\lambda).$$

正如 (4.2) 中所指出的， φ 是 $\mathrm{A}_\ell^{\otimes d}$-超模的同构。另一方面，对于 $v_1, \dots, v_d \in V$、$y \in \mathcal{S}^{\lambda'}$ 和 $w \in \mathfrak{S}_d$，我们有

$$\begin{aligned}
\varphi\big(w(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \otimes y)\big) &= \varphi\big({}^w(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) \otimes (\mathrm{sgn}(w)wy)\big) \\
&= \mathrm{sgn}(w)\sigma_V^{\otimes d}\big({}^w(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d)\big) \otimes wy \\
&= {}^w\big(\sigma_V^{\otimes d}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d)\big) \otimes wy \\
&= w\varphi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \otimes y)
\end{aligned}$$

其中倒数第二个等式使用了 (4.1)。因此， φ 也是 $\mathbb{F}\mathfrak{S}_d$-模的同构。由此可知， φ 是 W_d-超模的同构。□

引理 4.5。 设V 是有限维 A_ℓ-超模，且 $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_k)$ 是 d 的一个合成。

(i) 对于$\lambda \in \mathscr{P}(d)$，我们有

$$\mathrm{Res}^{\mathrm{W}_d}_{\mathrm{W}_\delta} V(\lambda) \cong \bigoplus_{\mu^1 \in \mathscr{P}(\delta_1), \dots, \mu^k \in \mathscr{P}(\delta_k)} \big(V(\mu^1) \boxtimes \cdots \boxtimes V(\mu^k)\big)^{\oplus \mathrm{c}(\lambda; \mu^1, \dots, \mu^k)}.$$

(ii) 对于$\mu^1 \in \mathscr{P}(\delta_1)$，……，$\mu^k \in \mathscr{P}(\delta_k)$，我们有

$$V(\mu^1) \circ \cdots \circ V(\mu^k) \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathscr{P}(d)} V(\lambda)^{\oplus \mathrm{c}(\lambda; \mu^1, \dots, \mu^k)}.$$

证明。 证明与 [$\mathbf{CT}_2$, 引理 3 相同，3] 但需注意超代数符号。□

给定 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(\ell-1)}) \in \mathscr{P}_J(d)$，我们现在定义 W_d-超模

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\lambda}) &:= L_0(\lambda^{(0)}) \circ \cdots \circ L_{\ell-1}(\lambda^{(\ell-1)}), \\
P(\boldsymbol{\lambda}) &:= P_0(\lambda^{(0)}) \circ \cdots \circ P_{\ell-1}(\lambda^{(\ell-1)}).
\end{aligned}$$

命题 4.6。 集合 $\{L(\boldsymbol{\lambda}) \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathscr{P}^J(d)\}$ 构成一组完备且无冗余的不可约 W_d-超模，除偶同构与奇偶移位外彼此不同。此外，$P(\boldsymbol{\lambda})$ 是$L(\boldsymbol{\lambda})$对每个 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathscr{P}_J(d)$的射影覆盖。

证明。 第一条显然且众所周知，参见例如 [$\mathbf{M}_1$, 定理 A.5]。对于第二条，利用弗罗贝尼乌斯互反律可知，对于式 (4.5) 中定义的幂等元 $e(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathrm{W}_d$，$P(\boldsymbol{\lambda}) \simeq \mathrm{W}_d e(\boldsymbol{\lambda})$ 。我们现在还可推出 $\dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{W}_d}(P(\boldsymbol{\lambda}), L(\boldsymbol{\mu})) = \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}$，由此完成证明。□

现在我们确定模 $L(\boldsymbol{\lambda}^1) \circ \cdots \circ L(\boldsymbol{\lambda}^k)$ 的合成因子。

引理 4.7. 设 $\boldsymbol{\mu} \in \mathscr{P}_J(d)$，并设 $(\delta_1, \dots, \delta_k)$ 是 d 的一个合成。对于 $r = 1, \dots, k$，假设$\boldsymbol{\lambda}^r = (\lambda^{(r,0)}, \dots, \lambda^{(r,\ell-1)}) \in \mathscr{P}^J(\delta_r)$。那么

$$[L(\boldsymbol{\lambda}^1) \circ \cdots \circ L(\boldsymbol{\lambda}^k) : L(\boldsymbol{\mu})] = \prod_{j \in J} \mathrm{c}(\mu^{(j)}; \lambda^{(1,j)}, \dots, \lambda^{(k,j)}).$$

证明。 由引理 4.5(ii) 及 '$\circ$' 的交换性可得。 □

4.5. **$\mathbf{W}$ 的超 Cartan 矩阵**W_d. 本小节继续假设 $d < p$ 或 $p = 0$。我们已明确构造出 W_d 的不可约超模和射影不可分解超模，现在继续计算其超卡当不变量。

引理 4.8. 设V、W是有限维 A_ℓ-超模，且U是V的超子模，使得 $V/U \simeq W$。那么对于 $\lambda \in \mathscr{P}(d)$，$\mathrm{W}_d$-超模$V(\lambda)$ 具有一个滤过，其子因子$U(\mu) \circ W(\nu)$ 各恰好出现 $\mathrm{c}(\lambda; \mu, \nu)$ 次。

证明。对于 0 6 c 6 d，记 V_c 为 $\mathrm{V}(\lambda) = \mathrm{V}^{\otimes d} \otimes \mathcal{S}^\lambda$ 的超子模，由形如 $\mathrm{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{v}_d \otimes \mathrm{x}$ 的向量张成，其中至少有 c 个向量 $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_d \in \mathrm{V}$ 属于 U，且 $\mathrm{x} \in \mathcal{S}^\lambda$。这给出一个滤过 $\mathrm{V}(\lambda) = \mathrm{V}_0 \supseteq \mathrm{V}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{V}_d \supseteq \mathrm{V}_{d+1} = 0$，其中

$$\frac{V_c}{V_{c+1}} \cong \bigoplus_{\substack{\mu \in \mathscr{P}(c) \\ \nu \in \mathscr{P}(d-c)}} (U(\mu) \circ W(\nu))^{\oplus \mathrm{c}(\lambda;\mu,\nu)},$$

参见 [$\mathbf{CT}_2$, 引理 4.2] 的证明。 □

引理 4.9。 设$\lambda \in \mathscr{P}(d)$，且$V$ 是一个具有组合列的 A_ℓ-超模

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_{m+1} = 0.$$

令$K := \{0, \ldots, m\}$。对于$\boldsymbol{\nu} = (\nu^{(0)}, \ldots, \nu^{(m)}) \in \mathscr{P}^K(d)$ 以及$j \in J$，定义多重集

$$M(j, \boldsymbol{\nu}) := \{\nu^{(k)} \mid k \in K,\ V_k/V_{k+1} \simeq L_j\}$$
$$M'(j, \boldsymbol{\nu}) := \{(\nu^{(k)})' \mid k \in K,\ V_k/V_{k+1} \simeq \Pi L_j\}.$$

那么对于任意$\boldsymbol{\mu} = (\mu^{(0)}, \ldots, \mu^{(\ell-1)}) \in \mathscr{P}_J(d)$，我们有

$$[V(\lambda) : L(\boldsymbol{\mu})] = \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathscr{P}^K(d)} \mathrm{c}(\lambda; \nu^{(0)}, \ldots, \nu^{(m)}) \prod_{j \in J} \mathrm{c}(\mu^{(j)}; M(j, \boldsymbol{\nu}) \sqcup M'(j, \boldsymbol{\nu})).$$

证明。 由引理 4.8 通过归纳法即可得到，使用引理 4.4 和 4.5。 □

以下结果是 [$\mathbf{CT}_2$, 命题 4.4] 的“超版本”。

命题 4.10. 设$V_0, \ldots, V_{\ell-1}$ 为有限维 A_ℓ-超模，且$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell-1)}) \in \mathscr{P}_J(d)$。令

$$V(\boldsymbol{\lambda}) := V_0(\lambda^{(0)}) \circ \cdots \circ V_{\ell-1}(\lambda^{(\ell-1)}).$$

设$V^j = V_{j,0} \supset V_{j,1} \supset \cdots \supset V_{j,m_j+1} = 0$为$V^j$对每个 $j \in J$ 的一个合成列。令

$$K := \{(j, s) \in J \times \mathbb{N}_0 \mid s \leqslant m_j\}.$$

对于$i \in J$ 和$\boldsymbol{\nu} \in \mathscr{P}^K(d)$，令

$$M(i, \boldsymbol{\nu}) := \{\nu^{(j,s)} \mid (j, s) \in K \text{ and } V_{j,s}/V_{j,s+1} \simeq L_i\}$$
$$M'(i, \boldsymbol{\nu}) := \{(\nu^{(j,s)})' \mid (j, s) \in K \text{ and } V_{j,s}/V_{j,s+1} \simeq \Pi L_i\}.$$

那么对于任意$\boldsymbol{\mu} = (\mu^{(0)}, \ldots, \mu^{(\ell-1)}) \in \mathscr{P}_J(d)$，我们有

$$[V(\boldsymbol{\lambda}) : L(\boldsymbol{\mu})] = \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathscr{P}^K(d)} \prod_{j \in J} \mathrm{c}(\lambda^{(j)}; \nu^{(j,0)}, \ldots, \nu^{(j,m_j)})\ \mathrm{c}(\mu^{(j)}; M(j, \boldsymbol{\nu}) \sqcup M'(j, \boldsymbol{\nu})).$$

证明。 对于 $j \in J$，令

$$M(i, \boldsymbol{\nu}, j) := \{\nu^{(j,s)} \mid 0 \leqslant s \leqslant m_j \text{ and } V_{j,s}/V_{j,s+1} \simeq L_i\}$$
$$M'(i, \boldsymbol{\nu}, j) := \{(\nu^{(j,s)})' \mid 0 \leqslant s \leqslant m_j \text{ and } V_{j,s}/V_{j,s+1} \simeq \Pi L_i\},$$

使得 $M(i, \boldsymbol{\nu}) = \bigsqcup_{j \in J} M(i, \boldsymbol{\nu}, j)$ 并且 $M'(i, \boldsymbol{\nu}) = \bigsqcup_{j \in J} M'(i, \boldsymbol{\nu}, j)$。

B由引理 4.9，对于每个 $j \in J$，令 $\delta_j := |\lambda^{(j)}|$，我们在格罗滕迪克群中有

$$[V(\lambda^{(j)})] = \sum_{\boldsymbol{\mu}^j \in \mathscr{P}^J(\delta_j)} q_{\boldsymbol{\mu}^j} [L(\boldsymbol{\mu}^j)],$$

其中

$$q_{\boldsymbol{\mu}^j} = \sum_{\nu^{(j,0)}, \ldots, \nu^{(j,m_j)}} \mathrm{c}(\lambda^{(j)}; \nu^{(j,0)}, \ldots, \nu^{(j,m_j)}) \prod_{i \in J} \mathrm{c}(\mu^{(j,i)}; M(i, \boldsymbol{\nu}, j) \sqcup M'(i, \boldsymbol{\nu}, j)).$$

Now,

$$\begin{aligned}[V(\boldsymbol{\lambda})] &= [V(\lambda^{(0)}) \circ \cdots \circ V_{\ell-1}(\lambda^{(\ell-1)})] \\ &= \sum_{\boldsymbol{\mu}^0 \in \mathscr{P}^J(\delta_0), \ldots, \boldsymbol{\mu}^{\ell-1} \in \mathscr{P}^J(\delta_{\ell-1})} q_{\boldsymbol{\mu}^0} \ldots q_{\boldsymbol{\mu}^{\ell-1}} [L_{\boldsymbol{\mu}^0} \circ \cdots \circ L_{\boldsymbol{\mu}^{\ell-1}}].\end{aligned}$$

接下来应用引理 4.7，并使用下面这个涉及 Littlewood–Richardson 系数的恒等式：

$$\mathrm{c}(\mu^{(i)}; M(i,\boldsymbol{\nu}) \sqcup M'(i,\boldsymbol{\nu})) = \mathrm{c}(\mu^{(i)}; \mu^{(0,i)}, \dots, \mu^{(\ell-1,i)}) \prod_{j \in J} \mathrm{c}(\mu^{(j,i)}; M(i,\boldsymbol{\nu},j) \sqcup M'(i,\boldsymbol{\nu},j)),$$

这又可由利用诱导的传递性，以对称群的归纳来描述 Littlewood–Richardson 系数的结果推出。□

推论 4.11。令$\boldsymbol{\lambda}$、$\boldsymbol{\mu} \in \mathscr{P}^J$（$d$）。则

$$[P(\boldsymbol{\lambda}) : L(\boldsymbol{\mu})] = \sum \prod_{j \in J} \mathrm{c}(\mu^{(j)}; \alpha^{(j)}, \beta^{(j+1)}, \gamma^{(j-1)}, \delta^{(j)})\ \mathrm{c}(\lambda^{(j)}; \alpha^{(j)}, \beta^{(j)}, \gamma^{(j)}, \delta^{(j)}),$$

其中求和遍历所有分拆 $\alpha^{(i)}$、$\beta^{(i)}$、$\gamma^{(i)}$、$\delta^{(i)}$，满足 $i \in J$，将 $\gamma^{(-1)} =$（$\beta^{(0)}$）′ 读作 $\beta^{(\ell)} = \gamma^{(\ell-1)} = \varnothing$。（如果将该公式解释为 $c_{\lambda、\ \mu} = \sum_{\alpha、\ \beta、\ \delta} \mathrm{c}$（$\mu$；$\alpha$、$\beta'$、$\delta$）c（$\lambda$；$\alpha$、$\beta$、$\delta$）。）

证明。将命题 4.10 应用于 V（$\boldsymbol{\lambda}$）$= P$（$\boldsymbol{\lambda}$）的情形，并使用引理 4.3。□

5. 对称群双覆盖的表示

5.1. 对称群的双覆盖。令 $\hat{\mathfrak{S}}_n$ 表示对称群 $\mathfrak{S}_n$的一个真双覆盖。则 $\hat{\mathfrak{S}}_n$ 包含一个阶为 2 的中心元 z，且 $\hat{\mathfrak{S}}_n/\langle z\rangle \cong \mathfrak{S}_n$。

中心对合 z 给出一个中心幂等元 $e_z = \frac{1}{2}(1-z)$，以及直和分解

$$\mathbb{F}\hat{\mathfrak{S}}_n = e_z\mathbb{F}\hat{\mathfrak{S}}_n \oplus (1-e_z)\mathbb{F}\hat{\mathfrak{S}}_n.$$

代数 $(1-e_z)\mathbb{F}\hat{\mathfrak{S}}_n$ 与 $\mathbb{F}\mathfrak{S}_n$同构，因此我们在此着重研究 $e_z\mathbb{F}\hat{\mathfrak{S}}_n$的表示，它们通常称为 $\mathfrak{S}_n$的自旋表示。我们将 $e_z\mathbb{F}\hat{\mathfrak{S}}_n$ 认作扭曲群代数 $\mathcal{T}_n$，见 [**Kl**，第 13 节。1]，其中，通过规定 $e_z\sigma$ 的奇偶性取决于 σ 在 $\mathfrak{S}_n$ 中的像是偶还是奇，从而在 $\mathcal{T}_n$ 上定义超代数结构。

特征为 0 时不可约自旋超模的分类可追溯至 Schur（不过 Schur 研究的是模而非超模，且只构造了特征标；相应的模直到后来才由 Nazarov [**N**]构造出来）。对于 λ 的每个严格分拆 λ，都存在一个 $\mathbb{C}\hat{\mathfrak{S}}_n$的不可约自旋超模 $\mathrm{S}_{\mathbb{C}}(\lambda)$，而 $\{\mathrm{S}_{\mathbb{C}}(\lambda) \mid \lambda \in \mathscr{P}_0(n)\}$ 构成不可约自旋超模的完备且无冗余集合。此外，回顾 **(2.1)**，当 $a(\lambda) = 0$时，超模 $\mathrm{S}_{\mathbb{C}}(\lambda)$ 为 M 型；当 $a(\lambda) = 1$时，则为 Q 型。

特征p 下不可约超模的分类归功于 Brundan 和第二作者 [$\mathbf{BK}_2$]。（另一种分类见 [$\mathbf{BK}_1$]，和 [**KS**；定理 B] 表明这两种分类一致。）对于每个 n 的受限p-严格分拆 μ，都有一个不可约$\mathcal{T}_n$-超模 $\mathrm{D}(\mu)$，而 $\{\mathrm{D}(\mu) \mid \mu \in \mathscr{RP}_p(n)\}$ 构成一组完备且无冗余的不可约 $\mathcal{T}_n$-超模。此外，若 μ 中具有非零剩余的节点数为偶数，则 $\mathrm{D}(\mu)$ 为 M 型；否则为 Q 型。

由于我们只关注特征p下的表示，因此用记号 $\mathrm{S}(\lambda)$ 表示 $\mathrm{S}_{\mathbb{C}}(\lambda)$的一个 p-模约化，并将其视为一个 $\mathcal{T}_n$-超模。注意，$\mathrm{S}(\lambda)$ 作为超模并未定义良好，但其合成因子是定义良好的。（超）分解数问题因此就是求 $[\mathrm{S}(\lambda) : \mathrm{D}(\mu)]$ 的合成重数，其中 $\lambda \in \mathscr{P}_0(n)$ 和 $\mu \in \mathscr{RP}_p(n)$。

自旋模的块分类归功于 Humphreys [**H**]。这里我们倾向于讨论自旋超块，即作为超代数 $\mathcal{T}_n$ 的不可分解直和项；事实上，除了平凡的简单块情形外，块与超块完全相同，因此我们不区分二者，并约定“块”指“超块”，更多详情见 [**KL**，§5.2b]。按照这一约定，每个 $\mathrm{S}(\lambda)$ 都属于一个块，而 $\mathcal{T}_n$-超模 $\mathrm{S}(\lambda)$ 和 $\mathrm{D}(\mu)$ 属于同一个块，当且仅当 λ 与 μ 具有相同的 p- 条形核。这也意味着它们具有相同的 p-条形权，因此块由数对(ρ,d)标记，其中 ρ 是一个p-条形核，且$d \in \mathbb{N}_0$ 满足 $|\rho| + pd = n$。我们将对应于数对(ρ,d)的块记为$\mathcal{B}^{\rho,d}$。

块分类还可以用剩余类来表述：根据 [$\mathbf{MY}_1$,定理 5]，，两个 p-严格分拆的 n 个节点具有相同的 p-条形核，当且仅当对于每个 $i \in I$，它们具有相同数量的 i-节点。因此，我们也可以用一个由 n 个 I中的元素组成的多重集来标记 $\mathcal{T}_n$ 的一个块，该多重集对应于标记该块中某个不可约模的分拆的节点的剩余类。我们将 $\mathcal{B}_S$ 记作由多重集 S标记的块。一个重要的

结果是，一个块中的所有不可约超模都具有相同的类型；因此，我们相应地称一个块为 M 型或有理数域型。

我们还有交错群的一个双覆盖 $\hat{\mathfrak{A}}_n \subseteq \hat{\mathfrak{S}}_n$，其扭曲群代数 $e_z\mathbb{F}\hat{\mathfrak{A}}_n$可与偶分量 $(\mathcal{T}_n)_0$相识别。此外，根据 [**Ke**，命题 3.16]，，除非 $d = 0$ 且 $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 为 M 型，否则 $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 的偶分量 $\mathcal{B}^{\rho,d}_0$ 是 $\mathbb{F}\hat{\mathfrak{A}}_n$的单个块。关于此内容的更多信息，请参阅 [**KL**，§5.2b]。

5.2. 分支规则与权。使用剩余类多重集进行的块分类使我们能够定义限制函子和诱导函子 E_i 与 F_i。设 M 是一个属于块 $\mathcal{B}_S$的 $\mathcal{T}_n$-超模。给定 $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$，我们通过将 M 诱导到 $\mathcal{T}_{n+1}$，然后取属于块 $\mathcal{B}_{S\sqcup\{i\}}$ 的块分量，来定义一个 $\mathcal{T}_{n+1}$-模 $\mathrm{F}_i\mathrm{M}$（如果存在这样的块；否则令 $\mathrm{F}_i\mathrm{M} := 0$）。限制函子 E_i 的定义类似：将其限制到 $\mathcal{T}_{n-1}$，并从 S 中移除一个 i 的副本。函子 E_i、F_i（在 [Kl，（22.17）、（22.18）]中称为 res_i 和 ind_i）对所有 n 均有定义，因此当 $\mathrm{r} \geqslant 0$时，我们可以考虑幂 E_i^r、F_i^r。

给定 $\lambda \in \mathscr{P}_0(n)$，令 $M(\lambda,i)$ 表示由 λ 添入一个 i-节点而得到的 $n+1$ 的严格分拆集合。那么，根据 [$\mathbf{MY}_2$，定理 3]，，在 $\mathcal{T}_{n+1}$ 的格罗滕迪克群中有

$$[F_i\mathrm{S}(\lambda)] = \sum_{\mu\in M(\lambda,i)} a_{\lambda\mu}[\mathrm{S}(\mu)], \tag{5.1}$$

其中，$a^{\lambda\mu}$ 在 λ 为奇数且 μ 为偶数时等于 2，否则等于 1。由弗罗贝尼乌斯互反律可得 $E_i\mathrm{S}(\lambda)$ 的相应结果。（关于 $[E_i\mathrm{S}(\lambda)]$ 和 $[F_i\mathrm{S}(\lambda)]$ 的这一描述，也可以通过考虑 [**Kl** 的 $p > n$ 情形，并利用定理 22.3.4 和 22.3.5] 推得。）

现在，我们可以将算子 E_i 和 F_i 作用于超模的特征标（普通特征或 p-模布劳尔特征标）以及超模上。例如，若 χ^λ 表示不可约超模 $S_{\mathbb{C}}(\lambda)$ 的特征标，我们定义 $F_i\chi^\lambda = \sum_{\mu\in M(\lambda,i)} a_{\lambda\mu}\chi^\mu$。$E_i\chi^\lambda$ 的定义类似。

Brundan–Kleshchev 和 Kleshchev–Shchigolev 的模分支规则给出了关于模$E_i\mathrm{D}(\mu)$的信息。我们只需要一个结果，而要陈述这个结果，还需要一些组合学知识。设 μ 是一个p-严格分拆，且$i \in I$。令 μ^- 表示满足$\mu^- \subseteq \mu$ 且 $\mu \setminus \mu^-$ 由i-节点组成的最小p-严格分拆。这些节点称为 μ的可移除i-节点。类似地，令 μ^+ 表示满足 $\mu^+ \supseteq \mu$ 且 $\mu^+ \setminus \mu$ 由i-节点组成的最大p-严格分拆。这些节点称为 μ的可添加i-节点。

μ 的*i-符号序列* 是通过从左到右列出 μ 的可添加和可移除i-节点，并对每个可添加i-节点写下 $+$、对每个可移除i-节点写下 $-$ 而得到的符号序列。约化 *i-符号序列* 是通过依次删除相邻对 $+-$得到的子序列。约化i-符号序列中与 $-$ 符号对应的可移除节点称为 μ的正规i-节点。

我们下面需要的结果如下（见 [**KS**，定理 A(ii)]）。

引理 5.1. 设$\mu \in \mathscr{RP}_p(n)$ 且 $\nu \in \mathscr{RP}_p(n-1)$，并且 ν由μ移去一个正规i-节点得到。那么 $\mathrm{D}(\nu)$是$E_i\mathrm{D}(\mu)$的一个合成因子。

现在，给定一个 $\mathcal{T}_n$-超模以及一个词 $\boldsymbol{i} = i_1\ldots i_n \in I^n$，若$\boldsymbol{i}$ 满足$E^{i_1}\ldots E^{i_n}M \neq 0$，则称$\boldsymbol{i}$ 是M 的一个权。函子E_i 是正合的这一事实，结合上述结果，可得如下结论。

命题 5.2. 设$i \in I$ 且$i_1\ldots i_{n-1} \in I^{n-1}$。

(i) 设$\lambda \in \mathscr{P}_0(\mathrm{n})$且 $\mu \in \mathscr{P}_0(\mathrm{n}-1)$由 λ 移去一个 i-节点得到。若 $\mathrm{i}_1\ldots\mathrm{i}_{n-1}$ 是 $\mathrm{S}(\mu)$的一个权，则 $\mathrm{i}_1\ldots\mathrm{i}_{n-1}\mathrm{i}$ 是 $\mathrm{S}(\lambda)$的一个权。(ii) 设$\mu \in \mathscr{RP}\mathrm{p}(\mathrm{n})$且$\nu \in \mathscr{RP}_p(\mathrm{n}-1)$由$\mu$ 移去一个正规 i-节点得到。若 $\mathrm{i}_1\ldots\mathrm{i}_{n-1}$ 是 $\mathrm{D}(\nu)$的一个权，则 $\mathrm{i}_1\ldots\mathrm{i}_{n-1}\mathrm{i}$ 是 $\mathrm{D}(\mu)$的一个权。

有关 $\mathcal{T}_n$ 分支规则的更多（详细）信息，请参见 [**Kl**，第二部分] 以及 [**KS**]。

5.3. **虚射影特征标**。给定 $\lambda \in \mathscr{P}^{\rho,d}_0$，我们将 χ^λ 记作不可约超模 $\mathrm{S}_{\mathbb{C}}(\lambda)$ 的特征标，并将 $\mathrm{Ch}^{\rho,d}$ 记作由 $\{\chi^\lambda \mid \lambda \in \mathscr{P}^{\rho,d}_0\}$ 这一组定义在 $\mathfrak{S}_{|\rho|+dp}$ 上的类函数 $\hat{}$ 所张成的 $\mathbb{Q}$-张成空间。

对于每个 $\mu \in \mathscr{RP}^{\rho,d}_p$，我们都有一个不可分解射影超模 $P(\mu)$，其单头为$D(\mu)$。按照经典理论提升幂等元后，我们推得$P(\mu)$ 可提升到特征

零，从而得到特征标 $\varphi^\mu \in \mathrm{Ch}^{\rho,d}$。我们将 $\mathrm{PCh}^{\rho,d}$ 记为集合 $\{\varphi^\mu \mid \mu \in \mathscr{RP}_p^{\rho,d}\}$的 $\mathbb{Q}$-张成空间，并将 $\mathrm{PCh}^{\rho,d}$ 中的元素称为虚射影特征标。

注意，$\{\chi^\lambda \mid \lambda \in \mathscr{P}_0^{\rho,d}\}$ 是 $\mathrm{Ch}^{\rho,d}$ 的一组基，因为每个 χ^λ 要么是一个不可约特征标，要么是两个不可约特征标 $\chi^{\lambda,+}+\chi^{\lambda,-}$ 之和，而且所有不可约特征标 $\chi^{\lambda,\pm},\chi^\mu$ 彼此不同（参见 **[Kl**，推论 12.2.10]）。此外，$\{\varphi^\mu \mid \mu \in \mathscr{RP}_p^{\rho,d}\}$ 是 $\mathrm{PCh}^{\rho,d}$ 的一组基。这一点的证明与 χ^λ相同。首先，注意每个 φ^μ 要么是一个不可分解射影特征标，要么是两个不可分解射影特征标 $\varphi^{\lambda,+}+\varphi^{\lambda,-}$ 之和；由 **[Kl**、命题 12.2.12 和引理 12.2.16] 可知，所有不可分解射影特征标 $\varphi^{\lambda,\pm},\varphi^\mu$ 彼此不同。然后利用不可分解射影特征标 **[CR** 的线性无关性，定理 18.26(iii)]。

给定 $\varphi=\sum_{\lambda\in\mathscr{P}^{\rho,d}_0} a_\lambda\chi^\lambda \in \mathrm{Ch}^{\rho,d}$，我们将系数 a_λ 记作 $[\varphi:\chi^\lambda]$。我们称 χ^λ 出现于 φ，若 $[\varphi:\chi^\lambda]$ 非零。下文将使用 Brauer 互反律的超版本，根据重数 $[\varphi^\mu:\chi^\lambda]$计算 $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 的分解数：

$$[\mathrm{S}(\lambda):\mathrm{D}(\mu)]=\begin{cases}2[\varphi^\mu:\chi^\lambda] & \text{if } \mathrm{S}_{\mathbb{C}}(\lambda) \text{ is of type Q and } \mathrm{D}(\mu) \text{ is of type M},\\ \frac{1}{2}[\varphi^\mu:\chi^\lambda] & \text{if } \mathrm{S}_{\mathbb{C}}(\lambda) \text{ is of type M and } \mathrm{D}(\mu) \text{ is of type Q},\\ [\varphi^\mu:\chi^\lambda] & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{5.2}$$

这由经典的 Brauer 互反律推出，同时需注意，当 $\mathrm{S}_{\mathbb{C}}(\lambda)$ 为 Q 型时，有 $\chi^\lambda=\chi^{\lambda,+}+\chi^{\lambda,-}$；当 $\mathrm{D}(\mu)$ 为 Q 型时，有 $\varphi^\lambda=\varphi^{\lambda,+}+\varphi^{\lambda,-}$；此外，对于通过与符号表示张量积而相互得到的非同构不可约模 $\mathrm{D}(\mu,+)$ 和 $\mathrm{D}(\mu,-)$，有 $\mathrm{D}(\mu)\cong\mathrm{D}(\mu,+)\oplus\mathrm{D}(\mu,-)$。

5.4. **来自 q-变形 Fock 空间的射影特征标**。Leclerc 和 Thibon **[LT]** 展示了如何利用典范基向量为空间 $\mathrm{PCh}^{\rho,d}$求得另一个基；我们简要概述其背景。设q 为一个不定元。A 型$A_2^{(2)\,\prime}$ 的 1 级 *Fock* 空间 是一个 $\mathbb{Q}(q)$-向量空间 $\mathscr{F}$，具有一个标准基

$$\{|\lambda\rangle \mid \lambda \text{ a } p\text{-strict partition}\}.$$

该空间自然地是量子群 $U_q(A_2^{(2)\,\prime})$的模。这里使用的剩余类（以及 A 型$A_2^{(2)\,\prime}$) 中的单根）约定与 **[KL], [Fa**$_3$**]** 中的约定相同，与 **[LT]**中的约定不同。由向量 $|\varnothing\rangle$ 生成的 $\mathscr{F}$ 子模具有一个典范基

$$\{G(\mu) \mid \mu \text{ a restricted } p\text{-strict partition}\}.$$

将典范基向量按标准基展开，可得到由 p-严格分拆 λ,μ 索引的q-分解数 $d^{\lambda\mu}(q)$，其中 μ 受限：

$$G(\mu)=\sum_{\lambda\ p\text{-strict}} d_{\lambda\mu}(q)|\lambda\rangle.$$

事实上，根据 **[LT**，命题4.1] 可知，$d^{\lambda\mu}(q)$ 除非 λ 和 μ 具有相同的p-bar-核及相同的大小，否则为零，因此对于 $\mu\in\mathscr{RP}^{\rho}$、$_p{}^d$，我们实际上有

$$G(\mu)=\sum_{\lambda\in\mathscr{P}_p^{\rho,d}} d_{\lambda\mu}(q)|\lambda\rangle. \tag{5.3}$$

根据 **[LT**，定理 4.1(i)]，每个$d^{\lambda\mu}(q)$ 都是关于q 的整数系数多项式。因此，给定一个严格分拆 λ 和一个受限p-严格分拆 μ，回顾(2.1)，我们可以定义这些整数

$$D_{\lambda\mu}=2^{\lfloor\frac{1}{2}(h_p(\lambda)+1-a(\lambda))\rfloor}d_{\lambda\mu}(1),$$

其中，$h_p(\lambda)$ 表示 λ 中能被p整除的正部数量。然后，**[LT**，第 6] 节中的讨论给出了以下结果。

命题 5.3。设μ是一个受限p-严格分拆，且其大小为n。那么特征标

$$\hat{\varphi}^\mu:=\sum_{\lambda\ \text{strict}} D_{\lambda\mu}\chi^\lambda \tag{5.4}$$

是$\hat{}\mathfrak{S}_n$的一个虚拟射影特征标。此外，$\{\hat{}\varphi^\mu \mid \mu\in\mathscr{RP}^{\rho}{}_{,p}{}^d\}$是$^{\rho,d}$的基PCh。

事实上，特征标$\hat{}\varphi^{\mu}$经常与φ^{μ}重合，而本文的主要目标是证明，当$\mu \in \mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{d}$和$\mathcal{B}^{\rho,d}$时，$\hat{}\varphi^{\mu} = \varphi^{\mu}$是一个阿贝尔亏缺RoCK块。

5.5. **双覆盖的 RoCK 块与 Kleshchev–Livesey Morita 等价**。现在，遵循 [**KL**], ，我们可以定义 *RoCK* 块：给定一个 p-条形核 ρ 和 $d \geqslant 0$，若 ρ 是 d-Rouquier 块，则称 $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 为一个*RoCK* 块 。“RoCK”一词借自对称群（非旋量）表示的相应理论，意为“Rouquier 或 Chuang–Kessar”。

旋量 RoCK 块的定义是非旋量情形的一种自然类比，我们预期 RoCK 块也将发挥类似的重要作用。利用 RoCK 块证明双覆盖的 Brou´e 猜想 [**KL**、**BK**$_4$,**ELV**]，这项工作已经初见成效。本文的目的是仿照 Chuang 和 Tan 在非旋量情形下的工作，求出 RoCK 块的分解数。

回顾第 4 节的内容，特别是缠绕超积 $\mathrm{W}_d = \mathrm{A}_{\ell} \wr \mathfrak{S}_d$。 [**KL**] 的主要结果之一是，RoCK（超）块 $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 与 $d < p$ 和 W_d之间存在 Morita 超等价。这很容易推出以下定理：

定理 5.4. 假设 $1 \leqslant d < p$，且 ρ是一个d-Rouquier p-条核。那么我们有一个 Morita 等价

$$\mathrm{W}_d \sim_{\mathrm{Mor}} \begin{cases} \mathcal{B}^{\rho,d} & \text{if } \mathcal{B}^{\rho,d} \text{ is of type } \mathtt{M}, \\ \mathcal{B}_{\bar{0}}^{\rho,d} & \text{if } \mathcal{B}^{\rho,d} \text{ is of type } \mathtt{Q}. \end{cases}$$

证明。 由 [**KL**，命题 5.4.10(i)], ，可得一个 Morita 超等价

$$\mathcal{B}^{\rho,d} \sim_{\mathrm{sMor}} \begin{cases} \mathrm{W}_d & \text{if } \mathcal{B}^{\rho,d} \text{ is of type } \mathtt{M}, \\ \mathrm{W}_d \otimes \mathcal{C}_1 & \text{if } \mathcal{B}^{\rho,d} \text{ is of type } \mathtt{Q}. \end{cases}$$

其中 $\mathcal{C}_1$ 是秩为 1 的 Clifford 超代数。如果 $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 是 M 型，则结论立即成立，因为 Morita 超等价蕴含 Morita 等价，见 [**KL**，§2.2c]。如果 $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 是 Q 型，则我们得到 $\mathcal{B}^{\rho,d} \otimes \mathcal{C}_1 \sim_{\mathrm{sMor}} \mathrm{W}_d \otimes \mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_1 \simeq \mathrm{W}_d \otimes \mathcal{C}_2$，并应用 [**KL**，引理 2.2.19 和 2.2.20]。□

5.6. **正则化定理**。关于对称群分解数的早期一般性结果之一是 James 正则化定理 [**J**$_1$]。稍后我们将需要自旋模的类比结果，该结果由 Brundan 和第二作者证明 [**BK**$_3$, 定理1。2]。他们（以组合方式）定义了一个函数 $\lambda \mapsto \lambda^{\mathrm{reg}}$ 从 $\mathscr{P}_0(n)$ 到 $\mathscr{R}\mathscr{P}_p(n)$，并证明了以下结论。

定理 5.5。设λ 是一个严格分拆。那么，$\mathrm{D}(\lambda^{\mathrm{reg}})$ 是 $\mathrm{S}(\lambda)$的一个合成因子；并且，只有当$\lambda^{\mathrm{reg}} \trianglerighteq \nu$时，$\mathrm{D}(\nu)$ 才是 $\mathrm{S}(\lambda)$ 的一个合成因子。

我们不需要正则化的精确定义，因为我们将采用以下关于 RoCK块中正则化的另一种描述。

引理 5.6。设ρ是一个d-Rouquier p-bar-core，且 $\lambda \in \mathscr{P}^{\rho}{}_{,0}{}^{d}$具有 p-bar-商 $(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell)})$。那么，$\lambda^{\mathrm{reg}}$是$\mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{d}$中具有以下$p$-bar-商的分拆

$$(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell-2)}, \lambda^{(\ell-1)} + \lambda^{(\ell)\prime}, \varnothing).$$

引理 5.6 从 λ^{reg} 的组合定义直接证明并不太难，但我们将在第 5.4 节利用典范基系数给出证明。

6. 射影特征标

在总结了所需的全部背景知识后，我们现在开始着手证明主要结果。在本节中，我们固定一个整数$d \geqslant 1$ 以及一个d-Rouquier$p$-bar-核 ρ。我们的目标是在 $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 中研究射影特征标；本节的主要结果是求出$\mathcal{B}^{\rho,d}$ 的分解矩阵，精确到乘以一个非负单位三角矩阵。注意，本节的结果不要求$d < p$。

6.1. **RoCK块中的射影特征标 $\hat{}\varphi^{\mu}$** 回顾一下在 (5.4) 中定义的虚射影特征标 $\hat{}\varphi^{\mu}$ 。第一作者论文 [**Fa**$_3$] 的主要结果之一，是明确确定RoCK块中各分拆所对应的典范基向量$G(\mu)$ 。因此，我们可以在 $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 中明确给出特征标 $\hat{}\varphi^{\mu}$ 。

首先，我们给出与 RoCK 块对应的权空间中的典范基系数公式。回顾第 2.3 节中的记号。

定理 6.1 ([Fa$_3$,定理 8.2]**).** 设ρ是一个d-Rouquier p-条形核， $\lambda \in \mathscr{P}^{\rho,d}$且 $\mu \in \mathscr{RP}^{\rho,d}$。那么

$$d_{\lambda\mu}(q) = \sum K^{-1}_{\lambda^{(0)}\sigma^{(0)}}(-q^2) \prod_{i=1}^{\ell} \mathrm{c}(\lambda^{(i)};\sigma^{(i)},\tau^{(i)})\, \mathrm{c}(\mu^{(i-1)};\sigma^{(i-1)},\tau^{(i)\prime}) q^{2\sum_{i\in I} i(|\lambda^{(i)}|-|\mu^{(i)}|)},$$

whe这里的求和遍及所有分拆$\sigma^{(0)}$、. . . 、 $\sigma^{(\ell-1)}$、 $\tau^{(1)}$、. . . 、 $\tau^{(\ell)}$，并且我们将$\sigma^{(\ell)}$读作$\varnothing$。

由此，我们可以写出 RoCK 块中的特征标 $\hat{}\varphi^{\mu}$ ； 这由定理 6.1、(5.3) 和定义(5.4)得出。

推论 6.2。 设ρ是一个d-Rouquier p-条形核，且 $\mu \in \mathscr{RP}^{\rho,d}$。那么

$$\hat{\varphi}^{\mu} = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_0^{\rho,d}} 2^{\lfloor \frac{1}{2}(h(\lambda^{(0)})+1-a(\lambda))\rfloor} \sum K^{-1}_{\lambda^{(0)}\sigma^{(0)}}(-1) \prod_{i=1}^{\ell} \mathrm{c}(\lambda^{(i)};\sigma^{(i)},\tau^{(i)})\, \mathrm{c}(\mu^{(i-1)};\sigma^{(i-1)},\tau^{(i)\prime}) \chi^{\lambda},$$

其中第二个求和遍及所有分拆$\sigma^{(0)},\ldots,\sigma^{(\ell-1)},\tau^{(1)},\ldots,\tau^{(\ell)}$，并且我们将$\sigma^{(\ell)}$读作$\varnothing$。

推论 6.3. 设 ρ 是一个d-Rouquier p-条核，且 $\mu \in \mathscr{RP}^{\rho,d}$。那么 $\hat{}\varphi^{\mu}$ 是不可约特征标 χ^{λ}的非负整数线性组合，其中$\lambda \in \mathscr{P}_0^{\rho,d}$。

证明。 由推论 6.2 和引理 2.4 得出。 □

现在我们利用定理 6.1 给出引理 5.6 尚未完成的证明。这依赖于以下关于典范基系数的正则化定理。

定理 6.4 ([Fa$_1$,定理 3.2]**).** 若$\lambda \in \mathscr{P}_p(n)$且$\mu \in \mathscr{RP}_p(n)$，则$d_{\lambda\lambda^{\mathrm{reg}}}(q) \neq 0$，且$d^{\lambda\mu}(q) = 0$，除非 $\lambda^{\mathrm{reg}} \trianglerighteq \mu$。

引理 *5.6* 的证明。 该引理断言， λ^{reg} 是由 $\nu \in \mathscr{P}^{\rho,d}$定义的分拆

$$\nu^{(i)} = \begin{cases} \lambda^{(i)} & \text{if } 0 \leqslant i \leqslant \ell-2, \\ \lambda^{(\ell-1)} + \lambda^{(\ell)\prime} & \text{if } i = \ell-1, \\ \varnothing & \text{if } i = \ell. \end{cases}$$

定理 6.4 表明， λ^{reg} 是满足 $d^{\lambda\mu}(q) \neq 0$ 的最占优的 p-严格分拆 μ 。因此，要证明 $\lambda^{\mathrm{reg}} = \nu$ ，我们必须证明 $d_{\lambda\nu}(q) \neq 0$，并且若 $\mu \trianglerighteq \nu$ 且 $d^{\lambda\mu}(q) \neq 0$ ，则 $\mu = \nu$。

证明 $d_{\lambda\nu}(q) \neq 0$ 很直接：为了在定理 6.1 的公式中得到一个非零加项，当 $0 \leqslant i \leqslant \ell-1$ 时，我们必须取 $\sigma^{(i)} = \lambda^{(i)}$ ； 当 $1 \leqslant i \leqslant \ell-1$ 时，取 $\tau^{(i)} = \varnothing$ ； 并取 $\tau^{(\ell)} = \lambda^{(\ell)}$，从而得到$d_{\lambda\nu}(q) = q^{2|\lambda^{(\ell)}|}$。

现在取一个满足 $\mu \trianglerighteq \nu$ 且 p-严格的分拆，其中 $^{\lambda\mu}d^{\lambda\mu}(q) \neq 0$。由 (5.3)， μ 必须属于 $\mathscr{RP}^{\rho,d}$。选择分拆 $\sigma^{(i)},\tau^{(i)}$ ，使得定理 6.1 中的求和项非零。在证明余下部分中，我们假设 $p \geqslant 5$； 当 $p = 3$ 时需要稍作修改，这留给读者完成。根据引理 3.2，假设 $\mu \trianglerighteq \nu$ 意味着

$$|\mu^{(0)}| + \cdots + |\mu^{(r)}| \leqslant |\lambda^{(0)}| + \cdots + |\lambda^{(r)}|$$

对于 $0 \leqslant r \leqslant \ell-2$。另一方面，多项式 $K^{-1}_{\lambda^{(0)}\sigma^{(0)}}(-q^2)$ 以及 Littlewood–Richardson 系数 $\mathrm{c}(\lambda^{(i)};\sigma^{(i)},\tau^{(i)})$ 和 $\mathrm{c}(\mu^{(i-1)};\sigma^{(i-1)},\tau^{(i)\prime})$ 非零，这意味着

$$|\mu^{(0)}| + \cdots + |\mu^{(r)}| = |\lambda^{(0)}| + \cdots + |\lambda^{(r)}| + |\tau^{(r+1)}|$$

对于 $0 \leqslant r \leqslant \ell-1$。因此 $|\tau^{(1)}| = \cdots = |\tau^{(\ell-1)}| = 0$ 和 $|\tau^{(\ell)}| = |\lambda^{(\ell)}|$。再由 Littlewood–Richardson 系数不为零可知， $\tau^{(1)} = \cdots = \tau^{(\ell-1)} = \varnothing$，而 $\tau^{(\ell)} = \lambda^{(\ell)}$。进而得到，对于 $0 \leqslant i \leqslant \ell-2$，有 $\sigma^{(i)} = \mu^{(i)}$ ； 对于 $1 \leqslant i \leqslant \ell-1$，有 $\sigma^{(i)} = \lambda^{(i)}$ ，因此

◇ $K^{-1}_{\lambda^{(0)}\mu^{(0)}}(t) \neq 0$,
◇ $\mu^{(i)} = \lambda^{(i)}$ for $1 \leqslant i \leqslant \ell - 2$,
◇ $\mathrm{c}(\mu^{(\ell-1)}; \lambda^{(\ell-1)}, \lambda^{(\ell)\prime}) \neq 0$.

特别地，对于所有i，都有 $|\mu^{(i)}| = |\nu^{(i)}|$，因此（再次运用引理 3.2），假设 $\mu \trianglerighteq \nu$ 等价于断言：对于所有i，都有 $\mu^{(i)} \trianglerighteq \nu^{(i)}$。但现在，$K^{-1}_{\lambda^{(0)}\mu^{(0)}}(t) = K^{-1}_{\nu^{(0)}\mu^{(0)}}(t)$ 非零的唯一可能情形是 $\mu^{(0)} = \nu^{(0)} = \lambda^{(0)}$。关于 Littlewood–Richardson 系数的一个标准结果指出，满足 $\mathrm{c}(\xi; \lambda^{(\ell-1)}, \lambda^{(\ell)\prime}) \neq 0$ 的最主分拆 ξ 是 $\lambda^{(\ell-1)} + \lambda^{(\ell)\prime}$，因此我们还得到 $\mu^{(\ell-1)} = \nu^{(\ell-1)}$，从而 $\mu = \nu$。□

6.2. **Gelfand–Graev 归纳**。我们的目标是通过考虑第三组射影特征标，探究特征标 φ^μ 与 $\hat{}\varphi^\mu$ 之间的关系。这组射影特征标是将射影特征标χ^ρ 沿着我们称为厚 Gelfand–Graev 字的特殊字诱导得到的。回顾第 5.2 节中的归纳算子 F_i。

给定 $i \in J$ 和 $k \geqslant 1$，我们定义相应的*厚 Gelfand–Graev 字*（参见 [**KL**，（4.2.1）]）

$$g^{i,k} := \ell^k(\ell-1)^{2k}\dots(i+1)^{2k}i^k\dots 1^k 0^{2k} 1^k \dots i^k \tag{6.1}$$

以及相应的归纳算子

$$F(i,k) := F_i^k \dots F_1^k F_0^{2k} F_1^k \dots F_i^k F_{i+1}^{2k} \dots F_{\ell-1}^{2k} F_\ell^k. \tag{6.2}$$

我们想知道这些算子作用于 RoCK 块中的特征标时会产生什么结果。

注 6.5。我们可以定义除幂归纳算子 $F^{(r)}{}_i := F^r{}_i{}^r/r!$，并在 $F(i,k)$ 的定义中用它们代替通常的幂。这样会使下文命题 6.6 和 6.7 中的公式稍微简单一些，但不会让问题更容易，因为先验地，$F^{(r)}{}_i$ 是在将标量从 $\mathbb{Z}$ 扩张到 $\mathbb{Q}$ 后的 Grothendieck 群上定义的（尽管对于较大的 p，可以利用 [**Kl**，引理 22.3.15] 验证，实际上$F^{(r)}{}_i$ 总能在不扩张标量的 Grothendieck 群上定义；我们不再进一步讨论这一点）。

命题 6.6. 取$i \in J$、$\lambda \in \mathscr{P}^\rho{}_0{}^c$和 $\alpha \in \mathscr{P}^\rho{}_0{}^{c+k}$，其中 $k \geqslant 1$且 $c + k \leqslant d$。那么χ^α出现在$F(i,k)\chi^\lambda$中，当且仅当 p-条形商 $(\alpha^{(0)}, \dots, \alpha^{(\ell)})$可由$(\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(\ell)})$通过在分量$i$ 和$i+1$中添加k个节点得到，且在分量i 的同一列中或分量$i+1$的同行中都没有添加两个节点。若α 满足此条件，则定义

$$f(\lambda,\alpha) = \left|\{\, c \geqslant 1 \mid \alpha^{(0)} \setminus \lambda^{(0)} \text{在} c \text{列中包含一个节点，但在} c+1 \text{列中不包含节点} \,\}\right|.$$

Then

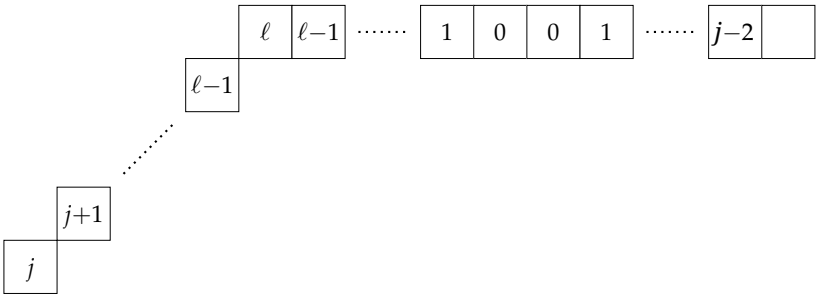
$$[F(i,k)\chi^\lambda : \chi^\alpha] = 2^{f(\lambda,\alpha) + \frac{1}{2}(k(p-2) + h(\lambda^{(0)}) - h(\alpha^{(0)}) + a(\lambda) - a(\alpha))}(2k)!^{\ell-i} k!^{2i+1}.$$

证明。 首先，假设$i > 0$。

对于$j \in I$，我们将*j*-钩 定义为如下形式的节点集合

$$\{(r+\ell-j, c+j), (r+\ell-j-1, c+j+1), \dots, (r, c+\ell+1), (r, c+\ell+2), \dots, (r, c+j+p)\}$$

对于 $r \geqslant 1$ 和 $c \geqslant 0$，其中 $p \mid c$。换言之，一个 j-钩是由 p 个节点组成的集合，其剩余类按如下构型排列。



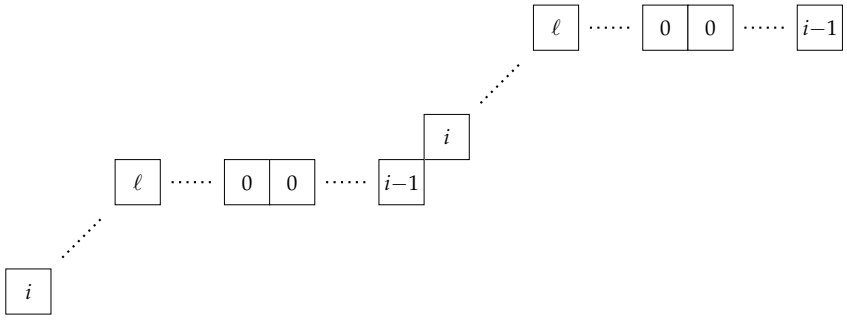
在 [**KL** 的第4.1a节], 中，Kleshchev 和 Livesey 注意到，若 $\lambda \in \mathscr{P}^\rho{}_0{}^c$ 且 $c < d$，则向 λ 的 j 个分量的 p-条商中添加一个节点，对应于向 λ添加一个 j-钩。

根据命题 3.3，若 $\lambda \in \mathscr{P}^\rho{}_0{}^c$ and $\alpha \in \mathscr{P}^\rho{}_0{}^{c+k}$ with $\alpha \supseteq \lambda$，则 α 可由 λ 添加若干p-条钩得到。因此，对所有$j \in I$，都有 $\alpha^{(j)} \supseteq \lambda^{(j)}$。特别地，若 χ^α 出现在$F(i,k)\chi^\lambda$中，则 α

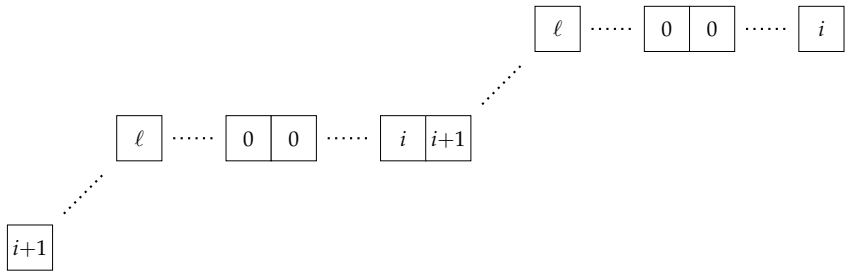
可由 λ 添加j-钩得到（j取不同值）。但根据分支法则， α 也可由 λ 逐个添加节点得到，其剩余序列由$F(i,k)$的定义确定。特别地，最后添加的k 个节点的剩余类都必须为i，因此必存在一个严格分拆 β，满足 $\lambda \subset \beta \subset \alpha$，使得 $\alpha \setminus \beta$ 由k 个剩余类为i的节点构成。

在构成 $\alpha \setminus \lambda$ 的任一单独 j-钩中，最后添加的节点必定要么是剩余为 j 的最左节点，要么是剩余为 $j-1$ 的最右节点。因此，最后添加的节点只有在 $j = i$ 或 $i+1$ 时，才可能具有剩余i。此外，$i > 0$ 这一假设意味着，在给定的一个 j-钩中，最后添加的两个节点不能都具有剩余 i。因此，从 λ 到达 α 时，最后添加的 k 个节点全都具有剩余 i 的唯一可能方式是：所有添加的钩都是 i-钩或 $(i+1)$-钩，并且每个这样的钩恰好包含 $\alpha \setminus \beta$ 的一个节点。特别地， α 的 p-条商可由 λ 的p-条商通过在分量 i 和 $i+1$ 中添加节点而得到。

如果向 $\lambda^{(i)}$ 的同一列添加两个节点，则相应的 i-钩在对角线上相邻，如下图所示。



但现在，右侧的i-钩不能包含 $\alpha \setminus \beta$ 的一个节点，因为该钩左侧的i-节点必须先于左侧钩右侧的$(i-1)$-节点添加。这就产生了矛盾。同理，如果 $\lambda^{(i+1)}$ 的同一行中添加了两个节点，那么相应的钩便水平相邻，我们也会以同样的方式得到矛盾。



这足以证明命题的“仅当”部分。对于“若”部分，假设通过在 $\lambda^{(i)}$ 的不同列和 $\lambda^{(i+1)}$ 的不同行中添加节点，可以从 λ 的p-钩分拆商得到 α 的p-钩分拆商。为了证明 χ^α 出现在 $F(i,k)\chi^\lambda$ 中，我们证明可以通过依次添加节点，并按适当的剩余序列，从 λ 得到 α。

我们先将 $\alpha \setminus \lambda$ 中所有 ℓ-节点按任意顺序添加，然后添加所有$(\ell-1)$-节点，依此类推，直到$(i+1)$-节点。接着在每个钩中添加一个i-节点，再在每个钩中添加一个$(i-1)$-节点，依此类推，沿着每个钩的钩臂进行，直到在每个钩中添加一个剩余为 1 的节点。然后添加 $\alpha \setminus \lambda$ 中所有剩余为 0 的节点，再依次添加剩余为 $1, \ldots, i$ 的所有其余节点。关于 α 的假设意味着我们在每个阶段都得到一个严格分拆，因此 χ^α 确实出现在 $F(i,k)\chi^\lambda$ 中。

上一段中的构造使我们能够计算$F(i,k)\chi^\lambda$中 χ^α 的系数。为此，我们需要计算将 $\alpha \setminus \lambda$ 的节点添加到 λ 的各种可能顺序，使其符合所要求的剩余序列，并确保每个阶段得到的分拆都是严格的。对于$F(i,k)$中出现的每一项F_j^{ak}，我们需要添加ak 个剩余类为j的节点。显然，上一段所作的选择是唯一可能的：为了在应用F_0^{2k}时能够添加某个给定钩中的剩余类为0的节点，我们必须先在该钩中这些剩余类为0的节点左侧添加剩余类为i、$i-1$、.....、1的节点。因此，我们唯一能选择的就是为每个因子F_j^{ak}添加j-节点的顺序。每种情况下，除因子F_0^{2k}外，我们都可以自由选择：对于这个因子，在每个钩中，

最左侧的0-节点必须先于最右侧的0-节点添加。因此，顺序的选择数为

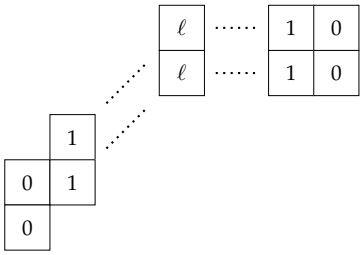
$$k! \times \prod_{j=i+1}^{\ell-1} (2k)! \times \prod_{i=1}^{i} k!^2 \times \frac{(2k)!}{2^k} = \frac{k!^{2i+1}(2k)!^{\ell-i}}{2^k}.$$

还需考虑分支法则中出现的系数 $a^{\lambda\mu}$。由于 $i > 0$，关于 α 的假设给出 $\alpha^{(0)} = \lambda^{(0)}$，进而推出 $h(\lambda) = h(\alpha)$；因此，从 λ 到 α 逐步添加节点时，得到的分拆在偶分拆和奇分拆之间交替变化。所以，从奇分拆转到偶分拆的次数为 $\frac{1}{2}(kp + a(\lambda) - a(\alpha))$。由此得到

$$[F(i,k)\chi^\lambda : \chi^\alpha] = 2^{\frac{1}{2}(k(p-2)+a(\lambda)-a(\alpha))}(2k)!^{\ell-i}k!^{2i+1},$$

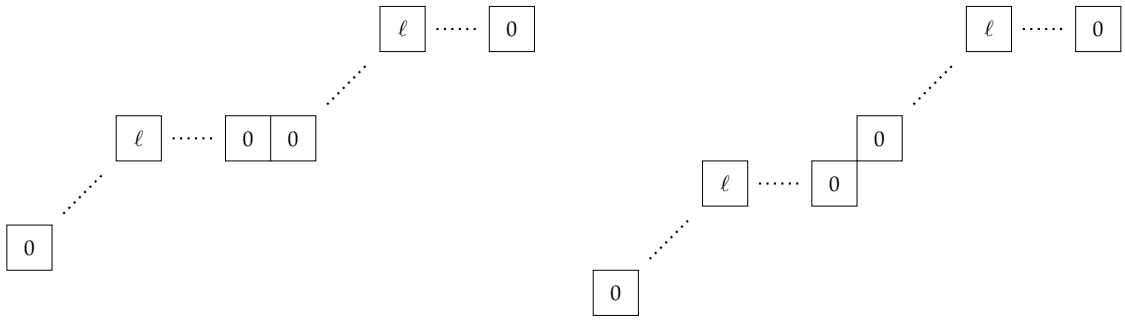
这与命题一致，因为 $\lambda^{(0)} = \alpha^{(0)}$。

现在考虑 $i = 0$ 的情形。此时，要使 χ^α 出现在 $F(i,k)\chi^\lambda$ 中，必须由 λ 添加 j-钩得到 α，并且必须存在一个满足 $\lambda \subset \beta \subset \alpha$ 的严格分拆 β，使得 $\alpha \setminus \beta$ 包含 $2k$ 个剩余为 0 的节点。仿照前一种情形的论证，可知当 $j \geqslant 2$ 时 $\alpha^{(j)} = \lambda^{(j)}$，而 $\alpha^{(1)}$ 是由 $\lambda^{(1)}$ 通过在不同行中添加节点得到的，且 $\alpha^{(0)} \supseteq \lambda^{(0)}$。现在，若在 $\lambda^{(0)}$ 的同一列中添加两个节点，则对应的 0-钩会竖直叠放，如下图所示。



但现在上方的 0-条不可能包含 $\alpha \setminus \beta$ 中的任何节点，这就产生了矛盾。因此，我们再次发现，为了从 $\lambda^{(0)}$ 得到 $\alpha^{(0)}$ 而添加的节点必须位于不同的列中。

现在假设 α 满足这些条件，并考虑如何通过应用$F(0,k) := F_0^{2k}F_1^{2k}\dots F_{\ell-1}^{2k}F_\ell^k$，从 λ 得到 α。对于每个剩余类$j = \ell$、$\ell-1$、.....、1，我们都可以添加 $\alpha \setminus \lambda$ 的j-节点。在每个所添加的 1-钩中，两个 0-节点必须按从左到右的顺序添加，但除此之外，对 1-钩没有任何限制。所添加的 0-钩中的 0-节点可以按任意顺序添加，唯一的例外是：当两个所添加的 0-钩分别对应于 $\alpha^{(0)}$ 中相邻列的节点时，左侧钩的最右 0-节点会与右侧钩的最左 0-节点相邻（如以下示意图之一所示），因此这两个节点必须按特定顺序添加。



因此，我们得到一个系数 $k!(2k)!^\ell/2^{k-f(\lambda,\alpha)}$。但我们还需要考虑分支法则产生的系数：添加节点时得到的分拆在偶数和奇数之间交替，除非我们在第 1 列添加节点。因此，我们还得到一个因子$2^{\frac{1}{2}(kp+a(\lambda)-a(\alpha)+h(\lambda)-h(\alpha))}$。将这些系数合并，我们得到

$$[F(0,k)\chi^\lambda : \chi^\alpha] = 2^{f(\lambda,\alpha)+\frac{1}{2}(k(p-2)+h(\lambda)-h(\alpha)+a(\lambda)-a(\alpha))}(2k)!^\ell k!,$$

与该命题一致。 □

6.3. **通过归纳法得到的射影特征标**。我们的目标是探讨特征标 φ^μ 与 $\hat{}\varphi^\mu$ 之间的关系，为此我们考虑第三组射影特征标。

回顾第 2.1 节中的集合 $\mathscr{P}^\rho_{,d\ p'} \subseteq \mathscr{P}^\rho_{,0}{}^d$，它由 $\mathscr{P}^\rho_{,p}{}^d$ 中的 p'-分拆构成。根据引理 3.1(ii)，分拆 $\lambda \in \mathscr{P}^\rho_{,p}{}^d$ 是 p'，当且仅当 $\lambda^{(0)} = \varnothing$。回顾 (6.2)。给定 $\lambda \in \mathscr{P}^\rho_{,d\ p'}$，我们将通过诱导射影特征 χ^ρ来定义射影特征 $\tilde{\varphi}^\lambda$：

$$\tilde{\varphi}^\lambda = \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{r=1}^{\lambda_1^{(i)}} F(i-1, \lambda^{(i)\prime}{}_r)\,\chi^\rho \in \mathrm{PCh}^{\rho,d}, \tag{6.3}$$

其中因子 $F(i-1, \lambda^{(i)\prime}{}_r)$ 可以按任意顺序排列。（目前还不能显然看出 $\tilde{\varphi}^\lambda$ 与因子的排列顺序无关，但我们将在推论 6.9(ii) 中看到确实如此。现在，我们通过为每个 λ 固定一个任意顺序来定义 $\tilde{\varphi}^\lambda$。）

对于任意严格分拆 π 和任意合成 γ，令 $\bar{c}(\pi;\gamma)$ 表示通过逐步添加节点而从 $\varnothing$ 得到 π 的方式数，其中每一步添加的节点都位于不同的列，且每一步得到的都是严格分拆。现在，给定 $\alpha \in \mathscr{P}^\rho_{,0}{}^d$ 和 $\lambda \in \mathscr{P}^\rho_{,d\ p'}$，定义

$$\widetilde{D}_\lambda = 2^{\frac{1}{2}(d(p-2)+a(\lambda)-a(\rho))}\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{r\geqslant 1}(2\lambda^{(i)\prime}{}_r)!^{l-i+1}\lambda^{(i)\prime}{}_r!^{2i-1},$$

$$\widetilde{D}_{\lambda\alpha} = \widetilde{D}_\lambda \sum_{\substack{\beta^{(1)},\dots,\beta^{(\ell)}\in\mathscr{C}\\ \gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(\ell)}\in\mathscr{C}\\ \beta^{(i)}+\gamma^{(i)}=\lambda^{(i)\prime}}} \bar{c}(\alpha^{(0)};\gamma^{(1)})\prod_{i=1}^{\ell}\left[(\mathcal{M}^{\beta^{(i)}}\otimes \mathtt{sgn})\circ\mathcal{M}^{\gamma^{(i+1)}} : \mathcal{S}^{\alpha^{(i)}}\right],$$

其中 我们将 $\gamma^{(\ell+1)}$ 读作 $\varnothing$。由此可从命题 6.6 推出以下结果。

命题 6.7。设 $\alpha \in \mathscr{P}^\rho_{,0}{}^d$ 和 $\lambda \in \mathscr{P}^\rho_{,d\ p'}$。那么，当且仅当 $\widetilde{D}_{\lambda\alpha} \neq 0$ 时，χ^α 出现在 $\tilde{\varphi}^\lambda$ 中。此外，若 α 是一个 p'-分拆，则 $[\tilde{\varphi}^\lambda : \chi^\alpha] = \widetilde{D}_{\lambda\alpha}$。

证明。我们从 χ^ρ 开始，通过依次应用算子 $\mathrm{F(i}-1,\lambda^{(i)\prime}\mathrm{r)}$ 来构造 $\tilde{\varphi}^\lambda$，其中 $1 \leqslant \mathrm{i} \leqslant \ell$ 且 $1 \leqslant \mathrm{r} \leqslant \lambda_1^{(i)}$。我们从 ρ 的 p-条商开始，即 $(\varnothing,\dots,\varnothing)$；应用 $\mathrm{F(i}-1,\lambda^{(i)\prime}\mathrm{r)}$ 时，根据命题 6.6，在分量 $\mathrm{i}-1$ 和 i 中添加 $\lambda^{(i)\prime}\mathrm{r}$ 个节点，并考虑添加这些节点的各种可能方式。令 $\beta_r^{(i)}$ 为我们在分量 i 中添加的节点数，$\gamma_r^{(i)}$ 为我们在分量 $\mathrm{i}-1$ 中添加的节点数。这样便为 $1 \leqslant \mathrm{i} \leqslant \ell$ 定义了分拆 $\beta^{(i)}$、$\gamma^{(i)}$，其中 $\beta^{(i)}+\gamma^{(i)} = \lambda^{(i)\prime}$；我们需要考虑 $\beta^{(i)}$、$\gamma^{(i)}$ 的所有此类可能取值。取定一组 $\beta^{(i)}$、$\gamma^{(i)}$，并考虑所得的 χ^α 的系数。回顾命题 6.6，应用 $\mathrm{F(i}-1,\lambda^{(i)\prime}\mathrm{r)}$ 时，在分量 $\mathrm{i}-1$ 中添加的节点必须位于不同的列，而在分量 i 中添加的节点必须位于不同的行。因此，根据 Pieri法则，得到 p-条商 $(\alpha^{(0)},\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(\ell)})$ 的方式数为

$$\bar{c}(\alpha^{(0)};\gamma^{(1)})\prod_{i=1}^{\ell}\mathrm{c}(\alpha^{(i)};(\gamma_1^{(i+1)}),(\gamma_2^{(i+1)}),\dots\ (1^{\beta_1^{(i)}}),(1^{\beta_2^{(i)}}),\dots)$$
$$= \bar{c}(\alpha^{(0)};\gamma^{(1)})\prod_{i=1}^{\ell}\left[(\mathcal{M}^{\beta^{(i)}}\otimes \mathtt{sgn})\circ\mathcal{M}^{\gamma^{(i+1)}} : \mathcal{S}^{\alpha^{(i)}}\right]$$

由引理 2.1；此处我们读作 $\gamma^{(\ell+1)} = \varnothing$。

对 $\beta^{(i)}$、$\gamma^{(i)}$ 的所有可能取值求和，得到 $\widetilde{D}_{\lambda\alpha}/\widetilde{D}_\lambda$；因此，当且仅当 $D_{\lambda\alpha} \neq 0$ 时，χ^α 的系数非零。在 α 是一个 p'-分拆的情况下，命题 6.6 中出现的系数的乘积为 $\widetilde{D}_\lambda$，因此 $\tilde{\varphi}^\lambda$ 中 χ^α 的系数为 $\widetilde{D}_{\lambda\alpha}$。□

我们的下一个任务是证明特征标 $\tilde{\varphi}^\lambda$ 线性无关。首先，我们利用命题 6.7 来进一步了解特征标 $\tilde{\varphi}^\lambda$ 的结构。回顾第 3 节中多重分拆上的偏序 $\succcurlyeq$。

命题 6.8。设 $\lambda \in \mathscr{P}^{\rho,d\,p'}$。那么，特征标 χ^{λ} 出现在 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$中，而任何出现在 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$中的特征标 χ^{α}都满足

$$(\lambda^{(0)},\dots,\lambda^{(\ell)}) \preccurlyeq (\alpha^{(0)},\dots,\alpha^{(\ell)}) \preccurlyeq (\lambda^{(1)'},\dots,\lambda^{(\ell)'},\varnothing).$$

证明。显然，χ^{λ} 出现在 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$中：在命题 6.7 的求和中，对所有$i$，我们可以取 $\beta^{(i)} = \lambda^{(i)'}$ 和 $\gamma^{(i)} = \varnothing$；于是相应的求和项为

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{\ell-1}\left[\mathcal{M}^{\lambda^{(i)'}} \otimes \mathtt{sgn} : \mathcal{S}^{\lambda^{(i)}}\right] &= \prod_{i=1}^{\ell-1}\left[\mathcal{M}^{\lambda^{(i)'}} \otimes \mathtt{sgn} : \mathcal{S}^{\lambda^{(i)'}} \otimes \mathtt{sgn}\right] \\ &= \prod_{i=1}^{\ell-1}\left[\mathcal{M}^{\lambda^{(i)'}} : \mathcal{S}^{\lambda^{(i)'}}\right]\end{aligned}$$

whi众所周知，ch 非零（事实上，$\mathcal{S}^{\lambda^{(i)'}}$ 定义 为 $\mathcal{M}^{\lambda^{(i)'}}$的一个子模).

现在假设 χ^{α} 出现在 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$中，并选取 $\beta^{(1)},\dots,\beta^{(\ell)},\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(\ell)}$，使得 $\tilde{}D_{\lambda\alpha}$ 中的相应求和项非零。于是特别地，对于 $0 \leqslant i \leqslant \ell$，有 $|\alpha^{(i)}| = |\beta^{(i)}| + |\gamma^{(i+1)}|$（其中我们将 $\beta^{(0)} = \gamma^{(\ell+1)} = \varnothing$读作）。要证明 $(\alpha^{(0)},\dots,\alpha^{(\ell)}) \succcurlyeq (\lambda^{(0)},\dots,\lambda^{(\ell)})$，取 $0 \leqslant k \leqslant \ell$ 且$c \geqslant 1$。于是

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=0}^{k-1}|\alpha^{(i)}| + \sum_{i=1}^{c}\alpha^{(k)'}_i\right) - \left(\sum_{i=0}^{k-1}|\lambda^{(i)}| + \sum_{i=1}^{c}\lambda^{(k)'}_i\right) \\ &= |\gamma^{(k)}| + \sum_{i=1}^{c}\alpha^{(k)'}_i - \sum_{i=1}^{c}\lambda^{(k)'}_i \\ &\geqslant |\gamma^{(k)}| + \sum_{i=1}^{c}(\beta^{(k)} \sqcup \gamma^{(k+1)'})_i - \sum_{i=1}^{c}\beta^{(k)}_i - \sum_{i=1}^{c}\gamma^{(k)}_i \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{c}(\beta^{(k)} \sqcup \gamma^{(k+1)'})_i - \sum_{i=1}^{c}\beta^{(k)}_i \\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

如所要求。

为证明 （$\alpha^{(0)}$、……、$\alpha^{(\ell)}$）$\preccurlyeq$（$\lambda^{(1)'}$、……、$\lambda^{(\ell)'}$、$\varnothing$），取 $0 \leqslant k \leqslant \ell$ 以及 $c \geqslant 1$。则

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=0}^{k-1}|\lambda^{(i+1)}| + \sum_{i=1}^{c}\lambda^{(k+1)}_i\right) - \left(\sum_{i=0}^{k-1}|\alpha^{(i)}| + \sum_{i=1}^{c}\alpha^{(k)'}_i\right) \\ &= |\beta^{(k)}| + \sum_{i=1}^{c}\lambda^{(k+1)}_i - \sum_{i=1}^{c}\alpha^{(k)'}_i \\ &\geqslant |\beta^{(k)}| + \sum_{i=1}^{c}(\beta^{(k+1)'} \sqcup \gamma^{(k+1)'})_i - \sum_{i=1}^{c}(\beta^{(k)} + \gamma^{(k+1)'})_i \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{c}((\beta^{(k+1)})' \sqcup \gamma^{(k+1)'})_i - \sum_{i=1}^{c}\gamma^{(k+1)'}_i \\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

如所要求。 □

因此，我们可以证明，特征标 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 张成虚射影特征标空间，并由此得到关于不可分解射影特征标形式的一些信息。

推论 6.9。

(i) 集合 $\{\,\tilde{\varphi}^{\lambda} \mid \lambda \in \mathscr{P}^{\rho,d}{}_{p'}\,\}$ 是 $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 中虚射影特征标空间的一组基。(ii) 对每个 $\lambda \in \mathscr{P}^{\rho,d\,p'}$，特征标 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$与因子 $F(i-1,\lambda^{(i)'}{}_r)$ 的排列顺序无关。(iii) 存在一个从$\mathscr{P}^{\rho,d\,p'}$ 到$\mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho,p'}$的双射 $\lambda \mapsto \lambda_\circ$，使得$\chi^{\lambda}$ 出现在$\varphi^{\lambda_\circ}$中；而任何出现在$\varphi^{\lambda_\circ}$ 中的特征标χ^{α} 都满足$\alpha \trianglelefteq \lambda_\circ$。

证明。 (i) 由 (3.1) 可知 $|\mathscr{P}^{\rho}{}_{,d\,p'}| = |\mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{d}|$，因此只需证明 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 线性无关。但这由命题 6.8 得出，该命题表明，给出重数 $[\tilde{\varphi}^{\lambda} : \chi^{\alpha}]$ 的矩阵，对于$\alpha, \lambda \in \mathscr{P}^{\rho}{}_{,d\,p'}$是一个对角线非零的三角矩阵。

（ii）设 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 是通过对因子 $F(i-1,(\lambda^{(i)'}{}_{r}))$ 采用某种特定顺序来定义的，而 $\tilde{\varphi}^{\lambda^*}$ 则以相同方式定义，但采用不同的顺序。根据命题 6.7， $\tilde{\varphi}^{\lambda} - \tilde{\varphi}^{\lambda^*}$ 是特征标 χ^{α} 的线性组合，其中 α 不 是 p'。由（i）可将 $\tilde{\varphi}^{\lambda} - \tilde{\varphi}^{\lambda^*}$ 写成特征标 $\tilde{\varphi}^{\xi}$ 的线性组合，其中 $\xi \in \mathscr{P}^{\rho}{}_{,d\,p'}$。若此线性组合非零，则取支配序下最大的 ξ，使得 $\tilde{\varphi}^{\xi}$ 以非零系数出现。于是根据命题 6.8，特征标 χ^{ξ} 出现在 $\tilde{\varphi}^{\lambda} - \tilde{\varphi}^{\lambda^*}$ 中，矛盾。

（iii）由于 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 是一个特征标（而不只是虚特征），它可以写成不可分解射影特征标的线性组合，且系数非负。由于 χ^{λ} 出现在 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 中，它必定出现在 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 的某个不可分解组成因子 $\varphi^{\lambda_\circ}$ 中。于是，如果 χ^{α} 出现在 $\varphi^{\lambda_\circ}$ 中，它必定出现在 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 中，从而得到 $\alpha \trianglelefteq \lambda$。

这定义了一个映射 $\mathscr{P}^{\rho}{}_{,d\,p'} \to \mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{d}$, $\lambda \mapsto \lambda_\circ$，具有所需的性质。该映射显然是单射，因此由 (3.1)，由于 $|\mathscr{P}^{\rho}{}_{,d\,p'}| = |\mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{d}|$，它也是双射。 □

6.4. **双射** $\lambda \mapsto \lambda_\infty$。 在推论 6.9(iii) 中，我们定义了双射

$$\mathscr{P}^{\rho,d}_{p'} \to \mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho,d}_{p}, \qquad \lambda \mapsto \lambda_\circ$$

使得 χ^{λ} 出现在 $\varphi^{\lambda_\circ}$ 中，并且任何出现在 $\varphi^{\lambda_\circ}$ 中的特征标 χ^{α} 都满足 $\alpha \trianglelefteq \lambda$。本小节的目标是证明命题 6.12，该命题明确描述了这个双射。为证明该命题，我们按照第 5.2 节概述的方法，考察模的权。固定 $\mathrm{D}(\rho)$ 的一个权 $\boldsymbol{i}^{\rho}$。回顾 (6.1)，对于任意 $\lambda \in \mathscr{P}^{\rho}{}_{,d\,p'}$ 和 $j \in J$，定义单词 $\boldsymbol{g}^{j,\lambda}$ 为以下拼接

$$\boldsymbol{g}^{j,\lambda} := \boldsymbol{g}^{j,\lambda^{(j+1)'}{}_1}\boldsymbol{g}^{j,\lambda^{(j+1)'}{}_2}\boldsymbol{g}^{j,\lambda^{(j+1)'}{}_3}\dots.$$

现在定义$\boldsymbol{g}^{\lambda}$ 为以下内容的连接

$$\boldsymbol{g}^{\lambda} := \boldsymbol{i}^{\rho}\,\boldsymbol{g}^{\ell-1,\lambda}\,\boldsymbol{g}^{\ell-2,\lambda}\dots\boldsymbol{g}^{0,\lambda}.$$

引理 6.10. 设$\mu \in \mathscr{P}^{\rho}{}_{,0}{}^{d}$。那么，$\boldsymbol{g}^{\lambda}$是 $\mathrm{S}(\mu)$的一个权，当且仅当χ^{μ}出现在$\tilde{\varphi}^{\lambda}$中。

证明。对于一个词 $\mathrm{i} = \mathrm{i}_1 \dots \mathrm{i}_n \in \mathrm{I}^n$，记 $\mathrm{E}_{\boldsymbol{i}} := \mathrm{E}^{i_1} \dots \mathrm{E}^{i_n}$ 以及 $\mathrm{F}_{\boldsymbol{i}} := \mathrm{F}^{i_n} \dots \mathrm{F}^{i_1}$。根据定义，$\mathrm{g}^{\lambda}$是 $\mathrm{S}(\mu)$ 的一个权，当且仅当 $\mathrm{E}\boldsymbol{g}^{\lambda}\mathrm{S}(\mu) \neq 0$，也当且仅当 $\mathrm{E}_{\boldsymbol{g}^{\lambda}}\chi^{\mu} \neq 0$。但 $\mathrm{E}\boldsymbol{g}^{\lambda} = \mathrm{E}_{\boldsymbol{i}^{\rho}}\mathrm{E}_{\boldsymbol{g}^{\ell-1,\lambda}}\dots\mathrm{E}_{\boldsymbol{g}^{0,\lambda}}$，因此 $\mathrm{E}_{\boldsymbol{g}^{\lambda}}\chi^{\mu} \neq 0$当且仅当 $\mathrm{E}_{\boldsymbol{g}^{\ell-1,\lambda}}\dots\mathrm{E}_{\boldsymbol{g}^{0,\lambda}}\chi^{\mu} = \mathrm{c}\chi^{\rho}$，其中 c 是非零标量。由弗罗贝尼乌斯互反律，这等价于 χ^{μ} 出现在 $\mathrm{F}_{\boldsymbol{g}^{0,\lambda}}\dots\mathrm{F}_{\boldsymbol{g}^{\ell-1,\lambda}}\chi^{\rho}$中。回顾 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 的定义 (6.3)，并结合推论 6.9(ii)，可得 $\mathrm{F}_{\boldsymbol{g}^{0,\lambda}}\dots\mathrm{F}_{\boldsymbol{g}^{\ell-1,\lambda}}\chi^{\rho} = \tilde{\varphi}^{\lambda}$，引理得证。□

给定 $\mu \in \mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{d}$，定义 $\tilde{\mu} \in \mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho}{}_{,d-|\mu^{(0)}|p}$ 为具有 p-条核 ρ 和 p-条商$(\varnothing, \mu^{(1)}, \dots\dots, \mu^{(\ell-1)}, \varnothing)$的分拆；换言之， $\tilde{\mu}$ 的定义是从 μ 中删除 μ的所有能被p整除的部分，参见引理 3.1(iii)。

给定 $\lambda \in \mathscr{P}^{\rho}{}_{,d\,p'}$，定义 $\hat{\lambda} \in \mathscr{P}^{\rho}{}_{,d-|\lambda^{(1)}|\,p'}$ 为具有 p-条核 ρ 和 p-条商$(\varnothing, \varnothing, \lambda^{(2)}, \dots\dots, \lambda^{(\ell)})$的分拆。

引理 6.11。 设$\mu \in \mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho}{}_{,p}{}^{d}$和$\lambda \in \mathscr{P}^{\rho}{}_{,d\,p'}$。若$\mu^{(0)} = \lambda^{(1)'}$且$\boldsymbol{g}^{\widehat{\lambda}}$是$\mathrm{D}(\tilde{\mu})$的一个权，则$\boldsymbol{g}^{\lambda}$是$\mathrm{D}(\mu)$的一个权。

证明。 根据命题 5.2，只需证明我们可以通过依次移除正规节点，从 μ 得到 $\tilde{\mu}$，且这些节点的剩余类依次构成词 $\boldsymbol{g}^{0,\mu^{(0)}_1}\boldsymbol{g}^{0,\mu^{(0)}_2}\dots$。我们对$|\mu^{(0)}|$使用归纳法， $\mu^{(0)} = \varnothing$ 的情形是平凡的。对于归纳步骤，设 $\mu^{(0)} \neq \varnothing$。令 μ^{-} 为从 μ 中删除最后一个能被p整除的正部后得到的分拆；将这个最后的部分记为 $k = \mu^{(0)}{}_{h(\mu^{(0)})}$。类似地，定义 λ^{-} 为从 $\lambda^{(1)}$中删除最后一个非零列后得到的分拆。于是 $\tilde{\mu} = \widetilde{\mu^{-}}$ 且 $\hat{\lambda} = \widehat{\lambda^{-}}$，因此根据归纳假设，若 $\boldsymbol{g}^{\hat{\lambda}}$ 是 $\mathrm{D}(\tilde{\mu})$ 的一个权，则 $\boldsymbol{g}^{\lambda^{-}}$ 是 $\mathrm{D}(\mu^{-})$的一个权。因此我们只需证明

我们可以通过先移除 2k 个正规 0-节点，再移除 2k 个正规 1-节点，.....，再移除 2k 个正规 $(\ell-1)$-节点，最后移除 k 个正规 ℓ-节点，从 μ 得到 μ^-。事实上，为此只需考察 μ的前 kp 列。根据假设，μ 至少有一个部分等于 kp，因此令 r 为满足 $\mu_r = \mathrm{kp}$ 的最大整数，并令 $\mathrm{h} = \mathrm{h}(\mu)$。那么（因为 ρ 是 d-Rouquier），整数 $\mu_{r+1}, \dots, \mu_h$ 恰好是满足 $\mathrm{a} < \mathrm{kp}$ 且模 p 同余于 $1, \dots, \ell$ 的整数。因此 μ 在第 1、p、$\mathrm{p}+1$、2p、.....、kp 列有可移除的 0-节点。这些节点都是正规的，我们通过移除这些节点定义一个更小的分拆；具体而言，若按从右向左的顺序移除它们，则每个节点在被移除之前都保持正规。所得分拆的第 $\mathrm{r}, \dots, \mathrm{h}-1$ 行是满足 $\mathrm{a} < \mathrm{kp}$ 且模 p 同余于 $2, \dots, \ell$ 或 -1 的整数。这意味着第 2、$\mathrm{p}-1$、$\mathrm{p}+2$、$2\mathrm{p}-1$、.....、$\mathrm{kp}-1$列有可移除的 1-节点。这些节点都是正规的，我们将它们移除（同样按从右向左的顺序）。所得分拆的第 $\mathrm{r}, \dots, \mathrm{h}-1$ 行是满足 $\mathrm{a} < \mathrm{kp}$ 且模 p 同余于 $1, 3, \dots, \ell$ 或 -2 的整数。我们以此类推，在最后一步移除第 $\mathrm{l}+1$、$2\mathrm{l}+1$、.....、$\mathrm{kp}-\mathrm{l}$ 列中的正规 ℓ-节点。经过这最后一步得到的分拆中，第 $\mathrm{r}, \dots, \mathrm{h}-1$ 行是满足 $\mathrm{a} < \mathrm{kp}$ 且模 p 同余于 $1, \dots, \ell$ 的整数，换言之，即整数 $\mu_{r+1}, \dots, \mu_h$。因此，整体效果只是删除了部分 kp，我们得到分拆 μ^-，证毕。□

命题 6.12. 设$\lambda \in \mathscr{P}^{\rho,d\,p'}$。那么$\lambda_\circ$是具有$p$-条形商$(\lambda^{(1)'}, \dots, \lambda^{(\ell)'}, \varnothing)$的分拆。

证明。 双射 $\lambda \mapsto \lambda_\circ$的定义性质与 Brauer 互反律 (5.2) 表明，$\mathrm{S}(\lambda)$ 的合成因子属于不可约超模$\mathrm{D}(\kappa_\circ)$之中，其中 $\kappa \trianglerighteq \lambda$，且至少包含一次 $\mathrm{D}(\lambda_\circ)$。

现在考虑权。根据引理 6.10，若且唯若 χ^κ 出现在 $\tilde{\varphi}^\lambda$中，g^λ 才是$\mathrm{S}(\kappa)$ 的一个权；根据命题 6.8 和引理 3.2，这只有在 $\kappa \trianglelefteqslant \lambda$时才会发生。因此，若 $\kappa \triangleright \lambda$，则$g^\lambda$ 不是$\mathrm{S}(\kappa)$的权，尤其不是$\mathrm{D}(\kappa_\circ)$的权。因此，g^λ 不是$\mathrm{S}(\lambda)$的任何合成因子的权，唯有$\mathrm{D}(\lambda_\circ)$可能例外；但$g^\lambda$ 是$\mathrm{S}(\lambda)$的一个权，所以它必定是$\mathrm{D}(\lambda_\circ)$的一个权。

因此，我们可以通过以下条件递归地刻画双射 $\mu \mapsto \lambda_\circ$

$$\lambda_\circ \notin \{\kappa_\circ \mid \kappa \trianglelefteq \lambda\}, \qquad g^\lambda \text{ is a weight of } \mathrm{D}(\lambda_\circ). \tag{6.4}$$

现在，为了证明该命题，我们对d使用归纳法。对于给定的d，我们首先考虑满足 $\lambda^{(1)} \neq \varnothing$的分拆$\lambda$。对于这些分拆，我们按照支配序使用归纳法；因此，假设将 λ 替换为任意分拆 $\kappa \trianglelefteq \lambda$ 时，该命题均成立（注意，根据引理 3.2，若 λ和 κ 是满足 $\lambda^{(1)} \neq \varnothing$ 和 $\kappa \trianglelefteq \lambda$的$p'$-分拆，则 $\kappa^{(1)} \neq \varnothing$ 也成立）。

给定满足 $\lambda^{(1)} \neq \varnothing$的 λ，令$\hat{}\lambda$ 为具有上述 p-条商 $(\varnothing, \varnothing, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(\ell)})$ 的分拆。根据对 d 的归纳法，我们知道$\hat{}\lambda^\circ$ 是具有 p-条商 $(\varnothing, \lambda^{(2)'}, \dots, \lambda^{(\ell)'}, \varnothing)$ 的分拆。特别地，$\mathrm{D}(\varnothing, \lambda^{(2)'}, \dots, \lambda^{(\ell)'}, \varnothing)$ 以 $\mathrm{g}^{\hat{\lambda}}$ 为一个权。现在，引理 6.11 表明，g^λ 是 $\mathrm{D}(\lambda^{(1)'}, \dots, \lambda^{(\ell)'}, \varnothing)$ 的一个权。根据归纳假设，我们知道对于 $\kappa \trianglelefteq \lambda$，分拆 $\kappa_\circ$满足相应性质；特别地，我们知道它们中没有一个具有 p-条商 $(\lambda^{(1)'}, \dots, \lambda^{(\ell)'}, \varnothing)$。因此，由刻画式 (6.4) 可知，$\lambda_\circ$必定是具有 p-条商 $(\lambda^{(1)'}, \dots, \lambda^{(\ell)'}, \varnothing)$ 的分拆。

因此（对于我们的 fi xed d），我们可以假设只要 $\lambda^{(1)} \neq \varnothing$，命题就成立。特别地，th is 这意味着

$$\{\kappa_\circ \mid \kappa \in \mathscr{P}^{\rho,d}_{p'},\ \kappa^{(1)} \neq \varnothing\} = \{\mu \mid \mu \in \mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho,d}_{p},\ \mu^{(0)} \neq \varnothing\},$$

因此

$$\{\kappa_\circ \mid \kappa \in \mathscr{P}^{\rho,d}_{p'},\ \kappa^{(1)} = \varnothing\} = \{\mu \mid \mu \in \mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho,d}_{p},\ \mu^{(0)} = \varnothing\}. \tag{6.5}$$

现在我们处理满足 $\lambda^{(1)} = \varnothing$ 的分拆 λ。对于这些分拆，我们采用另一种次序进行归纳：若 $(\varnothing, \varnothing, \kappa^{(2)'}, \dots, \kappa^{(\ell)'}) \succcurlyeq (\varnothing, \varnothing, \lambda^{(2)'}, \dots, \lambda^{(\ell)'})$，则记作 $\kappa \blacktriangleleft \lambda$；并假设将 λ 替换为任意满足 $\kappa \blacktriangleleft \lambda$ 的 κ 时，命题成立。

现在 (6.5) 表明，存在满足 $\kappa^{(1)} = \varnothing$ 的 κ，使得 $\kappa_\circ$是具有 p-bar-商$(\varnothing, \lambda^{(2)'}, \dots, \lambda^{(\ell)'}, \varnothing)$ 的分拆。由定理 5.5 和 Brauer 互反律 (5.2)，我们知道 $\chi^\kappa_\circ$ 出现在 $\varphi^{\kappa_\circ}$ 中，因此也出现在 $\tilde{\varphi}^\kappa$ 中。于是命题 6.8 给出

$$(\varnothing, \lambda^{(2)'}, \dots, \lambda^{(\ell)'}, \varnothing) \preccurlyeq (\varnothing, \kappa^{(2)'}, \dots, \kappa^{(\ell)'}, \varnothing),$$

这与 $\kappa \blacktriangleleft \lambda$ 的说法相同。但是，如果 $\kappa \blacktriangleleft \lambda$，那么根据归纳法，我们知道 $\kappa_\circ$是具有 p-条商 $(\varnothing, \kappa^{(2)'}, \dots, \kappa^{(\ell)'}, \varnothing)$ 的分拆，这就产生了矛盾。因此 $\kappa = \lambda$，证明完毕。□

6.5. **调整矩阵**。 现在我们可以回到虚射影特征 φ^μ。首先，我们将特征标 $\tilde{\varphi}^\lambda$ 表示为特征标 $\hat{}\varphi^\mu$ 的形式。

命题6.13. 设$\lambda \in \mathscr{P}^{\rho,d\ p'}$. 那么

$$\tilde{\varphi}^\lambda = \widetilde{D}_\lambda \sum_{\mu \in \mathscr{R}\mathscr{P}_p^{\rho,d}} \prod_{i=1}^{\ell} \left[\mathcal{M}^{\lambda^{(i)'}} : \mathcal{S}^{\mu^{(i-1)}}\right] \hat{\varphi}^\mu.$$

证明. 命题 6.8 表明，在 $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 中， $\tilde{\varphi}^\lambda$ 由系数 $[\tilde{\varphi}^\lambda$ 唯一确定： $\chi^\alpha]$ ，其中 $\alpha \in \mathscr{P}^{\rho,d\ p'}$. 因此，我们固定 $\alpha \in \mathscr{P}^{\rho,d\ p'}$ ，只需证明等式两边 χ^α 的系数相同。

利用推论 6.2 以及假设 $\alpha^{(0)} = \varnothing$，我们发现，等式右边 $\chi^{\alpha\sim}$ 的系数可写为 $D_\lambda X_{\lambda\alpha}$，其中

$$X_{\lambda\alpha} = \sum_{\mu \in \mathscr{R}\mathscr{P}_p^{\rho,d}} \prod_{i=1}^{\ell} \left[\mathcal{M}^{\lambda^{(i)'}} : \mathcal{S}^{\mu^{(i-1)}}\right] \sum_{\sigma^{(\bullet)},\tau^{(\bullet)}} \prod_{i=1}^{\ell} \mathrm{c}(\alpha^{(i)}; \sigma^{(i)}, \tau^{(i)})\, \mathrm{c}(\mu^{(i-1)}; \sigma^{(i-1)}, \tau^{(i)'}).$$

在此处以及整个证明过程中，$\sum_{\sigma^{(\bullet)},\tau^{(\bullet)}}$ 表示对所有 $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(\ell-1)}, \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(\ell)} \in \mathscr{P}$ 求和，并且我们将 $\sigma^{(0)}$ 和 $\sigma^{(\ell)}$ 视为 $\varnothing$。

对 $\mu \in \mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho,p^d}$ 求和等价于对 $\mu^{(0)}, \dots, \mu^{(\ell-1)} \in \mathscr{P}$ 求和（因为如果 $|\mu^{(0)}| + \cdots + |\mu^{(\ell-1)}| \neq d$，那么无论如何被加数都是零）。因此我们可以写成

$$\begin{aligned}
X_{\lambda\alpha} &= \sum_{\sigma^{(\bullet)},\tau^{(\bullet)}} \prod_{i=1}^{\ell} \mathrm{c}(\alpha^{(i)}; \sigma^{(i)}, \tau^{(i)}) \sum_{\mu^{(i-1)} \in \mathscr{P}} \left[\mathcal{M}^{\lambda^{(i)'}} : \mathcal{S}^{\mu^{(i-1)}}\right] \left[\mathcal{S}^{\sigma^{(i-1)}} \circ \mathcal{S}^{\tau^{(i)'}} : \mathcal{S}^{\mu^{(i-1)}}\right] \\
&= \sum_{\sigma^{(\bullet)},\tau^{(\bullet)}} \prod_{i=1}^{\ell} \mathrm{c}(\alpha^{(i)}; \sigma^{(i)}, \tau^{(i)}) \sum_{\substack{\beta^{(i)},\gamma^{(i)} \in \mathscr{C} \\ \beta^{(i)}+\gamma^{(i)}=\lambda^{(i)'}}} \left[\mathcal{M}^{\beta^{(i)}} : \mathcal{S}^{\tau^{(i)'}}\right] \left[\mathcal{M}^{\gamma^{(i)}} : \mathcal{S}^{\sigma^{(i-1)}}\right] \\
&= \sum_{\sigma^{(\bullet)},\tau^{(\bullet)}} \prod_{i=1}^{\ell} \sum_{\substack{\beta^{(i)},\gamma^{(i)} \in \mathscr{C} \\ \beta^{(i)}+\gamma^{(i)}=\lambda^{(i)'}}} \left[\mathcal{M}^{\beta^{(i)}} \otimes \mathtt{sgn} : \mathcal{S}^{\tau^{(i)}}\right] \left[\mathcal{M}^{\gamma^{(i)}} : \mathcal{S}^{\sigma^{(i-1)}}\right] \left[\mathcal{S}^{\tau^{(i)}} \circ \mathcal{S}^{\sigma^{(i)}} : \mathcal{S}^{\alpha^{(i)}}\right],
\end{aligned}$$

第二个等号用到了引理 2.2。由于我们将 $\sigma^{(0)}$ 解释为 $\varnothing$，项 $[\mathcal{M}^{\gamma^{(1)}}\colon \mathcal{S}^{\sigma^{(0)}}]$ 在 $\gamma^{(1)} = \varnothing$ 时等于 1，否则等于 0。但如果 $\gamma^{(1)} \neq \varnothing$，那么（比较所有涉及的分拆的大小）被加数中的其余项的乘积无论如何都是零。因此我们可以直接省略项 $[\mathcal{M}^{\gamma^{(1)}}\colon \mathcal{S}^{\sigma^{(0)}}]$。由于我们将 $\sigma^{(\ell)}$ 读作 $\varnothing$，也可以添上一个无关紧要的因子 $[\mathcal{M}^{\gamma^{(\ell+1)}}\colon \mathcal{S}^{\sigma^{(\ell)}}]$，其中我们将 $\gamma^{(\ell+1)}$ 解释为 $\varnothing$。现在（作变量平移后）$X_{\lambda\alpha}$ 变为

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma^{(\bullet)},\tau^{(\bullet)}} \sum_{\substack{\beta^{(1)},\dots,\beta^{(\ell)} \in \mathscr{C} \\ \gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(\ell)} \in \mathscr{C} \\ \beta^{(i)}+\gamma^{(i)}=\lambda^{(i)'}}} \prod_{i=1}^{\ell} \left[\mathcal{M}^{\beta^{(i)}} \otimes \mathtt{sgn} : \mathcal{S}^{\tau^{(i)}}\right] \left[\mathcal{M}^{\gamma^{(i+1)}} : \mathcal{S}^{\sigma^{(i)}}\right] \left[\mathcal{S}^{\tau^{(i)}} \circ \mathcal{S}^{\sigma^{(i)}} : \mathcal{S}^{\alpha^{(i)}}\right], \\
= &\sum_{\substack{\beta^{(1)},\dots,\beta^{(\ell)} \in \mathscr{C} \\ \gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(\ell)} \in \mathscr{C} \\ \beta^{(i)}+\gamma^{(i)}=\lambda^{(i)'}}} \sum_{\sigma^{(\bullet)},\tau^{(\bullet)}} \prod_{i=1}^{\ell} \left[(\mathcal{M}^{\beta^{(i)}} \otimes \mathtt{sgn}) \boxtimes \mathcal{M}^{\gamma^{(i+1)}} : \mathcal{S}^{\tau^{(i)}} \boxtimes \mathcal{S}^{\sigma^{(i)}}\right] \left[\mathcal{S}^{\tau^{(i)}} \circ \mathcal{S}^{\sigma^{(i)}} : \mathcal{S}^{\alpha^{(i)}}\right] \\
= &\sum_{\substack{\beta^{(1)},\dots,\beta^{(\ell)} \in \mathscr{C} \\ \gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(\ell)} \in \mathscr{C} \\ \beta^{(i)}+\gamma^{(i)}=\lambda^{(i)'}}} \prod_{i=1}^{\ell} \left[(\mathcal{M}^{\beta^{(i)}} \otimes \mathtt{sgn}) \circ \mathcal{M}^{\gamma^{(i+1)}} : \mathcal{S}^{\alpha^{(i)}}\right]
\end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中，我们用到了诱导的传递性，以及如下事实：对于任意t,s，不可约$\mathbb{C}(\mathfrak{S}_t \times \mathfrak{S}_s)$-模恰好是模 $\mathcal{S}^\tau \boxtimes \mathcal{S}^\sigma$（对应于 $\tau \in \mathscr{P}(t)$）和 $\sigma \in \mathscr{P}(s)$。

因此， $\widetilde{D}_{\lambda} X_{\lambda\alpha}$ 与命题 6.7 中的系数 $\widetilde{D}_{\lambda\alpha}$ 一致（注意到 $\alpha^{(0)} = \varnothing$），证明完成。□

现在我们已经准备好证明本节的主要结果。首先，我们还需要一些记号。回顾上面的双射

$$\mathscr{P}^{\rho,d}_{p'} \longmapsto \mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho,d}_{p},\ \lambda \longmapsto \lambda_{\circ}$$

其中 $\lambda_{\circ}$ 是具有 p-条形商 $(\lambda^{(1)'}, \ldots, \lambda^{(\ell)'}, \varnothing)$ 的分拆。我们将 $\mu \mapsto \mu^{\circ}$ 记作其逆双射。

给定 $\lambda \in \mathscr{P}^{\rho}{}_{p}{}^{d}$，我们定义 $g(\lambda)$ 为合成 $(|\lambda^{(0)}|, \ldots, |\lambda^{(\ell)}|) \in \mathscr{C}(d)$。给定 $m = (m_0, \ldots, m_{\ell-1}, 0)$ 这一 d 的合成，我们定义 m° 为合成 $(0, m_0, \ldots, m_{\ell-1})$。

现在，称虚特征 ψ 是 m-有界的，当且仅当：

- $\diamond$ 在 ψ 中出现的每个 χ^{α} 都满足 $m \trianglerighteq g(\alpha) \trianglerighteq m^{\circ}$；$\diamond$ 至少存在一个在 ψ 中出现的 χ^{α}，满足 $g(\alpha) = m$；并且 $\diamond$ 至少存在一个在 ψ 中出现的 χ^{α}，满足 $g(\alpha) = m^{\circ}$。

称虚特征 ψ 为 m-半有界，如果：

- $\diamond$ 每个在 ψ 中出现的 χ^{α} 都满足 $g(\alpha) \trianglerighteq m^{\circ}$，并且至少有一个在 ψ 中出现的 χ^{α} 满足 $g(\alpha) = m^{\circ}$。

我们对所定义的虚特征作如下观察。首先来看虚特征 $\widehat{\varphi^{\mu}}$。

引理 6.14. 设 $\mu \in \mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho}{}_{p}{}^{d}$，并令 $m = g(\mu)$。则 $\widehat{\varphi^{\mu}}$ 是 m-有界的。

证明。设 χ^{α} 出现在 $\widehat{\varphi^{\mu}}$ 中。由推论 6.2，存在分拆 $\sigma^{(0)}$、…、$\sigma^{(\ell-1)}$、$\tau^{(1)}$、…、$\tau^{(\ell)}$，使得

$$K^{-1}_{\alpha^{(0)}\sigma^{(0)}}(-1) \prod_{i=1}^{\ell} \mathrm{c}(\alpha^{(i)}; \sigma^{(i)}, \tau^{(i)})\, \mathrm{c}(\mu^{(i-1)}; \sigma^{(i-1)}, \tau^{(i)'}) \neq 0$$

（照例，我们将 $\sigma^{(\ell)} = \varnothing$ 读作……）。利用这样一个事实：只有当 $|\pi| = |\sigma|$ 时，$K^{-1}_{\pi\sigma}(-1)$ 才非零；而只有当 $|\beta| = |\gamma| + |\delta|$ 时，$\mathrm{c}(\beta; \gamma, \delta)$ 才非零，由此得到

$$|\mu^{(0)}| + \cdots + |\mu^{(r-1)}| + |\sigma^{(r)}| = |\alpha^{(0)}| + \cdots + |\alpha^{(r)}| = |\mu^{(0)}| + \cdots + |\mu^{(r)}| - |\tau^{(r+1)}| \tag{6.6}$$

对于每个 $r = 0, 1, \ldots, \ell$（将 $|\tau^{(\ell+1)}|$ 视为 0），使得

$$(|\mu^{(0)}|, \ldots, |\mu^{(\ell-1)}|, 0) \trianglerighteq (|\alpha^{(0)}|, \ldots, |\alpha^{(\ell)}|) \trianglerighteq (0, |\mu^{(0)}|, \ldots, |\mu^{(\ell-1)}|)$$

正如所需。

现在使用引理 2.4 选择一个严格分拆 $\nu^{(0)}$，使得 $K^{-1}_{\nu^{(0)}\mu^{(0)}}(-1) \neq 0$，并令 ν 为 $\mathscr{P}^{\rho}{}_{0}{}^{d}$ 中的分拆，其 p-条形商为 $(\nu^{(0)}, \mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(\ell-1)}, \varnothing)$。于是 $g(\nu) = m$，且 χ^{ν} 出现在 $\widehat{\varphi^{\mu}}$ 中（唯一的非零加项对应于 $\tau^{(i)} = \varnothing$，并且对每个 i 都有 $\sigma^{(i)} = \mu^{(i)}$）。

最后，令 $\lambda = \mu^{\circ}$。于是 $g(\lambda) = m$，且 χ^{λ} 出现在 $\widehat{\varphi^{\mu}}$ 中（唯一的非零加项对应于 $\tau^{(i)} = \mu^{(i-1)'}$，并且对每个 i 都有 $\sigma^{(i)} = \varnothing$）。□

接下来我们来看特征标 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$。

Lem 引理 6.15. 设 $\lambda \in \mathscr{P}^{\rho}{}_{,dp'}$ 并令 $m = (|\lambda^{(1)}|, \ldots, |\lambda^{(\ell)}|, 0)$。则 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 是 m-有界的。

证明。只要 χ^{α} 出现在 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 中，就有 $\mathrm{m} \trianglerighteq \mathrm{g}(\alpha) \trianglerighteq \mathrm{m}^{\circ}$；这一事实只是命题 6.8 第二个结论的一个较粗略版本。此外，命题 6.8 的第一个结论表明 χ^{λ} 出现在 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 中，并且根据定义，$\mathrm{g}(\lambda) = \mathrm{m}^{\circ}$。最后，令 ξ 为 $\mathscr{P}^{\rho}{}_{0}{}^{d}$ 中 p-条商为 $((|\lambda^{(1)}|), \lambda^{(2)'}, \ldots, \lambda^{(\ell)'}, \varnothing)$ 的分拆。命题 6.7 中的系数 $\widetilde{\mathrm{D}}_{\lambda\xi}$ 非零：为说明这一点，注意到对于每个 i，取 $\beta^{(i)} = \varnothing$ 和 $\gamma^{(i)} = \lambda^{(i)'}$ 时，对应的求和项等于 $\bar{\mathrm{c}}((|\lambda^{(1)}|), \lambda^{(1)'}) = 1$。因此，$\chi^{\xi}$ 出现在 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 中，且满足 $\mathrm{g}(\xi) = \mathrm{m}$。□

最后，我们考察不可分解射影特征标 φ^{μ}。

引理 6.16。 设$\mu \in \mathscr{RP}^{\rho}$、$_{p}{}^{d}$，并令 $m = g(\mu)$。则 φ^{μ}是m-半有界的。

证明。 设 $\lambda = \mu^{\circ}$。则 $g(\lambda) = m^{\circ}$，而推论 6.9(iii)指出， φ^{μ} 是m-半有界的。 □

现在，我们已经掌握了关于这三族虚特征的大量信息。取$m = (m_0, \dots, m_{\ell-1}, 0)$ 作为d的一个合成，并令

$$\mathscr{RP}_{m} = \left\{ \mu \in \mathscr{RP}^{\rho,d}_{p} \;\middle|\; g(\mu) = m \right\}.$$

现在定义

$$P_{m} = \{ \varphi^{\mu} \mid \mu \in \mathscr{RP}_{m} \},$$
$$\tilde{P}_{m} = \left\{ \tilde{\varphi}^{\lambda} \;\middle|\; \lambda_{\circ} \in \mathscr{RP}_{m} \right\},$$
$$\hat{P}_{m} = \{ \hat{\varphi}^{\mu} \mid \mu \in \mathscr{RP}_{m} \}.$$

这些集合都是由虚特征构成的线性无关集，大小为$|\mathscr{RP}_{m}|$。 $\tilde{P}_{m}$和$\hat{P}_{m}$中的虚特征是m-有界的，而P_{m}中的虚特征是m-半有界的。

现在，我们终于可以建立特征标 φ^{μ} 与虚特征$\hat{\varphi}^{\mu}$之间的联系。

定理 6.17。 取一个$m = (m_0, \dots, m_{\ell-1}, 0)$ 作为d的一个合成。那么对每个 $\mu, \lambda_{\circ} \in \mathscr{RP}_{m}$，我们可以写成

$$\varphi^{\mu} = \sum_{\nu \in \mathscr{RP}_{m}} A_{\nu\mu} \hat{\varphi}^{\nu} \qquad \text{and} \qquad \tilde{\varphi}^{\lambda} = \sum_{\nu \in \mathscr{RP}_{m}} B_{\nu\lambda} \varphi^{\nu}$$

其中：

◇ $A^{\nu\mu}, B_{\nu\lambda} \in \mathbb{N}_0$ 对每个ν；◇ $A_{\mu\mu} > 0$ 和$B_{\lambda_{\circ}\lambda} > 0$；◇若 $A_{\nu\mu} > 0$ （分别为$B_{\nu\lambda} > 0$），则$\nu \trianglerighteq \mu$ （分别为$\nu \trianglerighteq \lambda_{\circ}$）。

此外，每个特征标 $\varphi^{\mu} \in P_{m}$都是m-有界的。

证明。 我们按m 进行归纳，且按照支配序递减。因此，假设当m 被一个合成$n \rhd m$替换时，定理成立。

由于 $\lambda_{\circ} \in \mathscr{RP}_{m}$，根据引理 6.15，特征标 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 是 m-有界的。由于 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 是射影特征（而不仅仅是虚射影特征），它是特征标 φ^{ν}（ $\nu \in \mathscr{RP}^{\rho}$，dp）的非负系数线性组合。我们断言，只有满足 $\nu \in \mathscr{RP}_{m}$ 的特征标 φ^{ν} 才可能出现，也就是说，对于某些非负整数系数 $\mathrm{B}_{\nu\lambda}$，$\tilde{\varphi}^{\lambda} = \sum_{\nu \in \mathscr{RP}_{m}} \mathrm{B}_{\nu\lambda} \varphi^{\nu}$。根据引理 6.16，任何其他出现的特征标 φ^{ψ} 都是 n-半有界的，其中 $\mathrm{n} \neq \mathrm{m}$：若 $\mathrm{n} \not\trianglerighteq \mathrm{m}$，则存在一个在 φ^{ψ} 中出现的特征标χ^{α}，使得 $\mathrm{g}(\alpha) = \mathrm{n}^{\circ} \not\trianglerighteq \mathrm{m}^{\circ}$，因此 φ^{ψ} 不可能是 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 的组成因子，因为 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 是 m-有界的。另一方面，若 $\mathrm{n} \rhd \mathrm{m}$，则根据归纳假设，$\varphi^{\psi}$ 是 n-有界的，因而包含一个特征标χ^{α}，使得 $\mathrm{g}(\alpha) = \mathrm{n} \rhd \mathrm{m}$；因此，同样由于 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 是 m-有界的，φ^{ψ} 不会出现在 $\tilde{\varphi}^{\lambda}$ 中。这就证明了我们的断言。

由上一段可知，$\tilde{P}_{m}$ 的张成空间等于P_{m}的张成空间。另一方面，命题 6.13 表明，$\tilde{P}_{m}$ 的张成空间等于 $\hat{P}_{m}$的张成空间。因此，P_{m} 的张成空间等于 $\hat{P}_{m}$的张成空间。特别地，每个特征标 $\varphi^{\mu} \in P_{m}$ 都是 $\hat{P}_{m}$中的虚特征的线性组合，也就是说，存在系数 $A^{\nu\mu}$ 使得

$$\varphi^{\mu} = \sum_{\nu \in \mathscr{RP}_{m}} A_{\nu\mu} \hat{\varphi}^{\nu}$$

对每个 $\mu \in \mathscr{RP}_{m}$。

但现在注意，由推论 6.2 可知，每个特征标 $\hat{\varphi}^{\nu} \in \hat{P}_{m}$ 恰好包含一个满足$g(\alpha) = m^{\circ}$的特征标 χ^{α}，即分拆 $\alpha = \nu^{\circ}$，且 $[\hat{\varphi}^{\nu} : \chi^{\nu^{\circ}}] = 1$。要看出这一点，注意由 (6.6) 可知，我们需要取 $\sigma^{(i)} = \varnothing$，然后取 $\tau^{(i)} = \nu^{(i-1)'}$，才能使$[\hat{\varphi}^{\nu} : \chi^{\nu^{\circ}}]$的公式中出现非零加项。

因此，对于每个 μ、ν，系数 $A^{\mu\nu}$ 就是系数 $[\varphi^{\mu} : \chi^{\nu^{\circ}}]$。这些系数显然是非负整数，因为 φ^{μ} 是一个特征标；推论 6.9(iii)表明，若 $A_{\nu\mu} \neq 0$，则 $\nu^{\circ} \trianglelefteq \mu^{\circ}$。由于 $g(\mu) = g(\nu)$，这个条件等价于 $\nu \trianglerighteq \mu$。这种三角性也表明，对于每个 μ，都有 $A_{\mu\mu} \neq 0$，因为特征标 φ^{μ} 线性无关。

此外，根据命题6.13,

$$\sum_{\psi\in\mathscr{R}\mathscr{P}_{\underline{m}}} A_{\nu\psi}B_{\psi\lambda} = \widetilde{D}_\lambda \prod_{i=0}^{\ell-1}\left[\mathcal{M}^{\lambda_\circ{}^{(i)}} : \mathcal{S}^{\nu^{(i)}}\right].$$

根据 [$\mathbf{J}_2$, 定理 4.13]，可得：当$B_{\nu\lambda} > 0$时 $\nu \trianglerighteq \lambda_\circ$，此外还可得$B_{\lambda_\circ\lambda} > 0$，因为根据上一段，只有当$A_{\lambda_\circ\psi} > 0$ 时 $\psi \trianglelefteq \lambda_\circ$。

现在，对m而言，定理的最后一个结论也随之成立：每个$\hat{}\underline{\varphi}^\nu \in \hat{}P_{\underline{m}}$ 都是m有界的，并且是不可约特征标的非负线性组合；这意味着，$\hat{}\varphi^\nu$ 的任意非零非负线性组合也将是m有界的；因此特别地，φ^μ 是m有界的。□

我们通过令$A_{\nu\mu} = 0$ （当$g(\mu) \neq g(\nu)$）来将整数$A^{\nu\mu}$ 的定义扩展到所有 μ、$\nu \in \mathscr{R}\mathscr{P}^\rho{}_p{}^d$。于是，矩阵$A$ （其元素为$A^{\nu\mu}$ ）是一个具有非负整数元素的非奇异方阵，并且关于支配序是三角矩阵。我们称A 为$\mathcal{B}^\rho$、^{d}的调整矩阵 。定理 6.17表明， $\mathcal{B}^\rho$、^{d} 的（超）分解矩阵可以通过由特征标$\hat{}\varphi^\mu$ 确定的矩阵右乘A得到。在本文的其余部分，我们的目标是证明，当$d < p$ 时A 是单位矩阵（且 $\mathcal{B}^\rho$、^{d} 是 RoCK块）。

7. CARTAN 矩阵与主定理的证明

7.1. 超 Cartan 矩阵与调整矩阵。在本小节和下一小节中，我们考虑 $\mathcal{B}^\rho{}^d$ 的超 Cartan 矩阵的元素。

回顾 (5.4) 和推论 6.2，我们有整数

$$D_{\lambda\mu} = 2^{\lfloor\frac{1}{2}(h(\lambda^{(0)})+1-a(\lambda))\rfloor} \sum_{\substack{\sigma^{(0)},\dots,\sigma^{(\ell-1)}\in\mathscr{P}\\ \tau^{(1)},\dots,\tau^{(\ell)}\in\mathscr{P}}} K^{-1}_{\lambda^{(0)}\sigma^{(0)}}(-1)\prod_{i=1}^{\ell}\mathrm{c}(\lambda^{(i)};\sigma^{(i)},\tau^{(i)})\,\mathrm{c}(\mu^{(i-1)};\sigma^{(i-1)},\tau^{(i)\prime})$$

对于 $\lambda \in \mathscr{P}^\rho{}_0{}^d$ 和 $\mu \in \mathscr{R}\mathscr{P}^\rho{}_p{}^d$，使得对每个 μ，都有 $\hat{}\varphi^\mu = \sum_\lambda D_{\lambda\mu}\chi^\lambda$。此外，根据第 6.5 节，我们还有一个调整矩阵 A，使得对每个 μ，都有 $\varphi^\mu = \sum_\nu A^{\nu\mu}\,\hat{}\varphi^\nu$。因此

$$[\varphi^\mu : \chi^\lambda] = \sum_{\nu\in\mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho,d}_p} A_{\nu\mu}D_{\lambda\nu}$$

对于所有 $\lambda \in \mathscr{P}^\rho{}_0{}^d, \mu \in \mathscr{R}\mathscr{P}^\rho{}_p{}^d$ 都成立。因此，根据 Brauer 互反律 (5.2)，若定义

$$D^*_{\lambda\mu} = 2^{\lfloor\frac{1}{2}(h(\lambda^{(0)})+a(\lambda))\rfloor} \sum_{\substack{\sigma^{(0)},\dots,\sigma^{(\ell-1)}\in\mathscr{P}\\ \tau^{(1)},\dots,\tau^{(\ell)}\in\mathscr{P}}} K^{-1}_{\lambda^{(0)}\sigma^{(0)}}(-1)\prod_{i=1}^{\ell}\mathrm{c}(\lambda^{(i)};\sigma^{(i)},\tau^{(i)})\,\mathrm{c}(\mu^{(i-1)};\sigma^{(i-1)},\tau^{(i)\prime})$$

对于所有 λ, μ，则

$$[\mathrm{S}(\lambda) : \mathrm{D}(\mu)] = \sum_{\nu\in\mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho,d}_p} A_{\nu\mu}D^*_{\lambda\nu}. \tag{7.1}$$

现在考虑超 Cartan 矩阵的元素

$$C_{\nu\mu} = [P(\nu) : \mathrm{D}(\mu)]$$

对于 μ、$\nu \in \mathscr{R}\mathscr{P}^\rho{}_p{}^d$，其中 $P(\nu)$ 表示 $\mathrm{D}(\nu)$的射影覆盖。由上文可写为

$$C_{\nu\mu} = \sum_{\lambda\in\mathscr{P}^{\rho,d}_0} [\varphi^\nu : \chi^\lambda][\mathrm{S}(\lambda) : \mathrm{D}(\mu)] = \sum_{\substack{\lambda\in\mathscr{P}^{\rho,d}_0\\ \xi,\pi\in\mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho,d}_p}} A_{\xi\mu}D^*_{\lambda\xi}A_{\pi\nu}D_{\lambda\pi}.$$

7.2. 未调整的 Cartan 矩阵中的元素。本小节的目标是计算“未调整的超 Cartan 矩阵”元素

$$\mathring{C}_{\mu\nu} := \sum_\lambda D^*_{\lambda\mu}D_{\lambda\nu}$$

对于 μ、$\nu \in \mathscr{R}\mathscr{P}^\rho{}_p{}^d$。在第 7.3 节中，我们将使用推论 4.11 和定理 5.4，证明这些“未调整的超 Cartan 矩阵”项与实际的超 Cartan 矩阵项一致，从而得出我们的主要结果。

命题 7.1. 假设 μ、$\nu \in \mathscr{R}\mathscr{P}^{\rho}$、$_{p}{}^{d}$。那么

$$\mathring{C}_{\mu\nu} = \prod_{i=0}^{\ell-1} \mathrm{c}(\mu^{(i)}; \varphi^{(i)}, \chi^{(i)}, \psi^{(i+1)\prime}, \omega^{(i)})\, \mathrm{c}(\nu^{(i)}; \varphi^{(i)}, \psi^{(i)}, \chi^{(i+1)\prime}, \omega^{(i)}),$$

对所有满足 $\chi^{(0)} = \psi^{(0)\prime}$ 的分拆 $\varphi^{(i)}$、$\psi^{(i)}$、$\chi^{(i)}$、$\omega^{(i)}$ 求和，其中 $0 \leqslant i \leqslant \ell - 1$，并读取 $\chi^{(\ell)} = \psi^{(\ell)} = \varnothing$。

证明。由整数 $D^{\lambda\mu}$ 和 $D^{*}_{\lambda\mu}$ 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\mathring{C}_{\mu\nu} &= \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_0^{\rho,d}} D^{*}_{\lambda\mu} D_{\lambda\nu} \\ &= \sum \Big(2^{h(\lambda^{(0)})} K^{-1}_{\lambda^{(0)}\sigma^{(0)}}(-1) K^{-1}_{\lambda^{(0)}\bar{\sigma}^{(0)}}(-1) \prod_{i=1}^{\ell} \mathrm{c}(\lambda^{(i)}; \sigma^{(i)}, \tau^{(i)})\, \mathrm{c}(\mu^{(i-1)}; \sigma^{(i-1)}, \tau^{(i)\prime}) \\ &\qquad \times \prod_{i=1}^{\ell} \mathrm{c}(\lambda^{(i)}; \bar{\sigma}^{(i)}, \bar{\tau}^{(i)})\, \mathrm{c}(\nu^{(i-1)}; \bar{\sigma}^{(i-1)}, \bar{\tau}^{(i)\prime}) \Big)\end{aligned}$$

其中求和遍及满足 $\tau^{(i)}$ 的 $\lambda \in \mathscr{P}^{\rho}$、$_{0}{}^{d}$、$\sigma^{(i)}$、$\bar{\sigma}^{(i)} \in \mathscr{P}$，其中 $0 \leqslant i \leqslant \ell - 1$；以及满足 $\bar{\tau}^{(i)} \in \mathscr{P}$ 的，其中 $1 \leqslant i \leqslant \ell$，并读取 $\sigma^{(\ell)} = \bar{\sigma}^{(\ell)} = \varnothing$。对 $\lambda \in \mathscr{P}^{\rho}$、$_{0}{}^{d}$ 求和等价于对 $\lambda^{(0)}$、……、$\lambda^{(\ell)} \in \mathscr{P}$ 求和，其中 $\lambda^{(0)}$ 严格且 $|\lambda^{(0)}| + \cdots + |\lambda^{(\ell)}| = d$。但实际上，当 $|\lambda^{(0)}| + \cdots + |\lambda^{(\ell)}| \neq d$ 时，被加项为零，因此我们可以放心地将变量 $\lambda \in \mathscr{P}^{\rho}$、$_{0}{}^{d}$ 替换为变量 $\lambda^{(0)} \in \mathscr{P}_0$ 和 $\lambda^{(i)} \in \mathscr{P}$，其中 $1 \leqslant i \leqslant \ell$。

我们应用引理 2.3 消去变量 $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(\ell)}$。得到

$$\begin{aligned}\mathring{C}_{\mu\nu} = \sum \Big(2^{h(\lambda^{(0)})} K^{-1}_{\lambda^{(0)}\sigma^{(0)}}(-1) K^{-1}_{\lambda^{(0)}\bar{\sigma}^{(0)}}(-1) &\prod_{i=1}^{\ell} \mathrm{c}(\sigma^{(i)}; \varphi^{(i)}, \chi^{(i)})\, \mathrm{c}(\tau^{(i)}; \psi^{(i)}, \omega^{(i-1)}) \\ &\times \prod_{i=1}^{\ell} \mathrm{c}(\bar{\sigma}^{(i)}; \varphi^{(i)}, \psi^{(i)})\, \mathrm{c}(\bar{\tau}^{(i)}; \chi^{(i)}, \omega^{(i-1)}) \\ &\times \prod_{i=1}^{\ell} \mathrm{c}(\mu^{(i-1)}; \sigma^{(i-1)}, \tau^{(i)\prime})\, \mathrm{c}(\nu^{(i-1)}; \bar{\sigma}^{(i-1)}, \bar{\tau}^{(i)\prime}) \Big),\end{aligned}$$

其中，我们已从求和中消去了变量 $\lambda^{(i)}$，并引入了新变量$\varphi^{(i)}, \psi^{(i)}, \chi^{(i)} \in \mathscr{P}$，对应于 $1 \leqslant i \leqslant \ell$，以及 $\omega^{(i)}$，对应于 $0 \leqslant i \leqslant \ell - 1$。现在我们利用 Littlewood–Richardson 系数的标准关系，得到

$$\begin{aligned}\mathring{C}_{\mu\nu} = \sum \Big(2^{h(\lambda^{(0)})} K^{-1}_{\lambda^{(0)}\sigma^{(0)}}(-1) K^{-1}_{\lambda^{(0)}\bar{\sigma}^{(0)}}(-1)\, &\mathrm{c}(\mu^{(0)}; \sigma^{(0)}, \psi^{(1)\prime}, \omega^{(0)\prime})\, \mathrm{c}(\nu^{(0)}; \bar{\sigma}^{(0)}, \chi^{(1)\prime}, \omega^{(0)\prime}) \\ &\times \prod_{i=2}^{\ell} \mathrm{c}(\mu^{(i-1)}; \varphi^{(i-1)}, \chi^{(i-1)}, \psi^{(i)\prime}, \omega^{(i-1)\prime})\, \mathrm{c}(\nu^{(i-1)}; \varphi^{(i-1)}, \psi^{(i-1)}, \chi^{(i)\prime}, \omega^{(i-1)\prime}) \Big).\end{aligned}$$

这里，对于 $1 \leqslant i \leqslant \ell - 1$，我们已消去了变量 $\sigma^{(i)}, \bar{\sigma}^{(i)}$；对于 $1 \leqslant i \leqslant \ell$，我们已消去了变量 $\tau^{(i)}$，$\bar{\tau}^{(i)}$。我们还省略了各项 $\mathrm{c}(\sigma^{(\ell)}; \varphi^{(\ell)}, \chi^{(\ell)})\, \mathrm{c}(\bar{\sigma}^{(\ell)}; \varphi^{(\ell)}, \psi^{(\ell)})$。这无妨，因为我们将 $\sigma^{(\ell)} = \bar{\sigma}^{(\ell)} = \varnothing$ 解释为……，但这意味着现在我们把 $\varphi^{(\ell)}, \chi^{(\ell)}, \psi^{(\ell)}$ 消去，并将 $\psi^{(\ell)} = \chi^{(\ell)} = \varnothing$ 视为上式中的变量。

现在我们应用引理 2.5 消去各项 $K^{-1}_{\lambda^{(0)}\sigma^{(0)}}(-1) K^{-1}_{\lambda^{(0)}\bar{\sigma}^{(0)}}(-1)$。得到

$$\begin{aligned}\mathring{C}_{\mu\nu} = \sum \Big(\mathrm{c}(\sigma^{(0)}; \varphi^{(0)}, \psi^{(0)\prime})\, \mathrm{c}(\bar{\sigma}^{(0)}; \varphi^{(0)}, \psi^{(0)})\, &\mathrm{c}(\mu^{(0)}; \sigma^{(0)}, \psi^{(1)\prime}, \omega^{(0)\prime})\, \mathrm{c}(\nu^{(0)}; \bar{\sigma}^{(0)}, \chi^{(1)\prime}, \omega^{(0)\prime}) \\ &\times \prod_{i=2}^{\ell} \mathrm{c}(\mu^{(i-1)}; \varphi^{(i-1)}, \chi^{(i-1)}, \psi^{(i)\prime}, \omega^{(i-1)\prime})\, \mathrm{c}(\nu^{(i-1)}; \varphi^{(i-1)}, \psi^{(i-1)}, \chi^{(i)\prime}, \omega^{(i-1)\prime}) \Big),\end{aligned}$$

其中我们消去了变量 $\lambda^{(0)}$，并引入了两个新变量 $\varphi^{(0)}$、$\psi^{(0)} \in \mathscr{P}$。现在我们消去 $\sigma^{(0)}$、$\bar{\sigma}^{(0)}$，得到

$$\mathring{C}_{\mu\nu} = \sum \Big(\mathrm{c}(\mu^{(0)}; \varphi^{(0)}, \psi^{(0)\prime}, \psi^{(1)\prime}, \omega^{(0)\prime})\, \mathrm{c}(\nu^{(0)}; \varphi^{(0)}, \psi^{(0)}, \chi^{(1)\prime}, \omega^{(0)\prime})$$

$$\times \prod_{i=1}^{\ell-1} \mathrm{c}(\mu^{(i)};\varphi^{(i)},\chi^{(i)},\psi^{(i+1)'},\omega^{(i)'})\,\mathrm{c}(\nu^{(i)};\varphi^{(i)},\psi^{(i)},\chi^{(i+1)'},\omega^{(i)'})\Big).$$

对每个 i，将 $\omega^{(i)}$ 替换为 $\omega^{(i)'}$，即可得到所需结果。 □

7.3. 主定理的证明。 令 $d < p$ 且 ρ 为一个 d-Rouquier p-bar-核。取 $\lambda \in \mathscr{P}^{\rho}_{0^d}$ 和 $\mu \in \mathscr{RP}^{\rho}_{p^d}$。我们的主定理断言，分解数 $[\mathrm{S}(\lambda):\mathrm{D}(\mu)]$ 等于第 7.1 节中定义的整数 $D^*_{\lambda\mu}$。我们在（7.1）中已经看到，$[\mathrm{S}(\lambda):\mathrm{D}(\mu)] = \sum_\nu A^{\nu\mu} D^*_{\lambda\nu}$，因此我们的任务是证明调整矩阵 A 是单位矩阵。

回顾第 7.1 节，对于真正的超 Cartan 矩阵元素，我们有

$$C_{\nu\mu} = \sum_{\xi\pi \in \mathscr{RP}^{\rho,d}_p} A_{\xi\mu} \mathring{C}_{\xi\pi} A_{\pi\nu},$$

而未调整的超 Cartan 矩阵元素 $\mathring{C}_{\xi\pi}$ 由命题 7.1 给出。矩阵 A 是一个具有非负整数元素的三角矩阵，这意味着对于所有 μ、ν，有 $C_{\nu\mu} \geqslant \mathring{C}_{\nu\mu}$；当且仅当 A 是单位矩阵时，对于所有 μ、ν 均成立等式。更简单地说，A 是单位矩阵，当且仅当 $\sum_{\mu,\nu} C_{\nu\mu} = \sum_{\mu,\nu} \mathring{C}_{\nu\mu}$。

首先假设 $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 是 M 型。那么简单模与简单超模相同，不可分解投射模与不可分解射影超模也相同，因此通常 Cartan 矩阵的各项由 $C_{\nu\mu}$ 给出。

接下来假设 $\mathcal{B}^{\rho,d}$ 是 Q 型。那么，当我们考察模而非超模时，每个 φ^{μ} 都分解为和 $\varphi^{\mu,+} \oplus \varphi^{\mu,-}$，而每个简单模 $\mathrm{D}(\mu)$ 都分解为直和 $\mathrm{D}(\mu,+) \oplus \mathrm{D}(\mu,-)$。如果将其限制到交错群的双覆盖 $\hat{\mathfrak{A}}_n$，那么 $\varphi^{\mu,+}$ 和 $\varphi^{\mu,-}$ 都限制为相同的不可分解射影特征 $\varphi^{\mu,0}$，而简单模 $\mathrm{D}(\mu,+)$ 和 $\mathrm{D}(\mu,-)$ 都限制为相同的简单模 $\mathrm{E}(\mu,0)$。所以 $\mathrm{Res}_{\hat{\mathfrak{A}}_n} \varphi^{\mu} = 2\varphi^{\mu,0}$ 和 $\mathrm{Res}\,\hat{\mathfrak{A}}_n \mathrm{D}(\mu) \cong \mathrm{E}(\mu,0)^{\oplus 2}$，并且它

由此可知，块 $\mathcal{B}^{\rho}$ 的通常 Cartan 矩阵的各项 $\tilde{0}^{d}\hat{\mathfrak{A}}_n$ 的各项由 $C_{\nu\mu}$ 给出。

现在考虑第 4 节中的缠绕积代数 W_d。根据定理 5.4，该代数与 $\mathcal{B}^{\rho}$ Morita 等价；若 $\mathcal{B}^{\rho d}$ 是 M 型，则为 ^{d}；若 $\mathcal{B}^{\rho d}$ 是 Q 型，则为 $\mathcal{B}^{\rho}{}_{\tilde{0}^{d}}$。无论哪种情况，$\mathrm{W}_d$ 的 Cartan 矩阵与矩阵 $(\mathrm{C}_{\nu,\mu})$ 除了行和列的置换外都相同；也就是说，存在一个双射 $\theta\colon \mathscr{RP}^{\rho},\mathrm{dp} \to \mathscr{P}\mathrm{J}(\mathrm{d})$，使得对所有 μ,ν，都有 $\mathrm{C}_{\nu\mu} = [\mathrm{P}(\theta(\nu)) : \mathrm{L}(\theta(\mu))]$。对 μ,ν 求和，得到

$$\sum_{\mu,\nu \in \mathscr{RP}^{\rho,d}_p} C_{\nu\mu} = \sum_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu} \in \mathscr{P}^J(d)} [P(\boldsymbol{\lambda}) : L(\boldsymbol{\mu})].$$

但是，比较 命题 7.1 与推论 4.11 可知，若我们定义一个双射

$$\iota : \mathscr{RP}^{\rho,d}_p \longrightarrow \mathscr{P}^J(d),\ \mu \longmapsto (\lambda^1,\ldots,\lambda^\ell)$$

其中

$$\lambda^i = \begin{cases} \mu^{(i-1)} & i \text{ even} \\ \mu^{(i-1)'} & i \text{ odd} \end{cases}$$

那么，对所有 μ,ν，$\mathring{C}_{\nu\mu} = [P(\iota(\nu)),\ L(\iota(\mu))]$。求和后，我们得到

$$\sum_{\mu,\nu \in \mathscr{RP}^{\rho,d}_p} \mathring{C}_{\nu\mu} = \sum_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu} \in \mathscr{P}^J(d)} [P(\boldsymbol{\lambda}) : L(\boldsymbol{\mu})] = \sum_{\mu,\nu \in \mathscr{RP}^{\rho,d}_p} C_{\nu\mu}$$

由此即得结果。

参考文献

[BK$_1$] J. Brundan & A. Kleshchev，《Hecke-Clifford 超代数、A 型 $A(2)\,2\ell$ 的晶体以及 $\tilde{S}_n$ 的模分支规则》，*Represent. Theory* **5** 2001 317 403 [2, 16] ( )，–。

[2] 239 2002 见第……页。BK J. Brundan & A. Kleshchev，《通过 Sergeev 对偶研究对称群的射影表示》，*Math. Z.* ( ), 27 68 [2, 16] –。

[3] **306** BK J. Brundan & A. Kleshchev，《对称群双覆盖的 James 正则化定理》，*J. Algebra* (2006)，128–137。[19] [BK$_4$] J. Brundan & A. Kleshchev，《奇 Grassmann 双模与自旋对称群的导出等价》，arXiv:2203.14149。[19]

[CK] J. Chuang 和 R. Kessar，《对称群、缠绕积、Morita 等价与 Brou´e 的阿贝尔亏缺群猜想》，Bull. London Math. Soc. **34** 2002 174 184 [2] ( )，–。CR J. [ ] $\mathfrak{sl}_2$ **167** Chuang 和 R. Rouquier，《对称群的导出等价与 -范畴化》，Ann. of Math. (2008)，245–298。[2, 18] [1] $q\ \widehat{\mathfrak{sl}}_n$ **248** 2002 765 779 [2, 5] CT J. Chuang & K. [2] **135** 2003 M. Tan，《基本 U ( )-模中的一些典范基向量》，J. Algebra ( )，–。CT J. Chuang & K. M. Tan，《代数花环积的表示》，Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. ( )，395–411。[2, 13, 14, 15][ELV] M. Ebert、A. Lauda & L. Vera，《自旋对称群的导出超等价与奇 $\mathfrak{sl}(2)$-范畴化》，arXiv:2203.14153。[19][Fa$_1$] M. Fayers，《对称群线性表示和射影表示的正则化定理的 q-类比》，J. Algebra 316 (2007)，346–367。[20][Fa$_2$] M. Fayers，《在特征 2 下仍保持不可约的交错群不可约射影表示》，Adv. Math. 374 (2020) 107340。[2][Fa$_3$] M. Fayers，《比较 A(1) 型与 A(2) 型的 Fock 空间》，Algebr. Comb.，即将出版；arXiv:2207.01879。[2, 6, 18, 20][Fu] W. Fulton，《杨表》，伦敦数学会学生文本丛书 35，剑桥大学出版社，剑桥，1997 [4] 。H J. Humphreys, [ ] 33 1986 441 《对称群射影表示的块》，J. London Math. Soc. ( )，– 452 [16] 。J G. D. James, [1] **43** 1976 45 54 [19] 《对称群的分解矩阵 II》，J. Algebra ( )，–。[J$_2$] G. D. James，《对称群表示论》，数学讲义第 682 卷，Springer，纽约/海德堡/柏林，1978。[4, 5, 31][JK] G. D. James 和 A. Kerber，《对称群表示论》，数学及其应用百科全书第 **16**， 1981 [4] 卷， [ ] **186** Addison-Wesley，雷丁（马萨诸塞州），。Ke R. Kessar，《对称群与交错群双覆盖的块与源代数》，J. Algebra (1996)，872–933。[17][Kl] A. Kleshchev，《对称群的线性表示与射影表示》，剑桥大学出版社，2005。[11, 12, 16, 17, 18, 21][KL] A. Kleshchev & M. Livesey，《对称群双覆盖的 RoCK 块与箭图 Hecke 超代数》，Mem. Amer. Math. Soc.，即将出版；arXiv:2201.06870。[2, 7, 9, 16, 17, 18, 19, 21][KS] A. Kleshchev & V. Shchigolev，《对称群射影表示的模分支规则与超群 Q(n) 的降算子》，Mem. Amer. Math. Soc. **220** 2012 1034, +123 [2, 16, 17] ( )，第 xviii 页。 [ ] **6** 2002 290 LM B. Leclerc & H. Miyachi，《Fock 空间典范基的一些闭合公式》，Represent. Theory ( )，– 312 [2] 。LT B. Leclerc & J.– [ ] Y. Thibon，《q 变形 Fock 空间与自旋对称群的模表示》，J. Physics A **30** 1997 6163 6176 [3, 18] ( )，–。M I. G. [1] **18** 1980 173 204 [14] Macdonald，《多项式函子与缠绕积》，J. Pure Appl. Algebra ( )，–。 [2] 2 1995 [4, 6] M I. Macdonald, [1] 《对称函数与 Hall 多项式》，第 nd 版，牛津大学出版社，。MY A. Morris & A. Yaseen，《涉及移位杨图的一些组合结果》，Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 99 1986 23 31 [4, 16] ( )，–。MY A. [2] Morris & A. Yaseen，《对称群自旋特征的分解矩阵》，Proc. Roy. Soc. Edinburgh **108** 1988 145 164 [17] A ( )，–。N [ ] Nazarov，《M. L. Young 对称群不可约射影表示的杨正交形》，J. London Math. Soc. 42 (1990) 437–451。[16] [ ] 1998 [2] R R. Rouquier，《表 [ ] **74** 1989 87 示与导出范畴》，资格论文，巴黎第七大学，。S J. Stembridge，《移位杨表与对称群的射影表示》，Adv. Math. ( )，– 134。[6]

伦敦玛丽女王大学，迈尔恩德路，伦敦 E1 4NS，英国
电子邮箱地址：m.fayers@qmul.ac.uk

数学系，俄勒冈大学，尤金，俄勒冈州 97403，美国电子邮箱地址：klesh@uoregon.edu

莱布尼茨汉诺威大学，代数、数论与离散数学研究所，30167 汉诺威，德国电子邮箱地址：morotti@math.uni-hannover.de