加性函数的多项式方程 II。

Eszter Gselmann 和 Gergely Kiss

2023年3月7日

arXiv:2303.03306v1 [math.CA] 6 Mar 2023

摘要

在这一系列工作中，我们研究加性函数的多项式方程。我们考虑方程

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x^{p_i})g_i(x)^{q_i} = 0 \qquad (x \in \mathbb{F}),$$

其中 n 是一个正整数，$\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ 是一个域，f_i、g_i：$\mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 是加性函数，且对于所有 $i = 1, \ldots, n$，p_i、q_i 都是正整数。利用可分解函数理论，我们将解描述为高阶导子与域同态的复合。在许多情形下，我们还给出了所涉及导子阶的紧上界。此外，我们还给出了一些重要特殊情形中解的完整描述。

1 引言

A作为我们先前工作的延续，本文研究一类函数方程的加性解 [5],
a经研究发现，这类方程适用于刻画
h域之间的同态和导子。如何在一般的加性映射中刻画特殊态射（例如
a同态和导子）是一个重要问题,
f这不仅从代数角度来看如此，从函数方程的角度来看也是如此。

关于此处考虑的所有情形，涉及的加性函数都定义在域 $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ and
h其值属于复数域，因此我们只在这一设定下介绍预备知识。

下文采用标准记号，即 $\mathbb{N}$ and $\mathbb{C}$ 分别表示正整数集和
th复数集。

以下假设 $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ 是一个域。

D定义 1. 若函数 $f : \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 满足

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{F}).$$

若加性函数 d：$\mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 还满足以下条件，则称其为导子

$$d(xy) = d(x)y + xd(y) \qquad (x, y \in \mathbb{F}).$$

若加性函数 φ：$\mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 同时具有乘法性，则称其为同态；换言之，除了加性之外，我们还满足

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad (x, y \in \mathbb{F}).$$

如果 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 和 φ 是同构，那么 φ 称为复自同构。

本文研究以下方程的解

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x^{p_i})g_i(x)^{q_i} = 0, \qquad (x \in \mathbb{F}). \tag{1}$$

我们的主要目标是证明，借助同态的复合和（高阶）导子，可以表示这些解。利用这一点，我们在许多情形下给出了解的描述。

注意，上述方程包含若干刻画（高阶）导子的著名方程作为特例。例如，在 [1, 2, 6] 中，方程的加性解

$$\sum_{i=0}^{n} x^i f_{n+1-i}(x^{n+1-i}) = 0 \qquad (x \in R)$$

以及下述方程的加性解

$$\sum_{i=0}^{n} f(x^{p_i})x^{q_i} = 0 \qquad (x \in R)$$

已在环上得到描述。

本文的核心内容从第二节开始，其中可找到关于（1）的结果。首先，我们证明一些初等但重要的结论。这些引理的目的是弄清楚，在研究这些方程时应当施加哪些合理的条件。例如，所谓的齐次化引理（见引理 1）使我们能够将讨论限制在参数满足如下条件的情形：

$$p_i + q_i = N \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

成立。

根据第2节开头的注记和示例，我们将在以下条件下给出方程 (1) 的刻画定理

复数域(i) 正定的按严格递增顺序排列，即 $p_1 < \cdots < p_n$;

C(ii) 对所有 $i = 1, \ldots, n$，都有 $p_i + q_i = N$;

C(iii) 对所有 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$，若 i, j，则有 p_i, q_j。

此外，根据引理2，上述函数方程的解足以确定“等价意义下”的结果。这是因为我们注意到，若函数 $f_1, \ldots, f_n$ 和 $g_1, \ldots, g_n$ 满足方程 (1)，那么对于任意自同构 $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，函数 $\varphi \circ f_1, \ldots, \varphi \circ f_n$ 和 $\varphi \circ g_1, \ldots, \varphi \circ g_n$ 也满足 (1)。

尽管方程 (1) 只包含一个自变量，我们仍在加性函数类中寻找其解。这一性质（即加性）使我们能够将方程 (1) 中自变量的数量从一个增加到 N。简言之，这就是所谓的对称化方法。之后，可以证明函数 $f_1, \ldots, f_n$ 和 $g_1, \ldots, g_n$ 是乘法群 $\mathbb{F}^\times$ 上的可分解函数。由此我们推得，它们是群 $\mathbb{F}^\times$ 上的广义指数多项式。进一步，定理 6 指出，对所有 $i = 1, \ldots, n$，在函数 f_i 和 g_i 所成的簇中恰有一个指数函数，即 m_i，前提是对于参数 $q_1, \ldots, q_n$，我们假设对所有 $i = 1, \ldots, n$，$q_i < N$ 2。接下来，我们的目标是求出解中出现的相关高阶导子的次数上界。为此，我们首先证明一个替代定理，见定理 7。证明了方程 (1) 的定理 7 后，我们将关注一些特殊情形。这里我们考虑方程 (1)，并假设所有函数 f_i, g_i, $i = 1, \ldots, n$ 都是导子或线性函数，且

- 函数 $f_1, \ldots, f_n$ 的表示中高阶导子的阶相同，并由此得出，对所有 $i = 1, \ldots, n$，都有 $g_i(x) = \lambda_i x$ $(x \in \mathbb{F})$，见推论 2；
- 表示函数 g_1、……、g_n 的高阶导子的阶相同，因此我们得出，对于所有 $i = 1$、……、n，都有 $g_i(x) = \lambda_i x$ $(x \in \mathbb{F})$，参见推论 2；
- 对于所有 $i = 1$、……、n，都有 $f_i(x) = c_i g_i(x)$ $(x \in \mathbb{F})$，由此我们推得 $f_i(x) = \lambda_i x$ $(x \in \mathbb{F}, i = 1$、……、$n)$，参见推论 3。

这些结果促使我们提出猜想 1，其中我们表述如下：我们猜想，表示函数 $f_1, \ldots\ldots, f_n$ 和 $g_1, \ldots\ldots, g_n$ 的高阶导子的阶至多为 $n - 1$。在单独的小节中，我们以方程 (1) 的一些特殊情形结束上一节。

正如我们上文所述，本文可视为我们上一篇论文[5]的自然延续或补充。在那篇论文中，我们在相同情形下考察了一个相当类似的方程，即

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x^{p_i}) g_i(x^{q_i}) = 0 \qquad (x \in \mathbb{F}), \tag{$*$}$$

其中，n 是正整数，$\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ 是一个域，而对于所有 $i = 1, \ldots, n$，$f_i, g_i \colon \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 均为加性函数。除了方程 (1) 和 $(*)$之外，还可以考虑方程

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x^{p_i}) g_i(x)^{q_i} = 0 \qquad (x \in \mathbb{F}), \tag{$\diamond$}$$

遗憾的是，即使满足假设 C(i)–C(iii)，方程 $(\diamond)$也不具备方程 (1) 和 $(*)$的类似结论。经过对称化，我们可以推导出其中涉及的加性函数线性相关。与此同时，对于方程 $(\diamond)$，任意加性函数都可能出现在解空间中。更确切地说，设 $f \colon \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 是任意加性函数，并假设复常数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 和 $\mu_1, \ldots, \mu_n$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{p_i} \mu_i^{q_i} = 0,$$

那么这些函数

$$f_i(x) = \lambda_i f(x) \qquad \text{and} \qquad g_i(x) = \mu_i f(x) \qquad (x \in \mathbb{F})$$

满足方程 $(\diamond)$。

显然，这些方程的结构以及设置都相当相似。这主要是因为这些问题都是一个更一般问题的特殊情形。更具体地说，本文提出问题的方式、所采用的解法，以及 [1, 2, 3, 6, 7, 5] 中先前工作的解法，都可以视为解决以下一般问题的初步步骤。设 n 为一个正整数，P 为给定的多元复多项式，Q_1, ……, Q_n: $\mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 为多项式。若加性函数 $f_1, \ldots\ldots, f_n$: $\mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 满足方程，那么关于它们可以得出什么结论?

$$P(f_1(Q_1(x)), \ldots, f_n(Q_n(x))) = 0 \tag{$\bullet$}$$

对所有 $x \in \mathbb{F}$。关于方程 $(\bullet)$，显然有必要首先明确，在什么附加条件下，我们才能对其中涉及的未知函数（显然不止加性）作出更多论述。此外，该方程最棘手的难点之一是它只包含一个自变量（这通常提供的信息很少），但未知函数的数量可能很多。然而，加性使我们有机会增加自变量的数量。通常通过证明对称化引理来实现这一点。这些

通常是通过证明对称化引理来完成的。之后，我们通常旨在证明所涉及的加性函数与乘法结构也有“良好的联系”。更具体地说，我们的目标是证明这些加性函数是乘法群 $\mathbb{F}^\times$ 上的可分解函数。这是第一个明确之处（至少在证明层面上）：方程 $(*)$ 和 (1) 不能用相同的方法处理。请注意，与方程 $(*)$ 相比，在方程 (1) 中，参数所起的作用并不相同。从对比 [5] 的方法与本文的方法可以清楚看出，这一事实（参数的作用）既有优点，也有缺点。

参数的不对称性使引理 6 的结论能够在更一般的条件下成立（在证明中，只需用到参数 $p_1, \ldots, p_n$ 彼此不同这一点）。与此同时，对于方程 $(*)$，可以一步验证函数 $f_1, \ldots, f_n$ 和 $g_1, \ldots, g_n$ 是 $\mathbb{F}^\times$ 上的可分解函数。对于方程 (1)，我们首先只能证明函数 $f_1, \ldots, f_n$ 是可分解函数（参见引理 6）。基于此，最终也可以推出函数 $g_1, \ldots, g_n$ 的可分解性，参见定理 5。这一点以及后续结果表明，对于方程 (1)，有必要开发新的求解方法。

2 问题的约化

本部分从一些初等但基本的观察开始。我们的目标是说明，在任何情况下，原问题都可以化为一个更简单的方程。这里我们沿用专著 [12]。尽管引理1和引理5的证明与 [5], 中的引理4和引理6的证明类似，为求完整起见，我们仍在本文末尾的附录中给出它们的证明。

定义2. 设 G、S 为交换半群（采用加法记号），$n \in \mathbb{N}$，并设 $A : G^n \to S$ 为一个函数。若 A 关于每个变量都是从 G 到 S 的同态，则称 A 为 n重加性函数。若 $n = 1$ 或 $n = 2$，则函数 A 分别简称为加性或双加性。

n重加性函数 $A : G^n \to S$ 的对角化或迹定义为

$$A^*(x) = A(x, \ldots, x) \qquad (x \in G).$$

作为定义的直接推论，每个 n重加性函数 $A : G^n \to S$ 都满足

$$A(x_1, \ldots, x_{i-1}, kx_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = kA(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \qquad (x_1, \ldots, x_n \in G)$$

对所有 $i = 1, \ldots, n$ 成立，其中 $k \in \mathbb{N}$ 是任意的。只要 G 和 S 是群，同一恒等式对任意 $k \in \mathbb{Z}$ 也成立；而当 G 和 S 是有理数域上的线性空间时，对 $k \in \mathbb{Q}$ 也成立。这立即推出，对于 A 的对角化，我们有

$$A^*(kx) = k^n A^*(x) \qquad (x \in G).$$

上述概念还可推广到 $n = 0$ 的情形：令 $G^0 = G$，并将从 G 到 S 的任意常函数称为零可加函数。

基于上述概念和结果，我们可以证明第一个引理。

引理 1（齐次化）。设 n 为正整数，$\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ 为一个域，$p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ 为固定的正整数。假设加性函数 $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n : \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 满足函数方程 (1)，即

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x^{p_i}) g_i(x)^{q_i} = 0$$

对每个 $x \in \mathbb{F}$均成立。若集合 $\{p_1, \ldots, p_n\}$ 有一个划分 $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$，且该划分具有如下性质

$$\text{if } p_\alpha, p_\beta \in \mathcal{P}_j \text{ for a certain index } j, \text{ then } p_\alpha + q_\alpha = p_\beta + q_\beta,$$

那么方程组

$$\sum_{p_\alpha \in \mathcal{P}_j} f_\alpha(x^{p_\alpha}) g_\alpha(x))^{q_\alpha} = 0 \qquad (x \in \mathbb{F}, j = 1, \ldots, k)$$

成立。

注1. 上述引理保证从头开始

$$p_i + q_i = N \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

可以作此假设。否则，经过上述齐次化后，我们得到一个函数方程组，其中这一条件已满足。例如，根据上述引理，若加性函数 $f_1, \ldots, f_5 \colon \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 和 $g_1, \ldots, g_5 \colon \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 满足方程

$$f_1(x^{16})g_1(x)^5 + f_2(x^{12})g_2(x)^9 + f_3(x^{11})g_3(x)^{10} + f_4(x^3)g_4(x)^7 + f_5(x^2)g_4(x)^8 = 0 \qquad (x \in \mathbb{F})$$

那么方程

$$f_1(x^{16})g_1(x)^5 + f_2(x^{12})g_2(x)^9 + f_3(x^{11})g_3(x)^{10} = 0 \qquad (x \in \mathbb{F})$$

and

$$f_4(x^3)g_4(x)^7 + f_5(x^2)g_4(x)^8 = 0 \qquad (x \in \mathbb{F})$$

也分别成立。

注2。乍一看，假设 $p_1, \ldots, p_n$ 互不相同似乎是合理且充分的。显然，如果参数 p_i 不必互不相同，那么我们无法对所涉及的加性函数的形式有任何特殊期待。为说明这一点，令 p 和 q 为正整数，$f \colon \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 为任意加性函数，λ 为满足 $1 + \lambda^q = 0$ 的复数，并在 $\mathbb{F}$ 上定义复值函数 f_1, g_1, f_2, g_2：

$$f_1(x) = f(x) \quad g_1(x) = f(x) \quad f_2(x) = f(x) \quad g_2(x) = \lambda \cdot f(x) \qquad (x \in \mathbb{F}).$$

直接计算可得

$$f_1(x^p)g_1(x)^q + f_2(x^p)g_2(x)^q = 0 \qquad (x \in \mathbb{F}).$$

然而请注意，对于某些 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$，$p_i = q_j$ 的情形是可以处理的，本文将在某些地方对此加以强调。另一方面，为避免贯穿全文的进一步困难，我们简单地假设 $p_1, \ldots p_n, q_1, \ldots, q_n$ 是互异正整数。

鉴于上述注记，从现在起采用以下假设。

C(i) 正整数 $p_1, \ldots, p_n$ 按严格递增的顺序排列，即 $p_1 < \cdots < p_n$;

C(ii) 对所有 $i = 1, \ldots, n$，都有 $p_i + q_i = N$;

复数域(iii) 对所有 i、$j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$，我们有 $p_i \neq q_j$。

注 3. 在 $\mathbb{F}^{\mathbb{C}}$ 上定义关系 $\sim$，如下：

$$f \sim g \text{ 当且仅当存在自同构 } \varphi\colon\ \mathbb{C}\to\mathbb{C} \text{ 使得 } \varphi\circ f = g \qquad .$$

显然，$\sim$ 是 $\mathbb{F}^{\mathbb{C}}$ 上的等价关系，它在 $\mathbb{F}^{\mathbb{C}}$上诱导出一个划分。

引理2（等价性）。设 n 为正整数，$\mathbb{F}\subset\mathbb{C}$ 为一个域，且 $p_1,\dots,p_n, q_1,\dots,q_n$ 为满足注2中条件 C(i)-C(iii) 的固定正整数。假设加性函数 $f_1,\dots,f_n, g_1,\dots,g_n\colon\ \mathbb{F}\to\mathbb{C}$ 满足函数方程 (1)，即

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x^{p_i})g(x)^{q_i} = 0$$

对所有 $x\in\mathbb{F}$均成立。那么对于任意自同构 $\varphi\colon\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$，函数 $\varphi\circ f_1,\dots,\varphi\circ f_n,\varphi\circ g_1,\dots,\varphi\circ g_n$也满足方程 (1)。

注记 4。我们总可以将讨论限制在所有涉及的函数都不恒为零的情形。否则，方程 (1) 中出现的项数可以减少。

关于多加性函数最重要的理论结果之一是所谓的极化公式，它简要地表明，在定义域和陪域满足某些条件时，每个 n-加性对称函数都由其对角化唯一确定。设 G 是一个交换半群，S 是一个交换群。差分算子 Δ 作用于函数 $f: G\to S$ 的方式由下式定义：

$$\Delta_y f(x) = f(x+y) - f(x) \qquad (x,y\in G).$$

注意，函数自变量中的加法是半群 G 的运算，而减法表示群 S 中运算的逆运算。多个差分算子的复合简记为

$$\Delta_{y_1\dots y_n} f = \Delta_{y_1}\Delta_{y_2}\dots\Delta_{y_n} f \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

定理 1（极化公式）。设 G 是一个交换半群，S 是一个交换群，$n\in\mathbb{N}$。若 $A: G^n\to S$ 是一个对称 n-加性函数，则对所有 $x, y_1,\dots,y_m\in G$，都有

$$\Delta_{y_1,\dots,y_m}A^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } m>n \\ n!A(y_1,\dots,y_m) & \text{if } m=n. \end{cases}$$

引理 3。设 $n\in\mathbb{N}$，并假设乘以 n! 在交换半群 G 中是满射，或在交换群 S 中是单射。那么，对于任意对称 n-加性函数 $A: G^n\to S$，若 $A^*\equiv 0$，则 A 也恒等于零。

定义 3. 设 G 和 S 为交换半群，若函数 $p: G\to S$ 可表示为从 G 到 S 的对称多加性函数的对角化之和，则称其为从 G 到 S 的广义多项式。换言之，当且仅当函数 $p: G\to S$ 具有如下表示形式时，p 才是广义多项式：

$$p = \sum_{k=0}^{n} A_n^*,$$

其中 n 为非负整数，并且对于每个 $k = 0, 1,\dots,n$，$A_k: G^k\to S$ 都是对称 k-加性函数。在这种情况下，我们也称 p 是次数至多为 n 的广义多项式。

设 n 为非负整数，形如以下形式的函数 $p_n: G\to S$

$$p_n = A_n^*,$$

其中 $A_n: G^n\to S$ 是所谓的次数为 n 的广义单项式。

在本小节中，假设 $(G,\cdot)$ 是一个交换群（采用乘法记号）。在引理 5 的证明过程中，
我们使用了来自 [5] 的以下引理。

引理 4. 设 k 和 n 为正整数，$\mathbb{F}\subset\mathbb{C}$ 为域，且 $m_1,\dots,m_n\colon \mathbb{F}\to\mathbb{C}$ 为次数为 k 的广义单项式。若

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x)=0$$

对所有 $x\in\mathbb{F}$ 都成立，则

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_1,\dots,x_k)=0$$

对所有 $x_1,\dots,x_k$ 均成立，其中对所有 $i=1,\dots,n$，映射 $M_i\colon \mathbb{F}^k\to\mathbb{C}$ 是唯一确定的对称 k-加性函数，使得

$$M_i(x,\dots,x)=m_i(x)\qquad (x\in\mathbb{F}).$$

引理 5（对称化）. 设 n 为正整数，$\mathbb{F}\subset\mathbb{C}$ 为域，且 $p_1,\dots,p_n, q_1,\dots,q_n$ 为满足条件 C(ii)的固定正整数。假设加性函数 $f_1,\dots,f_n, g_1,\dots,g_n\colon \mathbb{F}\to\mathbb{C}$ 满足函数方程 (1)，即

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x^{p_i})g(x)^{q_i}=0$$

对每个 $x\in\mathbb{F}$ 均成立。则

$$\frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(p_i)})\cdot g_i(x_{\sigma(p_i+1)})\cdots g_i(x_{\sigma(N)})=0$$

对所有 $x_1,\dots,x_N\in\mathbb{F}$ 均成立。

3 预备结果

可分解函数在下文中将发挥关键作用。这一概念由 E. Shulman 在 [11] 中提出。此外，我们还大量借鉴了 Laczkovich [9] 的工作。

定义 4. 设 G 是一个群，且 $n\in\mathbb{N}$，$n\geqslant 2$。若函数 $F\colon G^n\to\mathbb{C}$ 可以写成有限个乘积 $F_1\cdots F_k$ 的有限和，其中所有 F_i 都依赖于互不相交的变量集，则称其为可分解函数。

注记 5. 不失一般性，我们可以假设上述定义中的 $k=2$，也就是说，可分解函数是指那些可以写成如下形式的映射

$$F(x_1,\dots,x_n)=\sum_{E}\sum_{j} A_j^E B_j^E$$

其中 E 遍历 $\{1,\dots,n\}$ 的所有非空真子集；对每个 E 和 j，函数 A_j^E 仅依赖于满足 $i\in E$ 的变量 x_i，而 B_j^E 仅依赖于满足 $i\notin E$ 的变量 x_i。

下面的定理讨论了可分解函数与广义指数多项式之间的联系，参见 Laczkovich [9]。

定理 2. 设 G 是一个带单位元的交换拓扑半群。连续函数 $f : G \to \mathbb{C}$ 是广义指数多项式，当且仅当存在一个正整数 $n \geqslant 2$，使得映射

$$G^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1 + \cdots + x_n)$$

是可分解的。

现在我们证明函数 $f_1, \ldots, f_n$ 是可分解函数。结合方程 (1)，这将推出函数 $g_1, \ldots, g_n$ 也是可分解函数。之后，我们应用定理 2，它立即推出方程 (1) 的解是乘法群 $\mathbb{F}^\times$ 上的广义指数多项式。

引理 6. 设 n 为正整数，$\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ 为一个域，且 $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ 为满足条件 C(i)–C(iii) 的固定正整数。假设加性函数 $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n \colon \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 满足函数方程 (1)，即

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x^{p_i}) g_i(x)^{q_i} = 0$$

对每个 $x \in \mathbb{F}$ 都成立。因此，所有函数 $f_1, \ldots, f_n$ 都是群 $\mathbb{F}^\times$ 上的可分解函数。

证明。设 n 为正整数，$\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ 是一个域，$p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ 是满足条件 C(i)–C(iii)的固定正整数。假设加性函数 $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n \colon \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 对每个 $x \in \mathbb{F}$ 都满足函数方程 (1)。令

$$S = \{p_1, \ldots, p_n\}$$

于是，由条件 C(i)可知 $\max S = p_n$。根据引理 5，我们有

$$\frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_N} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p_i)}) \cdot g_i(x_{\sigma(p_i+1)}) \cdots g_i(x_{\sigma(N)}) = 0$$

对所有 $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{F}$，成立；或者经过适当重排，

$$\frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_N} f_n(x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p_n)}) \cdot g_n(x_{\sigma(p_n+1)}) \cdots g_n(x_{\sigma(N)})$$

$$= -\frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_N} \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p_i)}) \cdot g_i(x_{\sigma(p_i+1)}) \cdots g_i(x_{\sigma(N)}) \qquad \left(x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{F}^\times\right).$$

现在令

$$x_{p_n+1} = \cdots = x_N = 1,$$

那么，上述恒等式表明 $g_n(1)^{q_1} \cdot f_n$ 是可分解的。若 $g_n(1)$ 为零，而 g_n 并非恒等于零，则存在一个 $\in \mathbb{F}^\times$ 使得 $g_n(a) \neq 0$。在这种情况下，上述代换应修改为

$$x_{p_n+1} = a,\ x_{p_n+2} = \cdots = x_N = 1,$$

从而得到相同的结论。

之后，考虑集合 $S \setminus \{p_n\}$，并将上述论证应用于该集合。通过这种逐步递降的论证，便可得出引理的结论。□

为了验证 $g_1, \ldots, g_n$ 也是可分解函数，我们需要引入指数多项式的概念。

定义 5. 多项式是由 G 上的加性函数生成的代数中的元素。也就是说，若 n 是正整数，$P: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ 是 n 个变量的（经典）复多项式，且 $a_k: G \to \mathbb{C}\ (k = 1, \ldots, n)$ 是加性函数，则函数

$$x \longmapsto P(a_1(x), \ldots, a_n(x))$$

是一个 多项式；反之，每个多项式也都可以表示成这种形式。
p

注记 6. 我们回顾一下，$\mathbb{N}^n$ 中的元素对任意正整数 n 称为（n 维）多重指标。同维多重指标之间的加法、乘法和不等式均按分量定义。此外，对于任意 n 维多重指标 α，以及任意 $x = (x_1, \ldots\ldots x_n) \in \mathbb{C}^n$，我们定义 x^α

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

其中我们始终采用约定 $0^0 = 0$。我们还使用记号 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$。利用这些记号，交换半群 G 上次数至多为 N 的任意多项式都具有如下形式

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant N} c_\alpha a(x)^\alpha \qquad (x \in G),$$

其中 $c_\alpha \in \mathbb{C}$，且 $a = (a_1, \ldots\ldots a_n): G \to \mathbb{C}^n$ 是一个加性函数。此外，p 的次数为 k 的齐次项为

$$\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha a(x)^\alpha.$$

引理 7（ [12]中的引理 2.7）。设 G 为交换群，n 为正整数，并设

$$a = (a_1, \ldots, a_n),$$

其中，$a_1, \ldots, a_n$ 是定义在 G 上、取复数值且线性无关的加性函数。对于不同的多重指标，单项式$\{a^\alpha\}$ 线性无关。

定义 6. 若函数 $m: G \to \mathbb{C}$ 满足 s

$$m(xy) = m(x)m(y) \qquad (x, y \in G).$$

此外，所谓（广义）指数多项式，是指形如 $p \cdot m$ 的函数的线性组合，其中 p 是（广义）多项式，m 是指数函数。

下面的引理表明，广义指数多项式函数线性无关。尽管该结论可以表述得更一般（见 [12]），但我们将其用于当前情形，即这些函数取复数值。

引理 8（ [12] 的引理 4.3）。设 G 是交换群，n 是正整数，$m_1, \ldots, m_n: G \to \mathbb{C}\ (i = 1, \ldots, n)$ 是互异的非零指数函数，$p_1, \ldots, p_n: G \to \mathbb{K}\ (i = 1, \ldots, n)$ 是广义多项式。若 $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot m_i$ 恒等于零，则对所有 $i = 1, \ldots, n$，广义多项式 p_i 恒等于零。

然而，我们需要关于广义指数多项式的多项式表达式的类比陈述，该陈述已在 [6] 中得到证明。

定理 3. 设 $\mathbb{K}$ 是特征为 0 的域，且 k、l、N 为正整数，满足 k、l $\leqslant$ N。设 $m_1, \ldots, m_k$: $\mathbb{K}^\times \to \mathbb{C}$ 是在 $\mathbb{K}$ 上加性的互异指数函数；设 $a_1, \ldots, a_l$: $\mathbb{K}^\times \to \mathbb{C}$ 是在 $\mathbb{C}$ 上线性无关的加性函数；并且对所有 $|s| \leqslant N$，设 P_s: $\mathbb{C}^l \to \mathbb{C}$ 为 l 个变量的经典复多项式。如果

$$\sum_{|s|\leqslant N} P_s(a_1, \ldots, a_l) m_1^{s_1} \cdots m_k^{s_k} = 0$$

于是对所有 $|s| \leqslant N$， 多项式 P_s 恒等为零。

容易看出，每个多项式，也就是形如以下形式的任意函数

$$x \longmapsto P(a_1(x), \ldots, a_n(x)),$$

其中 n 为正整数，$P: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ 是关于 n 个变量的一个（经典）复多项式，而 $a_k: G \to \mathbb{C}$ ($k = 1, \ldots, n$) 是加性函数，都是广义多项式。然而，反之一般并不成立。定义在交换群 G 上的复值广义多项式 p 是多项式，当且仅当其簇（由其平移张成的线性空间）是有限维的。

导子的概念可以通过几种方式加以扩展。我们将采用 Reich [10] 以及 Unger–Reich [13]所提出的高阶导子概念。关于高阶导子的刻画定理的更多结果，请参见例如 [1, 2, 3] 和 [6]。

定义 7。设 $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ 为一个域。恒等为零的映射是唯一的 0 阶导子。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，若存在 B: $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{C}$，使得 B 是 n – 1 阶的双导子（即，B 关于每个变量都是 n – 1 阶导子），且

$$f(xy) - xf(y) - f(x)y = B(x, y) \qquad (x, y \in \mathbb{F}).$$

环 R 中 n 阶导子的集合记作 $\mathscr{D}_n(\mathbb{F})$。

注 7. 由于 $\mathscr{D}_0(\mathbb{F}) = \{0\}$，唯一的零阶双导子是恒等为零的函数，因此 $f \in \mathscr{D}_1(\mathbb{F})$ 当且仅当

$$f(xy) = xf(y) + f(x)y \qquad (x, y \in \mathbb{F}),$$

也就是说，一阶导子的概念与导子的概念一致。另一方面，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，集合$\mathscr{D}_n(\mathbb{F})\backslash\mathscr{D}_{n-1}(\mathbb{F})$ 非空，因为 $d_1 \circ \cdots \circ d_n \in \mathscr{D}_n(\mathbb{F})$，但 $d_1 \circ \cdots \circ d_n \notin \mathscr{D}_{n-1}(R)$，其中 $d_1, ..., d_n \in \mathscr{D}_1(\mathbb{F})$是非恒为零的导子。

为 了今后的讨论，微分算子的概念也很重要，参见 [8] .

定义 8. 设 $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ 是一个域。若映射 $D: \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 是次数至多为 n 的微分算子，则称之为微分算子；这里 D 是有限多个形如 $d_1 \circ \cdots \circ d_k$的映射的线性组合，其系数取自 $\mathbb{F}$，其中 $d_1, ..., d_k$ 是定义在 $\mathbb{F}$ 上的导子，且 $k \leqslant n$。若 $k = 0$，则将 $d_1 \circ \cdots \circ d_k$ 解释为恒等函数。我们用 $\mathscr{O}_n(\mathbb{F})$ 表示定义在 $\mathbb{F}$上的次数至多为 n 的微分算子集合。若微分算子 D 的次数为 n，则称其次数为 n，即 $D \in \mathscr{O}_n(\mathbb{F})\backslash\mathscr{O}_{n-1}(\mathbb{F})$ （其中 $\mathscr{O}_{-1}(\mathbb{F}) = \varnothing$按定义）。

[8] 的主要结果是定理 1.1，在我们的设定下表述如下。

定理 4. 设 $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ 为一个域，且 n 为正整数。那么，对于每个函数 D: $\mathbb{F} \to \mathbb{C}$，以下条件等价。

(i) $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{F})$

(ii) $D \in \mathrm{cl}(\mathscr{O}_n(\mathbb{F}))$

（iii）D 在 $\mathbb{F}$ 上具有加性；作为从群 $\mathbb{F}^\times$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射，$D(1) = 0$ 和 D/j 是次数至多为 n 的广义多项式。这里，j 表示定义在 $\mathbb{F}$ 上的恒等映射。

注意，根据引理 6，若加性函数 $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n$ 满足方程 (1)，则函数 $f_1, \ldots, f_n$ 是乘法群 $\mathbb{F}^\times$ 上的可分解函数，但该引理对函数 $g_1, \ldots, g_n$并未给出任何结论。现在我们证明，函数 $g_1, \ldots, g_n$ 也是乘法群 $\mathbb{F}^\times$ 上的可分解函数。

定理 5. 设 n 为正整数，$\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$为域，且 $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ 为满足条件 C(i)–C(iii) 的固定正整数。假设加性函数 $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n$: $\mathbb{F} \to \mathbb{C}$满足函数方程 (1)，即

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x^{p_i}) g_i(x)^{q_i} = 0$$

对每个 $x \in \mathbb{F}$均成立。则所有函数 $f_1, \ldots, f_n$ 和 $g_1, \ldots, g_n$ 都是群 $\mathbb{F}^\times$ 上的可分解函数，即它们都是广义指数多项式。

证明。根据引理 6，函数 $f_1, \ldots, f_n$ 是可分解函数，因此是阿贝尔群 $\mathbb{F}^\times$ 上的广义指数多项式。同时，假设它们在 $\mathbb{F}$ 上是加性的。因此，这些函数是域 $\mathbb{F}$ 上的高阶导子。因此，$x \longmapsto f_i(x^{p_i})$ 是高阶导子乘积的线性组合。我们用 $\mathscr{D}$ 表示 $\mathbb{F}$ 上的所有导子。如果 g_i 不属于 $\mathscr{D}$，那么 g_i 的分解中就有一项不属于 $\mathscr{D}$。记该项为 a。于是，由引理 8 可得

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x^{p_i}) \cdot (c_i \cdot a(x))^{q_i} = 0 \qquad (x \in \mathbb{F}),$$

其中 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ 是一些常数，因为这些恰好是包含 a 的项。利用 q_i 互不相同这一事实以及引理 8，可知 a，从而 $g_1, \ldots, g_n$ 必须属于 $\mathscr{D}$。因此，不仅 $f_1, \ldots, f_n$，$g_1, \ldots, g_n$ 也都是可分解函数。□

注 8. 注意，引理 6 的结论在较宽松的条件下仍然成立。事实上，与所研究的方程相比，

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x^{p_i}) g_i(x^{q_i}) = 0 \qquad (x \in \mathbb{F})$$

在 [5]，中，方程 (1) 的参数所起的作用并不相同。在证明过程中，只需用到参数 $p_1, \ldots, p_n$ 彼此不同这一点。这一点很重要，因为这样便清楚地表明，方程

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x^{p_i}) x^{q_i} = 0 \tag{2}$$

是方程 (1) 的一个特例。我们指出，方程 (2) 在高阶导子的刻画中起着基础性作用，参见 [1, 2, 3, 6]。

4 主要结果

定理 6. 设 n 为正整数，$\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$为一个域，且 $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ 为满足条件 C(i)–C(iii) 的固定正整数，并进一步假设对所有 $i = 1, \ldots, n$，$q_i < N_2$。

设加性函数 $f_1,\ldots,f_n, g_1,\ldots,g_n$: $\mathbb{F}\to\mathbb{C}$ 对每个 $x\in\mathbb{F}$ 都满足函数方程 (1)。那么，存在正整数 l，存在指数函数 m_i: $\mathbb{F}^\times\to\mathbb{C}$ 以及次数至多为 l 的广义多项式 P_i, Q_i: $\mathbb{F}^\times\to\mathbb{C}$，使得

$$f_i(x)=P_i(x)m_i(x)\qquad and\qquad g_i(x)=Q_i(x)m_i(x)\qquad \left(x\in\mathbb{F}^\times\right) \tag{3}$$

对每个 $i=1,\ldots,n$。

证明。由引理 6 可知，方程 (1) 的解 $f_1,\ldots,f_n$ 和 $g_1,\ldots,g_n$ 是可分解函数。因此，它们是阿贝尔群 $\mathbb{F}^\times$ 上的广义指数多项式。相应地，存在一个正整数 l，使得对所有 $j=1,\ldots,l$ 以及 $i=1,\ldots,n$，都存在指数函数 m_j: $\mathbb{F}^\times\to\mathbb{C}$ 和次数至多为 l 的广义多项式 $P_{i,j}$、$Q_{i,j}$: $\mathbb{F}^\times\to\mathbb{C}$，满足

$$f_i(x)=\sum_{j=1}^{l}P_{i,j}(x)m_j(x)\qquad \text{and}\qquad g_i(x)=\sum_{j=1}^{l}Q_{i,j}(x)m_j(x)\qquad \left(x\in\mathbb{F}^\times\right). \tag{4}$$

我们可以假设 $\mathbb{F}$ 是有限生成的。若如此，则广义多项式 $P_{i,j}$、$Q_{i,j}$ 是次数至多为 l 的多项式。这一技术性假设使论证更简单，因为只要我们能证明，对于 $\mathbb{F}$ 的每个有限生成子域，都有 $f_i=P_im_i$ 且 $g_i=Q_im_i$，其中 P_i、Q_i 是次数至多为 l 的多项式，那么在 $\mathbb{F}$ 上就有 $f_i=P_im_i$ 且 $g_i=Q_im_i$，其中 P_i、Q_i 是次数至多为 l 的广义多项式。

反设存在某个 $i\in\{1,\ldots,n\}$，使得存在 $j_1\neq j_2$，从而 $P_{i,j_1}\neq 0$ 且 $P_{i,j_2}, 0$。我们可以假设 $j_1=1$，$j_2=2$。由于根据定理 3，所有 $P_i\cdot m_i$ 均代数无关，加性˜函数 f_i 和 $\tilde{}g_i$ 也满足方程 (1)，其中

$$\tilde{f}_i=P_{i,1}\cdot m_1+P_{i,2}\cdot m_2\quad \tilde{g}_i=Q_{i,1}\cdot m_1+Q_{i,2}\cdot m_2.$$

由于 $P_{i,1}$、$P_{i,2}$、$Q_{i,1}$、$Q_{i,2}$ 现在都是多项式，因此可以写成 $P(a_1(x)、\ldots、a_n(x))$的形式，其中 P 是 n 元经典复多项式，而 $a_1,\ldots a_n$ 是从 $\mathbb{F}^\times$ 到 $\mathbb{C}$ 的加性函数（通常称为对数函数）。同样，由于代数独立性，方程 (1) 对 $P(a_1(x)、\ldots、a_n(x))$的每个单项式项都成立。因此，不失一般性，我们可以假设存在某些 $\alpha_{i,1}$、$\alpha_{i,2}$、$\beta_{i,1}$、$\beta_{i,2}\in\mathbb{C}$，使得

$$\bar{f}_i=\alpha_{i,1}m_1+\alpha_{i,2}m_2\quad \bar{g}_i=\beta_{i,1}m_1+\beta_{i,2}m_2, \tag{5}$$

它们满足（1）。显然，对于多项式 $P_{i,1}$、$P_{i,2}$、$Q_{i,1}$、$Q_{i,2}$ 的每个单项式项，我们都有与上文相同类型的方程，只是乘上了一个固定单项式。此外，如果我们能证明在此情形下，对于每个 $i\in\{1,\ldots,n\}$，$\alpha_{i,1}=\beta_{i,1}=0$ 或 $\alpha_{i,2}=\beta_{i,2}=0$ 成立，那么就可以对每个单项式项以及不同的指标 $j_1\neq j_2$ 应用这一论证。因此，我们得到所述结论。所以，该结论等价于证明：若（5）是（1）的一个解，则对于每个 $i\in\{1,\ldots,n\}$，$\alpha_{i,1}=\beta_{i,1}=0$ 或 $\alpha_{i,2}=\beta_{i,2}=0$ 成立。因此，我们可以写成

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{f}_i(x^{p_i})\bar{g}_i^{q_i}(x)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i,1}m_1^{p_i}+\alpha_{i,2}m_2^{p_i})(x)(\beta_{i,1}m_1+\beta_{i,2}m_2)^{q_i}(x)=0. \tag{6}$$

首先，我们假设对于所有 $i\in\{1,\ldots,n\}$，$\beta_{i,1}, 0$。令 $a_{i,1}=\alpha_i(\beta_{i,1})^{q_i}$、$a_{i,2}=\alpha_i(\beta_{i,1})^{q_i}$ 以及 $b_i=\beta_i/\beta_{i1}^2$。于是，前一个方程可以重新表述为

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i,1}m_1^{p_i}+a_{i,2}m_2^{p_i})(m_1+b_im_2)^{q_i}=0.$$

在这种情况下，所有的 c $m_1^{N-l} m_2^l$ 的系数对于每个 l = 1, ..., N 都必须为零。换言之，我们有

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\binom{q_i}{l} a_{i,1} b_i^l + \binom{q_i}{N-l} a_{2,i} b_i^{N-l} \right) = 0, \tag{7}$$

其中 $\binom{q_i}{l}$ 和 $\binom{q_i}{N-l}$ 分别定义为：如果 $l > q_i$，分别为 $N - l > q_i$，则取 0。

注意，到目前为止我们尚未使用 $q_i < N/2$ 这一假设。由于 $q_i + p_i = N$ 且所有 p_i、q_i 均不相同，因此有 $p_i > q_i$，所以不妨设 $p_1 > \cdots > p_n > q_n > \cdots > q_1$。条件 $q_i < N/2$ 意味着，对于每个 $l \in \{1, \ldots, N\}$ 以及 $i \in \{1, \ldots, n\}$，$\binom{q_i}{l} a_{i,1} b_i^l + \binom{q_i}{N-l} a_{2,i} b^{N-l}$ i 的各项中至少有一项为零。此外，当 $l = q_n$ 时，$m_1^{N-q_n} m_2^{q_n}$ 的系数为 $\binom{q_n}{q_n} a_{n,1} \cdot b^{q_n} = 0$。类似地，$m_1^{q_n} m_2^{N-q_n}$ 的系数为 $\binom{q_n}{q_n} a_{n,2} \cdot b^{N-q_n} = 0$。这意味着 $a_{n,1} = a_{n,2} = 0$ 或 $b_n = 0$。在第一种情况下，我们得到 $\bar{f}_n = 0$，于是 n 可降为 n − 1。在第二种情况下，我们得到 $\bar{g}_n = \beta_n$，$1 m_1$，并且 $\bar{g}_n$ 对任何包含 m_2 的项都没有影响。在这两种情况下，我们都可以将 n 降至 n − 1，然后便可通过归纳论证从 n 进行到 1。

设对于 $1 \leqslant s < n$，有 f_i、0 以及 $\bar{g}_i = \beta_{i,1} m_1$、$\beta_{i,1}$，0 对所有 $s < i \leqslant n$ 均成立。现在我们分别考察 $m_1^{N-q_s} m_2^{q_s}$ 和 $m_1^{q_s} m_2^{N-q_s}$ 的系数，它们为

$$a_{s,1} \cdot b_s^{q_s} = 0 \quad a_{s,2} \cdot b_s^{N-q_s} = 0.$$

事实上，当 $i < s$ 时，$\binom{q_i}{q_s} = \binom{q_i}{N-q_s} = 0$；而当 $i > s$ 时，$m_1^{q_s} m_2^{N-q_s}$ 和 $m_1^{N-q_s} m_2^{q_s}$ 的系数为 0，因为 $q_i > q_s$ 且 $q_i > p_s$。因此，$a_{s,1} = a_{s,2} = 0$ 或 $b_s = 0$ 必有其一成立。于是 $f_s = 0$ 或 $\bar{g}_s = \beta_{s,1} m_1$。

如果并非所有 $\beta_{i,1}$, 0，那么对于满足 $\beta_{i',1} = 0$ 的那些 $i' \in \{1, \ldots, n\}$，有 $\bar{g}_{i'} = \beta_{i',2} m_2$。在其他情况下，同样的论证也成立。因此，我们得到每个 $\bar{g}_i (i \in \{1, \ldots, n\})$ 要么是 $\beta_{i,1} m_1$，要么是 $\beta_{i,2} m_2$。现在我们证明，如果 $\bar{g}_i = \beta_{i,1} m_1$（分别地，$\bar{g}_i = \beta_{i,2} m_2$），那么 $f_i = \alpha_{i,1} m_1$（分别地，$f_i = \alpha_{i,2} m_2$）。在这种情况下，存在 $\{1, \ldots, n\}$ 的不相交子集 I_1, I_2，使得 $I_1 \cup I_2 = \{1, \ldots, n\}$，并且方程 (6) 可写为

$$\sum_{i \in I_1} (\alpha_{i,1} m_1^{p_i} + \alpha_{i,2} m_2^{p_i})(x)(\beta_{i,1} m_1)^{q_i}(x) + \sum_{i \in I_2} (\alpha_{i,1} m_1^{p_i} + \alpha_{i,2} m_2^{p_i})(x)(\beta_{i,2} m_2)^{q_i}(x) = 0.$$

令 c_1 和 c_2 分别表示单项式 $m_1^{p_i} m_2^{q_i}$ 和 $m_1^{q_i} m_2^{p_i}$ 的系数。那么

$$c_1 = \begin{cases} 0 & \text{if } i \in I_1 \\ \alpha_{i,2} \beta_{i,1}^{q_i} & \text{if } i \in I_2 \end{cases} \qquad c_2 = \begin{cases} \alpha_{i,1} \beta_{i,2}^{q_i} & \text{if } i \in I_1 \\ 0 & \text{if } i \in I_2 \end{cases}.$$

消去含有 $\bar{g}_i \equiv 0$ 的项后可得：若 $\beta_{i,1} \neq 0$，则 $\alpha_{i,2} = 0$；类似地，若 $\beta_{i,2} \neq 0$，则 $\alpha_{i,1} = 0$。至此，定理的证明完成。□

正如我们所注意到的，若不假设对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 都有 $q_i \leqslant$ 正整数集/2，定理 6 的结论未必成立。下面我们给出一个例子，其中 f_i 和 g_i 都不是 $P \cdot m$ 的形式。

例 1. 令 $n = 2$ 且 $p_1 = 2, p_2 = 1$ 属于方程 (1)，即假设我们有

$$f_1(x^2) g_1^{N-2}(x) + f_2(x) g_2^{N-1}(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{F}).$$

进一步，令 m_1 和 m_2 为 $\mathbb{F}^\times$ 上不同的指数函数，并在 $\mathbb{F}^\times$ 上定义函数 f_1, f_2, g_1, g_2：

$$\begin{aligned} f_1(x) &= m_1(x) - m_2(x) \\ f_2(x) &= m_2(x) - m_1(x) \\ g_1(x) &= m_1(x) + m_2(x) \\ g_2(x) &= m_1(x) + m_2(x) \end{aligned} \qquad \left(x \in \mathbb{F}^\times\right).$$

Then

$$
\begin{aligned}
&f_1(x^2)g_1^{N-2}(x) + f_2(x)g_2^{N-1}(x) \\
&\qquad = \left(m_1^2(x) - m_2^2(x)\right)\cdot(m_1(x)+m_2(x))^{N-2} + (m_2(x)-m_1(x))\cdot(m_1(x)+m_2(x))^{N-1} \\
&= (m_1(x)-m_2(x))\cdot(m_1(x)+m_2(x))\cdot(m_1(x)+m_2(x))^{N-2} + (-1)\cdot(m_1(x)-m_2(x))\cdot(m_1(x)+m_2(x))^{N-1} = 0
\end{aligned}
$$

对所有 $\mathrm{x} \in \mathbb{F}^{\times}$ 均成立。由于假设所涉及的函数 $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2$ 也都是加性的，因此若φ_1、φ_2：$\mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 是同态，并考虑以下函数

$$
\begin{array}{rcl}
f_1(x) & = & \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \\
f_2(x) & = & \varphi_2(x) - \varphi_1(x) \\
g_1(x) & = & \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \\
g_2(x) & = & \varphi_1(x) + \varphi_2(x)
\end{array}
\qquad \left(x \in \mathbb{F}^{\times}\right),
$$

那么，对于所有 $\mathrm{x} \in \mathbb{F}$，上述方程都成立。这表明，一般而言，定理 6 中的条件 $\mathrm{q}_i < \mathrm{N}\ 2$ 不能省略。

备注 9. 必须特别强调，当我们讨论方程 (1) 的解时，我们是在加性函数中寻找解。如果省略加性这一条件，但解仍为次数非零的指数多项式，那么通过类似上述的论证，可以证明存在具有类似形式的解（即解中至少有两个不同的指数函数）。为此，令 $\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2$ 为不同的指数函数，并令 a 为乘法群 $\mathbb{F}^{\times}$ 上的加性函数，考虑函数

$$
\begin{array}{rcl}
f_1(x) & = & a(x)(m_1(x)-m_2(x)) \\
f_2(x) & = & -2a(x)(m_1(x)-m_2(x)) \\
g_1(x) & = & m_1(x)+m_2(x) \\
g_2(x) & = & m_1(x)+m_2(x)
\end{array}
\qquad \left(x \in \mathbb{F}^{\times}\right).
$$

经过简单计算可知，在这种情况下，我们有

$$
f_1(x^2)g_1^{N-2}(x) + f_2(x)g_2^{N-1}(x) = 0
$$

对于所有 $\mathrm{x} \in \mathbb{F}$ 都成立。然而，必须强调的是，只有当上述表示中出现的函数 a 和 $\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2$ 满足 $\mathrm{m}_1(\mathrm{x}) - \mathrm{m}_2(\mathrm{x}) = 0\ \mathrm{if}\ \mathrm{a}(\mathrm{x}) \neq 0$ 时，这些函数才是加性的，也就是说，此时前面的方程组变为平凡情形。由引理 10 还可以推知，上述函数一般并非加性函数。

作为与定理 6 相关的一个中间结果，我们给出以下例子，以说明定理 6 的假设并非最优，因为并非所有参数都应满足 $\mathrm{q}_i <$ 正整数集 2。作为例 1 的对应结果，我们证明，在以下情形中，解的形式为 $\mathrm{f}_i = \mathrm{P}_i\mathrm{m}$ 和 $\mathrm{g}_i = \mathrm{Q}_i\mathrm{m}$，其中 P_i、Q_i 是广义多项式，m 是指数函数。

例 2. 考虑方程

$$
f_1(x^k)g_1(x)^{N-k} + f_2(x^{N-l})g_2(x)^l = 0 \tag{8}
$$

对所有 $\mathrm{x} \in \mathbb{F}$，其中 $\mathrm{l} + 1 < \mathrm{k} \leqslant$ 正整数集 2。

如上所示，在这种情况下，存在可表示为以下形式的解

$$
f_i(x) = a_{i,1}m_1(x) + a_{i,2}m_2(x) \qquad g_i(x) = m_1(x) + b_i m_2(x) \qquad (x \in \mathbb{F}).
$$

现在证明，若 f_i 和 g_i 均不为零，则 $b_1 = b_2 = 0$。计算项 $m_1^s m_2^{N-s}$ 的系数，可以发现，当 $l < s < N - l$ 时，该系数仅来自第一项 $f_1(x^k)g_1(x^{N-k})$。若进一步有 $s < k$，则 $m_1^s m_2^{N-s}$ 的系数满足

$$\binom{N-k}{s} a_{1,2} b_1^{N-k-s} = 0.$$

同理，$m_1^{N-s} m_2^s$ 的系数给出

$$\binom{N-k}{s} a_{1,1} b_1^s = 0.$$

这些方程意味着 $b_1 = 0$ 或 $a_{1,1} = a_{1,2} = 0$。后者不可能，因为 f_1 不恒为零，因此 $b_1 = 0$。于是方程 (8) 化为

$$\big(a_{1,1}(m_1^k(x) + a_{1,2}m_2^k(x)\big)m_1^{n-k}(x) + \big(a_{2,1}m_1^{N-l}(x) + a_{2,2}m_2^{N-l}(x)\big)\big(m_1(x) + b_2 m_2(x)\big)^l = 0.$$

在这种情况下，$a_{2,2}b_2^N = 0$ 可由 m_2^N 的系数得到，而当 k, l 时，$a_{2,1}b_2^l = 0$ 由 $m_1^{N-l} m_2^l$ 的系数给出。与上文类似的论证表明 $b_2 = 0$。因此，我们可以假设 $g_1 = g_2 = m_1$。容易验证，在这种情况下，$f_1 = a_{1,1}m_1$ 且 $f_2 = a_{1,2}m_1$；如定理 6 的证明所示，这意味着 (8) 的每个解都具有 $f_i = P_i m$ 和 $g_i = Q_i m$ 的形式，其中 P_i、Q_i 是广义多项式，且 m 是定义在 $\mathbb{F}^\times$ 上的指数函数。

注意，若省略存在某个 s 使得 $l < s < k$ 的假设，则对于 $l < s < N - l$，系数 $m_1^s m_2^{N-s}$ 会在 $f_1(x^k)(g_1(x))^{N-k}$ 的展开式中出现不止一次，这会使整个计算复杂得多，而且不清楚我们能否得到类似的结果。

注 10. 尽管例 1 表明，方程 (1) 不能自动化归为 (3) 型的解，但根据定理 3，代数独立性保证：若一组解具有 (4) 的形式，那么只需在每个 f_i 和 g_i 中保留含有给定 m 的项，也能得到 (3) 型的解。这些约化后的函数同样是加性的，并满足 (1)。因此，从现在起，我们只讨论具有 $f_i = P_i m$ 和 $g_i = Q_i m$ 形式的解。根据注 3 中引入的等价关系 $\sim$，我们可以假设 $f_i(x) = P_i(x) \cdot x$ 且 $g_i(x) = Q_i(x) \cdot x$，其中 P_i、Q_i 是 $\mathbb{F}^\times$ 上次数至多为 K 的广义多项式。因此，根据定理 4，它们是在任意有限生成子域上的阶至多为 K 的导子。于是，我们可以将讨论范围限制为具有以下形式的函数

$$f_i(x) = P_i(x) \cdot x = D_i(x) \qquad \text{and} \qquad g_i(x) = Q_i(x) \cdot x = \widetilde{D}_i(x) \qquad \big(x \in \mathbb{F}^\times, i = 1, \ldots, n\big). \tag{9}$$

$\mathbb{F}$ 上的每个高阶导子都是 $\mathbb{F}$ 的任意有限生成子域上的微分算子（见定理 4 和 [8]）。因此，在这些域上，解都是微分算子。此外，如果 $\mathbb{F}$ 的任意有限生成子域上的每个解都是阶至多为 n 的微分算子，那么 $\mathbb{F}$ 上的每个解都是阶至多为 n 的导子。根据这一事实，从现在起，我们不再将高阶导子作为解来求，而只需将微分算子作为解来寻找。

微分算子的空间是一个线性空间。另一方面，确定一个有用的基并非易事。下面的引理给出了这样一个基。其证明基于广义矩序列和（多元）贝尔多项式的概念。更多细节请参见 [5, 第 3.4]小节。

引理 9. 设 $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ 为一个域，r 为正整数，且 $d_1, \ldots, d_r$：$\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ 为线性无关的导子。对于所有多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}^r$、$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ 定义函数 $d^\alpha(x)$：$\mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 为

$$d^\alpha(x) = d_1^{\alpha_1} \circ \cdots \circ d_r^{\alpha_r}(x = \underbrace{d_1 \circ \cdots \circ d_1}_{\alpha_1 \text{ times}} \circ \cdots \circ \underbrace{d_r \circ \cdots \circ d_r}_{\alpha_r \text{ times}}(x) \qquad \big(x \in \mathbb{F}^\times\big)。$$

那么 $(d^\alpha(x))_{\alpha \in \mathbb{N}^r}$ 构成了由 $d_1, \ldots, d_r$ 在 $\mathbb{F}$中构造的微分算子的基。

对于多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$，我们记作 $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_k$。

推论1. 由定理 3 可知，对于所有 $\alpha \in \cup_{r\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^r$，$\mathrm{d}^\alpha$ 的元素都是代数无关的。令 $\mathrm{d}_1, \ldots \mathrm{d}_r$ 为引理 9 中的导子，并令 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \cup_{r\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^r$。那么，方程 (1) 可以写成以下形式

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x^{p_i})(g_i(x))^{q_i} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{|\alpha|<k_i} d^\alpha(x^{p_i}) \Big) \Big(\sum_{|\beta|<l_i} d^\beta(x) \Big)^{q_i} = 0 \qquad (x \in \mathbb{F}) .$$

现在我们固定一个 $\alpha \in \mathbb{N}^r$，使得 $|\alpha|$ 在 f_i 中取最大值，并且 $\beta \in \mathbb{N}^t$ 在那些 g_i 中取最大值，其中 d^α 是 f_i 的一个加项。于是，由于代数独立性，我们可以只考虑满足 $\alpha'_k \leqslant \alpha_k (\mathrm{k} = 1, \ldots, \mathrm{r})$ 和 $\beta'_j \leqslant \beta_j (\mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{t})$ 的那些 $\alpha' \in \mathbb{N}^r$ 和 $\beta' \in \mathbb{N}^t$。我们分别将它们记为 $\alpha' \leqslant \alpha$ 和 $\beta' \leqslant \beta$。因此

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x^{p_i})(g_i(x))^{q_i} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k\leqslant|\alpha|} \hat{d}^k(x^{p_i}) \Big) \Big(\sum_{l\leqslant|\beta|} \hat{d}^l(x) \Big)^{q_i} = 0 \qquad (x \in \mathbb{F}) ,$$

其中 $\hat{\mathrm{d}}$ 是一个任意导子（一阶）。换句话说，只要 $\alpha' < \alpha$ 和 $\beta' < \beta$，我们就可以在 $\mathrm{d}^{\alpha'}$ 中分别用 $\hat{\mathrm{d}}$ 替换 $\mathrm{d}_1, \ldots, \mathrm{d}_r$ 和 $\mathrm{d}^{\beta'}$。

接下来，我们旨在理解形如 $\mathrm{d} \underbrace{\circ \cdots \circ}_{k 次} (\mathrm{d}\,\mathrm{x})$ 的导子的复合运算的算术，其中 d 是一个（一阶）导子，$\mathrm{k} \in \mathbb{N}$，因为它们是微分算子的基本构件。引理 9 与 [4, 命题 1], 共同推出以下结论。

命题 1. 设 $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ 为一个域，且 $\mathrm{d} : \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 为一个导子。对于所有正整数 k，我们在 $\mathbb{F}$ 上定义函数 d^k 如下：

$$d^k(x) = \underbrace{d \circ \cdots \circ d}_{k \text{ times}}(x) \qquad (x \in \mathbb{F}) .$$

那么，对于所有正整数 p，有

$$d^k(x^p) = \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_p\geqslant 0 \\ l_1+\cdots+l_p=k}} \binom{k}{l_1, \ldots, l_p} \cdot d^{l_1}(x) \cdots d^{l_p}(x) \qquad (x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{F}) ,$$

其中采用约定 $\mathrm{d}^0 = \mathrm{id}$ 和 $\binom{\mathrm{k}}{\mathrm{l}_1, \ldots, \mathrm{l}_p} = \mathrm{k}!\,\mathrm{l}_1! \cdots \mathrm{l}_p!$。

重新排列上一个表达式，可得如下结果：

$$d^k(x^p) = \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_s=p'<p \\ j_1+2j_2+\cdots+sj_s=k}} \binom{k}{\underbrace{1,\ldots,1}_{j_1}, \ldots, \underbrace{s,\ldots,s}_{j_s}} \cdot \prod_{t=1}^{s} \frac{1}{(j_t!)} \cdot \binom{p}{\underbrace{1,\ldots,1}_{p'}} \cdot (d(x))^{j_1} \cdots (d^s(x))^{j_s} \cdot x^{p-p'}, \qquad (x \in \mathbb{F})$$

这里，$\mathrm{j}_1, \ldots, \mathrm{j}_s$ 表示给定的 $\mathrm{d}^k(\mathrm{x}^p$ 的某个复合中 $\mathrm{d}(\mathrm{x}), \ldots, \mathrm{d}^s(\mathrm{x})$ 的个数).

定理 7. 设 n 为正整数，$\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ 为域，且 $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n, \mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_n$ 为满足条件 C(i)–C(iii)的固定正整数。假设加性函数 $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_n, \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_n$: $\mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 定义为

$$f_i(x) = D_i(x) \qquad and \qquad g_i(x) = \widetilde{D}_i(x) \qquad \left(x \in \mathbb{F}^\times\right) \tag{10}$$

对每个 $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$，均满足 $\mathbb{F}$ 上的函数方程 (1)，其中对所有指标 $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$，映射 $\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_i$ 均为 $\mathbb{F}$ 上的高阶导子。则以下两种情况之一成立：

(A) 存在 $i \in \{1, \dots, n\}$，使得 $g_i(x) = c_i \cdot x$，且 f_i 包含一个阶为 $\tilde{K}$ 的导子作为加项，其中 K 是每个 $D_i, \tilde{D}_i$ 中的最高阶。

(B) 对所有 $i \in \{1, \dots, n\}$，f_i 和 g_i 的阶至多为 1，并且存在 $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}, i_1 \neq i_2$，使得 $q_{i_2} = q_{i_1} + 1$ $(p_{i_2} = p_{i_1} - 1)$，且 $f_{i_1}, g_{i_1}, f_{i_2}, g_{i_2}$ 具有如下形式

$$\begin{aligned} f_{i_1} &= \lambda_{i_1,1} d(x) + \lambda_{i_1,0} x, \;\; g_{i_1}(x) = \widetilde{\lambda}_{i_1,1} d(x) + \widetilde{\lambda}_{i_1,0} x, \\ f_{i_2}(x) &= \lambda_{i_2,0} x, \;\; g_{i_2}(x) = \widetilde{\lambda}_{i_2,1} d(x) + \widetilde{\lambda}_{i_2,0} x, \end{aligned} \tag{11}$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$其中 $\lambda_{i_1,1}, \lambda_{i_1,1}, \lambda_{i_2,0}, \lambda_{i_2,1}$ 是满足以下条件的非零复数

$$p_{i_1} \cdot \lambda_{i_1,1} \cdot (\widetilde{\lambda}_{i_1,1})^{q_{i_1}} + \lambda_{i_2,0} \cdot (\widetilde{\lambda}_{i_2,1})^{q_1+1} = 0. \tag{12}$$

证明。将形式 (9) 代入方程 (1)，得到

$$0 = \sum_{i=1}^{n} f_i(x^{p_i}) g_i^{q_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x^{p_i}) x^{p_i} \cdot Q_i^{q_i}(x) x^{q_i} = \sum_{i=1}^{n} D_i(x^{p_i})(x)(\widetilde{D}_i(x))^{q_i} \qquad \left(x \in \mathbb{F}^{\times}\right).$$

为简便起见，从现在起假设 $\mathbb{F}$ 是有限生成的。于是，相应的函数可表示为

$$f_i(x) = D_i(x) = \sum_{|\alpha| < k_i} d^{\alpha}(x) \qquad \text{and} \qquad g_i(x) = \widetilde{D}_i(x) = \sum_{|\beta| < l_i} d^{\beta}(x) \qquad \left(x \in \mathbb{F}^{\times}\right),$$

其中 α 和 β 是变化的多重指标，k_i 和 l_i 是分别依赖于 f_i 和 g_i 的某些自然数。根据推论1，在每个 d^{α} 和 d^{β} 的复合中，我们只需取导子 d，这样相应的 f_i 和 g_i 仍满足 (9)。这些函数可表示为

$$f_i(x) = D_i(x) = \sum_{j=0}^{k_i} \lambda_{i,j} d^j(x) \qquad \text{and} \qquad g_i(x) = \widetilde{D}_i(x) = \sum_{j=0}^{l_i} \widetilde{\lambda}_{i,j} d^j(x) \qquad \left(x \in \mathbb{F}^{\times}\right)$$

$\tilde{}$配以适当的导子 $d\colon \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 和复常数 $\lambda_{i,j} (i = 1, \dots, n, j = 0, \dots, k_i)$ $\lambda_{i,j} (i = 1, \dots, n, j = 0, \dots, l_i)$，其中 k_i 和 l_i 分别表示 $\tilde{f}_i$ 和 g_i 中出现的这些导子的最高阶项。这意味着，对于所有 $i = 1, \dots, n$，λ_{i,k_i}、λ_{i,l_i} 均非零。

将这些表示代入 (1)，特别可得

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k_i} \lambda_{i,j} d^j(x^{p_i}) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{l_i} \widetilde{\lambda}_{i,j} d^j(x) \right)^{q_i} = 0 \qquad \left(x \in \mathbb{F}^{\times}\right).$$

引入以下量

$$S(p_i, k_i - 1) = \sum_{j=0}^{k_i - 1} \lambda_{i,j} d^j(x^{p_i}) \qquad \text{and} \qquad T(q_i, l_i - 1) = \left(\sum_{j=0}^{l_i} \widetilde{\lambda}_{i,j} d^j(x) \right)^{q_i} - (\widetilde{\lambda}_{i,l_i} d^{l_i}(x))^{q_i} \qquad \left(x \in \mathbb{F}^{\times}\right).$$

将上述和拆分成更小的和，可得

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k_i} \lambda_{i,j} d^j(x^{p_i}) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{l_i} \widetilde{\lambda}_{i,j} d^j(x) \right)^{q_i} \\ &\qquad = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_{i,k_i} d^{k_i}(x^{p_i}) + S(p_i, k_i - 1) \right) \cdot \left((\lambda_{i,l_i} d^{l_i}(x))^{q_i} + T(q_i, l_i - 1) \right) \qquad \left(x \in \mathbb{F}^{\times}\right). \end{aligned}$$

令 $K = \max_i \{k_i + l_i \cdot q_i\}$，为简便起见，设该 K 对指标 $i \in \{1、\ldots\ldots、m\}$ 实现，其中某个 $m \leqslant n$。假设 k_1 为最大值。现在设 $l_1 \neq 0$。否则我们立即得到结论：f_1 的阶为最大值，且 $g_1 = c_1 \cdot x$。

现在，我们研究展开式中 $d^{k_1}(x)(d^{l_1}(x))^{q_1}$ 的系数。由于 K 是极大的，这一项只能来自前一个表达式中各首项的乘积，即来自

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{i,k_i} (\widetilde{\lambda}_{i,l_i})^{q_i} d^{k_i}(x^{p_i}) (d^{l_i}(x))^{q_i}. \tag{13}$$

由命题 1 可得

$$d^{k_i}(x^{p_i}) = \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_s=p'<p_i \\ j_1+2j_2+\cdots+sj_s=k_i}} \left(\underbrace{1,\ldots,1}_{j_1}, \ldots, \underbrace{s,\ldots,s}_{j_s} \right)^{k_i} \cdot \prod_{t=1}^{s} \frac{1}{(j_t!)} \cdot \left(\underbrace{1,\ldots,1}_{p'} \right)^{p_i} \cdot (d(x))^{j_1} \cdots (d^s(x))^{j_s} \cdot x^{p_i - p'}$$

$$= \begin{cases} \left(p_i \cdot d^{k_i}(x) \cdot x^{p_i - 1} + R(p_i, k_i) \right), & \text{if } k_i \geqslant 1 \\ x^{p_i}, & \text{if } k_i = 0 \end{cases} \qquad (x \in G, i = 1, \ldots, n),$$

其中每个 $R(p_i, k_i)$ 中的项都包含至少两个阶小于 k 的导子的乘积 $_i$.

$d^{k_1}(x)(d^{l_1}(x))^{q_1}$ 这一项必然出现在 $d^{k_1}(x^{p_i})(d^{l_1}(x))^{q_1}$ 的展开式中。由于它必须在求和中消失，我们应考察如何从某个 $i \in \{2, \ldots, m\}$ 对应的 $d^{k_i}(x^{p_i})(d^{l_i}(x))^{q_i}$ 的展开式中得到形如 $d^{k_1}(x)(d^{l_1}(x))^{q_1}$ 的项。

我们需要区分若干种情形及其子情形。

情形 1。$d^{k_1}(x)$ stems 源自 $d^{k_i}(x^{p_i})$ 的展开式。因此，根据 k_1，的极大性，我们得到 $k_i = k_1$。由于 $k_1 + l_1 q_1 = k_i + l_i q_i$ 且 q_i，q_1，我们有 $l_1 \neq l_i$，因此无法从 $(d^{l_i}(x))^{q_i}$ 得到 $(d^{l_1}(x))^{q_1}$，这就产生了矛盾。

情形 2。$d^{k_1}(x)$ stems 源自 $(d^{l_i}(x))^{q_i}$。于是 $k_1 = l_i$，并且我们有几个子情形。

情形 2.1。如果 $q_i > 1$，那么 $l_1 = l_i$，且 $d^{k_1}(x)(d^{l_1}(x))^{q_1}$ 可以改写为 $d^{k_1}(x)(d^{k_1}(x))^{q_1}$。类似地，$d^{k_i}(x^{p_i})(d^{l_i}(x))^{q_i}$ 可以改写为 $d^{k_i}(x^{p_i})(d^{k_1}(x))^{q_i}$。

情形 2.1.1。如果 $k_1 = k_i$，那么我们可以像情形 1 中那样得到矛盾。

情形 2.1.2. 如果 $k_1 \neq k_i$，即 $k_1 > k_i$，那么 $d^{k_1}(x)$ 只能来源于 $(d^{k_1}(x))^{q_i}$。由于 $q_i > 1$，可得 $l_1 = k_1$,，这意味着 $k_i = 0$。因此，$d^{k_1}(x)(d^{k_1}(x))^{q_1}$ 必须与 $(d^{k_1}(x))^{q_i}$ 相同。于是 $q_i = q_1 + 1$，从而 $p_1 = p_i + 1 > 2$。

情形 2.1.2.1. $k_1 > 1$。由于 $p_1 > 2$，$d^{k_1}(x^{p_1})(d^{k_1}(x))^{q_1}$ 的展开式包含一项，其形式为 $d(x)d^{k_1-1}(x)(d^{k_1}(x))^{q_1}$。对于任意 $j \in \{2, \ldots, m\}$，这项都不可能出现在 $d^{k_j}(x^{p_j})(d^{l_j}(x))^{q_j}$ 的展开式中。事实上，若 $k_1 = k_j$，且 $d(x)d^{k_1-1}(x)$ 来源于 $d^{k_j}(x^{p_j})$，则会像情形 1 中那样导出矛盾。若 $k_1 = k_j$，且 $d(x)d^{k_1-1}(x)$ 来源于 $(d^{l_j}(x))^{q_j}$，则 $k_1 = 2$、$l_j = 1$、$q_j = 2$，并且 $(d^{k_1}(x))^{q_1}$ 来源于 $d^{k_j}(x^{p_j})$ 的展开式。因此，根据 k_1, 的极大性，可得 $k_j = k_1$，且 $q_1 = 1$。另一方面，若 $q_1 = 1$，那么 $q_i = 2$，且 q_j，因此 $q_i = q_j$；但是 $k_i = 0$，且 $k_j = k_1$,，这就产生了矛盾。

情形 2.1.2.2. $k_1 = 1$。由于 $k_i < k_1$,，因此 $k_i = 0$。在这种情况下，$k_1 = l_1 = l_i = 1$，且 $k_i = 0$。对于任意 $j \in \{2, \ldots m\} \backslash \{i\}$，不存在其他 $k_j = 1$，因为 l_1 是极大的；若 $l_1 = 0$，则 k_1 不是极大的。若 $k_j = 0$，则对应项为 $x^{p_j}(d^{l_j})^{q_j}$，其中 $l_j \cdot q_j = q_1 + 1 = K$ 可能成立，但根据 k_1 和 l_1 的极大性，项 $(d^{l_j})^{q_j}$ 无法消去。因此，对于

任意 $j \in \{2, \ldots m\} \backslash \{i\}$，不存在其他 $k =$。因此，$i = m = 2$，而项 $d(x)(d(x))^{q_1}$ 只能通过与 k_1 和 k_2对应的项消去。也就是说，

$$f_1 = \lambda_{1,1} \cdot d(x) + \lambda_{1,0} x, \;\; g_1(x) = \widetilde{\lambda}_{1,1} \cdot d(x) + \widetilde{\lambda}_{1,0} x$$

$$f_2(x) = \lambda_{2,0} x, \;\; g_2(x) = \widetilde{\lambda}_{2,1} \cdot d(x) + \widetilde{\lambda}_{2,0} x$$

且 $q_2 = q_1 + 1$，因此

$$\lambda_{1,1}(\widetilde{\lambda}_{1,1})^{q_1} p_1 \cdot x^{p_1 - 1} d(x)^{q_1 + 1} + \lambda_{2,0}(\widetilde{\lambda}_{2,1})^{q_1 + 1} \cdot x^{p_1 - 1} d(x)^{q_1 + 1} = 0,$$

因此 $p_1 \lambda_{1,\ 1}(\widetilde{\lambda}_{1,\ 2})^{q_1} + \lambda_{2,\ 0}(\widetilde{\lambda}_{2,\ 1})^{q_1 + 1} = 0$。针对 $K_j = \max(k_i + l_i q_i) \backslash \{K_1, \ldots\ldots, K_{j-1}\}$ 递归地重复整个论证，我们得到：要么存在一个次数至少为 2 的 f_i，此时存在一个最大次数为 K_j 的 f_i，使得 $g_i = c_i \cdot x$；要么每个 f_i 的次数都至多为 1，且相应的函数之间存在如上所述的强连接。

情形 2.2。如果 $q_i = 1$，那么 $d^{k_1}(x)$ 源自 $d^{l_i}(x)$，因此 $k_1 = l_i$ 且 $l_1 \cdot q_1 = k_i$。在这种情况下，$d^{k_1}(x)(d^{l_1}(x))^{q_1}$ 源自 $d^{k_1}(x^{p_1})(d^{l_1}(x))^{q_1}$ 的展开式，以及 $d^{k_i}(x^{p_i})(d^{l_i})^{q_i} = d^{l_1 q_1}(x^{N-1}) d^{k_1}(x)$的展开式。由于 $q_i = 1$，我们有 $q_1 > 1$ 且 $p_i = N - 1 > 1$；由于 p_i、q_i互不相同，此外，由于 k_1 是最大的，且 $l_1 \neq 0$ （否则我们会自动得到结论），因此 $k_1 \geqslant k_i \geqslant l_1 q_1 \geqslant 2$。

现在考虑项 $d^{l_1 q_1 - 1}(x) d(x) d^{k_1}(x)$，该项源自 $d^{k_i}(x^{p_i})(d^{l_i})^{q_i} = d^{l_1 q_1}(x^{N-1}) d^{k_1}(x)$，其中 $p_i = N - 1 > 1$。因此，必存在 $j \in \{1, \ldots, m\}$，且 j, i，使得 $d^{l_1 q_1 - 1}(x) d(x) d^{k_1}(x)$ 源自 $d^{k_j}(x^{p_j})(d^{l_j})^{q_j}$。由于 $d^{l_1 q_1 - 1}(x) d(x) d^{k_1}(x)$ 是三个项的乘积，且 $q j, 1$，因此由 $q_i = 1$ 可得 $q_j = 2$。我们有三种情形。

情形 2.2.1。$d(x) d^{k_1}(x) = (d^{l_j})^2$。则 $k_1 = 1$，这与 $k_1 \geqslant 2$ 这一事实矛盾。

情形 2.2.2。$d^{l_1 q_1 - 1}(x) d^{k_1}(x) = (d^{l_j})^2$。于是 $k_1 = l_1 q_1 - 1$，进而 $k_i = l_1 q_1 > k_1,$，这与 k_1 的极大性矛盾。

情形 2.2.3。$d(x) d^{l_1 q_1 - 1}(x) = (d^{l_j})^2$。于是 $l_1 q_1 = 2$，又因为 $q_1 \geqslant 2$ 和 $l_1 \geqslant 1$，我们得到 $l_1 = 1$ 和 $q_1 = 2$。这意味着 $q j = q_1$，因此 $j = 1$。于是，$d^{k_i}(x^{p_i})(d^{l_i})^{q_i} = d^2(x^{N-1}) d^{k_1}(x)$。现在我们取项 $d^2(x) d^{k_1}(x)$。显然，它源自前一个表达式的展开式，因此应存在 $j \in \{2, \ldots, m\}$，其中 j, i（且 $j, 1$），使得 $d^2(x) d^{k_1}(x)$ 源自项 $d^{k_j}(x^{p_j})(d^{l_j}(x))^{q_j}$。于是 $q j = 1$，这与 $q_i = 1$ 和 i, j 矛盾。

综上所述，要么有 $l_1 = 0$，这表明 f_1 的阶达到最大，且 $g_1(x) = c_1 \cdot x \;\; (x \in \mathbb{F})$，其中 c_1 是某个复数。否则，对于每个 $i = 1, \ldots, n$，函数 f_i 和 g_i 的次数至多为 1。此外，如果 f_{i_1} 和 g_{i_1} 具有如下形式

$$f_{i_1} = \lambda_{i_1,1} d(x) + \lambda_{i_1,0} x, \;\; g_{i_1}(x) = \widetilde{\lambda}_{i_1,1} d(x) + \widetilde{\lambda}_{i_1,0} x$$

那么存在某个 $i_2 \in \{1, \ldots, n\}$，使得

$$g_{i_1} = \lambda_{i_2,0} x, \;\; g_{i_2}(x) = \widetilde{\lambda}_{i_2,1} d(x) + \widetilde{\lambda}_{i_2,0} x$$

其中 and $q_{i_2} = q_{i_1}$ ~ ~+ 1 ($p_{i_2} = p_{i_1 - 1}$)，因此 $\lambda_{i_1,1}, \lambda_{i_1,1}, \lambda_{i_2,0}, \lambda_{i_2,1}$ 是非零复数，满足 g

$$p_{i_1} \cdot \lambda_{i_1,1} \cdot (\widetilde{\lambda}_{i_1,1})^{q_{i_1}} + \lambda_{i_2,0} \cdot (\widetilde{\lambda}_{i_2,1})^{q_1 + 1} = 0.$$

□

注 11。我们得到的结果比定理 7 中陈述的更多。也就是说，如果出现选项（A），那么 K 的最大阶大于或等于 $k_i + q_i \cdot l_i$，对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$均成立，其中 k_i 是 f_i 的最大阶，l_i 是 g_i的最大阶。因此，如果 $k_j + q_j \cdot l_j = K$，并且对于某个 $j \in \{1, \ldots, n\}$有 $k_j < K$，那么通常 k_i和 l_i远小于 K。另一方面，值得一提的是，我们的结果无法排除存在这样的 k_i, l_i。

推论 2。于　　在定理 7 的条件下，假设以下条件之一成立。

(A) 函数 $g_1, \ldots, g_n$ 作为高阶导子，具有相同的阶。

(B) 函数 $f_1, \ldots, f_n$ 作为高阶导子，具有相同的阶。

那么，对于所有 $i = 1, \ldots, n$，都存在一个复数 λ_i，使得

$$g_i(x) = \lambda_i x \qquad (x \in \mathbb{F})$$

于是方程 (1) 具有以下形式

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{N-i} f_i(x^i) x^{N-i} = 0,$$

其中某些 $\lambda_i \in \mathbb{C}$可以为 0。在这种情况下，如 *[3, 6]* 中所示，对于所有 $i = 1, \ldots, n$，均有 $f_i \in \mathscr{D}_{n-1}(\mathbb{F})$。

推论 3. 在定理 7 的条件下，设

$$f_i(x) = c_i \cdot g_i(x) \qquad (x \in \mathbb{F})$$

*hol*ds 对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 均成立，其中 $c_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, n$ 为某些非零常数。*n*

$$f_i(x) = \lambda_i x \qquad (x \in \mathbb{F}),$$

因此

$$g_i(x) = c_i \lambda_i x \qquad (x \in \mathbb{F})$$

n其中 λ_i 对所有 $i = 1, \ldots, n$，复常数还必须满足 $\sum c^{q_i}{}_i \lambda^{q_i+1}{}_i = 0$。 i=1

*Re*标记 12. 似乎前面提到的所有例子都导出如下方程

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{N-i} f_i(x^i) x^{N-i} = 0.$$

我们注意到，方程 (1) 的解类通常更广。

最简单的例子如下。设 $p_1, q_1, p_1 - 1, q_1 + 1$ 为互异正整数，且 $p_1 > 1$，$d : \mathbb{F} \to \mathbb{C}$为一个导子。定义函数 f_1, f_2, g_1, g_2，使得 $f_1 = g_1 = g_2 = d$，并且

$$f_2(x) = -p_1 x \qquad (x \in \mathbb{F}).$$

Then

$$\begin{aligned} f_1(x^{p_1})(g_1(x))^{q_1} + f_2(x^{p_1-1}) g_2(x^{q_1+1}) &= d(x^{p_1}) d(x)^{q_1} + (-p_1 x^{p_1-1}) d(x)^{q_1+1} \\ &= p_1 x^{p_1-1} d(x) d(x)^{q_1} + (-p_1 x^{p_1-1}) d(x)^{q_1+1} = 0 \end{aligned}$$

对所有 $x \in \mathbb{F}$。

上述推论和注记促成了以下猜想。

猜想 1. 设 n 为正整数，$\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$是一个域，且 $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ 是满足条件 C(i)–C(iii)的固定正整数。假设加性函数 $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n: \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 满足方程 (1)。那么每个函数都是次数至多为 $n-1$的广义指数多项式函数。特别是，如果

$$f_i(x) = D_i(x) \qquad and \qquad g_i(x) = \widetilde{D}_i(x) \qquad \left(x \in \mathbb{F}^\times\right) \tag{14}$$

~ ~对于某些导子 D_i、D_i（$i = 1, \ldots, n$），则 D_i、D_i的阶至多为 $n-1$.

尽管我们无法在完全一般的情形下验证该猜想，但可以处理 $q_i \geqslant N_2$的情形。我们注意到，该条件与定理 6 中的条件互为补充。

定理 8. 设 n 为正整数，$\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$为一个域，且 $p_1, \ldots, p_n$、$q_1, \ldots, q_n$ 为满足条件 C(i)–C(iii) 的固定正整数，并且 $q_i \geqslant N_2$。假设加性函数 $f_1, \ldots, f_n$、$g_1, \ldots, g_n$：$\mathbb{F} \to \mathbb{C}$满足函数方程 (1)。则每个函数 f_i（相应地，g_i）都是次数至多为 $n-1$的广义指数多项式。

证明。由引理 6，方程 (1) 的解 f_i、g_i 对所有 $i = 1, \ldots\ldots, n$ 都是可分解函数，即它们分别是如下形式的广义指数多项式函数：$\sum P_j m_j$ 和 $\sum Q_j m_j$。如注 10 所示，若对固定的 j，将方程限制在包含 m_j 的项上，就可以证明 P_j 的次数至多为 $n-1$；那么对于原来的解 f_i、g_i，该结论也普遍成立。根据等价关系 $\sim$，不妨设 $m_j(x) = x$。于是，由定理 4 可知，这些解可以看作导子 D_i 和 D_j，其阶分别与 P_j 和 Q_j 的次数相同。

现在可以应用定理 7。该定理意味着，要么存在某个具有最大阶的 $f_{i_0} = D_{i_0}$，且相应的 g_{i_0} 具有如下形式：$g_{i_0}(x) = c_{i_0} \cdot x$ $(x \in \mathbb{F})$；要么对于每个 $i = 1, \ldots\ldots, n$，f_i、g_i 的阶至多为 1。在后一种情况下，由于 $n-1 \geqslant 1$，结论即得。前一种情况的处理较为技术性。首先，我们只考虑 $\mathbb{F}$ 的有限生成子域，因为对这些子域所得的结果可以推出关于 $\mathbb{F}$ 的结论。因此，以下假设 $\mathbb{F}$ 是有限生成的。在这种情况下，导子都是微分算子。现在，如定理 7 的证明中那样，利用推论1，可假设每个微分算子都是给定导子 d 的函数，因此 f_i、g_i（$i = 1 \ldots\ldots, n$）可以表示为

$$f_i(x) = D_i(x) = \sum_{j=0}^{k_i} \lambda_{i,j} d^j(x) \qquad \text{and} \qquad g_i(x) = \widetilde{D}_i(x) = \sum_{j=0}^{l_i} \widetilde{\lambda}_{i,j} d^j(x) \qquad \left(x \in \mathbb{F}^\times\right)$$

以及方程 (1) 为

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k_i} \lambda_{i,j} d^j(x^{p_i}) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{l_i} \widetilde{\lambda}_{i,j} d^j(x) \right)^{q_i} = 0 \qquad \left(x \in \mathbb{F}^\times\right).$$

与定理 7 的证明中一样，齐次性论证得出

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{i,k_i} (\widetilde{\lambda}_{i,l_i})^{q_i} d^{k_i}(x^{p_i}) (d^{l_i}(x))^{q_i} = 0, \tag{15}$$

其中 $i = 1, \ldots, m$ 是满足 $K = k_i + l_i q_i$ 且 K 取最大可能值的那些指标。现在我们有 $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$，即 $k_{i_0} = K$ 且 $l_{i_0} = 0$。

我们必须证明 $K \leqslant n-1$，这立即推出所述结论。反设 $K \geqslant n$。在方程 (15) 的展开式中，x、d、$d^2, \ldots\ldots$、d^K 的所有单项式都必须消失。假设前 m'~ 个指标满足：对于所有 $i \in \{1, \ldots\ldots, m'\}$，均有 $k_i = K$、$l_i = 0$。这也意味着 $\lambda_{i,K} \neq 0$ 且 $\lambda_{i,0} = 0$。取单项式

$$d^{K-t}(d(x))^t x^{N-t-1} \qquad \text{for} \qquad t = 0, \ldots, n-1. \tag{16}$$

注意，$q_i \geqslant_{N2}$ 立即推出，对于所有 $i = 1, \ldots\ldots, n$，均有 $q_i > n$。因此，若 $l_i > 0$，即 $i > m'$，，那么当 $i > m'$ 时，(16) 中定义的项都不会出现在 $d^{k_i}(x^{p_i})(d^{l_i}(x))^{q_i}$ 的展开式中。因此，(16) 中的这些项只能来自 $d^K(x^{p_i})(x)^{q_i}$ 的展开式，其中 $i = 1 \ldots\ldots m'$。在这种情况下，对于任意 $t = 0, \ldots\ldots, m' - 1$，项 $d^{K-t}(d(x))^t$ 来自 $d^K(x^{p_i})$。根据命题 1，其系数为

$$\binom{K}{K-t}\binom{p_i}{\underbrace{1,\ldots,1,}_{p_i-t+1}}.$$

由于 $d^{K-t}(d(x))^t x^{N-t-1}$ 的系数必须为零，我们得到

$$\sum_{i=1}^{m'} \lambda_{i,K}(\widetilde{\lambda}_{i,0})^{q_i}\binom{K}{K-t}\cdot\binom{p_i}{\underbrace{1,\ldots,1}_{t+1}} = 0 \qquad (t = 0, \ldots, m'-1)$$

这可以写成以下矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \binom{p_1}{1} & \cdots & \binom{p_{m'}}{1} \\ \binom{p_1}{1,1} & \cdots & \binom{p_{m'}}{1,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{p_1}{\underbrace{1,\ldots,1}_{m'}} & \cdots & \binom{p_{m'}}{\underbrace{1,\ldots,1}_{m'}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{1,K}(\widetilde{\lambda}_{1,0})^{q_1} \\ \lambda_{2,K}(\widetilde{\lambda}_{2,0})^{q_2} \\ \vdots \\ \lambda_{m',K}(\widetilde{\lambda}_{m',0})^{q_{m'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

注意，前一个矩阵的每一行都不恒为 0。事实上，对于某个 $i' \in \{1, \ldots, m'\}$，存在 $p_{i'} \geqslant m'$，因为所有 $p_i (i = 1, \ldots, m')$ 都互不相同且为正整数。在这种情况下，容易验证前一个矩阵方程等价于

$$\begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_{m'} \\ p_1^2 & \cdots & p_{m'}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^{m'} & \cdots & p_{m'}^{m'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{1,K}(\widetilde{\lambda}_{1,0})^{q_1} \\ \lambda_{2,K}(\widetilde{\lambda}_{2,0})^{q_2} \\ \vdots \\ \lambda_{m',K}(\widetilde{\lambda}_{m',0})^{q_{m'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

该方程的矩阵是由 p_i 构成的范德蒙矩阵。由于 p_i 互不相同，该方程只有~平凡解。因此，对每个 $i \in \{1, \ldots, m'\}$，都有 $\lambda_{i,\ K}(\lambda_{i,\ 0})^{q_i} = 0$，这与 $\lambda_{i,\ K}, 0$ 和 $\sim$ $\sim\lambda_{i,\ 0}$，0 矛盾。这个矛盾表明，D_i 和 D_i 的最大阶 K 至多为 $n - 1$。这也完成了定理的证明。

□

方程 (1) 的特殊情形

现在我们考虑以下形式的方程

$$f_1(x^{p_1})g_1(x)^{q_1} + f_2(x^{p_2})g_2(x)^{q_2} = 0 \qquad (x \in \mathbb{F}), \tag{17}$$

其中，f_1, f_2, g_1, g_2: $\mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 表示未知的加性函数，参数 p_1, p_2, q_1, q_2 满足条件 C(i)–C(iii)，即 $p_1 < p_2, p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ 和 p_1, p_2, q_1, q_2 均为互不相同的正整数。即使在这种情况下——这可视为“最简单”的例子（因为它只包含两项）——所有解的描述也很复杂。首先，在定理 9 中，我们刻画了所有解，其中相应函数的形式为 $P(x)\cdot x$。其次，在引理 10 中，我们考虑加性

解（它们是乘法群上的指数多项式）在其表示中包含多个指数函数的情形。

在引理 6 中，我们已经证明，方程（17）的所有解都是形如 $\sum_i \mathrm{P}_i\mathrm{m}_i$ 的广义指数多项式函数，其中 P_i 是广义多项式，m_i 是 $\mathbb{F}^\times$ 上的指数函数。在例 1 中，我们说明了解可以是广义指数多项式之和；不过，在所有例子中，g_i 都是不同指数函数的线性组合。同时，我们可以只考虑这样的解：其中所有 f_i、g_i 都分别具有 $\mathrm{P}_i\mathrm{m}$ 和 $\mathrm{Q}_i\mathrm{m}$ 的形式，且 m 是给定的指数函数。利用等价关系 $\sim$（见引理2），我们可以假设解具有 $\mathrm{P}_i(\mathrm{x}) \cdot \mathrm{x}$ 的形式，也就是说，这些解是高阶导子或线性函数。请注意，这些解是一般情况下解的基本构件，因为根据指数多项式函数的代数独立性，无论如何，方程（17）必然存在这样的解。

定理 9. 假设 $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2\colon \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 是同时满足方程（17）的高阶导子，因此参数 $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2$ 满足条件 C(i)–C(iii)。那么，它们（作为高阶导子）的阶都至多为 1，且解为以下情形之一。

(A)

$$f_1(x) = \lambda_{1,1}d(x) + \lambda_{1,0}x, \;\; f_2(x) = \lambda_{2,0}x, \qquad (x \in \mathbb{F})$$
$$g_1(x) = \mu_{1,1}d(x) + \mu_{1,0}x, \;\; g_2(x) = \mu_{2,1}d(x) + \mu_{2,0}x, \qquad (x \in \mathbb{F})$$

*w*其中 $\lambda_{1,1}, \lambda_{2,0}, \mu_{1,1}, \mu_{2,1} \in \mathbb{C}$ 均非零，$\mathrm{q}_2 = \mathrm{q}_1 + 1$（即 $\mathrm{p}_2 = \mathrm{p}_1 + 1$）满足

$$p_1 \cdot \lambda_{1,1} \cdot (\mu_{1,0})^{q_1} + \lambda_{2,0} \cdot (\mu_{2,1})^{q_1+1} = 0.$$

等价地，存在一个函数 $\mathrm{h}(\mathrm{x}) = \mathrm{d}(\mathrm{x}) + \mathrm{ax}$，使得

$$f_1(x^{p_1}) = \lambda_{1,1}p_1h(x)x^{p_1-1}, \;\; g_1(x) = \mu_{1,1}h(x) \;\; and \; g_2(x) = \mu_{2,1}h(x).$$

(B)

$$f_1(x) = \lambda_{1,1}d(x) + \lambda_{1,0}x, \;\; f_2 = \lambda_{2,0}x \qquad (x \in \mathbb{F})$$
$$g_1(x) = \mu_{1,0}x, \;\; g_2(x) = \mu_{2,1}d(x) + \mu_{2,0}x \qquad (x \in \mathbb{F})$$

其中 $\lambda_{1,1}, \lambda_{2,0}, \mu_{1,0}, \mu_{2,1} \in \mathbb{C}$ 均非零，$\mathrm{q}_2 = 1$（即 $\mathrm{p}_2 = \mathrm{N} - 1$）满足

$$p_1 \cdot \lambda_{1,1} \cdot (\mu_{1,0})^{q_1} + \lambda_{2,0} \cdot \mu_{2,1} = 0.$$

Furthermore, $f_1(x^{p_1}) = c_1g_2(x)x^{p_1-1}$, $g_1(x) = c_2f_2(x)$, *where* $c_1 \cdot c_2 = -\lambda_{2,0}^{1-q_1}$.

(C)

$$f_1(x) = \lambda_{1,1}d(x) + \lambda_{1,0}x, \;\; f_2 = \lambda_{2,1}d(x) + \lambda_{2,0}x, \qquad (x \in \mathbb{F})$$
$$g_1(x) = \mu_{1,0}x, \;\; g_2(x) = \mu_{2,0}x, \qquad (x \in \mathbb{F})$$

其中 $\lambda_{i,j}$、$\mu_{i,0} \in \mathbb{C}$ 对所有 $\mathrm{i} \in \{1,2\}$、$\mathrm{j} \in \{0,1\}$ 均成立，并满足

$$p_1 \cdot \lambda_{1,1} \cdot (\mu_{1,0})^{q_1} + p_2 \cdot \lambda_{2,1} \cdot (\mu_{2,0})^{q_2} = 0.$$

$$\lambda_{1,0} \cdot (\mu_{1,0})^{q_1} + \lambda_{2,0} \cdot (\mu_{2,0})^{q_2} = 0$$

特别地，$(\mathrm{x}^{p_2-p_1})\,\mathrm{f}_1(\mathrm{x}^{p_1}) = \mathrm{c}\,\mathrm{f}_2(\mathrm{x}^{p_2})$ 对某个 $\mathrm{c} \in \mathbb{C}$ 成立。

需要指出的是，这种情形包括所有解都是线性函数的情况。

证明。根据定理 7 的结果，我们得到，方程（17）的解要么具有情形（A）中的形式，要么其中一个函数 g_i（不妨设为 g_1,）是线性函数，而 f_1 作为导子，其阶为最大值 K。在这种情况下，分别用 k_2 和 l_2, 表示 f_2 和 g_2 的阶，于是 $K = k_2 + l_2 q_2$。因此，方程（17）可以写成

$$(\lambda_{1,K} d^K(x^{p_1}) + \cdots + \lambda_{1,0} x^{p_1})(\mu_{1,0} x)^{q_1} + (\lambda_{2,k_2} d^{k_2}(x^{p_2}) + \cdots + \lambda_{2,0} x^{p_1})(\mu_{2,l_2} d^{l_2}(x) + \cdots + \mu_{2,0} x)^{q_2} = 0,$$

其中，根据假设，$\lambda_{1,K}, \lambda_{2,k_2}, \mu_{2,l_2}$ 均非零。$d^K(x^{p_1})$ 的展开式必须被 $d^{k_2}(x^{p_2})(d^{l_2}(x))^{q_2}$的展开式所涵盖，否则 $\lambda_{1,K} = 0$。这立即推出 $l_2 \leqslant 1$。我们将证明，如果 $l_2 = 1$，则会出现情形（B）；而如果 $l_2 = 0$，则推出情形（C）。

（A）在情形（A）下，方程（17）可以改写如下。

$$(\lambda_{1,1} d(x^{p_1}) + \lambda_{1,0} x^{p_1})(\mu_{1,1} d(x) + \mu_{1,0} x) + \lambda_{2,0} x^{p_1 - 1}(\mu_{2,1} d(x) + \mu_{2,0} x)^{q_1 + 1}, \qquad (x \in \mathbb{F}),$$

其中，我们假设 $\lambda_{1,1}, \mu_{1,1}, \mu_{2,1}$ 中至少有一个非零。这意味着它们都不为 0。上面的方程等价于

$$(p_1 \lambda_{1,1} d(x) + \lambda_{1,0} x)(\mu_{1,1} d(x) + \mu_{1,0} x) + \lambda_{2,0}(\mu_{2,1} d(x) + \mu_{2,0} x)^{q_1 + 1}, \qquad (x \in \mathbb{F}).$$

现在利用 $d(x)$ 与 x 的代数独立性，因此前一个方程展开式中的每个系数都必须为零。这也意味着我们可以在方程中代入其他多项式独立元素，因此可以用 $(1, y)$ 这一对元素替换 $(x, d(x))$ 这一对元素。于是得到

$$p_1 \lambda_{1,1} \mu_{1,1} \left(y + \frac{\lambda_{1,0}}{p_1 \lambda_{1,1}}\right) \left(y + \frac{\mu_{1,0}}{\mu_{1,1}}\right)^{q_1} = -\lambda_{2,0} \mu_{2,1} \left(y + \frac{\mu_{2,0}}{\mu_{2,1}}\right)^{q_1 + 1}, \qquad (y \in \mathbb{F}).$$

注意，由于主系数必须相等，我们得到 $p_1 \lambda_{1,1} \mu_{1,1} = -\lambda_{2,0} \mu_{2,1}$。因此，我们可以消去这些项。令 $a = \frac{\lambda_{1,0}}{p_1 \lambda_{1,1}}$、$b = \frac{\mu_{1,0}}{\mu_{1,1}}$ 以及 $c = \frac{\mu_{2,0}}{\mu_{2,1}}$，便得到

$$(y + a)(y + b)^{q_1} = (y + c)^{q_1 + 1}.$$

由于 $\mathbb{C}$ 中的多项式由其根唯一确定，因此应有 $a = b = c$。这立即推出情形（A）的第二部分。

(B) 回忆一下，作为导子的 f_1 的阶为 K，g_1 是线性函数，且 f_2 和 g_2 的阶分别为 k_2 和 l_2,，因此 $K = k_2 + l_2 q_2$。显然，当 $k_2 \neq K$（即 $l_2 = 1$）时，$p_1 = 1$ 不可能成立。若 $l_2 = 1$且 $p_1 \neq 1$,，则得到 $q_2 = 1$；否则，我们无法消去 $d^{k_2}(x) d^{q_2}(x) x^{p_1 - 2}$在 $d^K(x^{p_1})$ 的展开式中的系数（此处我们用到 $p_1 \geqslant 2$）。因此有 $k_2 + 1 = K$

- 若 $K \geqslant 4$（且 $p_1 \geqslant 2$），则 $d_K^{-2}(x) d^2 x x_{p^1 - 2}$ 的系数无法消去。
- 若 $K = 3$，则 $d^3(x p^{1}) x q^{1}$ 的展开式与 $d^2(N - 1) d(x)$ 的展开式。由于 $p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = N \geqslant 5$，若 $p_1 = 2$，则 $(d(x))^3$ 只能出现在 $d^2(x N^{-1}) d(x)$ 的展开式中，因此λ_2，$k_2 \cdot \mu 2, l_2 = 0$，这与矛盾。另一方面，若 $p_1 \geqslant 3$，则 $d^3(x)$ 只出现在 $d^3(x p^{1}) x q^{1}$ 的展开式中，这意味着λ_1，$K = 0$，矛盾。

- 若 $K = 2$，则 $d^2(x)$ 只出现在 $d^3(x_{p^{1}}) x_{q^{1}}$ 的展开式中（注意 $p_1 \geqslant 2$）。
- 若 $K = 1$，则可得解具有情形（B）中的形式。

由于 $q_2 = 1$ 且 $K = 1$，情形（B）中的方程（17）可写成如下形式

$$(\lambda_{1,1}d(x^{p_1}) + \lambda_{1,0}x^{p_1})(\mu_{1,0}x)^{q_1} + \lambda_{2,0}x^{N-1}(\mu_{1,1}d(x) + \mu_{2,0}x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{F}),$$

其中至少有一个（因而全部）$\lambda_{1,1}, \mu_{1,1}$ 非零。等价地，我们有

$$\mu_{1,0}^{q_1}(p_1\lambda_{1,1}d(x) + \lambda_{1,0}x) + \lambda_{2,0}(\mu_{2,1}d(x) + \mu_{2,0}x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{F}).$$

由于 $p_1\lambda_{1,1}\mu_{1,0}^{q_1} = -\lambda_{2,0}\mu_{2,1}$，引入一个 $= {}^{\lambda_{1,0}}{}_{p_1\lambda_{1,1}}$ 且 $b = \mu_{2,0}\,\mu_{2,1}$，我们得到

$$d(x) + ax = d(x) + bx.$$

因此 $a = b$，并且我们得到情形（B）的所有结论。

(C) 若 $l_2 = 0$，则 $n\,K = k_2$，因此 g_2 也是线性函数，g_1亦然。因此该方程具有如下形式

$$(\lambda_{1,K}d^K(x^{p_1}) + \cdots + \lambda_{1,0}x^{p_1})(\mu_{1,0}x)^{q_1} + (\lambda_{2,K}d^K(x^{p_2}) + \cdots + \lambda_{2,0}x^{p_1})(\mu_{2,0}x)^{q_2} = 0,$$

其中 $\lambda_{1,K}$,$\lambda_{2,K}$, $\mu_{1,0}$, $\mu_{2,0}$ 均非零。

假设 $K \geqslant 2$。若 $\min(p_1, p_2) \geqslant 2$，则下列方程组

$$(\mu_{1,0})^{q_1}\lambda_{1,K}p_1 + (\mu_{2,0})^{q_2}\lambda_{2,K}p_2 = 0$$

$$(\mu_{1,0})^{q_1}\lambda_{1,K}p_1(p_1 - 1) + (\mu_{2,0})^{q_2}\lambda_{2,K}p_2(p_2 - 1) = 0$$

推出 $\mu_{1,0}x\lambda_{1,\ K} = \mu_{2,\ 0}\lambda_{2,\ K} = 0$，这就产生了矛盾。若 $\min(p_1, p_2) = 1$，设 $p_1 = 1$，则$(d(x))^2$只能出现在 $d^K(x^{p_2})$的展开式中，因此 $\lambda_{2,\ K} = 0$ 得出矛盾。因此我们得到 $K = 1$，且这些函数具有情形（C）中的形式。其余结论显然可由直接计算得出。

在所有情况下，我们都证明了每个解（作为高阶导子）的阶至多为 1 . □

现在我们转向解中出现多个指数函数的情形。限制在每个指数函数上时，所得的解等价于情形（A）、情形（B）和情形（C）中描述的某个解。因此，问题在于确定它们彼此之间何时相容。通过逐个讨论各种情形可以证明，只有不同指数函数之和才可能是解。在下面的证明中，我们研究情形（C）何时能与自身相容（含有不同的指数函数），并排除解中的任何函数含有导子作为加项的可能性。类似地，也可以排除其他情形，但由于论证篇幅较长，我们将其留给读者。

引理 10. 如果方程（17）的解中包含多个指数函数，那么它恰好包含两个。这只有在 $p_1 = 2$、$p_2 = 1$ 时才可能，即方程（17）具有如下形式

$$f_1(x)g_1^{N-1}(x) + f_2(x^2)g_2^{N-2}(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{F}).$$

且解如下。

$$\begin{array}{rcl} f_1(x) & = & a_1(\varphi_1(x) + c\varphi_2(x)) \\ f_2(x) & = & a_2(\varphi_2(x) - c^2\varphi_1(x)) \\ g_1(x) & = & b_1(\varphi_1(x) - c\varphi_2(x)) \\ g_2(x) & = & b_2(\varphi_1(x) - c\varphi_2(x)), \end{array} \qquad \left(x \in \mathbb{F}^\times\right),$$

其中 φ_1 和 φ_2 是 $\mathbb{C}$ 的不同自同构，$c \in \mathbb{C}^\times$ 和 a_i、$b_i \in \mathbb{C}^\times$ 满足 $a_1b_1^{N-1} = -a_2b_2^{N-2}$。

证明。假设 f_i、g_i（$i = 1$、2）包含依赖于两个指数函数的项，即存在 φ_1、φ_2 这两个 $\mathbb{C}$ 的自同构，以及导子 d_1, d_2，使得每个函数都具有 $c_1\varphi_1 \circ d_1 + c_2\varphi_1 + c_3\varphi_2 \circ d_2 + c_4\varphi_2$ 的形式，其中我们假设 $\varphi_1 \circ d_1$，$\varphi_2 \circ d_2$,；否则我们可以化简前一项。

现在我们只研究将解限制到 φ_1 或 φ_2 时两种情形均得到情形（C）的情况。我们将证明，在这种情况下，所有函数都是自同构的线性组合，即不包含非平凡导子。对于其他情形对，论证方法类似，但略有不同。其余部分留给读者。

因此我们假设

$$f_1 = \lambda_{1,1}\varphi_1 \circ d_1 + \lambda_{1,0}\varphi_1 + \lambda_{2,1}\varphi_2 \circ d_2 + \lambda_{2,0}\varphi_2,\quad g_1 = \mu_{1,0}\varphi_1 + \mu_{2,0}\varphi_2,$$

$$f_1 = \tilde{\lambda}_{1,1}\varphi_1 \circ d_1 + \tilde{\lambda}_{1,0}\varphi_1 + \tilde{\lambda}_{2,1}\varphi_2 \circ d_2 + \tilde{\lambda}_{2,0}\varphi_2\quad g_1 = \tilde{\mu}_{1,0}\varphi_1 + \tilde{\mu}_{2,0}\varphi_2,$$

其中 $\mu_{1,0}, \mu_{2,0}$、$\tilde{\mu}_{1,0}$、$\tilde{\mu}_{2,0}$ 均非零，并且对于每个 $i = 1, 2$ 中的 $\lambda i, 0, \lambda i, 1$ 至少有一个非零。对于 $\tilde{\lambda}_{i,j}(i = 1, 2, j = 1, 2)$，类似结论也成立。这些条件是必要的，否则（17）会退化为情形（A）、（B）或（C）。

如果 φ_1、φ_2 和 $\varphi_1 \circ d_1$、$\varphi_2 \circ d_2$,，那么 $\varphi_1 \circ d_1$、φ_1、$\varphi_2 \circ d_2$、φ_2 在 $\mathbb{C}$上代数无关。因此，我们可以分别用 X、Y、Z、W 替换它们的函数。注意，在这种情况下 $\varphi \circ d_1(x^p) = p\varphi \circ d_1(x) \cdot \varphi^{p-1}(x) = X \cdot Y^{p-1}$。

在这种情况下，方程（17）可以改写如下。

$$\begin{aligned}&(p_1\lambda_{1,1}XY^{p_1-1} + \lambda_{1,0}Y^{p_1} + p_1\lambda_{2,1}UV^{p_1-1} + \lambda_{2,0}V^{p_1})(\mu_{1,0}Y + \mu_{2,0}V)^{q_1} + \\ &(p_2\tilde{\lambda}_{1,1}XY^{p_2-1} + \tilde{\lambda}_{1,0}Y^{p_2} + p_2\tilde{\lambda}_{2,1}UV^{p_2-1} + \tilde{\lambda}_{2,0}V^{p_2})(\tilde{\mu}_{1,0}Y + \tilde{\mu}_{2,0}V)^{q_2} = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

不失一般性，我们可以假设 $p_1 < p_2$。现在取 $XY^{p_1-1}V^{q_1}$ 的系数。由于 $p_1 < p_2$,，我们有 $q_1 > q_2$，因此这一项只出现一次，其系数为 $p_1\lambda_{1,1}\mu_{2,0}$，而该系数为零。因此，$\lambda_{1,1} = 0$（假设了 $\mu_{2,0} \neq 0$）。对 $Y^{q_1}UV^{p_1-1}$ 作类似论证可得 $\tilde{\lambda}_{1,1} = 0$。现在对 $XY^{p_2-1}V^{q_2}$ 和 $Y^{q_2}UV^{p_2-1}$ 重复之前的论证，可推出 $\lambda_{2,1} = 0$ 以及 $\tilde{\lambda}_{2,1} = 0$。因此，所有 f_i 都是 φ_1 和 φ_2 的线性组合。

我们证明 $p_1 = 1$、$p_2 = 2$ 以及命题的其余部分。代入 $V = 1$ 后，我们得到以下方程，我们得到以下方程。

$$(\lambda_{1,0}Y^{p_1} + \lambda_{2,0})(\mu_{1,0}Y + \mu_{2,0})^{q_1} = -(\tilde{\lambda}_{1,0}Y^{p_2} + \tilde{\lambda}_{2,0})(\tilde{\mu}_{1,0}Y + \tilde{\mu}_{2,0})^{q_2} = 0. \tag{19}$$

这是关于 Y、定义在 $\mathbb{C}$上的一个多项式方程。首先注意到，$P_1(Y) = \lambda_1,0Y^{p_1} + \lambda_2,0$（相应地，$P_2(Y) = \tilde{\lambda}_1, 0Y^{p_2} + \tilde{\lambda}_2,0$）没有重数大于 1 的根，因为 $(P_i(Y), P_i'(Y)) = 1\,(i = 1, 2)$。另一方面，$Q_1(Y) = (\mu_{1,0}Y + \mu_{2,0})^{q_1}$（相应地，$Q_2(Y) = (\tilde{\mu}_{1,0}Y + \tilde{\mu}_{2,0})^{q_2}$）只有一个重数为 q_1（相应地，q_2）的根。这立即意味着 $q_2 + 1 = q_1$（注意 $p_1 < p_2$，且 $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$）。这意味着 $P_2(Y)$ 的一个根与 $Q_1(Y)$ 和 $Q_2(Y)$的根相同。其余的根则与 $P_1(Y)$的根相同。然而，$P_1(Y)$ 和 $P_2(Y)$ 的根分别是 p_1 次和 $(p_1 + 1) = p_2$ 次单位根的常数倍。只有当 $p_2 = 2$ 时，它们才可能相等，因此 $p_1 = 1$。于是 $q_1 = N - 1$，$q_2 = N - 2$。

在这种情况下，方程 (19) 具有以下形式

$$(\lambda_{1,0}Y + \lambda_{2,0})(\mu_{1,0}Y + \mu_{2,0})^{N-1} = -(\tilde{\lambda}_{1,0}Y^2 + \tilde{\lambda}_{2,0})(\tilde{\mu}_{1,0}Y + \tilde{\mu}_{2,0})^{N-2} = 0,$$

其中 $\mu_{2,0}\mu_{1,0} = \tilde{\mu}_{2,0}\mu_{1,0}$. 引入 $c_1 = \frac{\lambda_{2,0}}{\lambda_{1,0}}$, $c_2 = \mu_{2,0}\mu_{1,0} = \tilde{\mu}_{2,0}\mu_{1,0}$, $c_3 = \frac{\lambda_{2,0}}{\lambda_{1,0}}$我们得到

$$\lambda_{1,0}\mu_{1,0}^{N-1}(Y + c_1)(Y + c_2) = -\tilde{\lambda}_{1,0}\tilde{\mu}_{1,0}^{N-2}(Y^2 + c_3).$$

因此 $\lambda_{1,0}\mu_{1,0}^{N-1} = -\tilde{\lambda}_{1,0}\tilde{\mu}_{1,0}^{N-2}$,且 $c_1 = -c_2$ 和 $c_3 = -c_1^2$。这意味着，方程 (17) 的所有包含两个指数函数的解为

$$f_1 = a_1(\varphi_1 + c\varphi_2), g_1 = b_1(\varphi_2 - c\varphi_2), f_2 = a_2(\varphi_1 - c^2\varphi_2), g_2 = b_2(\varphi_2 - c\varphi_2),$$

其中 $c \in \mathbb{C}$ 是任意的，且 $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ 满足 $a_1b_1^{N-1} = -a_2b_2^{N-2}$，如前所述。

很容易证明　利用先前关于不存在包含三个指数函数的解的结果　　. □

下面给出两个特殊情形，以说明我们的结果。

推论 4。设 N 为正整数， $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ 是一个域，p、q 是小于 N 且彼此不同的正整数，并假设 q，N − p；进一步设 κ 是非零复数。假设加性函数 f、g: $\mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 不恒为零，且满足

$$f(x^p)g(x)^{N-p} = \kappa f(x^q)g(x)^{N-q} \qquad (x \in \mathbb{F}),$$

则以下情况之一成立

(A) 存在一个导子 d: $\mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 以及非零复常数 λ_0、λ_1、μ_0，使得 *t*

$$f(x) \sim \lambda_1 d(x) + \lambda_0 x \qquad and \qquad g(x) \sim \mu_0 x \qquad (x \in \mathbb{F}),$$

其中上述常数还满足

$$\lambda_0 \mu_0^{N-p}(1 - \kappa \mu_0^{p-q}) = 0 \qquad and \qquad \lambda_1 \mu_0^{N-p}(p - \kappa q \mu_0^{p-q}) = 0$$

(B) 存在非零复常数 λ_0、μ_0，使得

$$f(x) \sim \lambda_0 x \qquad and \qquad g(x) \sim \mu_0 x \qquad (x \in \mathbb{F}),$$

其中上述常数还满足

$$\lambda_0 \mu_0^{N-p}(1 - \kappa \mu_0^{p-q}) = 0$$

(C)

$$f(x) = a(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) \qquad and \qquad g(x) = b(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)),$$

其中 φ_1、φ_2: $\mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 是任意但互不相同的域同态，a、b $\in \mathbb{C}^\times$ 满足 a − κb = 0，且若 $p_1 < p_2$，则 $p_1 = 1$、$p_2 = 2$。

推论 5. 设 N 为正整数， $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ 为一个域，p、q 为小于 N 的不同正整数（严格小于），并假设 q，N − p，进一步设 κ 为非零复数。若加性函数 f、g: $\mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 满足

$$f(x^p)f(x)^{N-p} = \kappa g(x^q)g(x)^{N-q} \qquad (x \in \mathbb{F}),$$

则存在非零复常数 λ_0、μ_0，使得

$$f(x) \sim \lambda_0 x \qquad and \qquad g(x) \sim \mu_0 x \qquad (x \in \mathbb{F}).$$

此外 $\kappa = 1$，否则 f 和 g 恒为零。

附录

引理 1 的证明。设 n 为正整数， $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ 为一个域，且 $p_1, \ldots, p_n$、$q_1, \ldots, q_n$ 为固定的正整数。

假设加性函数 $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n$: $\mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 满足函数方程 (1)，对每个 x $\in \mathbb{F}$ 均成立。进一步假设集合 $\{p_1, \ldots, p_n\}$ 有一个划分 $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$，满足以下性质

$$\text{if } p_\alpha, p_\beta \in \mathcal{P}_j \text{ for a certain index } j, \text{ then } p_\alpha + q_\alpha = p_\beta + q_\beta.$$

注意，对于所有 $i = 1, \dots, n$，映射

$$\mathbb{F} \ni x \longmapsto f_i(x^{p_i})g_i(x))^{q_i}$$

是一个次数为 $p_i + q_i$ 的广义单项式。事实上，它是如下对称 $(p_i + q_i)$-加性映射的对角化

$$\mathbb{F}^{p_i+q_i} \ni (x_1, \dots, x_{p_i+q_i}) \longmapsto f_i(x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p_i)})g_i(x_{\sigma(p_i+1)} \cdots g_i(x_{\sigma(p_i+q_i)}).$$

由于 $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$，我们必有 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F}$。现在任取 $r \in \mathbb{Q}$，并在方程 (1) 中以 rx 代替 x，得到

$$\sum_{i=1}^{n} f_i((rx)^{p_i})g_i(rx)^{q_i} = 0 \qquad (r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{F}).$$

利用加性函数 $f_1, \dots, f_n$ 和 $g_1, \dots, g_n$ 的 $\mathbb{Q}$-齐次性，我们推出

$$0 = \sum_{i=1}^{n} f_i((rx)^{p_i})g_i(rx)^{q_i} = \sum_{i=1}^{n} f_i(r^{p_i}x^{p_i})(rg_i(x))^{q_i} = \sum_{i=1}^{n} r^{p_i+q_i} f_i(x^{p_i})g_i(x)^{q_i}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{p_\alpha \in \mathcal{P}_j} r^{p_\alpha+q_\alpha} f_\alpha(x^{p_\alpha})g_\alpha(x)^{q_\alpha} \qquad (r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{F}).$$

注意，该方程右端是关于 r 的一个（经典）多项式，且恒等于零。因此，其所有系数都应当（恒等）为零，从而得到方程组

$$\sum_{p_\alpha \in \mathcal{P}_j} f_\alpha(x^{p_\alpha})g_\alpha(x))^{q_\alpha} = 0 \qquad (x \in \mathbb{F}, j = 1, \dots, k)$$

成立。 □

引理 5 的证明。设 n 为正整数，$\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ 为一个域，且 $p_1, \dots, p_n$、$q_1, \dots, q_n$ 为满足条件 C(ii) 的固定正整数。假设加性函数 $f_1, \dots, f_n$、$g_1, \dots, g_n$: $\mathbb{F} \to \mathbb{C}$ 满足函数方程

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x^{p_i})g_i(x)^{q_i} = 0$$

对每个 $x \in \mathbb{F}$。由于函数 $f_1, \dots, f_n$ 和 $g_1, \dots, g_n$ 对所有 $i = 1, \dots, n$ 都具有加性，映射

$$x \longmapsto f_i(x^{p_i})g_i(x)^{q_i}$$

是一个次数为 $p_i + q_i = N$ 的单项式。此外，它是对称且 N 重加性映射的迹

$$F_i(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} f_i(x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p_i)}) \cdot g_i(x_{\sigma(p_i+1)} \cdots g_i(x_{\sigma(N)}) \qquad (x_1, \dots, x_N \in \mathbb{F}).$$

因此，该结论由引理 4 得出。 □

致谢。E. Gselmann 的研究得到项目 K134191 的支持。该项目在匈牙利国家研究、开发与创新基金的支持下实施，资助来自 K 20资助计划。

G. Kiss 的研究得到了匈牙利国家研究、发展与创新基金项目 K124749 和 K142993 的支持。作者获得了匈牙利科学院 J´anos Bolyai 研究奖学金，以及文化与创新部的 ´UNKP-22-5 新国家卓越计划的资助。

参考文献

[1] Bruce Ebanks. 通过函数方程刻画各阶环导子：结果与开放问题。Aequationes Math., 89(3):685–718, 2015.[2] Bruce Ebanks. 多项式关联的可加函数。Aequationes Math., 91(2):317–330, 2017.[3] Bruce Ebanks、Thomas Riedel 和 Prasanna K. Sahoo. 关于导子的阶。Aequationes Math., 90(2):335–340, 2016.[4] Zywilla Fechner、Eszter Gselmann 和 L´aszl´o Sz´ekelyhidi. 群上的矩函数。Results Math., 76(4):论文编号 171，16 页，2021.[5]Eszter Gselmann 和 Gergely Kiss. 加性函数的多项式方程 I，2022。https://arxiv.org/pdf/2211.03605 [6] Eszter Gselmann、Gergely Kiss 和 Csaba Vincze. 刻画导子的函数方程：方法与实例。Results Math., 73(2):论文编号 74，27 页，2018.[7] Eszter Gselmann、Gergely Kiss 和 Csaba Vincze. 通过 Pexider化函数方程刻画域同态。Journal of Difference Equations and Applications, 25(12), 1645–1679, 2019.[8] Gergely Kiss 和 Mikl´os Laczkovich. 环与域上的导子和微分算子。Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput., 48:31–43, 2018.[9] Mikl´os Laczkovich. 用可分解函数刻画广义指数多项式。Acta Math. Hungar., 158(2):338–351, 2019..[10] Ludwig Reich. 作为函数方程解的二阶导子——综述。载于《Gyula Maurer 七十寿辰纪念文集》，Grazer Math. Ber. 第 337 卷，第 45–65 页。Karl-Franzens- Univ. Graz，格拉茨，1998.[11] Ekaterina Shulman. 可分解函数与拓扑半群的表示。Aequationes Math., 79(1-2):13–21, 2010. [12] L´aszl´o Sz´ekelyhidi. 拓扑阿贝尔群上的卷积型函数方程。World Scientific Publishing Co., Inc.，新泽西州蒂内克，1991.[13] Josef Unger 和 Ludwig Reich. 作为函数方程解的高阶导子，第 336 卷，Grazer Mathematische Berichte *[《格拉茨数学报告》]*。Karl-Franzens-Universit¨at Graz，格拉茨，1998.