arXiv:2303.03308v1 [math.SP] 6 Mar 2023

仿射变换的 Schwartzman 群

´ ´David Damanik、Iris Emilsdottir 和 Jake Fillman

Abstract. 我们计算了与紧致连通阿贝尔群上的遍历仿射自同构相关联的 Schwartzman 群，其中该自同构由群自同构与沿单位元所在道路连通分支中某个元素的平移复合而成。我们证明，Schwartzman 群可以通过将自同构的不变特征取值于实施平移的群元素来刻画。作为推论，我们证明二进制溶胶体上的倍增映射所关联的标签集是平凡的，进而证明，在倍增映射上定义的任何遍历雅可比矩阵族，其几乎必然本质谱都是连通的。

1. 引言

我们关注如下形式的遍历薛定谔算子的研究

$$[H_\omega u] = u(n-1) + u(n+1) + f(T^n\omega)u(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

其中 $\omega \in \Omega$ 表示一个紧致度量空间，$T : \Omega \to \Omega$ 是一个同胚，且 $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$。在这种情况下，我们称 (Ω, T) 为一个拓扑动力系统。若μ 表示一个 T-遍历博雷尔概率测度 Ω，则存在一个集合 $\Sigma = \Sigma_\mu$，称为该族的 几乎处处谱 ，使得 $\sigma(H_\omega) = \Sigma$ 对于 μ- 几乎处处 $\omega \in \Omega$ ；背景介绍可参见 [7, 9] 。

自然地，由于算子 H_ω 有界且自伴，Σ 是 $\mathbb{R}$的紧子集，因此其补集至多是可数个互不相交的开区间之并，这些开区间称为谱隙。谱本身可以具有许多不同的拓扑结构：它可能是连通的，也可能是全不连通的，还可能由有限个非退化闭区间的并组成，等等。这自然引发了人们对补集 $\mathbb{R} \setminus \Sigma$结构的兴趣，也就是对谱隙结构的兴趣。谱隙标记定理为研究谱隙提供了极其宝贵的工具。

与这一族 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$相关联的函数 k 称为积分态密度（IDS），它计算 H_ω 的截断算子的特征值中低于给定阈值的平均比例；积分态密度的定义见下文（2.6）。积分态密度的关键特征是，谱恰好是函数 k的增长点集合。特别地，积分态密度在 $\mathbb{R} \setminus \Sigma$的每个连通分支上都是常数，并且在不同的连通分支上取不同的常数值。函数 k 在谱隙上取的值称为该谱隙的标记。这个

谱隙标记定理断言，存在一个可数子群 $\mathbb{R}$，它仅取决于 $(\Omega\ T, \mu)$，且所有标记都属于该群。

谱隙标记有几种不同的版本。其中一种由 Bellissard 及其同事提出，[2], 它将一组标记与适当 C^*代数上的归一化迹联系起来。Johnson 提出的版本则将一组标记与某个特定同态 [16]的值域联系起来。这个群记作 $\mathfrak{A}(\Omega\ T, \mu)$，称为 Schwartzman 群，[22], 并在第2.1小节中给出精确定义。鉴于 $\mathfrak{A}(\Omega\ T, \mu)$ 与通过动力系统 $(\Omega\ T)$ 按照 (1.1) 定义的算子之间的关系，自然有必要尽可能多地计算各种动力系统对应的 $\mathfrak{A}(\Omega\ T, \mu)$。文献[8]中对许多标准例子进行了这项工作。

我们的主要结果计算了与适当群的仿射变换相关联的 Schwartzman 群。回顾一下，拓扑群是一个豪斯多夫拓扑空间，同时也是一个群，且其群运算（乘法和取逆）连续。若 Ω 是拓扑群，我们用 Aut(Ω) 表示从 Ω 到 Ω 的连续群自同构 $A : \Omega \to \Omega$ 所成的集合。若 $A \in$ Aut(Ω) 且 $b \in \Omega$，我们记 $T_{A,b} : \omega \mapsto A\omega + b$ 为相应的仿射自同构。我们用$\widehat{\ }\Omega$表示从 Ω 到 $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$的连续同态群，称为 Ω 的庞特里亚金对偶群。自然地，任意 $A \in$ Aut(Ω) 都会通过 $A\chi = \chi \circ A$ （对 $\chi \in \Omega$）诱导一个对偶映射 $\widehat{A} : \Omega \to \Omega$。关于拓扑群及其对偶的更多背景知识，可参阅文献[14, 17, 20]中的教材论述。

现在陈述我们的主要结果。在本文中， π 表示典范投影 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ， 它将 $x \in \mathbb{R}$ 映射到其模 $\mathbb{Z}$ 在$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$中的等价类。

定理 1.1. 若 Ω 是一个紧致连通阿贝尔群， $A \in$Aut(Ω)， $b \in \Omega$ 属于 Ω 的单位元的道路连通分支，且 μ 是 Ω 上的一个$T_{A,\ b}$-遍历概率测度，则 $(\Omega T_{A,\ b}, \mu)$ 的 Schwartzman 群由下式给出

$$\mathfrak{A}(\Omega, T_{A,b}, \mu) = \left\{\beta \in \mathbb{R} : \beta \in \pi^{-1}(\chi b)\ \textit{for some}\ \chi \in \ker(\widehat{A} - I)\right\} \tag{1.2}$$
$$= \bigcup_{\chi \in \ker(\widehat{A} - I)} \pi^{-1}(\chi b).$$

注。下面对该定理作几点说明。

（a）由于环面 $\mathbb{T}^d$ 是一个紧致连通阿贝尔群（并且每个 $b \in \mathbb{T}^d$当然都属于单位元的道路连通分支），定理 1.1 是 [8,定理 81]的推广。（b）存在一些不是环面且不是道路连通的紧致连通阿贝尔群。特别是，即使假设 Ω 是连通的，b 属于 0 的道路连通分支这一假设也不会自动满足。（c）定理 1.1中的连通性假设不能完全省略。我们在附录中给出一个简单而详细的例子；参见推论 A.2。

（d）我们给出的证明要求 b属于单位元的道路连通分支。我们认为，确定该结果是否确实需要这一假设，是一个有趣的问题。（e）如果 $A = I$，那么 $\ker(A - I) = \Omega$，即 Ω 的整个对偶群。在这种情况下，（1.2）将平移 $\omega \mapsto \omega + b$ 的 Schwartzman 群与（Ω b）的频率模等同起来。因此，可以得到几乎周期动力系统的经典谱隙标记定理的一个特殊情形。特别地，在 $A = I$的情况下，该结果对所有紧群 Ω 以及所有 $b \in \Omega$ 都成立，而无需任何连通性假设；比较 [8, 13, 15]。

定理 1.1 的证明大体沿用了以下证明的基本思路： [8, 定理 8。1]不过，它得出了一些出人意料且极具威力的结论。例如，定理 1.1 使我们能够回答若干与由倍增映射定义的算子相关的问题；事实上，如果事先不知道这些答案，我们很可能会感到惊讶。具体而言， [10] 证明了由倍增映射定义的薛定谔算子的几乎必然本质谱是连通的；其证明方法是，证明将 Schwartzman 群限制在经由倍增映射因子分解的螺线群映射上时，其像是平凡的。不过，我们将在推论 4.1 中证明，上述结果意味着，对于标准螺线群上的任意映射，Schwartzman 同态的像都是平凡的。在撰写 [10] 时，作者原以为情况并非如此。同样， [11]研究了由倍增映射定义的雅可比矩阵，并证明在非对角元均不为零的假设下，这类算子的几乎必然本质谱具有连通性。我们将利用定理 1.1 证明， [11]中的结果对任意非对角元都成立，因此适用于最一般的情形；参见推论 5.2。

我们将在第 2 节介绍一些背景，在第 1.1 节证明定理 3，并在第 4 节和第 5 节讨论一些有趣的应用。

Acknowledgements

D. D. 的部分研究经费来自 NSF 资助项目 DMS–2054752。J. F. 的部分研究经费来自西蒙斯基金会合作资助项目 #711663 以及 NSF 资助项目 DMS–2213196。作者衷心感谢美国数学研究所、数学与统计跨学科研究所和西蒙斯几何与物理中心提供的支持，本工作的部分内容即在这些机构完成。

2. Background

2.1. 拓扑动力学与 Schwartzman 群。我们将拓扑动力系统定义为一对 $(\Omega\ T)$，其中 Ω 是一个紧致度量空间，且 $T : \Omega \to \Omega$ 是一个同胚；特别地，我们考虑可逆动力学。若 Ω 上的博雷尔概率测度满足 $\mu(T^{-1}B) = \mu(B)$，对所有博雷尔集 B 都成立，则称其为 T-不变测度；若它是 T-不变的，且任何 T-不变可测函数几乎处处为常数，则称其为 T-遍历的。

给定一个遍历拓扑动力系统 (Ω, T, μ)，其悬挂定义为 $X = \Omega \times \mathbb{R}/\sim$，其中 $(T^n\omega, t) \sim (\omega, t+n)$，对于 $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$。这可以通过下式构造成一个连续时间动力系统

$$\tau^s([\omega, t]) = [\omega, t+s],$$

其中 $[\omega, t]$ 表示 X 中 (ω, t) 的等价类。同样，遍历测度 μ 通过以下方式在 X 上诱导出一个 τ-遍历测度 ν：

$$\int_X g \, d\nu = \int_\Omega \int_0^1 g([\omega, t]) \, dt \, d\mu(\omega). \tag{2.1}$$

给定 $g \in C(X, \mathbb{T})$，可以将函数 $g_x \colon t \mapsto g(\tau^t x)$ 提升为映射 $\widetilde{g}_x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。极限

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\widetilde{g}_x(t)}{t}$$

对 ν-几乎处处的 x，该极限存在；它在 ν-几乎处处意义下为常数，且仅取决于 g 的同伦类。记 $C^\sharp(X, \mathbb{T})$ 为映射 $X \to \mathbb{T}$ 的同伦类集合，则诱导映射 $\mathfrak{F}_\nu \colon C^\sharp(X, \mathbb{T}) \to \mathbb{R}$ 称为 Schwartzman 同态，其值域称为 Schwartzman 群，记作

$$\mathfrak{A}(\Omega, T, \mu) = \mathfrak{F}_\nu(C^\sharp(X, \mathbb{T})). \tag{2.2}$$

为后续使用（在引理 3.1 的证明中），值得注意的是，两个映射 $X \to \mathbb{T}$ 同伦，当且仅当它们的差可以提升为映射 $X \to \mathbb{R}$。因此，$C^\sharp(X, \mathbb{T})$ 等价于 $C(X, \mathbb{T})/H(X, \mathbb{T})$，其中 $H(X, \mathbb{T})$ 表示 $C(X, \mathbb{T})$ 中由形如 $x \mapsto \pi(f(x))$ 的映射组成的子群，其中 $f \colon X \to \mathbb{R}$ 连续，且 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 是标准投影；参见 [8, 命题 4.10]。

2.2. Jacobi 矩阵的谱隙标记。我们还将讨论遍历 Jacobi 矩阵及其几乎处处谱的拓扑结构。为引入这些对象，设 (Ω, T) 是一个拓扑动力系统，也就是说，Ω 是一个紧致度量空间，且 $T : \Omega \to \Omega$ 是一个同胚。给定 $q \in C(\Omega, \mathbb{R})$ 和 $p \in C(\Omega, \mathbb{C})$，我们考虑由 $\{J_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 给出的 Jacobi 矩阵族，它们作用于 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中，

$$[J_\omega \psi](n) = \overline{p(T^{n-1}\omega)}\psi(n-1) + q(T^n\omega)\psi(n) + p(T^n\omega)\psi(n+1). \tag{2.3}$$

离散薛定谔算子（1.1）是遍历 Jacobi 矩阵的一个特例，其中 $q = f$ 且 $p \equiv 1$。

固定一个 T-遍历博雷尔概率测度 μ，定义在 Ω 上。我们假设

$$\operatorname{supp} \mu = \Omega, \tag{2.4}$$

其中 $\operatorname{supp} \mu$ 表示 μ的拓扑支撑，也就是具有满 μ-测度的最小闭集。需要指出的是，假设（2.4）并不构成限制，因为总可以将动力系统 (Ω, T) 替换为 $(\operatorname{supp} \mu, T|_{\operatorname{supp}\mu})$。选定测度 μ后，我们称 $\{J_\omega\}$ 为遍历 Jacobi 矩阵族。态密度测度（DOSM）定义为

$$\int f \, d\kappa = \lim_{N\to\infty} \int f \, d\kappa_{\omega,N} := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \operatorname{Tr}(f(J_\omega \chi_{[0,N)})), \quad \mu\text{-a.e. } \omega \in \Omega, \tag{2.5}$$

而积分态密度（IDS）则定义为

$$k(E) = \int \chi_{(-\infty,E]}\, d\kappa. \tag{2.6}$$

对于遍历 Jacobi 矩阵族，我们有如下谱隙标记结果。

定理 2.1 ([11, 定理 1。1])。 设 $(\Omega\ T)$ 是一个可逆拓扑动力系统，且 μ 是一个支撑为全空间的 T-遍历博雷尔概率测度，定义在 Ω上。给定 $p \in C(\Omega\ \mathbb{C})$ 和 $q \in C(\Omega\ \mathbb{R})$，令 $\{J_\omega\}$ 表示相应的遍历 Jacobi 矩阵族， Σ 表示该族的几乎处处谱， k 表示其积分态密度（IDS）。对于所有$E \in \mathbb{R} \setminus \Sigma$，都有

$$k(E) \in \mathfrak{A}(\Omega, T, \mu). \tag{2.7}$$

2.3. 二进制溶胶体。 为了说明定理 1.1 包含新的内容，我们展示它可应用于螺线群。为此，我们先介绍二进制溶胶体的三种表示，分别记为 $\mathcal{S}_1$， $\mathcal{S}_2$ 和 $\mathcal{S}_3$。第一种表示可定义为

$$\mathcal{S}_1 := (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2)/A \tag{2.8}$$

其中 $\mathbb{Z}_2$ 表示 2进整数，而 A 表示离散的、因而闭的子群 $A = \{(a, -a) : a \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2$。 $\mathcal{S}_1$ 上的倍增映射定义为

$$T_1[r, s] = [2r, 2s]. \tag{2.9}$$

在 [19], 第 1 章的附录中，证明了这等价于以下逆极限

$$\mathcal{S}_2 := \varprojlim \mathbb{R}/2^n\mathbb{Z} = \left\{ (x_n)_{n\geq 0} \in \prod_{n\geq 0} \mathbb{R}/2^n\mathbb{Z} : \sigma_n x_{n+1} = x_n \text{ for all } n \right\} \tag{2.10}$$

投影系统 $(\mathbb{R}/2^n\mathbb{Z}, \sigma_n)$ 的逆极限，其中 σ_n 表示典范投影σ_n： x 模 $2^{n+1}\mathbb{Z} \mapsto x$ 模 $2^n\mathbb{Z}$, $n \geq 0$。 $\mathcal{S}_2$上的倍增映射定义为

$$(T_2 x)_n = 2x_n. \tag{2.11}$$

最后，在 [5], 第 1 章中，螺线群被实现为实心环面上的迭代函数系统的吸引子。更准确地说，令 $\mathcal{I} = \mathbb{T} \times \overline{\mathbb{D}}$ 表示实心环面（其中 $\overline{\mathbb{D}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$）。选取某个 $\lambda \in (0, 1/2)$，变换 $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ 定义为

$$F(\omega, x, y) = \left(2\omega, \lambda x + \frac{1}{2}\cos(2\pi\omega), \lambda y + \frac{1}{2}\sin(2\pi\omega)\right). \tag{2.12}$$

因此，螺线群由该系统的吸引子给出，即,

$$\mathcal{S}_3 := \bigcap_{n=0}^{\infty} F^n(\mathcal{I}). \tag{2.13}$$

Th限制在 $\mathcal{S}_3$ 上的 F 表示倍增映射，记作 T_3 .

命题 2.2. 二进制溶胶体上倍增映射的三种实现彼此拓扑共轭。

证明。 这一说法在文献中广为人知。为方便读者，我们概述主要步骤并提供参考文献。文献 [19] 提到， $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 的定义等价，而 [5] 文献 $\mathcal{S}_3$ 讨论了 $\mathcal{S}_2$与之等价这一点。下面我们对此作更详细的说明。

令 $\pi_n\colon\ \mathbb{T}\times\overline{\mathbb{D}}\to\mathbb{R}/2^n\mathbb{Z}$ 为映射 $\pi_n(\theta,r,s)=2^n\theta$ 模 $2^n\mathbb{Z}$，我们定义$h\colon \mathcal{S}_3\to\mathcal{S}_2\subseteq\Pi_{n\geq 0}\mathbb{R}/2^n\mathbb{Z}$ 为

$$(h(\omega,x,y))_n=\pi_n(T_3^{-n}(\omega,x,y)), \tag{2.14}$$

这之所以可行，是因为 T_3 在 $\mathcal{S}_3$上可逆。接下来可以验证，这个h 是一个同胚，将 $\mathcal{S}_3$ 映射到 $\mathcal{S}_2$ 并满足 $T_2\circ h=h\circ T_3$。更多讨论参见 [5,第 1 节9] 。

接下来我们讨论一个共轭 $\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_2$。记 $\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\ldots\}$，并将典型元素 $z\in\mathbb{Z}_2$ 写作 $\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}z_j2^j$，定义 $g\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{Z}_2\to\mathcal{S}_2$ 为

$$(g(r,z))_n=r+\sum_{j=0}^{n-1}z_j2^j,\quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{2.15}$$

读者可以验证这是一个定义良好的同态，其核为 $\ker(g)=A$，从而下降为映射 $\bar{g}\colon \mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_2$，满足 $T_2\circ\bar{g}=\bar{g}\circ T_1$。进一步细节请参见 [19, 第 1] 章的附录。□

由于螺线群上的倍增映射的三种实现均拓扑等价，因此它们具有相同的 Schwartzman 群，这一点可由下面的命题看出。

如果 $(\Omega_1,\ T_1,\ \mu_1)$ 和 $(\Omega_2,\ T_2,\ \mu_2)$ 是遍历拓扑动力系统，我们称它们等价，如果 $(\Omega_1,\ T_1)$ 和 $(\Omega_2,\ T_2)$ 通过同胚 $h:\Omega_1\to\Omega_2$ 拓扑共轭，且满足 $h_*\mu_1=\mu_2$。

命题 2.3. 如果 (Ω_1,T_1,μ_1) 和 (Ω_2,T_2,μ_2) 是等价的遍历拓扑动力系统，那么

$$\mathfrak{A}(\Omega_1,T_1,\mu_1)=\mathfrak{A}(\Omega_2,T_2,\mu_2). \tag{2.16}$$

证明。设 $h:\Omega_1\to\Omega_2$如等价的定义所述。令 (X_j,τ_j,ν_j) 表示相应的悬挂系统， h 诱导出一个映射 $\overline{h}\colon\ X_1\to X_2$，其定义为 $[\omega_1,t]\mapsto[h\omega_1,t]$。由于

$$\overline{h}([T_1^n\omega_1,t-n])=[hT_1^n\omega_1,t-n]=[T_2^nh\omega_1,t-n]=[h\omega_1,t]=\overline{h}([\omega_1,t]),$$

我们看到， $\overline{h}$是一个定义良好的同胚。类似的计算表明，对所有 s，都有 $\overline{h}\circ\tau_1^s=\tau_2^s\circ\overline{h}$。最后，由于

$$\int f\,d(\overline{h}_*\nu_1)=\int f\circ\overline{h}\,d\nu_1=\int_0^1\int_{\Omega_1}f([h\omega_1,t])\,d\mu_1(\omega_1)\,dt$$

$$= \int_0^1 \int_{\Omega_2} f([\omega_2, t])\, d\mu_2(\omega_2)\, dt = \int f\, d\nu_2,$$

其中在倒数第二步用到了 $h_*\mu_1 = \mu_2$。因此，$\overline{h}$ 给出了从(X_1, τ_1, ν_1)到(X_2, τ_2, ν_2)的拓扑共轭。进而，通过定义

$$Pf = f \circ \overline{h}, \quad f \in C(X_2, \mathbb{T}). \tag{2.17}$$

由于 $\overline{h}$ 是一个同胚，P 是一个双射，它将同伦函数映射为同伦函数，因此诱导出一个双射 $P^\sharp\colon C^\sharp(X_2, \mathbb{T}) \to C^\sharp(X_1, \mathbb{T})$。

断言 2.4。

$$\mathfrak{F}_{\nu_2}([\phi]) = \mathfrak{F}_{\nu_1}(P^\sharp[\phi]) \text{ for every } \phi \in C(X_2, \mathbb{T}). \tag{2.18}$$

~~断言的证明~~。对于 $x_2 \in X_2$，回忆 $\phi_{x_2}(t) = \phi(\tau_2^t x_2)$，以及 $\phi_{x_2}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 表示一个提升。注意

$$(P\phi)_{x_1}(t) = (P\phi)(\tau_1^t x_1) = \phi(\overline{h}\tau_1^t x_1) = \phi(\tau_2^t \overline{h} x_1) = \phi_{\overline{h}x_1}(t).$$

~~特别地，$\phi_{\overline{h}x_1}$ 是 $(P\phi)_{x_1}$ 的一个提升，因此我们取 $\widetilde{(P\phi)}_{x_1} = \phi_{\overline{h}x_1}$。对于 $j = 1$，取 2，选择集合 $X_j' \subseteq X_j$，使其具有满 ν_j-测度，且满足

$$\mathfrak{F}_{\nu_1}([P\phi]) = \lim_{t\to\infty} \frac{\widetilde{(P\phi)}_{x_1}(t)}{t}, \quad \mathfrak{F}_{\nu_2}([\phi]) = \lim_{t\to\infty} \frac{\widetilde{\phi}_{x_2}(t)}{t}$$

对所有 $x_j \in X_j'$ 均成立。根据 $\overline{h}_*\nu_1 = \nu_2$，集合 $X_2^\star = X_2' \cap \overline{h}[X_1']$ 具有满 ν_2-测度。取 $x_2 \in X_2^\star$，可得 $\overline{h}^{-1}x_2 \in X_1'$，因此

$$\mathfrak{F}_{\nu_2}([\phi]) = \lim_{t\to\infty} \frac{\widetilde{\phi}_{x_2}(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\widetilde{(P\phi)}_{\overline{h}^{-1}x_2}(t)}{t} = \mathfrak{F}_{\nu_1}([P\phi]),$$

这就证明了该断言。 ♢

断言得证后，我们可知 $\mathfrak{F}_{\nu_1}$ 和 $\mathfrak{F}_{\nu_2}$ 的值域相同，正如所需。□

3. Computing the Schwartzman Group

与[8, 定理 8.1] 的证明相同，我们通过两个引理来组织论证。首先，我们刻画从 $(\Omega T_{A,b}, \mu)$ 的悬挂到圆 $\mathbb{T}$ 的同伦类。然后利用这一点计算相关的 Schwartzman 群。为此，固定一个紧致连通阿贝尔群 Ω，并记 $X_b := \Omega \times [0,1]/((\omega, 1) \sim (T_{A,b}\omega, 0))$ 为 $(\Omega T_{A,b})$ 的悬挂。

引理 3.1. 设 Ω 是一个紧致连通阿贝尔群，$A \in \mathrm{Aut}(\Omega)$，且$b \in \Omega$。对于 $\chi \in K := \ker(I - \widehat{A})$ 和 $\beta \in \pi^{-1}(\chi b)$，定义 $g_{\chi,\beta}\colon X_b \to \mathbb{T}$ 为

$$g_{\chi,\beta}([\omega, t]) = \chi\omega + \beta t \bmod \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

(a) 对于每个 $\chi \in K$ 和 $\beta \in \pi^{-1}(\chi b)$，$g_{\chi,\beta}$ 是一个定义良好的连续映射 p.

(b) 每个 $g \in C(X_0, \mathbb{T})$ 都与 $g_{\chi同伦, \beta}$ 其中某个 $\chi \in K$ 和 $\beta \in \mathbb{Z}$。[1](c) 如果 b 属于 Ω的单位元的道路连通分支，那么 X_b 与X_0同胚。(d) 如果 b 属于 Ω的单位元的道路连通分支，则有

$$C^\sharp(X_b, \mathbb{T}) = \{[g_{\chi,\beta}] : \chi \in K,\ \beta \in \pi^{-1}(\chi b)]\}.$$

证明。（a）给定 $\chi \in K$ 和 $\beta \in \pi^{-1}$（χb），$\chi \circ A = \chi$ 和 $\chi b = \beta$ 模 $\mathbb{Z}$ 意味着

$$g_{\chi,\beta}([\omega, 1]) = \chi\omega + \beta = \chi(A\omega + b) = g_{\chi,\beta}([A\omega + b, 0]),$$

这足以证明 $g_{\chi,\ \beta}$ 定义良好且连续。

（b）设给定 $g \in C$（X_0，$\mathbb{T}$）。我们分步骤证明 g 与某个 $g_{\chi,\ \beta}$ 同伦。

步骤 1。对于每个 t，令 $\Omega_t = \{[\omega, t] :\ \omega \in \Omega\}$ 表示 X_0中相应的纤维。由于 Ω 是紧致且连通的，从 Ω 到 $\mathbb{T}$ 的每个连续映射$\widehat{}$都恰好与 Ω 中的一个元素同伦[21]（另见 [18]，其中讨论了在更强假设下的早期工作）。因此，对于每个 $t \in \mathbb{T}$，映射 $g^{(t)} : \Omega \to \mathbb{T}$ 由下式给出

$$g^{(t)}(\omega) = g([\omega, t]) \tag{3.2}$$

与唯一的 $\chi_t \in \widehat{\Omega}$ 同伦。由于对于所有 t 和 s，$g^{(t)}$ 都与 $g^{(s)}$ 同伦，因此存在唯一的 $\chi \in \Omega$，使得对于所有 t，$\widehat{}$ 都成立。

步骤 2。由于 $g^{(0)}$ 与 χ 同伦，且与 $g^{(1)} = g^{(0)} \circ A$ 同伦，因此 χ 与 $\chi \circ A$ 同伦；由 [21] 可推出 $\chi \circ A = \chi$，也就是说，$\chi \in K$。

步骤 3。考虑圆 $S_0 = \{[0, t] :\ t \in \mathbb{R}\}$。根据拓扑学中的一个标准事实，存在 $\beta \in \mathbb{Z}$，使得 $[0, t] \mapsto g([0, t])$ 与映射 $[0, t] \mapsto \beta t$ 同伦。

步骤 4。取步骤 1 中的 χ 和步骤 3 中的 β。根据构造，存在与 g 同伦的 $g_\star \in C(X_0, \mathbb{T})$，使得 $g_\star[\omega, 0] = \chi\omega$ 且 $g_\star[0, t] = \beta t$。由于 g 与 $g_\star$ 同伦，注意对于所有 t，$g_\star^{(t)}$：$\omega \mapsto g_\star([\omega, t])$ 与 χ 同伦。

步骤 5。定义 $h := g_\star - g_{\chi,\beta}$。根据 $g_\star$ 和 $g_{\chi,\beta}$ 的定义，我们知道 h在集合 $\Omega_0 \cup S_0$ 上为零，并且 $h^{(t)}$：对每个 t，$\omega \mapsto h([\omega, t])$ 都是零伦。

我们将使用以下事实：从紧致度量空间 $Y$$\widetilde{}$到 $\mathbb{T}$ 的映射 f 是零伦的，当且仅当存在连续函数 $f : Y \to \mathbb{R}$$\widetilde{}$，使得 $\pi \circ f = f$，其中 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ 表示典范投影（事实上，下面我们将把这一原理同时应用于 $Y = \Omega$ 和 $Y = X$）；证明见例如 [8, 命题 4.10]。对于每个 $t \in [0, 1]$，存在连续的 $\widetilde{h}^{(t)} : \Omega \to \mathbb{R}$，使得

$$\pi \circ \widetilde{h}^{(t)} = h^{(t)} \text{ and } \widetilde{h}^{(t)}(0) = 0 \tag{3.3}$$

由 [8, 命题 4.10]。此外，这些提升各自都是唯一的：$h^{(t)}$的任意两个提升之差必为局部常值函数，而根据 Ω 的连通性，该函数必为常值函数。

[1]Here, $\mathbb{Z}$ arises because $b = 0$ and $\pi^{-1}(\{\chi 0\}) = \pi^{-1}(\{0\}) = \mathbb{Z}$.

接着，定义 $\widetilde{h}([\omega,t]) = \widetilde{h}^{(t)}(\omega)$，我们看到 $\widetilde{h}$ 满足 $\pi\circ\widetilde{h} = \sim h$。此外，我们断言 h 是连续的。为此，对每个 $\omega \in \Omega$

$$f_\omega : [0,1] \to \mathbb{T}, \quad s \mapsto h([\omega,s]).$$

$\sim$ $\sim$ $\sim$对于每个 ω，都存在唯一的提升 f_ω：$[0,1] \to \mathbb{R}$ 满足 $\pi\circ f_\omega = f_\omega$ 且 $f_\omega(0) = 0$。由于对于每个 t，$h([0,t]) = 0$，因此对于所有 s，我们有 $f_0(s) = 0$。综上，对于每个 $s \in [0,1]$，$\omega \mapsto f_\omega(s)$ 是连续的，并且满足 $\pi(f_\omega(s)) = h([\omega,s])$，因此根据唯一性，对于所有 s 和 ω，有 $\widetilde{f}_\omega(s) = \widetilde{h}^{(s)}(\omega)$。此外，由于 h 的一致连续性，如果赋予 $[0,1]$ 一致 $\sim$ 拓扑，则 $\omega \mapsto f_\omega \in C([0,1])$ 是连续的。由此可得 h 的连续性。最后，这意味着 h 是零伦的。

由于 $h = g_\star - g_{\chi,\beta}$ 是零伦的，且 $g_\star$ 与 g同伦，因此 g 与$g_{\chi,\beta}$ 同伦，证毕。

(c) 假设 b 属于单位元的道路连通分支，并选取 $\gamma : [0,1] \to \Omega$ 连续映射，使得 $\gamma(0) = 0$ 且 $\gamma(1) = b$。注意，$\gamma' := A^{-1}\circ\gamma$ 给出了一条从 0 到 $A^{-1}b$的道路。于是可以通过以下方式定义所需的同胚 $\varphi : X_b \to X_0$：

$$\varphi([\omega,t]) = [\omega + \gamma'(t), t]. \tag{3.4}$$

根据构造，$(\omega,t) \mapsto (\omega+\gamma'(t)\ t)$ 是一个从 $\Omega \times [0,1]$ 到其自身的连续映射。接下来只需检查 φ定义良好，这一点可由下式看出：

$$\begin{aligned}\varphi([\omega,1]) &= [\omega+\gamma'(1),1]\\ &= [\omega + A^{-1}b, 1]\\ &= [A\omega + b, 0]\\ &= \varphi([A\omega+b,0]).\end{aligned}$$

因此，φ 定义良好且连续。可以验证 φ 可逆且其逆连续，从而完成证明。

(d) 这恰好可由 (c) 部分按 [8] 中的方法推出。 □

引理 3.2。 在与引理 *3.1* 相同的假设和记号下，有

$$\mathfrak{F}_\nu([g_{\chi,\beta}]) = \beta \text{ for every } \chi \in K,\ \beta \in \pi^{-1}(\chi b). \tag{3.5}$$

证明。 证明与 [8, 引理 8。3] 的证明类似。固定 χ和 β，并记 $\phi = g_{\chi,\ \beta}$。对每个 $x = [\omega,s] \in X$，定义 ϕ_x：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如下：$\phi_x(t) = \phi(\tau^t x)$。

$\sim$ $\sim$其提升 ϕ_x：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，选取它使得 $\phi_x = \pi\circ\phi_x$ 其中 π 是典范投影映射。利用（3.1），可知我们可以取

$$\widetilde{\phi}_x(t) = \widetilde{\chi\omega} + \beta(s+t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

其中 $\widetilde{\chi\omega} \in \mathbb{R}$ 是来自 $\pi^{-1}(\chi\omega)$ 的任意元素。对于 ν-几乎处处的 x，我们有

$$\mathfrak{F}_\nu(\phi) = \lim_{t\to\infty} \frac{\widetilde{\phi}_x(t)}{t}.$$

固定这样一个 x 并利用（3.6）可得

$$\mathfrak{F}_\nu(\phi) = \lim_{t\to\infty} \frac{\widetilde{\chi\omega} + \beta(s+t)}{t} = \beta,$$

由此完成证明。 □

定理 *1.1* 的证明。 这由引理 3.1 和 3.2 推出。 □

4. The Doubling Map on the Dyadic Solenoid

作为定理 1.1 的推论，我们可以计算与溶圈上的仿射自同构相关联的标签。例如，我们可以证明，与二进制溶胶体上的倍增映射（见第 2.3 小节）相关联的标签集合为 $\mathbb{Z}$:

推论 4.1。设 Ω 为二进制溶胶体，$\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{Z}_2/\{(a,-a): a\in\mathbb{Z}\}$。设$T$为螺线群上的倍增映射，$T([r,s]) = [2r,2s]$ 且 μ 为 Ω 上的一个 T-遍历测度，则

$$\mathfrak{A}(\Omega, T, \mu) = \mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

乍一看，推论 4.1或许会让人觉得有些意外。事实上，[10] 的主要结果得出结论：$\mathfrak{F}([\phi]) \in \mathbb{Z}$ 对任意 $\phi\in C(X,\mathbb{T})$，只要它可分解为圆上的（不可逆）倍增映射的复合（回想一下，$\mathfrak{F}$ 表示 Schwartzman 同态）。当时，作者怀疑这一结论并不适用于螺线群上更一般的函数，并认为可以利用其局部康托结构，构造出具有非整数旋转数的连续不变截面。然而，推论 4.1 表明事实并非如此。

定理 1.1 适用于二进制溶胶体上的倍增映射。

命题 4.2。螺线群，$\mathcal{S}_1$ 是一个紧致连通阿贝尔群，倍增映射 T_1 是 $\mathcal{S}_1$ 上的一个自同构，并且 $\mathcal{S}_1$上存在一个支撑满的 T_1-遍历测度。

证明。 众所周知，二进制溶胶体是一个紧致连通阿贝尔群。因此不难验证倍增映射 T_1 是一个自同构。剩下的工作是构造一个支撑集为全空间的 T_1-遍历测度，其定义在 $\mathcal{S}_1$ 上。如 [11] 所述，存在一个 Bowen–Margulis 测度（以及一个 Sinai–Ruelle–Bowen 测度） μ，定义在 $\mathcal{S}_3$ 上，该测度支撑集为全空间且是 T_3-遍历的。利用命题 2.2 证明中讨论的映射将此测度向前推送，便可得到定义在 $\mathcal{S}_1$ 上且具有所需性质的测度。□

推论 4.1 的证明。命题 4.2 意味着，我们可以应用定理 1.1 来构造与 $(\mathcal{S}_1, T_1, \mu_1)$ 相关联的标记集合，其中 μ_1 是 $\mathcal{S}_1$ 上的一个完全支撑的 T_1-遍历测度。注意到定理 1.1 中定义的 K 在此情形下是平凡的，即可得到结论。事实上，如果 $\chi\in K$，那么对于所有 ω，都有 $\chi(2\omega) = \chi(\omega)$，这将迫使 $\chi(\omega) = 0$。□

5. Applications to Jacobi Matrices

作为我们研究结果的一个副产品，我们能够回答 [11]中提出的一个关于由倍增映射定义的遍历 Jacobi 矩阵的谱隙标记问题。回顾一下，一个动态定义的 Jacobi 矩阵族由

$$[J_\omega\psi](n) = \overline{p(T^{n-1}\omega)}\psi(n-1) + q(T^n\omega)\psi(n) + p(T^n\omega)\psi(n+1), \tag{5.1}$$

其中 $\omega \in \Omega$ 是一个紧致度量空间， $T\colon \Omega \to \Omega$ 是一个同胚， $p \in C(\Omega\ \mathbb{C})$，且 $q \in C(\Omega\ \mathbb{R})$。固定一个支撑为整个空间的 T-遍历博雷尔概率测度于 Ω 上，态密度测度和积分态密度分别由 (2.5) 和 (2.6) 给出。

推论 5.1。 设 Ω 是一个紧致连通阿贝尔群， $A \in$Aut(Ω)， b 属于 Ω 的单位元的道路连通分支，且 μ 是一个支撑为整个空间的$T_{A,\ b}$-遍历概率测度，定义在 Ω 上。给定连续的 p 和 q，令 $\{J_\omega\}$ 表示如 (5.1) 中所定义的相应 Jacobi 算子族。于是，

$$k(E) \in \left\{\beta : \beta \in \pi^{-1}(\chi b)\ \textit{for some}\ \chi \in \ker(\widehat{A} - I)\right\}$$

对于所有 $E \in \mathbb{R} \setminus \Sigma$，其中 Σ 表示该算子族的几乎处处谱， $\{J_\omega\}_{\omega\in\Omega}$而 k 表示相应的积分态密度。

证明。 这是定理 1.1 和 [11, 定理 11]的推论。 □

推论 5.2。 设 (Ω T) 表示二进制溶胶体上的倍增映射，且 μ 是一个具有全支撑的 T-遍历测度。给定连续的 p 和 q，令 $\{J_\omega\}$表示如 (5.1)中所述的相应 Jacobi 算子族。那么，几乎处处谱 Σ是连通的。

证明。 这是推论 4.1 和 5.1的推论。 □

利用推论5.2，我们可以应用 [10] 的方法，得出由二进制溶胶体上的倍增映射动态定义的半直线 Jacobi 矩阵，其本质谱没有空隙；这将 [11, 定理 16] 推广到更一般的情形。正如 [11, 备注 41], 中所述，仅凭 [11]中的成果无法做到这一点，这需要新的见解。

设 $\Omega = \mathbb{T}$, $T : \Omega \to \Omega$ 是倍增映射 $T\omega = 2\omega$，而 μ 表示 $\mathbb{T}$上的勒贝格测度。给定连续的 p 和 q，令 $\{J_\omega\}$ 表示由下式给出的相应半直线 Jacobi 算子族:

$$[J_\omega u](n) = \begin{cases} \overline{p(T^{n-1}\omega)}u(n-1) + q(T^n\omega)u(n) + p(T^n\omega)u(n+1) & n > 0 \\ q(\omega)u(0) + p(\omega)u(1) & n = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

请注意，在这种情况下我们无法讨论整直线算子，因为 T 不可逆。由 $\mathbb{T}$ 上的倍增映射生成的算子已被许多作者研究；例如参见 [1, 3, 4, 6, 10, 11, 12, 23]。

在这一设定下，存在 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ 使得 $\sigma_{\text{ess}}(J_\omega) = \Sigma$ 对 μ-几乎处处的 $\omega \in \Omega$ 成立。在[11], 中，作者询问这个几乎必然本质谱是否可能存在任何间隙。

推论 5.3。 取 Ω， T， p， q，以及 Σ 如上一段所述， Σ 是连通的。证明。这由推论 5.2 以及重复 [11,第 4]节中的论证得出。 □

Appendix A. A Disconnected Example

我们先给出以下有用的观察，它适用于任意有限动力系统。

定理 A.1. 设 Ω 是一个带有离散拓扑的有限集合， $T : \Omega \to \Omega$ 是一个双射，且 μ 是 Ω 上的一个 T-遍历概率测度。则有

$$\mathfrak{A}(\Omega, T, \mu) = \frac{1}{p}\mathbb{Z}, \tag{A.1}$$

其中 $p = \#\,\mathrm{supp}\ \mu$。

证明。 由遍历性， $\mathrm{supp}\ \mu = \{\omega, T\omega, \dots, T^{p-1}\omega\}$ 对某个 $\omega \in \mathrm{supp}\ \mu$成立，因此 $(\mathrm{supp}\ \mu, T|_{\mathrm{supp}\,\mu})$ 与移位 $S\colon \omega \mapsto \omega + 1$ 在 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上共轭。因此，利用命题 2.3 和 [8, 命题 6， 1],可得

$$\mathfrak{A}(\Omega, T, \mu) = \mathfrak{A}(\mathrm{supp}\,\mu, T|_{\mathrm{supp}\,\mu}, \mu) = \mathfrak{A}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, S, \eta) = p^{-1}\mathbb{Z},$$

其中 η 表示 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$上的归一化计数测度。 □

推论 A.2. 存在一个不连通群 Ω、一个仿射变换 $T = T_{A,\ b} : \Omega \to \Omega$，其中 $A \in \mathrm{Aut}(\Omega)$，且 b 属于单位元的道路连通分支，以及一个T-遍历测度 μ on Ω，使得

$$\mathfrak{A}(\Omega, T, \mu) \neq \left\{\beta : \beta \in \pi^{-1}(\chi b) \ \textit{for some}\ \chi \in \ker(\widehat{A} - I)\right\}. \tag{A.2}$$

特别地，定理 *1.1* 中不能去掉连通性的假设。证明。 考虑带有离散拓扑的 Ω $= \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 。众所周知且不难验证，Ω 上的仿射同胚具有如下形式 $T\omega = A\omega + b$，其中 $A \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$ （模 p 的单位群），且 $b \in \Omega$。由于 Ω 是全不连通的， b 属于 0 的道路连通分支，当且仅当 $b = 0$，因此我们只考虑 T_A ： $\omega \mapsto A\omega$。 Ω 的对偶群也同构于 Ω，通过以下$\widehat{\ }$对应关系 $m \in \Omega \leftrightarrow \chi_m \in \Omega$，其中

$$\chi_m(\omega) = m\omega/p.$$

$\widehat{\ }$通过这一对应关系，可以通过以下直接计算验证 $A\chi_m = \chi_{Am}$ ：

$$[\widehat{A}\chi_m](\omega) = \chi_m(A\omega) = m(A\omega)/p = (Am)\omega/p = \chi_{Am}(\omega).$$

$\widehat{\ }$特别地，记作 $K = \ker(A - I)$，我们有

$$K = \{\chi_m : Am = m \bmod p\mathbb{Z}\}.$$

对于自同构 T_A ： $\omega \mapsto A\omega$ 在 Ω 上 $= \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 且 A是模 p意义下的单位，令 (A.2) 的右端记为 $\mathfrak{G}(p, A)$。取 μ 为 $\{1, 2\}$上的归一化计数测度，我们看到 $\mathfrak{A}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, T_2, \mu) = \frac{1}{2}\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z} = \mathfrak{G}(3, 2)$。 □

References

[1] A. Avila、D. Damanik 和 Z. Zhang。由双曲变换生成势的薛定谔算子：I. 李雅普诺夫指数的正性。《数学发明》，231(2):851–927，2023。[2]J. Bellissard。固体物理中 K-代数的 C^*-理论。载于《统计力学与场论：数学方面》（格罗宁根，1985），《物理学讲义》第257卷，99–156页。Springer，柏林，1986。编者：T. C. Dorlas、N. M. Hugenholtz 和 M. Winnink。[3] K. Bjerkl¨ov。强扩张圆周自映射上的某些薛定谔余循环的李雅普诺夫指数为正。《数学物理通讯》，379(1):353–360，2020。[4] J. Bourgain 和 W. Schlag。强混合势下 Z 上薛定谔算子的安德森局域化。《数学物理通讯》，215(1):143–175，2000。[5] M. Brin 和 G. Stuck。《动力系统导论》。剑桥大学，2015。[6]V. Chulaevsky 和 T. Spencer。一类确定性势的李雅普诺夫指数为正。《数学物理通讯》，168(3):455–466，1995。[7] D. Damanik。由动力系统定义的势下的薛定谔算子。《遍历理论与动力系统》，37(6):1681–1764，2017。[8] D. Damanik 和 J. Fillman。一维遍历离散薛定谔算子的谱隙标记，2022。[9] D. Damanik 和 J. Fillman。一维遍历薛定谔算子 I：一般理论。《数学研究生教材》第221卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2022。[10] D. Damanik 和 J. Fillman。倍增映射模型的几乎必然本质谱是连通的。《数学物理通讯》，即将发表。[11] D. Damanik、J. Fillman 和 Z. Zhang。遍历 Jacobi 矩阵的 Johnson-Schwartzman谱隙标记。《谱理论杂志》，即将发表。[12]D. Damanik 和 R. Killip。倍增映射的李雅普诺夫指数几乎处处为正。《数学物理通讯》，257(2):287–290，2005。[13] F. Delyon 和 B. Souillard。有限差分算子的旋转数及其性质。《数学物理通讯》，89(3):415–426，1983。[14]E. Hewitt 和 K. A. Ross。《抽象调和分析》（第二版）。施普林格出版社，1979。[15] R. Johnson 和 J. Moser。几乎周期势的旋转数。《数学物理通讯》，84(3):403–438，1982。[16] R. A. Johnson。有界系数线性微分算子的指数二分性与旋转数。《微分方程杂志》，61(1):54–78，1986。[17] S. A. Morris。Pontryagin对偶与局部紧阿贝尔群的结构。剑桥大学出版社，剑桥—纽约—墨尔本，1977。伦敦数学会讲义系列，第29卷。

[18]R. L. Plunkett。关于从拓扑群到圆的映射的一个定理。《密歇根数学杂志》，2(2):123 – 125，1953 年。[19] A. M. Robert。《p 进分析课程》。Springer，2000 年。[20] W. Rudin。群上的傅里叶分析。Wiley 经典文库。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1990 年。重印自 1962 年原版，Wiley-Interscience 出版物。[21] W. Scheffer。与同态同伦的拓扑群之间的映射。《美国数学会会刊》，33:562–567，1972 年。[22] S. Schwartzman。渐近环。《数学年刊》（第 2 辑），66:270–284，1957 年。[23] Z. Zhang。由倍增映射生成的单调势的李雅普诺夫指数的一致正性。*arXiv:1610.02137*。
Department of Mathematics, Rice University, Houston, TX 77005, USA电子邮箱：damanik@rice.edu
Department of Mathematics, Rice University, Houston, TX 77005, USA电子邮箱：irist@rice.eduDepartment of Mathematics, Texas State University, San Marcos, TX 78666,USA电子邮箱：fillman@txstate.edu