数学不等式与
应用
www.ele-math.com

arXiv:2303.03310v1 [math.CA] 6 Mar 2023

基于拉格朗日型恒等式的交织型柯西–施瓦茨型不等式

Iosif Pinelis

Submitted to Math. Inequal. Appl.

Abstract. 基于一个看似新颖的拉格朗日型恒等式，本文证明了一个柯西–施瓦茨型不等式。上述恒等式是通过使用某些“宏观”变量得到的；希望这种方法可用于证明或推导其他恒等式和不等式。

1. 结果

设 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 为任意实数。众所周知的拉格朗日恒等式（例如参见 [3]）

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

立即推出柯西–施瓦茨不等式（例如参见 [7]）

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^3)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2.$$

本文将证明以下基于一个看似新颖的拉格朗日型恒等式、表面上也是新颖的柯西–施瓦茨型不等式。

Proposition 1.

$$\begin{aligned}&(a_1^2+b_2^2+b_3^2)(a_2^2+b_3^2+b_1^2)(a_3^2+b_1^2+b_2^2)\\&\quad\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\,(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\\&\quad+\tfrac{1}{2}\left[b_1^2(a_2b_3-a_3b_2)^2+b_2^2(a_3b_1-a_1b_3)^2+b_3^2(a_1b_2-a_2b_1)^2\right].\end{aligned}\tag{1}$$

请注意，与柯西–施瓦茨不等式左边的情形不同——其中 a_i 和 b_i 分别出现在两个因子中——在不等式 (1) 左边的三个因子中， a_i 和 b_i 是交错出现的。

Mathematics subject classification(2010)：主要分类 26D15；次要分类 26D20。
Keywords and phrases：柯西–施瓦茨型不等式，拉格朗日型恒等式。

2. 证明

~命题 1 的证明。令 d 表示不等式 (1) 左边与右边之差，则该不等式可改写为 $d \geqslant 0$。注意， d 是一个多项式（含 6 个变量，次数为 6）。因此，原则上可以使用一种适当的已知工具，以完全算法化的方式验证不等式 (1)。其中一种工具是通过柱形代数分解进行量词消去（例如参见 [2]），该方法基于塔斯基理论 [8]；例如，在 Mathematica 中，这一理论通过 Reduce[] 及相关命令实现。另一种做法是尝试实代数几何中的各种 Positivstellensatz 定理（例如参见 [5, 1, 4]），它们可以为一个在由多项式不等式组定义的集合（在 $\mathbb{R}$ 上）上确为正的多项式提供所谓的正性证书。然而，~我们的多项式 d 过于复杂，若无大量人工干预，这些工具无法成功处理。

为避免~~对~~~~d~~~~进行~~~~一~~~~次~~~~改~~~~写~~——每轮均由人工完成，并用 Mathematica 验证。关于这一多步改写的完整细节，见 6 页的 Mathematica 笔记本 1stRewriting.nb 及其 PDF 图像 1stRewriting.pdf；它们收录于 ZIP 文件 MathematicaVerfication.zip 中，可从 https://works.bepress.com/iosif-pinelis/22/ 下载。之后，为验证改写形式下的不等式 (1)，所提及的 Mathematica 命令 Reduce[] 耗时约 23 分钟；对于一台当代计算机（配备 3.5 GHz 中央处理器）而言，这已经是很长的时间。因此可以推测，若将该命令的执行过程转写成常规数学文字，可能需要数百页甚至数千页。

幸运的是，在所提及的 ZIP 文件 MathematicaVerfication.zip 中的 Mathematica 笔记本 2ndRewriting.nb 及其 PDF 图像 2ndRewriting.pdf 展示了另外几轮改写，并由此得到了一个关键恒等式，借此可以相当迅速且轻松地证明不等式 (1)。

为陈述这一恒等式，首先注意到，不失一般性（wlog），所有的 a_i 和 b_i 均非零。对于 $i = 1, 2, 3$，引入新的“宏观”变量

$$x_i := a_1 a_2 a_3 / a_i, \quad y_i := b_1 b_2 b_3 / b_i, \quad p_i := (x_i - y_i) y_i, \quad z_i := y_i^2 \geqslant 0,$$

然后

$$c_1 := p_2^2 + p_2 p_3 + p_3^2, \quad c_2 := p_1^2 + p_1 p_3 + p_3^2, \quad c_3 := p_2^2 + p_2 p_1 + p_1^2. \tag{2}$$

注意， $x_1 x_2 x_3 = (a_1 a_2 a_3)^2 > 0$， $y_1 y_2 y_3 = (b_1 b_2 b_3)^2 > 0$， $c_1 \geqslant 0$，以及 $c_2 \geqslant 0$，且 $c_3 \geqslant 0$。此外，

$$(p_1 + z_1)(p_2 + z_2)(p_3 + z_3) \geqslant 0. \tag{3}$$

所提到的关键恒等式为

$$y_1 y_2 y_3 \tilde{d} = d := p_1 p_2 p_3 + c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3. \tag{4}$$

现在显而易见，这个恒等式很难推导。不过，验证它却相当直接（只是比较繁琐）。最好使用现有的某种

计算机代数程序进行验证。例如，Mathematica 只需约 0.15 秒即可检验恒等式 (4)；详情请参见同一 ZIP 文件 MathematicaVerfication.zip 中的 Mathematica 笔记本 checkingTheIdentity.nb 和/或其 PDF 图像 checkingTheIdentity.pdf。

由于 $y_1y_2y_3 > 0$，d 在符号上等于 d_0，因此，只需证明：对于任意实数 p_i，满足（2）的 c_i，以及满足（3）的任意非负 z_i，都有 $d \geqslant 0$ –。

注意，在不失一般性的情况下 $p_1p_2p_3 < 0$ –否则，由于 c_i 和 z_i 均为非负数，所需不等式 $d \geqslant 0$ 可立即得到。因此，我们可以假设 p_i 均不为零，从而 c_i 均严格为正。

取任意非零实数 p_i 和满足（3）的任意非负 z_i。然后固定 z_1 和 z_2，并在 z_3 保持非负且（3）成立的情况下使 z_3 递减；显然，只有当 z_3 的值变为 0 或 $-p_3$ 时，这一过程才会停止，而在后一种情况下，必有 $-p_3 > 0$。此外，由于对于所有 i都有 $c_i > 0$，该过程完成后， d 的值不会增加。

接下来，我们可以类似地通过减小 z_2 （而不是 z_3）来继续，然后再减小 z_1。

现在，设 (z_1, z_2, z_3) 是 d 的任意一个极小值点，并满足关于 z_i 的给定条件。由上述推理可知，对于每个 $i = 1$， $z_i \in \{0, -p_i\}$ 2、3；此外，若在该 $z_i = -p_i$ 下某个 i，则必有 $-p_i > 0$。因此，利用指标排列所具有的对称性，只需考虑以下四种情形：

(i) $z_1 = -p_1 > 0$, $z_2 = -p_2 > 0$, $z_3 = -p_3 > 0$；(ii) $z_1 = -p_1 > 0$, $z_2 = -p_2 > 0$, $z_3 = 0$；(iii) $z_1 = -p_1 > 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$；(iv) $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$。

在情形（i）中，$\min_{z_1,z_2,z_3} d = -(p_1 + p_2)(p_1 + p_3)(p_2 + p_3) > 0$。

在情形（ii）中，$\min_{z_1,z_2,z_3} d = -p_1p_2(p_1 + p_2) - p_1p_2p_3 + (-p_1 - p_2)p_3^2$，它是关于 p_3 的凸二次多项式，判别式为 $-p_1p_2(4p_1^2 + 7p_1p_2 + 4p_2^2) < 0$，因此再次有$\min_{z_1,z_2,z_3} d > 0$。

在情形（iii）中，$\min_{z_1,z_2,z_3} d = -p_1(p_2^2 + p_3^2) > 0$。

在情形（iv）中，条件（3）变为 $p_1p_2p_3 \geqslant 0$，这与假设 $p_1p_2p_3 < 0$矛盾。

因此，在所有可行情形中，$\min_{z_1,z_2,z_3} d \geqslant 0$，且（1）得证。 □

3. 讨论

请注意，不等式 (1) 左侧的每个因子都是三项之和。若能将此不等式推广为类似的“交织型”不等式，使其涉及三项以上的和，将会很有意思（但可能非常困难）。

正如命题 1 的证明中所指出的，不失一般性，所有 b_i 都非零。引 -

入 $k_i := a_i/b_i$ 后，我们可以将不等式 (1) 改写如下：

$$\begin{aligned}(k_1^2b_1^2+b_2^2+b_3^2)(k_2^2b_2^2+b_3^2+b_1^2)(k_3^2b_3^2+b_1^2+b_2^2)\\ \geqslant (k_1b_1^2+k_2b_2^2+k_3b_3^2)^2\,(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\\ +\tfrac{1}{2}\,b_1^2b_2^2b_3^2\left[(k_1-k_2)^2+(k_2-k_3)^2+(k_1-k_3)^2\right]\end{aligned} \tag{5}$$

对于所有实数 b_i 和 k_i。

REMARK 1. 式 (5) 中的常数因子 $\frac{1}{2}$，以及因此式 (1) 中的常数因子，是最优的——也就是说，它是可能的最大值。事实上，若将式 (5) 中的因子 $\frac{1}{2}$ 替换为任意实常数 $C > \frac{1}{2}$，那么当 $k_1 = k_2 = 0$ 时，不等式 (5) 左右两边之差将为 $(1-2C)$ $b_1^2b_2^2b_3^2k_3^2 + \left(b_1^2+b_2^2\right)\left(b_1^2+b_3^2\right)\left(b_2^2+b_3^2\right)$；若 $b_1b_2b_3 \neq 0$，该差在 $k_3 \to \infty$ 时将趋于 $-\infty$。

还可以注意到，式 (1) 立即推出以下更简单但较弱的“交织”不等式：

$$(a_1^2+b_2^2+b_3^2)(a_2^2+b_3^2+b_1^2)(a_3^2+b_1^2+b_2^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\,(b_1^2+b_2^2+b_3^2).$$

不等式 (1) 是在 MathOverflow 网站 [6] 上提出的猜想，并由本文作者在那里证明。

4. 结论

回顾命题 1 的证明中的情形 (i)–(iv) 以及注释 1，我们注意到，d 或 d的极小值和近似极小值存在相当多种完整的情形。这或许至少可以部分解释为何难以采用标准方法，例如柱形代数分解以及 Positivstellens¨atze 所提供的正性证书；这些方法在命题 1 的证明开头已有提及。

本文展示的“宏观”变量方法，或许在其他方法难以奏效的场合也能发挥作用。如果计算机也能像学会上述标准方法那样学会这种方法，将会非常有意义。

参考文献

[1] G. Cassier. 关于实数集 $\mathbb{R}^n$ 上的紧集矩问题及多变量多项式的分解。 *J. Funct. Anal.*，58(3):254–266，1984。

[2] G. E. Collins. 通过柱形代数分解消去实闭域上的量词。载于 *Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition (Linz, 1993)*，符号计算专著丛书，页码 85–121。施普林格，维也纳，1998。[3] R. E. Greene 和 S. G. Krantz。 *Function theory of one complex variable* 40 *Graduate*，卷数为 。美 *Studies in Mathematics* 2006 国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，第三版，。[4] D. Handelman。紧群的正多项式与乘积型作用。 *Mem. Amer.*，( ):xi，。[5] *Math. Soc.* 54 320 +79 1985

J.-L. Krivine。预序环。 *J. Analyse Math.*，12:307–326，1964。

[6] MathOverflow。一个关于拉格朗日恒等式的不等式。网址：http://mathoverflow.net/q/239243（版本：2016-06-22）。[7] J. M. Steele。 *The Cauchy-Schwarz master class*。MAA 问题书系列。美国数学协会，华盛顿特区；剑桥大学出版社，剑桥，2004。数学不等式技巧导论。[8] A. 塔斯基。 *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*。兰德公司，圣莫尼卡，加利福尼亚州，1948。

Department of Mathematical Sciences
Michigan Technological University
Houghton, Michigan 49931, USA
e-mail: ipinelis@mtu.edu通讯作者：Iosif Pinelis