arXiv:2303.03312v1 [math.AP] 6 Mar 2023

关于平面上各向异性非线性薛定谔模型的孤立波

TIANXIANG GOU、HICHEM HAJAIEJ 和 ATANAS G. STEFANOV

摘要。本文研究聚焦型各向异性非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}u_t - \partial_{xx}u + (-\partial_{yy})^s u = |u|^{p-2}u \quad \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$$

适用于 $0 < s < 1$ 和 $p > 2$。这里的方程具有各向异性，这意味着解沿x轴和y轴的色散不同。我们证明，局域时间周期波（即形式为$u = e^{-\mathrm{i}\omega t}\phi$的解）在$p \geq p_s := 2(1+s)/(1-s)$的情形下不存在，但在互补情形 $2 < p < p_s$下确实存在。事实上，我们通过变分方法构造了这些波，并确立了若干关键性质。尤为重要的是，我们完整刻画了它们的谱稳定性性质。我们的研究很容易推广到高维情形。

我们还在一个自然的弱非退化假设下证明了这些波的唯一性。实际上，当s 接近 1 时，该假设可以去除，从而得到在全部参数范围内这些波的唯一性。

1. 引言

本文研究定义在$\mathbb{R}^2$上的聚焦型各向异性非线性薛定谔方程，如下所示

$$\mathrm{i}u_t - \partial_{xx}u + (-\partial_{yy})^s u = |u|^{p-2}u \quad \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2. \tag{1.1}$$

其中 $s \in (0,1)$，$p > 2$，分数阶拉普拉斯算子 $(-\partial_{yy})^s$由 $\mathscr{F}((-\partial_{yy})^s u)(\xi) = |\xi_2|^{2s}\mathscr{F}(u)(\xi)$ 所刻画，其中 $\xi = (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2$，$\mathscr{F}$表示傅里叶变换。方程 (1.1) 最早由 [17], 提出，其中作者讨论了定义在 $\mathbb{R}_x\times\mathbb{T}_y$上、满足 $s = \frac{1}{2}$ 和 $p = 4$的 (1.1) 的柯西问题解的散射。随后，在 [1], 中，研究了当$\frac{1}{2} < s < 1$ 且 $2 < p < 6$时，(1.1) 的柯西问题解的适定性，以及 (1.1) 的孤立波的存在性和轨道稳定性。

由此引出一个问题，即方程 (1.1) 的特殊解是否存在、是否唯一以及是否稳定，具体而言，是指具有如下形式的孤子 $u = e^{-\mathrm{i}\omega t}\phi$，其中 $\omega > 0$。在适当意义下，这些解自然满足以下椭圆方程

$$-\partial_{xx}\phi + (-\partial_{yy})^s\phi + \omega\phi = |\phi|^{p-2}\phi \quad \text{in } \mathbb{R}^2. \tag{1.2}$$

这里我们实际关注的是波的谱稳定性，这不同于 [1] 中讨论的轨道稳定性。更具体地，取$u = e^{-\mathrm{i}\omega t}(\phi + z)$，其中 $\phi > 0$，将其代入 (1.1) 并展开至$O(z)$ 阶，我们得到线性特征值问题

$$\mathrm{i}z_t + \omega z - \partial_{xx}z + (-\partial_{yy})^s z - (p-2)\phi^{p-2}\Re z - \phi^{p-2}z = 0.$$

2010 数学学科分类。 35J20；35B35；35R11。关键词与短语。 谱稳定性、唯一性、非退化性、孤立波、各向异性 NLS。致谢。 Tianxiang Gou 感谢国家自然科学基金委员会（项目编号：12101483）和中国博士后科学基金会（项目编号：2021M702620）的资助。ATANAS G. STEFANOV 感谢美国国家科学基金会数学科学部（NSF-DMS）项目（项目编号：2204788）的部分资助。

将实部和虚部分开，并采用特征值设想$z(t,x,y)=e^{\lambda t}(z_1(x,y)+\mathrm{i}z_2(x,y))$，由此可得

$$\begin{cases} -\partial_{xx}z_1+(-\partial_{yy})^s z_1+\omega z_1-(p-1)\phi^{p-2}z_1=\lambda z_2,\\ -\partial_{xx}z_2+(-\partial_{yy})^s z_2+\omega z_2-\phi^{p-2}z_1=-\lambda z_1. \end{cases} \tag{1.3}$$

用矩阵形式表示

$$\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathscr{L}_{+,s} & 0\\ 0 & \mathscr{L}_{-,s} \end{pmatrix}\vec{z}=\lambda\vec{z}, \tag{1.4}$$

其中

$$\mathscr{L}_{+,s}=-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^s+\omega-(p-1)\phi^{p-2},\quad \mathscr{L}_{-,s}=-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^s+\omega-\phi^{p-2}.$$

直接观察可知，$\mathscr{L}_{s,-}[\phi]=0$；而对$x$、$y$变量求导可得$Ker(\mathscr{L}_{s,+})\subset span[\phi_x,\phi_y]$。相对容易证明[1]，$Ker(\mathscr{L}_{s,-})=span[\phi]$，这主要归因于$\mathscr{L}_{s,-}$所具有的Perron-Frobenius性质以及$\phi$的正性。然而，要证明$Ker(\mathscr{L}_{s,+})=span[\phi_x,\phi_y]$确实成立，则困难得多。事实上，由于所研究问题具有各向异性特征，这在该理论中是众所周知的难点，通常称为波的非退化性。对于$s=1$且$2<p<2^*$的情形，文献 [12] 已验证经典问题基态具有这一性质。

1.1. 主要结果。 我们从存在性结果开始。为此，我们需要引入轴对称函数的概念。我们称函数 ϕ: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是轴对称的，如果对于每个 y，函数 $x\mapsto\phi(x,y)$ 关于对称，并且对于每个 x，函数 $y\mapsto\phi(x,y)$ 关于对称。我们还记作

$$L^2_a(\mathbb{R}^2):=\left\{\phi\in L^2(\mathbb{R}^2):\phi \text{ is axially symmetric}\right\}.$$

定理 1.1。 （孤立波的存在性）设 $s\in(0,1),\omega>0$且 $2<p<p_s=\frac{2}{(1+s)1-s}$。则存在一个正的基态 ϕ，它是波形方程(1.2)的解，并且是轴对称的。事实上，解 ϕ 与其施泰纳重排重合，具体而言，对于每个 x 和 y，函数 $\phi(x,\cdot)$ 和 $\phi(\cdot,y)$ 分别呈钟形，即在$(0,\infty)$中为正、对称且衰减。此外，这样的解具有[2] $\phi\in H^{2,2s}(\mathbb{R}^2)$，并满足以下逐点估计

$$\begin{cases} |\partial_x^\alpha\phi(x,y)|\le C_\alpha e^{-\sqrt{\omega}|x|}(1+|y|)^{-1-2s},\ \alpha\in\mathbb{N},\\ |\partial_x^\alpha\partial_y\phi(x,y)|\le C_\alpha e^{-\sqrt{\omega}|x|}(1+|y|)^{-2-2s},\ \alpha\in\mathbb{N}, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中，$H^{2,2s}(\mathbb{R}^2)$ 由 $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ 在范数 (2.3下的完备化定义).

我们所说的 (1.2) 的基态，是指在所有解中具有最小能量的 (1.2) 的解。

注记 1.1. 这里我们将利用底层的 *Weinstein* 泛函来证明这些波的存在性。这种方法与 [1]，中所采用的方法不同；后者将这些波作为能量空间中能量函数的临界点来获得。定理 *1.1* 的存在性证明本质上是变分性的，分为若干步骤。首先，我们构造 *Weinstein* 型变分问题的极小化子，见命题 *3.1*。这些极小化子经适当倍数缩放后，便是 (1.2) 的解，见命题 *3.3*；此外，它们还具有多种额外的谱性质，这些性质与后续关于这些波的稳定性的讨论相关。

[1]我们将在下文中这样做，见命题 3.3。[2]

[2]定义见下文第 2 节。

衰减估计 (1.5) 的建立基于这样一个思路：由于 ϕ 是 (1.2) 的解，因此 ϕ 的衰减率与格林函数 $\left(\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s}+\omega\right)^{-1}$ 的核的相应衰减率一致。

下一个结果涉及条件 $\omega>0$ 和 $2<p<p_s$ 的必要性。更确切地说，有以下命题。

命题 1.1. 设 $s\in(0,1)$，$p>2$ 且 ϕ 是方程 (1.2) 的正解，具有性质$\phi\in L_x^1L^{p-1}y(\mathbb{R}^2)$ 并且与其施泰纳重排相同，则 $\omega>0$。此外，若 $\phi\in H^{1,s}(\mathbb{R}^2)\cap L^p(\mathbb{R}^2)$，则 $2<p<p_s$，其中

$$L_x^1L_y^{p-1}(\mathbb{R}^2):=\left\{\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ is\ measurable:\left\|\|u\|_{L_y^{p-1}}\right\|_{L_x^1}<\infty\right\}$$

而 $H^{1,s}(\mathbb{R}^2)$ 是与 (1.1) 相关的能量空间，定义为 $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ 在范数 (2.1)或 (2.2)下的完备化。

以下结果讨论定理 1.1 中构造的孤立波在如下意义下的稳定性。

定义 1.1。 若波 $e^{-i\omega t}\phi$ 的特征值问题 (1.4)不存在满足 $\mathrm{R}\lambda>0$ 的特征值 $\lambda\in\mathbb{C}$，则称该波是谱稳定的。否则，称该波是谱不稳定的。

定理 1.2。 （孤立波稳定性的完整描述）设 $0<s<1$、$\omega>0$ 以及$2<p<p_s$。则定理 *1.1* 中描述的波是谱稳定的，当且仅当 $2<p\le p_m:=6s+2s+1$，并且在互补范围 $p_m<p<p_s$ 内谱不稳定。

现在陈述我们的唯一性结果。遗憾的是，这些结果存在一些局限性。更准确地说，我们有以下定理，其证明通过充分采用 [6, 7]，中提出并在 [8] 中近期推广的思想而完成。

定理 1.3。 （条件唯一性）设 $0<s<1$、$\omega>0$ 以及 $2<p<p_s$。则 (1.2) 的基态在平移意义下是唯一的，前提是线性化算子

$$\mathscr{L}_{+,s}:=-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s}+\omega-(p-1)\phi^{p-2}$$

在 $L_a^2(\mathbb{R}^2)$ 上具有平凡核，其中 $\phi\in H^{1,s}(\mathbb{R}^2)$ 是 (1.2) 的基态。

注意，本文施加的条件，即 $Ker(\mathscr{L}_{+,s})\cap L_a^2(\mathbb{R}^2)=\{0\}$，比上文讨论的 ϕ 的非退化性更弱。另一方面，由于对于 $s=1$ 弱非退化性成立，自然会问：至少在 $s=1$ 的某个邻域内，唯一性是否成立。事实证明确实如此，这正是我们下一个结果的主题。

定理 1.4。 （当 s 接近 1 时的唯一性）设 $0<s<1$、$\omega>0$ 以及 $2<p<p_s$。则存在 $0<s_0<1$，使得对于任意 $s_0<s<1$，(1.2) 的基态在平移意义下唯一。此外，还有 $Ker(\mathscr{L}_{+,s})=span\{\phi_x,\phi_y\}$。

注 1.2。 定理 *1.3* 和 *1.4* 在某些假设下，部分回答了 [1] 提出的关于基态唯一性和非退化性的开放问题。

本文安排如下。在第 2 节中，我们介绍一些预备概念，以及若干相关的 Gagliardo-Nirenberg 型不等式和 Pohozaev 恒等式。由此，我们建立波存在的必要条件，如命题 1.1 所列。在第 3 节中，我们首先通过 Weinstein 泛函方法，在区域 $2<p<p_s$ 内对波进行变分构造。随后，定理 1.1 作为命题 3.3 和注记 1.1 的直接推论得以确立

。接着，我们概述哈密顿指标计数理论，该理论有助于我们确立波的稳定性。具体而言，我们证明，稳定的波恰好对应于范围 $2 < p \le p_m$。由此完成定理 1.2 的证明。在第 4 节中，我们在弱非退化条件下证明基态的唯一性，并给出定理 1.3 和 1.4 的证明。

2. 预备知识

2.1. 傅里叶变换、分数阶微分算子与函数空间。 首先，我们引入标准的勒贝格空间范数

$$\|f\|_q = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

为进一步明确符号，我们分别将傅里叶变换及其逆变换定义如下

$$\hat{u}(\xi) = \mathscr{F}[u](\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx; \;\; u(x) = \mathscr{F}^{-1}[u] = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi.$$

这当然对所有施瓦茨函数 f 都成立，并可适当地推广到 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$。$\widehat{\quad}$ $\hat{}$ 关于导数算子，显然 $\partial_{x_j} f(\xi) = 2\pi i \, \xi_j f(\xi), j = 1, 2, \ldots, d$，因此$\widehat{\Delta f}(\xi) = -4\pi^2|\xi|^2 \hat{f}(\xi)$，其中 $\xi \in \mathbb{R}^d$。可以证明，$-\Delta$ 是一个非负自伴算子$\widehat{\quad}$，并且具有定义良好的分数幂。其优雅的表示形式为 $(-\Delta)^s f(\xi) = (4\pi^2|\xi|^2)^s \hat{f}(\xi)$，这至少对所有 $s > 0$ 都有定义。事实上，可以通过如下范数引入 L^p索伯列夫空间 $W^{s,q}(\mathbb{R}^d)$，其中 $s > 0, 1 < q < \infty$[3]

$$\|f\|_{W^{s,q}(\mathbb{R}^d)} := \|(-\Delta)^s f\|_q + \|f\|_q.$$

此外，我们定义算子 $D^{x_j} := \sqrt{-\partial_{x_j x_j}}$，并且本文中将需要如此定义；或者，作替代地，$\widehat{D^{x_j} f}(\xi) = 2\pi|\xi_j|\hat{f}(\xi)$。由于我们将专门处理二维情形，因此采用傅里叶对应变量 $x \to \xi, y \to \eta$。为便于后文引用，我们为能量空间 $H^{1,s}(\mathbb{R}^2)$ 的动能部分引入一个特殊记号。即，

$$\|u\|_{H^{1,s}(\mathbb{R}^2)} := \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_x u(x,y)|^2 + |D_y^s u(x,y)|^2 + |u(x,y)|^2 \, dx dy\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1}$$

或者，也可用傅里叶变换给出一个等价范数：

$$\|u\|_{H^{1,s}(\mathbb{R}^2)} := \left(\int_{\mathbb{R}^2} (|\xi|^2 + |\eta|^{2s} + 1)|\hat{u}(\xi,\eta)|^2 \, d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

还可以容易地定义另一个相关空间

$$\|u\|_{H^{2,2s}(\mathbb{R}^2)} := \left(\int_{\mathbb{R}^2} (|\xi|^2 + |\eta|^{2s} + 1)^2|\hat{u}(\xi,\eta)|^2 \, d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

下文为简便起见，记作$D_y^s := (-\partial_{yy})^{s/2}$。以下由 Esfahani 在[2]中建立的最新 Gagliardo-Nirenberg 型不等式，是本讨论中一个非常重要的要素。

[3]这些表达式对于施瓦茨函数 f 是良好定义的，但可扩展为对 $L^q(\mathbb{R}^d)$ 中元素的一个线性子空间而言有意义的表达式（这也正是 $W_{s,q}(\mathbb{R}^d)$ 的定义）。

若存在定义于 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ 上的函数 φ，使得函数 $u(x,y) = \varphi(|x|,|y|)$，则称$u$为轴对称函数。我们用$H^{1,s}_a(\mathbb{R}^2)$表示$H^{1,s}(\mathbb{R}^2)$中的轴对称函数。

引理 2.1. [2, 定理 1.1] 设 $0 < s < 1$ 且 $2 \le q \le p_s$。那么存在一个常数 $C_{q,s} > 0$使得

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q \, dxdy \le C_{q,s} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 \, dxdy \right)^{\frac{q}{2} - \frac{(q-2)(s+1)}{4s}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_x u|^2 \, dxdy \right)^{\frac{q-2}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |D_y^s u|^2 \, dx \right)^{\frac{q-2}{4s}}. \tag{2.4}$$

注意，(2.4) 右侧的所有指数均为正数[4]，对于 $2 < q < p_s$。将 (2.4) 两边提升至q次幂，可得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q \, dxdy \right)^{\frac{2}{q}} \le C \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 \, dxdy \right)^{1 - \frac{2(q-2)(s+1)}{4sq}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_x u|^2 \, dxdy \right)^{\frac{2(q-2)}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |D_y^s u|^2 \, dx \right)^{\frac{2(q-2)}{4sq}}.$$

因此，对于所有满足 q: $2 < q < p_s$ 的情形，我们可以应用杨氏不等式，得到以下估计:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q \, dxdy \right)^{\frac{2}{q}} \le C \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\partial_x u|^2 + |D_y^s u|^2 + |u|^2 \right) dxdy, \tag{2.5}$$

这将在后文中派上用场。注意，这等价于索博列夫型嵌入$H^{1,s}(\mathbb{R}^d) \to L^q(\mathbb{R}^d)$，该嵌入在假设 $s > 0$且 $2 < q \le p_s$ 下成立。 [2, 备注 2.2] 中也指出了这一点。

2.2. **Pohozaev 恒等式及其推论**。 我们有以下引理，它给出了对充分局域化的 (1.2) 解的必要条件（通常称为 Pohozaev 恒等式）。

引理 2.2。 设 $u \in H^{1,s}(\mathbb{R}^2) \cap L^p(\mathbb{R}^2)$ 是 (1.2) 的一个解。则

$$s \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_x u|^2 \, dxdy + \int_{\mathbb{R}^2} |D_y^s u|^2 \, dxdy \right) = \frac{(s+1)(p-2)}{2p} \int_{\mathbb{R}^2} |u|^p \, dxdy \tag{2.6}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_x u|^2 \, dxdy + \int_{\mathbb{R}^2} |D_y^s u|^2 \, dxdy + \omega \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} |u|^p \, dxdy. \tag{2.7}$$

在证明引理 2.2 之前，我们先推导几个关系式。

2.2.1. 必要条件：命题 *1.1* 的证明。 首先，由 (2.6) 显然可知 $p > 2$。结合 (2.6) 和 (2.7)，我们得到 $\|u\|_2$ 与 $\|u\|_p$ 之间的关系式:

$$\omega \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 \, dxdy = \left(1 - \frac{(s+1)(p-2)}{2ps} \right) \int_{\mathbb{R}^2} |u|^p \, dxdy.$$

由此可得 $1 - \frac{(s+1)(p-2)}{2ps} > 0$，这等价于 $p < p_s$。显然，这表明条件 $2 < p < p_s$ 是必要的，这也是命题 1.1 的结论之一。

现在我们证明 $\omega > 0$ 也是必要的。从 (1.2) 出发，对y变量积分。引入

$$\psi(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,y) dy, \quad V(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{p-1}(x,y) dy,$$

[4]当 u 的指数在 $q = p_s$ 时趋于零。

我们得到它们满足

$$-\psi'' + \omega\psi = V. \tag{2.8}$$

注意，根据对 ϕ 的假设，即它等于其施泰纳重排，可知 ψ 和V是钟形的，也就是说，它们在 $(0,\infty)$ 上为正、对称且递减。显然， $\omega = 0$ 在 (2.8) 中立即会导致问题，因为

$$0 = -\int_{\mathbb{R}} \psi''\,dx = \int_{\mathbb{R}} V(x)\,dx > 0,$$

矛盾。对于 $\omega = -\sigma^2$、$\sigma > 0$，我们看到 (2.8) 特别蕴含

$$\int_{\mathbb{R}} V(x)\sin(\sigma x)dx = 0.$$

由对称性，必有

$$\int_0^{\infty} V(x)\sin(\sigma x)dx = 0,$$

但我们声称这与之矛盾。事实上，由于V为正且衰减，我们有

$$\int_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{\frac{(2k+1)\pi}{\sigma}} V(x)\sin(\sigma x)dx > -\int_{\frac{(2k+1)\pi}{\sigma}}^{\frac{(2k+2)\pi}{\sigma}} V(x)\sin(\sigma x)dx, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

由此可得

$$0 = \int_0^{\infty} V(x)\sin(\sigma x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{\frac{(2k+1)\pi}{\sigma}} V(x)\sin(\sigma x)dx + \int_{\frac{(2k+1)\pi}{\sigma}}^{\frac{(2k+2)\pi}{\sigma}} V(x)\sin(\sigma x)dx\right) > 0.$$

为了完成证明，现在还需要完成 Pohozaev 恒等式的证明。

2.2.2. 引理 *2.2* 的证明。 首先，由定理 1.1 可知，$x\partial_x u$，$y\partial_y u \in L^2(\mathbb{R}^2)$。将 (1.1) 两边乘以 $y\partial_y$，并在 $\mathbb{R}^2$ 上积分，得到

$$-\int_{\mathbb{R}^2} y\partial_{xx}u\partial_y u\,dxdy + \int_{\mathbb{R}^N}(-\partial_{yy})^s u\left(y\partial_y u\right)dxdy + \omega\int_{\mathbb{R}^2} yu\partial_y u\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} y|u|^{p-2}u\partial_y u\,dxdy.$$

接下来我们计算上述恒等式中的各项。根据散度定理，可得

$$-\int_{\mathbb{R}^2} y\partial_{xx}u\partial_y u\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} y\partial_x u\partial_{xy}u\,dxdy = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} y\partial_y|\partial_x u|^2\,dxdy = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_x u|^2\,dxdy,$$

$$\omega\int_{\mathbb{R}^2} yu\partial_y u\,dxdy = \frac{\omega}{2}\int_{\mathbb{R}^2} y\partial_y|u|^2\,dxdy = -\frac{\omega}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,dxdy$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^2} y|u|^{p-2}u\partial_y u\,dxdy = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^2} y\partial_y|u|^p\,dxdy = -\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^p\,dxdy.$$

注意， $[(-\partial_{yy})^s,\ y\partial_y] = 2s(-\partial_{yy})^s$且

$$(-\partial_{yy})^s(y\partial_y u) = 2s(-\partial_{yy})^s u + y\partial_y(-\partial_{yy})^s u.$$

此外，还有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}(-\partial_{yy})^s u\left(y\partial_y u\right)\,dxdy &= \int_{\mathbb{R}^2} u(-\partial_{yy})^s\left(y\partial_y u\right)\,dxdy\\ &= 2s\int_{\mathbb{R}^2} u(-\partial_{yy})^s u\,dxdy+\int_{\mathbb{R}^2} yu\partial_y(-\partial_{yy})^s u\,dxdy\\ &= (2s-1)\int_{\mathbb{R}^2} u(-\partial_{yy})^s u\,dxdy-\int_{\mathbb{R}^2} u(-\partial_{yy})^s\left(y\partial_y u\right)\,dxdy.\end{aligned}$$

由此得到

$$\int_{\mathbb{R}^2}(-\partial_{yy})^s u\left(y\partial_y u\right)\,dxdy=\frac{2s-1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u(-\partial_{yy})^s u\,dxdy=\frac{2s-1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|(-\Delta)_y^{\frac{s}{2}}u|^2\,dxdy.$$

因此，我们得到

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_x u|^2\,dxdy+\frac{1-2s}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|D_y^s u|^2\,dxdy+\frac{\omega}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,dxdy=\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^p\,dxdy. \tag{2.9}$$

另一方面，将 (1.2) 乘以$x\partial_x u$并在 $\mathbb{R}^2$ 上积分，可得

$$-\int_{\mathbb{R}^2} x\partial_{xx}u\partial_x u\,dxdy+\int_{\mathbb{R}^N}(-\partial_{yy})^s u\,(x\partial_x u)\,dxdy+\omega\int_{\mathbb{R}^2} xu\partial_x u\,dxdy=\int_{\mathbb{R}^2} x|u|^{p-2}u\partial_x u\,dxdy.$$

现在我们计算上述恒等式中的各项。利用 ∂_{yy} 与$x\partial_x u$可交换这一事实以及散度定理，我们同样可以推导出

$$-\int_{\mathbb{R}^2} x\partial_{xx}u\partial_x u\,dxdy=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_x u|^2\,dxdy,\quad \int_{\mathbb{R}^N}(-\partial_{yy})^s u\,(x\partial_x u)\,dxdy=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|D_y^s u|^2\,dxdy$$

and

$$\omega\int_{\mathbb{R}^2} xu\partial_x u\,dxdy=-\frac{\omega}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,dxdy,\quad \int_{\mathbb{R}^2} xu\partial_x|u|^{p-2}u\,dxdy=-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^p\,dxdy.$$

因此，我们得到

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_x u|^2\,dxdy+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|D_y^s u|^2\,dxdy+\frac{\omega}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,dxdy=\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^p\,dxdy.$$

结合式 (2.9)，可得

$$\frac{1-s}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_x u|^2\,dxdy+\frac{1-s}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|D_y^s u|^2\,dxdy+\frac{\omega(s+1)}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,dxdy=\frac{s+1}{p}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^p\,dxdy.$$

此外，将式 (1.2) 乘以u并在 $\mathbb{R}^2$ 上积分，可得

$$\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_x u|^2\,dxdy+\int_{\mathbb{R}^2}|D_y^s u|^2\,dxdy+\omega\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,dxdy=\int_{\mathbb{R}^2}|u|^p\,dxdy.$$

因此，我们现在得到

$$s\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_x u|^2\,dxdy+s\int_{\mathbb{R}^2}|D_y^s u|^2\,dxdy=\frac{(s+1)(p-2)}{2p}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^p\,dxdy.$$

引理 2.2 的证明至此完成。

3. 波的变分构造与稳定性

3.1. 变分设置。 本节的目标是构造满足 (1.2) 的波。为此，我们引入 Weinstein 泛函

$$J[u] := \frac{\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\partial_x u|^2 + |D_y^s u|^2 + \omega |u|^2 \right) dxdy}{\left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^p \, dxdy \right)^{\frac{2}{p}}}.$$

定义

$$J_\omega := \inf_{\{u \in H^{1,s}(\mathbb{R}^2) : u \neq 0\}} J[u]. \tag{3.1}$$

显然，作为（2.5）的推论，我们看到 $J_\omega > 0$。

命题 3.1。 设 $0 < s < 1, \omega > 0$ *and* $2 < p < p_s$。则变分问题 （3.1） 具有一个轴对称解 $\Phi > 0$。此外， Φ 满足以下方程，

$$-\partial_{xx}\Phi + (-\partial_{yy})^s \Phi + \omega \Phi = C\Phi^{p-1}, \tag{3.2}$$

对于某个常数 $C = C(\omega, \Phi) > 0$，其表达式为

$$C = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\partial_x \Phi|^2 + |D_y^s \Phi|^2 + \omega |\Phi|^2 \right) dxdy}{\|\Phi\|_p^p}. \tag{3.3}$$

注 3.1. 根据标准椭圆理论和 *bootstrap* 论证，并且由于 $\Phi^{p-1} \in L^2(\mathbb{R}^2)$，可以将光滑性提升至至少 $\Phi \in H^{2,2s}(\mathbb{R}^2)$。

证明。 设 $\{u_n\} \subset H^{1,s}(\mathbb{R}^2)$ 满足 $\mathrm{k}u_n\mathrm{k}_p = 1$，是 (3.1) 的一个极小化序列，即 $J[u_n] = J_\omega + o_n(1)$。注意到 $\mathrm{k}u_n^\sharp\mathrm{k}_p = \mathrm{k}u_n^*\mathrm{k}_p = 1$，且

$$J(u_n^\sharp) \leq J(u_n), \quad J(u_n^*) \leq J(u_n),$$

其中 $\mathrm{u}^\sharp$ 表示关于 x 轴的轴向对称化，u^* 表示关于 y 轴的对称化。定义 $\Phi_n := (\mathrm{u}^\sharp \mathrm{n})^*$。则 $\Phi_n \in \mathrm{H}^{1,s}(\mathbb{R}^2)$ 是 (3.1) 的一个极小化序列，满足 $\mathrm{k}\Phi_n\mathrm{k}_p = 1$。此外，我们有 $\{\Phi_n\}$ 在 $\mathrm{H}^{1,s}(\mathbb{R}^2)$ 中有界。根据 [3, Page 3],，存在 $\Phi \in \mathrm{H}^{1,s}(\mathbb{R}^2)$，使得 $\Phi_n \rightharpoonup \Phi$ 在 $\mathrm{H}^{1,s}(\mathbb{R}^2)$ 中且 $\Phi_n \to \Phi$ 在 $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^2)$ 中，当 $\mathrm{n} \to \infty$ 时成立。这意味着 Φ 是 (3.1) 的一个非负极小化子。

现在我们要证明 Φ 满足欧拉–拉格朗日方程 (3.2)。利用 Φ 是 (3.1) 的极小值这一事实，即可按标准方法证明这一点。为此，设 $\epsilon > 0$ 和 $h \in \mathscr{S}$ 为测试函数。于是 $J[\Phi + \epsilon h] \geq J[\Phi]$。但展开至 $O(\epsilon^2)$ 阶可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\partial_x(\Phi + \epsilon h)|^2 + |D_y^s(\Phi + \epsilon h)|^2 + \omega |\Phi + \epsilon h|^2 \right) dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\partial_x \Phi|^2 + |D_y^s \Phi|^2 + \omega |\Phi|^2 \right) dxdy + 2\epsilon \langle ((-\partial_{xx}) + D_y^{2s} + \omega)\Phi, h \rangle + O(\epsilon^2)$$

and

$$\|\Phi + \epsilon h\|_p^{-2} = \|\Phi\|_p^{-2} - 2\epsilon \|\Phi\|_p^{-p-2} \langle \Phi^{p-1}, h \rangle + O(\epsilon^2).$$

因此，我们有

$$J[\Phi + \epsilon h] = J[\Phi] + 2\epsilon \|\Phi\|_p^{-2} \left(\langle ((-\partial_{xx}) + D_y^{2s} + \omega)\Phi, h \rangle - C(\omega, \Phi) \langle \Phi^{p-1}, h \rangle \right) + O(\epsilon^2),$$

其中 $C(\omega, \Phi)$ 由 (3.3) 定义。由于 ϵ 和 h 是任意的，因此我们得到 Φ 是 (3.2) 的一个解。根据最大值原理，我们进一步得知 $\Phi > 0$。证明至此完成。

□

接下来，我们建立相应线性化算子 $L_{\pm}$ 的一些有用性质，其中 $L_{\pm}$ 定义为

$$L_+ := -\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^s + \omega - (p-1)C(\omega,\Phi)\Phi^{p-2}, \quad L_- := -\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^s + \omega - C(\omega,\Phi)\Phi^{p-2}.$$

由于这两个算子都是对称算子，因此我们将它们都视为 Friedrich 扩张为自伴算子，其标准定义域为 $D(L_{\pm}) = H^{2,2s}(\mathbb{R}^2)$。根据 Weyl 定理，这两个算子的本质谱均满足

$$\sigma_{ess.}(L_+) = \sigma_{ess.}(L_-) = [\omega,\infty).$$

接下来，我们要考察 $L_{\pm}$ 在其本质谱之外的谱结构。由于它们的 $L_{\pm}$ 都是常系数算子 $L = -\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^s + \omega$的相对紧扰动，因此这些谱实际上都只是点谱，即特征值。此外，我们还引入自伴算子 S的莫尔斯指标记号，其中假设其负特征值至多有限个，

$$n(S) = \#\{\lambda < 0 : \lambda \in \sigma_{p.p.}(S)\},$$

其中，特征值按各自的代数重数计数。

命题3.2。 设 $0 < s < 1$, $\omega > 0$ 和 $2 < p < p_s$。那么线性化算子 $L_{\pm}$ 具有以下性质

- L_+ 恰好有一个负特征值，并且 $Ker(L_+)$ </style}是有限维的。
- $L_- \geq 0$。事实上，$Ker\,(L_-) = span[\Phi]$，而 $L_-|_{\{\Phi\}^{\perp}} \geq \delta > 0$，其中 $\delta > 0$。

证明。 关于L_+ 的陈述由 Φ的极小化性质可知。事实上，取一个如命题 3.1 的证明中所示的测试函数，$h: h \perp \Phi^{p-1}$，我们得到

$$\int \left(|\partial_x(\Phi+\epsilon h)|^2 + |D_y^s(\Phi+\epsilon h)|^2 + \omega|\Phi+\epsilon h|^2\right) dxdy = \int \left(|\partial_x\Phi|^2 + |D_y^s\Phi|^2 + \omega|\Phi|^2\right) dxdy + \epsilon^2(\langle(-\partial_{xx}) + D_y^{2s} + \omega)h, h\rangle + o(\epsilon^2)$$

and

$$\|\Phi+\epsilon h\|_p^{-2} = \|\Phi\|_p^{-2} - (p-1)\epsilon^2\|\Phi\|_p^{-p-2}\langle\Phi^{p-2}, h^2\rangle + o(\epsilon^2).$$

因此，我们推得

$$J[\Phi+\epsilon h] = J[\Phi] + \epsilon^2\|\Phi\|_p^{-2}\left(\langle(-\partial_{xx}) + D_y^{2s} + \omega)h, h\rangle - (p-1)C(\omega,\Phi)\langle\Phi^{p-2}, h^2\rangle\right) + o(\epsilon^2).$$

注意到极小值点的二阶变分必须非负，并结合公式 (3.3)，我们得出，对于所有 $h: h \perp \Phi^{p-1}$，$\langle L_+h,h\rangle \geq 0$。根据自伴算子的特征值的极大极小刻画，这意味着$L_+$ 至多有一个负特征值，即 $n(L_+) \leq 1$。另一方面，由于

$$\langle L_+\Phi,\Phi\rangle = -(p-2)C(\omega,\Phi)\int \Phi^p dx < 0,$$

随后，再次根据特征值的极小极大刻画可知，L_+ 确实具有一个负特征值，该特征值同样是单的。显然，L_+ 具有核；事实上，对 (3.2) 中的 x 和 y 变量进行微分可得

$$L_+[\partial_x\Phi] = 0 = L_+[\partial_y\Phi].$$

最后，$Ker(L_+)$ 是有限维的，因为可以将$Ker(L_+)$ 中元素所对应的问题解释为如下紧算子 T 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的特征值问题，

$$Tf := ((-\partial_{xx}) + D_y^{2s} + \omega)^{-1}\left[\Phi^{p-2} f\right], \quad f \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

关于L_-，注意到由于 $\Phi > 0$，我们有$L_- \geq L_+$，从而$n(L_-) \leq 1$。事实上，$L_-[\Phi] = 0$ 只不过是 (3.2) 的另一种改写形式，从而有 $0 \in \sigma_{p.p.}(L_-)$。由于 $\Phi > 0$，且L_- 具有佩龙-弗罗贝尼乌斯性质[5] （即谱的底部由一个单特征值组成，对应于一个严格正的特征函数），于是可得$L_- \geq 0$，以及$L_-|_{\{\Phi\}^\perp} \geq \delta > 0$，其中 $\delta > 0$。因此证明完成。□

3.2. **波的稳定性** ϕ_ω。我们从波的构造 ϕ_ω 开始。大部分工作已在第 2 节完成，但我们在此补充一些细节。

3.2.1. 波的构造 ϕ。现在我们可以完成波的构造了ϕ。令 Φ 为 (3.1) 的一个极小化解，并定义

$$\phi = \phi_\omega := C^{\frac{1}{p-2}}\Phi,$$

则 ϕ 是所需椭圆型波形方程 (1.2) 的一个解，其中 $C > 0$ 由 (3.3) 给出。此外，线性化算子 $L_\pm$ 的性质很容易转化为 $\mathscr{L}_{\pm,s}$的性质；它们出现在特征值问题 (1.4) 中。下文中，为简便起见，我们用 $\mathscr{L}_\pm$ 表示$\mathscr{L}_{\pm,s}$。以下命题汇总了相关信息。

命题 3.3。设 $0 < s < 1, \omega > 0$ 且 $2 < p < p_s$。则通过下式定义的函数

$$\phi_\omega = \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\partial_x\Phi|^2 + |D_y^s\Phi|^2 + \omega|\Phi|^2\right)dxdy}{\|\Phi\|_p^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}\Phi,$$

其中 Φ 是命题 *3.1* 中得到的函数，并满足 (1.2)。此外，算子 $\mathscr{L}_\pm$满足以下性质：

- $\mathscr{L}_+$ 恰有一个负特征值，因此 $n(\mathscr{L}_+) = 1$，$Ker(\mathscr{L}_+)$ 是有限维的。
- $\mathscr{L}_- \geq 0, Ker(\mathscr{L}_-) = span[\phi]$ 和 $\mathscr{L}_-|_{\{\phi\}^\perp} \geq \delta > 0$，其中某个 $\delta > 0$。

一个可以立即看出的有趣性质是，简单的缩放关系能够描述依赖关系 $\omega \to \phi_\omega$。事实上，显然 ϕ_ω 可以由 ϕ_1 按如下方式生成

$$\phi_\omega(x,y) = \omega^{\frac{1}{p-2}}\phi_1(\omega^{\frac{1}{2}}x, \omega^{\frac{1}{2s}}y). \tag{3.4}$$

3.2.2. 哈密顿不稳定性指标。本小节讨论波的稳定性，其构造见 (3.4)。具体而言，我们采用哈密顿不稳定性指标理论。对于如下形式的特征值问题

$$\mathscr{J}\mathscr{H}V = \lambda V, \tag{3.5}$$

其中我们假设 $\mathscr{H} = \mathscr{H}^*, \mathscr{J}^* = -\mathscr{J}$具有 $dim(Ker(\mathscr{H}) < \infty$，并且有有限个负特征值 $n(\mathscr{H})$。

令k_r 表示谱问题（3.5）的正特征值个数（即实不稳定性或实模态的个数），k_c 表示实部和虚部均非零的特征值四元组个数，$k^-{}_i$ 表示

[5]这可以由以下事实推出：e^{-tL_-} 是保正半群；对于具有 $0 < s \leq 1$ 的分数阶薛定谔算子而言，这是标准结论。

克雷因符号为负的纯虚特征值对数。对于一对简单的虚特征值 $\pm i\mu$ 和 $\mu \neq 0$，以及相应的特征向量 $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ z_2 \end{pmatrix} z$，克雷因指标为$sgn(\langle \mathscr{H}\vec{z}, \vec{z} \rangle)$。

在这一理论中同样重要的是一个有限维矩阵 $\mathscr{D}$，它由方程（3.5）的伴随特征向量得到。更具体地，考虑 $\mathscr{J}\mathscr{H}$ 的广义核，

$$gKer(\mathscr{J}\mathscr{H}) = span[(Ker(\mathscr{J}\mathscr{H}))^l, l = 1, 2, \ldots].$$

假设 $dim(gKer(\mathscr{J}\mathscr{H})) < \infty$。在 $gKer(\mathscr{J}\mathscr{H}) \ominus Ker(\mathscr{H}) = span[\eta_j,\ j = 1,\ \ldots,\ N]$ 中选取一个基。于是 $\mathscr{D} \in M_{N\times N}$ 定义为

$$\mathscr{D} := \{\mathscr{D}_{ij}\}_{i,j=1}^{N} : \mathscr{D}_{ij} = \langle \mathscr{H}\eta_i, \eta_j \rangle.$$

然后，根据 [9, 10], ，我们有以下公式，它将特征值问题（3.5）的“不稳定性”数量或哈密顿指标与算子 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{D}$ 的莫尔斯指标联系起来

$$k_{Ham} := k_r + 2k_c + 2k_i^- = n(\mathscr{H}) - n(\mathscr{D}). \tag{3.6}$$

作为推论，如果 $n(\mathscr{H}) = 1$，则有 $k_c = k^- i = 0$，因此 $k_{Ham.} = n(\mathscr{H}) - n(\mathscr{D}) = 1 - n(\mathscr{D})$。由此可知，稳定性等价于 $n(\mathscr{D}) = 1$，而当 $n(\mathscr{D}) = 0$ 时则会发生不稳定性。

3.2.3. 确定波的稳定性 ϕ。我们将上一节发展的理论（具体而言，公式 (3.6)）应用于特征值问题 (1.4)。根据 $\mathscr{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，而 $\mathscr{L} = \begin{pmatrix} \mathscr{L}_+ & 0 \\ 0 & \mathscr{L}_- \end{pmatrix}$，我们看到 $n(\mathscr{L}) = n(\mathscr{L}_+) + n(\mathscr{L}_-) = 1$，根据命题 3.3。

接下来需要确定 $gKer(\mathscr{L})$，进而确定矩阵 $\mathscr{D}$。首先

$$Ker(\mathscr{L}) = \left\{ \begin{pmatrix} Ker(\mathscr{L}_+) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ Ker(\mathscr{L}_-) \end{pmatrix} \right\}$$

并且两个 $Ker(\mathscr{L}_\pm)$ 都是有限维的。此外，根据公式 (3.4)，我们可以对波形方程 (1.2) 关于 ω 求导，得到

$$\mathscr{L}_+[\partial_\omega \phi_\omega] = -\phi_\omega. \tag{3.7}$$

我们看到，与 $\begin{pmatrix} Ker(\mathscr{L}_+ \\ 0 \end{pmatrix}$) 对应的伴随特征向量具有如下形式

$$\mathscr{J}\mathscr{L} \begin{pmatrix} 0 \\ f_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_j \in Ker(\mathscr{L}_+).$$

该方程有唯一解 $f_j = -\mathscr{L}_-^{-1} g_j \in Ker(\mathscr{L}_+)^\perp$，因为由 (3.7) 可知 $\phi_\omega \perp Ker(\mathscr{L}_+)$。我们尝试构造另一组伴随向量，即尝试求解方程

$$\mathscr{J}\mathscr{L}\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_j \end{pmatrix},$$

它没有解，因为这需要解决

$$\mathscr{L}_+ z_1 = f_j = -\mathscr{L}_-^{-1} g_j. \tag{3.8}$$

然而，最后一个方程没有解，因为通过对gj进行检验可得

$$0 = \langle z_1, \mathscr{L}_+ g_j \rangle = \langle \mathscr{L}_+ z_1, g_j \rangle = -\langle \mathscr{L}_-^{-1} g_j, g_j \rangle < 0,$$

作为$g_j \in Ker(\mathscr{L}_+) \perp \phi$ 以及 $\mathscr{L}_-|_{\{\phi\}^\perp} > 0$，因此有 $\mathscr{L}_-^{-1}|_{\{\phi\}^\perp} > 0$。

由核的另一部分产生的伴随算子，我们有

$$\mathscr{J}\mathscr{L}\vec{z}=\begin{pmatrix}0\\ \phi\end{pmatrix},$$

由此得到 $\vec{z}=\begin{pmatrix}\mathscr{L}_+^{-1}\phi\\ 0\end{pmatrix}$。再次尝试求取伴随算子，就如同求解

$$\mathscr{J}\mathscr{L}\vec{z}=\begin{pmatrix}\mathscr{L}_+^{-1}\phi\\ 0\end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

于是 (3.9) 化简为 $\mathscr{L}_-z_2=-\mathscr{L}_+^{-1}\phi$。根据弗雷德霍姆择一定理，当且仅当 $\langle\mathscr{L}_+^{-1}\phi,\phi\rangle=0$ 时，该方程可解。因此，我们证明了以下命题。

命题 3.4. 设 $0<s<1, \omega>0 and\ 2<p<p_s$。那么，假设 $\langle\mathscr{L}_+^{-1}\phi,\phi\rangle\neq 0$，我们有

$$gKer(\mathscr{J}\mathscr{L})=span\{\begin{pmatrix}\mathscr{L}_+^{-1}\phi\\ 0\end{pmatrix}\cup Ker(\mathscr{L})\}.$$

定理 *1.2* 的证明。 应用上一节建立的理论，我们得到，对于 $\langle\mathscr{L}_+^{-1}\phi,\phi\rangle\neq 0,\mathscr{D}$ 是一个仅含一个元素 $\mathscr{D}_{11}$ 的矩阵，它为

$$\mathscr{D}_{11}=\langle\mathscr{L}_+^{-1}\phi,\phi\rangle.$$

借助关系式 (3.7) 可以计算这个量。事实上，根据该关系式，$\mathscr{L}_+^{-1}\phi_\omega=-\partial_\omega\phi_\omega$，因此

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{11}=-\langle\partial_\omega\phi_\omega,\phi_\omega\rangle=-\frac{1}{2}\partial_\omega\|\phi_\omega\|_{L^2}^2&=-const.\partial_\omega[\omega^{\frac{2}{p-2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2s}}]\\ &=const.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2s}-\frac{2}{p-2}\right)[\omega^{\frac{2}{p-2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2s}}].\end{aligned}$$

由于稳定性等价于 $\mathscr{D}_{11}<0$，我们得到条件 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s-\frac{2}{p-2}<0$，或等价地，质量次临界范围

$$2<p<\frac{6s+2}{s+1}=p_m.$$

因此，在互补范围$p_m<p<p_s$ 内，有 $\mathscr{D}_{1,1}>0$，而当$p=p_m$时，有 $\mathscr{D}_{1,1}=0$。若 $\mathscr{D}_{1,1}>0$，则方程 (1.4) 存在一对特征值（一个为正，一个为负）。由于谱关于参数连续变化，若 $\mathscr{D}_{1,1}=0$，这一对特征值便会经过原点，转变为一对纯虚特征值。定理 1.2 得证。□

4. 基态的唯一性

本节将讨论方程 (1.2) 的基态唯一性。我们的目标是证明定理 1.3 和 1.4。

事实上，要证明定理 1.3，通过缩放技巧 $\phi_\omega(x,y)=\omega^{\frac{1}{p-2}}\phi(\omega^{\frac{1}{2}}x,\omega^{\frac{1}{2s}}y)$，我们只需证明该方程的基态唯一：

$$-\partial_{xx}u+(-\partial_{yy})^s u+u=|u|^{p-2}u. \tag{4.1}$$

为此，我们将紧密遵循 [6, 7], 近期在 [8] 中进一步发展的策略。首先，我们定义

$$X_P:=\{u\in L^2(\mathbb{R}^2)\cap L^p(\mathbb{R}^2):\ u是轴对称且取实值的\}$$

配备范数

$$\|u\|_{X_p} := \|u\|_2 + \|u\|_p.$$

引理 4.1。 设 $0 < s < 1, 2 < p < p_s$ 以及 $u \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^p(\mathbb{R}^2)$ 是 (4.1) 的解，则 $u \in H^{1,s}(\mathbb{R}^2)$。

证明。 由于 $u \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^p(\mathbb{R}^2)$ 是（4.1）的解，因此

$$u = \frac{1}{-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^s + 1} |u|^{p-2} u.$$

根据普朗歇尔恒等式，有

$$\left\| \left(\partial_x + (-\partial_{yy})^{\frac{s}{2}} \right) u \right\|_2 = \left\| \frac{\partial_x + (-\partial_{yy})^{\frac{s}{2}}}{-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^s + 1} |u|^{p-2} u \right\|_2 \lesssim \left\| \frac{1}{(-\partial_{xx})^{\frac{1}{2}} + (-\partial_{yy})^{\frac{s}{2}} + 1} |u|^{p-2} u \right\|_2.$$

为了进一步估计上述不等式右端的项，我们引入方程的基本解 $\mathcal{K}$

$$(-\partial_{xx})^{\frac{1}{2}} u + (-\partial_{yy})^{\frac{s}{2}} u + u = 0.$$

不难验证

$$\mathcal{K}(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \mathcal{H}(x,y,t)\, dt,$$

其中

$$\mathcal{H}(x,y,t) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i (x,y)\cdot(\xi_1,\xi_2) - t(|\xi_1| + |\xi_2|^s)}\, d\xi_1 d\xi_2 := \mathcal{H}_1(x,t)\mathcal{H}_s(y,t)$$

and

$$\mathcal{H}_1(x,t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi_1 - t|\xi_1|}\, d\xi_1, \quad \mathcal{H}_s(y,t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i y\xi_2 - t|\xi_2|^s}\, d\xi_2.$$

通过直接计算可得

$$\mathcal{H}_1(x,t) = \frac{2t}{t^2 + 4\pi^2 |x|^2}.$$

此外，由 [4, 附录 A] 中的（$A4$）可知

$$0 < \mathcal{H}_s(y,t) \lesssim \min\left\{ t^{-\frac{1}{s}}, t|y|^{-1-s} \right\}.$$

因此，我们可以推导出，对于任意 $q > 1$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}(\cdot,t)\|_q = \|\mathcal{H}_1(\cdot,t)\mathcal{H}_s(\cdot,t)\|_q &\lesssim t^{1-\frac{1}{s}} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{|y| \le t^{\frac{1}{s}}} \frac{1}{\left(t^2 + 4\pi^2|x|^2\right)^q}\, dxdy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + t^2 \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{|y| > t^{\frac{1}{s}}} \frac{1}{\left(t^2 + 4\pi^2|x|^2\right)^q} |y|^{-q-sq}\, dxdy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim t^{-\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{s}\right)}. \end{aligned}$$

这就得出

$$\|\mathcal{K}\|_q \le \int_0^{+\infty} e^{-t} \|\mathcal{H}(\cdot,t)\|_q\, dt \lesssim \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{s}\right)}\, dt < +\infty,$$

其中 $q>1$ 满足条件

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{s}\right)<1. \tag{4.2}$$

回到前面的估计，并在条件 (4.2) 下使用杨氏不等式，我们得到

$$\left\|\frac{1}{(-\partial_{xx})^{\frac{1}{2}}+(-\partial_{yy})^{\frac{s}{2}}+1}|u|^{p-2}u\right\|_2=\left\|\mathscr{K}*|u|^{p-2}u\right\|_2\lesssim\|u\|_p^{p-1}<+\infty,$$

其中

$$1-\frac{1}{q}=\frac{1}{2}-\frac{1}{p}<\frac{s}{1+s},\quad 2<p<p_s,$$

and (4.2) 得到满足。这意味着 $u\in H^{1,s}(\mathbb{R}^2)$，证明完成。 □

引理 4.2。 设 $0<s_0<1$ 且 $2<p<p_{s_0}$。假设 $u_0\in X_p$ 是方程 (4.1) 的解，其中 $s=s_0$，且线性化算子

$$\mathscr{L}_{+,s_0}:=-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s_0}+1-(p-1)|u_0|^{p-2}$$

在 $L^2_a(\mathbb{R}^2)$上具有平凡核。那么存在 $\delta_0>0$ 以及映射 $u\in C^1(I;X_p)$，其中 $I=[s_0,s_0+\delta_0)$，使得

(i) 对任意 $s\in I$，u_s满足(4.1)，其中 $u_s:=u(s)$，$s\in I$。
(ii) 存在 $\epsilon>0$，使得在邻域内，对于 $s\in I$，u_s 是(4.1) 的唯一解

$$\left\{u\in X_p:\|u-u_0\|_{X_p}<\epsilon\right\},$$

其中 $u_0=u_{s_0}$。

证明。 为证明这一点，我们将使用隐函数定理。定义映射 $F:X_p\times[s_0,s_0+\delta)\to X_p$如下：

$$F(u,s)=u-\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^s+1}|u|^{p-2}u.$$

为应用隐函数定理，我们首先证明F是良定义的，即对任意$u\in X_p$，都有$F(u,s)\in X_p$。为此，我们引入方程的基本解 $\mathscr{K}$

$$-\partial_{xx}u+(-\partial_{yy})^s u+u=0. \tag{4.3}$$

其可由下式刻画

$$\mathscr{K}(x,y)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathscr{H}(x,y,t)\,dt, \tag{4.4}$$

其中

$$\mathscr{H}(x,y,t):=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi i(x,y)\cdot(\xi_1,\xi_2)-t\left(|\xi_1|^2+|\xi_2|^{2s}\right)}\,d\xi_1 d\xi_2:=\mathscr{H}_1(x,t)\mathscr{H}_s(y,t) \tag{4.5}$$

and

$$\mathscr{H}_1(x,t):=\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi ix\xi_1-t|\xi_1|^2}\,d\xi_1,\quad \mathscr{H}_s(y,t):=\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi iy\xi_2-t|\xi_2|^{2s}}\,d\xi_2.$$

不难看出

$$\mathscr{H}_1(x,t)=\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\pi\frac{|x|^2}{t}}.$$

此外，由 [4, 附录 A]，中的（$A4$）可得

$$0<\mathscr{H}_s(y,t)\lesssim \min\left\{t^{-\frac{1}{2s}},t|y|^{-1-2s}\right\}.$$

因此，我们推导出，对于任意 $q>1$,

$$\begin{aligned}\|\mathscr{H}(\cdot,t)\|_q&=\|\mathscr{H}_1(\cdot,t)\mathscr{H}_s(\cdot,t)\|_q\\ &\lesssim t^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2s}}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{|y|\le t^{\frac{1}{2s}}}e^{-q\pi\frac{|x|^2}{t}}\,dxdy\right)^{\frac{1}{q}}+t^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{|y|>t^{\frac{1}{2s}}}e^{-q\pi\frac{|x|^2}{t}}|y|^{-q-2sq}\,dxdy\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\lesssim t^{-\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2s}\right)}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

由此可得

$$\|\mathscr{K}\|_q\lesssim\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{-\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2s}\right)}\,dt<+\infty,$$

其中 $q>1$ 满足

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2s}\right)<1.\tag{4.7}$$

在条件 (4.7) 下应用杨氏不等式，我们得到

$$\left\|\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^s+1}|u|^{p-2}u\right\|_2=\left\|\mathscr{K}*|u|^{p-2}u\right\|_2\lesssim\|u\|_p^{p-1},$$

其中

$$1-\frac{1}{q}=\frac{1}{2}-\frac{1}{p}<\frac{s_0}{1+s_0}\le\frac{s}{1+s},\quad 2<p<p_{s_0},$$

且（4.7）成立。此外，我们得到

$$\left\|\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^s+1}|u|^{p-2}u\right\|_p=\left\|\mathscr{K}*|u|^{p-2}u\right\|_p\lesssim\|u\|_p^{p-1},$$

其中

$$1-\frac{1}{q}=1-\frac{2}{p}<\frac{2s_0}{1+s_0}\le\frac{2s}{1+s},\quad 2<p<p_{s_0},$$

且（4.7）也成立。因此，我们推得F定义良好。

接下来，我们将证明F属于C^1类。为此，我们首先验证 $\partial_{F\partial u}$ 存在，并且

$$\frac{\partial F}{\partial u}=1-\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^s+1}(p-1)|u|^{p-2}.$$

定义

$$G(u,s):=\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^s+1}|u|^{p-2}u.$$

为得到所需结果，只需验证 $\partial_{G\partial u}$ 存在，并且

$$\frac{\partial G}{\partial u}=\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^s+1}(p-1)|u|^{p-2}.$$

由索伯列夫不等式可得

$$\|u\|_{X_p}\lesssim\left\|\left(\partial_x+(-\partial_{yy})^{\frac{sp}{2}}+1\right)u\right\|_2,\tag{4.8}$$

其中

$$s_p := \frac{p-2}{p+2} < s_0 \le s.$$

因此，利用普朗歇尔恒等式和杨氏不等式，我们可以推得，对于任意$h \in X_p$,

$$\begin{aligned}
&\left\| G(u+h,s) - G(u,s) - \frac{\partial G}{\partial u}(u,s)h \right\|_{X_p} \\
&\lesssim \left\| \left(\partial_x + (-\partial_{yy})^{\frac{sp}{2}} + 1\right) \left(G(u+h,s) - G(u,s) - \frac{\partial G}{\partial u}(u,s)h \right) \right\|_2 \\
&= \left\| \left(\partial_x + (-\partial_{yy})^{\frac{sp}{2}} + 1\right) \left(\frac{1}{-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^s + 1} \left(|u+h|^{p-2}(u+h) - |u|^{p-2}u - (p-1)|u|^{p-2}h \right) \right) \right\|_2 \\
&\lesssim \left\| \left(\frac{1}{-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^{s-\frac{sp}{2}} + 1} \left(|u+h|^{p-2}(u+h) - |u|^{p-2}u - (p-1)|u|^{p-2}h \right) \right) \right\|_2 \\
&\lesssim \left\| |u+h|^{p-2}(u+h) - |u|^{p-2}u - (p-1)|u|^{p-2}h \right\|_{\frac{p}{p-1}} = o(\|h\|_{X_p}).
\end{aligned}$$

因此，所需结论立即成立。

为了证明F属于C^1, 类，我们还需验证 $^{\partial}_{G\,\partial u}$是连续的。为此，我们需要证明，对于任意$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$，使得$\|u - \tilde{u}\|_{X_p} + |s - \tilde{s}| < \delta$，那么

$$\left\| \left(\frac{\partial G}{\partial u}(u,s) - \frac{\partial G}{\partial u}(\tilde{u},\tilde{s}) \right) h \right\|_{X_p} < \epsilon \|h\|_{X_p}.$$

按照（4.8）的思路，只需断言

$$\left\| \left(A_s |u|^{p-2} - A_{\tilde{s}} |\tilde{u}|^{p-2} \right) h \right\|_2 \le \epsilon \|h\|_{X_p}, \tag{4.9}$$

其中

$$A_s := \frac{\partial_x + (-\partial_{yy})^{\frac{sp}{2}} + 1}{-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^s + 1}, \quad A_{\tilde{s}} := \frac{\partial_x + (-\partial_{yy})^{\frac{sp}{2}} + 1}{-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^{\tilde{s}} + 1}.$$

注意到

$$\left(A_s |u|^{p-2} - A_{\tilde{s}} |\tilde{u}|^{p-2} \right) = (A_s - A_{\tilde{s}}) |u|^{p-2} + A_{\tilde{s}} \left(|u|^{p-2} - |\tilde{u}|^{p-2} \right).$$

根据普朗歇尔恒等式、中值定理、杨氏不等式和赫尔德不等式，我们得出

$$\begin{aligned}
\left\| (A_s - A_{\tilde{s}}) |u|^{p-2} h \right\|_2 &\lesssim |s - \tilde{s}| \left\| \frac{1}{(-\partial_{xx})^{\frac{1}{2}} + (-\partial_{yy})^{s+\tilde{s}-\sigma-\frac{sp}{2}} + 1} |u|^{p-2} h \right\|_2 \\
&\lesssim |s - \tilde{s}| \|u\|_p^{p-2} \|h\|_p,
\end{aligned}$$

其中 $\sigma = \theta s + (1-\theta)\,\tilde{s} \in [\min\{s, \tilde{s}\}, \max\{s, \tilde{s}\}]$ 是应用中值定理得到的。进一步地，我们可以类似地推导出

$$\begin{aligned}
\left\| A_{\tilde{s}} \left(|u|^{p-2} - |\tilde{u}|^{p-2} \right) h \right\|_2 &\lesssim \left\| \frac{1}{\partial_x + (-\partial_{yy})^{\tilde{s}-\frac{sp}{2}} + 1} \left(|u|^{p-2} - |\tilde{u}|^{p-2} \right) h \right\|_2 \\
&\lesssim \left\| |u|^{p-2} - |\tilde{u}|^{p-2} \right\|_{\frac{p}{p-2}} \|h\|_p.
\end{aligned}$$

注意

$$\left\||u|^{p-2}-|\tilde{u}|^{p-2}\right\|_{\frac{p}{p-2}} \le \left\||u-\tilde{u}|^{p-2}\right\|_{\frac{p}{p-2}} = \|u-\tilde{u}\|_p^{p-2}, \quad 2<p\le 3$$

and

$$\left\||u|^{p-2}-|\tilde{u}|^{p-2}\right\|_{\frac{p}{p-2}} \lesssim \left\|\left(|u|^{p-3}+|\tilde{u}|^{p-3}\right)|u-\tilde{u}|\right\|_{\frac{p}{p-2}} \le \left(\|u\|_p^{p-3}+\|\tilde{u}\|_p^{p-3}\right)\|u-\tilde{u}\|_p, \quad p>3.$$

因此，根据上述讨论，我们得到 (4.9) 成立，即 $\partial_{G\partial u}$ 是连续的。类似地，我们可以证明 $\partial_{G\partial s}$ 存在，并且

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \frac{(-\partial_{yy})^s \log\left(-\partial_{yy}\right)}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^s+1}|u|^{p-2}u.$$

此外，我们还可以证明 $\partial_{G\partial s}$ 也是连续的。因此我们得出，F 属于 C^1 类。

基于前面的论证，我们现在可以使用隐函数定理来证明所需结论。由于 $u_0 \in X^p$ 在 $s=s_0$，时满足 (4.1)，于是 $F(u_0,s_0)=0$。注意到

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u_0,s_0) = 1+K, \quad K := -\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s_0}+1}\left(p-1\right)|u_0|^{p-2}.$$

不难验证，K 是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的紧算子。此外，根据假设，我们知道 $-1\notin\sigma(K)$，因为 0 不是算子 $\mathscr{L}_{+、s_0}$ 的特征值。于是可推出，$1+K$ 在 $L^2_a(\mathbb{R}^2)$ 上可逆。此外，像之前一样，借助普朗歇尔恒等式和杨氏不等式，我们可以推出 K 将 X^p 映射到 X^p，并且从 X^p 到 X^p 有界。这表明，$1+K$ 从 X^p 到 X^p 有界。因此，我们有 $(1+K)^{-1}$ 从 X^p 到 X^p 有界。此时，通过调整隐函数定理的使用方式，我们可以得到所需结论，证明完成。□

下文中，我们假设 $0<s_0<1、\ 2<p<p^{s_0}$，且 u_0 是方程 (4.1) 的一个解，其中 $s=s_0$s 满足引理 4.2 的假设，并且 $u_s \in C^1(I、X^p)$ 是由引理 4.2 得到的方程 (4.1) 的解。现在我们考虑分支 u_s 关于 $s\in[s_0,s_*)$ 的最大延拓，其中$s_*>s_0$ 由下式给出

$s_*:=$上确界$\left\{s_0<\tilde{s}<1、\ \phi_s\in C^1([s0、\ \tilde{s});\ X^p),\ u_s$满足引理 4.2 对 $s\in[s0、\ \tilde{s})\right\}$ 的假设。

下面我们将证明 $s_*=1$。首先，我们给出 u_s 的以下先验估计。

引理 4.3。 有

$$\int_{\mathbb{R}^2}|u_s|^2\,dx \sim \int_{\mathbb{R}^2}|\partial_x u_s|^2\,dxdy + \int_{\mathbb{R}^2}|D_y^s u_s|^2\,dxdy \sim \int_{\mathbb{R}^2}|u_s|^p\,dxdy \sim 1$$

对于任意 $s\in[s_0,s_*)$。

证明。 为简单起见，我们定义

$$M_s := \int_{\mathbb{R}^2}|u_s|^2\,dx, \quad T_s := \int_{\mathbb{R}^2}|\partial_x u_s|^2\,dxdy + \int_{\mathbb{R}^2}|D_y^s u_s|^2\,dxdy, \quad V_s := \int_{\mathbb{R}^2}|u_s|^p\,dxdy.$$

由于u_s是一个 对（4.1）的解，将（4.1）乘以 u_s并在 $\mathbb{R}^2$ 上积分，可得

$$T_s + M_s = V_s. \tag{4.10}$$

另一方面，由引理 2.2 可知

$$sT_s = \frac{(1+s)(p-2)}{2p} V_s. \tag{4.11}$$

利用 (4.11) 和 $s \geq s_0,$，于是

$$\frac{p-2}{2p} V_s < T_s \leq \frac{(1+s_0)(p-2)}{2s_0 p} V_s,$$

这就得到 $V_s \sim T_s$，对任意 $[s_0, s_*)$ 均成立。此外，结合 (4.10) 和 (4.11)，可知

$$\frac{2(s_0+1) - p(1-s_0)}{2ps_0} V_s \leq M_s < \frac{p-2}{2p} V_s.$$

这意味着 $V_s \sim M_s$，对任意 $[s_0, s_*)$ 均成立。因此我们推得

$$M_s \sim T_s \sim V_s \tag{4.12}$$

对任意 $s \in [s_0, s_*)$ 均成立。

由于 $2 < p < p_{s_0}$，因此存在 $0 < \theta < 1$，使得 $p = 2\theta + p_{s_0}(1-\theta)$。因此，由赫尔德不等式和 (2.4) 可得

$$\begin{aligned} V_s \leq M_s^{\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_s|^{p_{s_0}} \, dx \right)^{1-\theta} &\leq C_{s_0} M_s^{\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_x u_s|^2 \, dxdy + \int_{\mathbb{R}^2} |D_y^{s_0} u_s|^2 \, dxdy \right)^{\frac{p_{s_0}(1-\theta)}{2}} \\ &\leq C_{s_0} M_s^{\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_x u_s|^2 \, dxdy + \int_{\mathbb{R}^2} |D_y^{s} u_s|^2 \, dxdy + \int_{\mathbb{R}^2} |u_s|^2 \, dxdy \right)^{\frac{p_{s_0}(1-\theta)}{2}} \\ &= C_{s_0} M_s^{\theta} \, (T_s + M_s)^{\frac{p_{s_0}(1-\theta)}{2}}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

这里我们用到了以下事实：

$$\int_{\mathbb{R}^2} |D_y^{s_0} u_s|^2 \, dxdy \lesssim \int_{\mathbb{R}^2} |D_y^{s} u_s|^2 \, dxdy + \int_{\mathbb{R}^2} |u_s|^2 \, dxdy, \quad 0 < s_0 \leq s.$$

于是，由（4.13）可知，对于任意$V_s \geq 1$ $s \in [s_0, s_*)$，结论成立，这是因为$p > 2$。再利用（4.12），可得

$$M_s \sim T_s \sim V_s \gtrsim 1,$$

对于任意$s \in [s_0, s_*)$，结论成立。

接下来，我们将证明

$$M_s \sim T_s \sim V_s \lesssim 1. \tag{4.14}$$

为此，我们先验证

$$\left\| \left(-\partial_{yy}\right)^t u_s \right\|_2^2 \lesssim V_s^{\frac{2(p-1)}{p}}, \tag{4.15}$$

其中

$$t := s - \frac{p-2}{4p} > 0, \quad 2 < p < p_{s_0}, \quad s \geq s_0.$$

由于u_s 满足 (4.1)，因此

$$u_s = \frac{1}{-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^s + 1} |u_s|^{p-2} u_s.$$

由普朗歇尔恒等式可得

$$\left\|\left(-\partial_{yy}\right)^{t} u_s\right\|_2^2 = \left\|\frac{\left(-\partial_{yy}\right)^{t}}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s}+1}|u_s|^{p-2}u_s\right\|_2^2 \le \left\|(-\partial_{yy})^{t-s}|u_s|^{p-2}u_s\right\|_2^2.$$

由于 $0<t<s$，利用方程（$-\partial_{yy}$）$^{-(s-t)}u=0$的基本解，则

$$\left\|(-\partial_{yy})^{t-s}|u_s|^{p-2}u_s\right\|_2^2 = c_p\left\||\cdot|^{\frac{p+2}{2p}} * |u_s|^{p-2}u_s\right\|_2^2,$$

其中 $c_p>0$ 是一个仅依赖于 p 的常数。由弱型空间上的杨氏不等式可得

$$\left\|(-\partial_{yy})^{t-s}|u_s|^{p-2}u_s\right\|_2^2 \lesssim \||u_s|^{p-1}\|_{\frac{p}{p-1}}^2 = V_s^{\frac{2(p-1)}{p}}.$$

因此（4.15）得出。现在对满足（4.1）的 u_s 关于 s 求导，从而推得 t

$$\mathscr{L}_{+,s}\dot{u}_s = -(-\partial_{yy})^{s}\log\left(-\partial_{yy}\right)u_s, \quad \dot{u}_s := \frac{d}{ds}u_s, \tag{4.16}$$

由于u_s是方程 (4.1) 的解，因此

$$\mathscr{L}_{+,s}u_s = -(p-2)|u_s|^{p-2}u_s. \tag{4.17}$$

因此，利用 (4.16) 和 (4.17)，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}V_s &= p\int_{\mathbb{R}^2} u_s^{p-2}u_s\dot{u}_s\,dxdy = -\frac{p}{p-2}\int_{\mathbb{R}^2}\mathscr{L}_{+,s}u_s\dot{u}_s\,dxdy\\ &= -\frac{p}{p-2}\int_{\mathbb{R}^2} u_s\mathscr{L}_{+,s}\dot{u}_s\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} u_s(-\partial_{yy})^{s}\log\left(-\partial_{yy}\right)u_s\,dxdy.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2} u_s(-\partial_{yy})^{s}\log\left(-\partial_{yy}\right)u_s\,dxdy = 2\int_{\mathbb{R}^2}|\xi_2|^{2s}\log(|\xi_2|)|\hat{u}_s|^2\,d\xi_1d\xi_2\\ &= 2\int_{\mathbb{R}}\int_{|\xi_2|\le R}|\xi_2|^{2s}\log(|\xi_2|)|\hat{u}_s|^2\,d\xi_1d\xi_2 + 2\int_{\mathbb{R}}\int_{|\xi_2|>R}|\xi_2|^{2s}\log(|\xi_2|)|\hat{u}_s|^2\,d\xi_1d\xi_2\\ &= 2\log R\int_{\mathbb{R}}\int_{|\xi_2|\le R}|\xi_2|^{2s}|\hat{u}_s|^2\,d\xi_1d\xi_2 + 2\int_{\mathbb{R}}\int_{|\xi_2|>R}|\xi_2|^{2s}\log(|\xi_2|)|\hat{u}_s|^2\,d\xi_1d\xi_2\\ &\le 2(\log R)T_s + 2R^{2s-4t}\log R\int_{\mathbb{R}^2}|\xi_2|^{4t}|\hat{u}_s|^2\,d\xi_1d\xi_2\\ &\lesssim 2(\log R)T_s + 2R^{2s-4t}(\log R)V_s^{\frac{2(p-1)}{p}},\end{aligned} \tag{4.18}$$

其中，在推导这些不等式时用到了 (4.15) 以及以下事实，

$$|\xi_2|^{2s-4t}\log(|\xi_2|) \le R^{2s-4t}\log R, \quad |\xi_2|\ge R, \tag{4.19}$$

对于 $R \ge e^{\frac{1}{4-2t}s}$。事实上，直接计算可得，(4.19) 得益于函数 $f(t)$ 的单调性：$=t^{2s-4t}\log t$对于$t>0$。感谢 $V_s\gtrsim 1$对于任意 $[s_0,s_*)$ 以及 $2(p-1)\ p>1$，于是存在合适的 $c\sim 1$使得

$$R^{4t-2s} = cV_s^{\frac{2(p-1)}{p}-1} \ge e.$$

注意，对于任意 $[s_0,s_*)$，由 (4.18) 可得 $T_s \sim V_s$，于是

$$\frac{d}{ds}V_s \lesssim \left(1+\log V_s\right)V_s.$$

这就表明

$$V_s \lesssim e^{e^s} < e^{e^{s_*}} \lesssim 1$$

对任意 $s \in [s_0,s_*)$，由此可推得(4.14)成立。因此证明完成。 □

引理4.4。 对任意 $s \in [s_0,s_*)$，有 $\phi_s > 0$。此外，对任意 $s \in [s_0,s_*)$，有

$$\phi_s(x,y) \lesssim \left(1+|y|\right)^{-1-2s} e^{-\theta|x|}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2, \tag{4.20}$$

其中 $0<\theta<1$ 是一个常数。

证明。(4.20)中的估计可直接由 [5, 定理1.1]得到。为完成证明，我们只需证明 $\phi_s > 0$ 对任意 $s \in [s_0,s_*)$成立。为此，我们首先断言，若 $u_{\tilde{s}} > 0$ 对某个 $\tilde{s} \in [s_0,s_*)$成立，则存在 $\epsilon > 0$，使得 $\phi_s > 0$ 对任意 $s \in [s_0,s_*)$以及 $|s-\tilde{s}|<\epsilon$成立。为此，我们首先需要证明，对于任意 $s \in [s_0,s_*)$，$\mathscr{L}_{-,s}$ 具有Perron-Frobenius型性质，即若 $\lambda := \inf \sigma(\mathscr{L}_{-,s})$ 是一个特征值，则 λ 是单的，且相应的特征函数为正，其中

$$\mathscr{L}_{-,s} := -\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^s + 1 - |u_s|^{p-2}.$$

按照 [14, 定理 XIII.43], 的思路，证明这一点的关键在于验证$e^{-t(-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^s)}$作用于$L^2(\mathbb{R}^2)$时具有正性改善，即对于任意$L^2(\mathbb{R}^2)$中的$f \in$，若$f \neq 0$ 且$f \geq 0$，则$e^{-t(-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^s)} f > 0$。注意，

$$e^{-t(-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^s)} = e^{-t(-\partial_{xx})} e^{-t(-\partial_{yy})^s}. \tag{4.21}$$

由 [6, 引理 C.2], 可知，$e^{-t(-\partial_{yy})^s}$ 作用于$L^2(\mathbb{R})$时具有正性改善。此外，利用Bernstein定理，见 [15, 定理 1.4], ，可得

$$e^{-t(-\partial_{xx})} = \int_0^{+\infty} e^{\tau\partial_{xx}}\, d\mu_t(\tau),$$

其中，μ_t是一个依赖于t的非负测度。这表明$e^{-t(-\partial_{xx})}$作用于$L^2(\mathbb{R})$时具有正性改善。因此，由式 (4.21) 可得$e^{-t(-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^s)}$作用于$L^2(\mathbb{R}^2)$时具有正性改善。

接下来我们需要证明，当$s_n \to s$且$n \to \infty$时，$\mathscr{L}_{-,s_n} \to \mathscr{L}_{-,s}$在$n \to \infty$意义下收敛，即在范数-预解式意义下收敛:

$$\left\| \frac{1}{\mathscr{L}_{-,s_n}+z} - \frac{1}{\mathscr{L}_{-,s}+z} \right\|_{L^2\to L^2} = o_n(1), \tag{4.22}$$

其中 $z \in \mathbb{C}$ 且 $\mathrm{Im} z \neq 0$。事实上，根据 [16, 定理 4.3], ，要得到（4.22），我们只需证明当某个 $z\in\mathbb{C}$ 和 $\mathrm{Im} z \neq 0$ 接近原点时，（4.22）成立。首先注意到

$$\mathscr{L}_{-,s_n} + z = -\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^{s_n} + (1+z) - |u_{s_n}|^{p-2} = \left(1-\mathscr{A}_{s_n}\right)\left(-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^{s_n} + (1+z)\right),$$

and

$$\mathscr{L}_{s} + z = -\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^{s} + (1+z) - \phi_s^{p-2} = \left(1-\mathscr{A}_{s}\right)\left(-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^{s} + (1+z)\right),$$

其中

$$\mathscr{A}_{s_n} := |u_{s_n}|^{p-2}\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s_n}+(1+z)},\quad \mathscr{A}_s := \phi_s^{p-2}\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s}+(1+z)}.$$

由于 u_{s_n} 是方程 (4.1) 的一个解，因此 $\mathscr{L}_{-,s_n}u_{s_n}=0$，这很容易表明 0 是 $\mathscr{L}_{-,s_n}$ 的一个特征值，而 u_{s_n} 是相应的特征函数。注意到 $\mathscr{L}_{-,s_n}$ 非负，因此 0 是 $\mathscr{L}_{-,s_n}$ 的最低特征值。由于 $\mathscr{L}_{-,s}$ 具有 Perron-Frobenius 型性质，因此 0 是单特征值，且 $u_{s_n}>0$。再次利用 $\mathscr{L}_{-,s_n}$ 具有 Perron-Frobenius 型性质这一事实，并通过反证法，可以验证 0 是 $\mathscr{L}_{-,s_n}$ 的孤立特征值。因此，我们可以选取适当的 $z\in\mathbb{C}$，使 $\operatorname{Im} z\neq 0$ 接近原点，且 $-z$ 不是 $\mathscr{L}_{-,s_n}$ 的特征值。于是可得，0 不是 $1-\mathscr{A}_{s_n}$ 的特征值。此外，不难验证 $\mathscr{A}_{s_n}$ 是从 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的紧算子。因此，我们得出结论：对任意 $n\in\mathbb{N}$，$1-\mathscr{A}_{s_n}$ 都是从 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的可逆算子。同样地，我们也可以证明 $1-\mathscr{A}_s$ 是从 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的可逆算子。现在我们可以写出

$$\frac{1}{\mathscr{L}_{-,s_n}+z}=\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s_n}+(1+z)}\left(1-\mathscr{A}_{s_n}\right)^{-1}$$

and

$$\frac{1}{\mathscr{L}_{s}+z}=\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s}+(1+z)}\left(1-\mathscr{A}_{s}\right)^{-1}.$$

由 Hörmander-Mikhlin 定理可得

$$\left\|\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s_n}+(1+z)}-\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s}+(1+z)}\right\|_{L^2\to L^2}=o_n(1). \tag{4.23}$$

因此，要证明 (4.22)，只需验证 $\left\|\mathscr{A}_{s_n}-\mathscr{A}_s\right\|_{L^2\to L^2}=o_n(1)$。注意，由 (4.20) 可知 $u_{s_n}>0$，于是 $\|u_{s_n}\|_\infty\lesssim 1$。利用 (4.23)，我们便可得知

$$\begin{aligned}&\left\||u_{s_n}|^{p-2}\left(\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s_n}+(1+z)}-\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s}+(1+z)}\right)\right\|_{L^2\to L^2}\\ &\lesssim \|u_{s_n}\|_\infty^{p-2}\left\|\left(\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s_n}+(1+z)}-\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s}+(1+z)}\right)\right\|_{L^2\to L^2}=o_n(1).\end{aligned} \tag{4.24}$$

注意到

$$\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s}+(1+z)}=\int_0^{+\infty}e^{-(1+z)t}e^{-t\left(-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s}\right)}\,dt,$$

其中

$$e^{-t\left(-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s}\right)}f=\mathscr{H}(x,y,t)*f.$$

并且 $\mathscr{H}$ 由 (4.5) 定义。由此得到

$$\begin{aligned}&\left\|\left(|u_{s_n}|^{p-2}-|u_s|^{p-2}\right)\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s}+(1+z)}\right\|_{L^2\to L^2}\\ &\le\int_0^{+\infty}e^{-(1+z)t}\left\|\left(|u_{s_n}|^{p-2}-|u_s|^{p-2}\right)e^{-t\left(-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^{s}\right)}\right\|_{L^2\to L^2}dt\\ &\le\left\||u_{s_n}|^{p-2}-|u_s|^{p-2}\right\|_q\int_0^{+\infty}e^{-(1+z)t}\|\mathscr{H}(\cdot,t)\|_{\frac{q}{q-1}}\,dt\\ &\lesssim\left\||u_{s_n}|^{p-2}-|u_s|^{p-2}\right\|_q\int_0^{+\infty}e^{-(1+z)t}t^{-\frac{1}{q}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2s}\right)}\,dt\lesssim\left\||u_{s_n}|^{p-2}-|u_s|^{p-2}\right\|_q,\end{aligned} \tag{4.25}$$

wher其中我们对 $q>2$ 使用了赫尔德不等式、杨氏不等式和 (4.6)，使得

$$\frac{1}{q}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2s}\right)<1.$$

注意到

$$\left\||u_s|^{p-2}-|u_{s_n}|^{p-2}\right\|_q \le \left\||u_s-u_{s_n}|^{p-2}\right\|_q = \left\|u-u_{s_n}\right\|_{q(p-2)}^{p-2}, \quad 2<p\le 3 \tag{4.26}$$

and

$$\begin{aligned}\left\||u_s|^{p-2}-|u_{s_n}|^{p-2}\right\|_q &\lesssim \left\|\left(|u_s|^{p-3}+|u_{s_n}|^{p-3}\right)|u-u_{s_n}|\right\|_q \\ &\le \left(\|u_s\|_\infty^{p-3}+\|u_{s_n}\|_\infty^{p-3}\right)\|u_s-u_{s_n}\|_q \lesssim \|u_s-u_{s_n}\|_q, \quad p>3,\end{aligned} \tag{4.27}$$

其中我们用到了以下事实：ku$_{s_n}$k$_\infty \lesssim$ 1 and u$_s \in$ L$^\infty(\mathbb{R}^2)$。由于根据引理 4.1，s$_n \ge$ s$_0 >$ 0 and { u$_{s_n}$} $\subset$ H$^{1,s_n}(\mathbb{R}^2)$，由插值论证可得 {u$_{s_n}$} $\subset$ H$^{1,s_0}(\mathbb{R}^2)$。此外，根据引理 4.3，{u$_{s_n}$} $\subset$ H$^{1,s_0}(\mathbb{R}^2)$ 有界。因此，我们看到存在 u$_{s_n}$ $\rightharpoonup$ u$_s$in H $^{1,s_0}(\mathbb{R}^2)$ as n $\to\infty$。由于 H$^{1,s_0}(\mathbb{R}^2)$ 紧嵌入 L^{2}loc $(\mathbb{R}^2)$，因此 u$_{s_n}$ $\rightharpoonup$ u$_s$in L^{2}loc $(\mathbb{R}^2)$ as n $\to\infty$。由 (4.20) 可得，u$_{s_n}$ $\rightharpoonup$ u$_s$in L$^2(\mathbb{R}^2)$ as n $\to\infty$。由于 ku$_{s_n}$ k$_\infty \lesssim$ 1，因此对于任意 q >2，u$_{s_n}$ $\rightharpoonup$ u$_s$ in L$^q(\mathbb{R}^2)$ as n $\to\infty$。因此，由 (4.26) 和 (4.27) 可得

$$\left\||u|^{p-2}-|u_{s_n}|^{p-2}\right\|_q = o_n(1)$$

对于任意$q>2$。回到（4.25），我们便有

$$\left\|\left(|u_{s_n}|^{p-2}-|u_s|^{p-2}\right)\frac{1}{-\partial_{xx}+(-\partial_{yy})^s+(1+z)}\right\|_{L^2\to L^2}=o_n(1).$$

结合（4.24），可得$\left\|\mathscr{A}_{s_n}-\mathscr{A}_s\right\|_{L^2\to L^2}=o_n(1)$。因此，所需结论得证。

根据以上讨论，我们现在可以证明该断言。由于 u$_{\tilde{s}}$是方程（4.1）的一个解，其中 s $=$ ˜s，因此 $\mathscr{L}_{-,\tilde{s}}$u -s $=0$。这表明 u -s 是 $\mathscr{L}_{-,\tilde{s}}$的特征函数，对应特征值 0。由于 u -s >0，因此 0 是 $\mathscr{L}_{-,\tilde{s}}$的最低特征值，即 $\lambda_1(\mathscr{L}_{-,\tilde{s}})=0$。进一步可推知，0 是一个孤立特征值。由算子 $\mathscr{L}_{-,s}$的范数预解式收敛可得，当 s $\to$ ˜s 时，$\lambda_1(\mathscr{L}_{-,s})\to\lambda_1(\mathscr{L}_{-,\tilde{s}})$。由于 $\lambda_1(\mathscr{L}_{-,\tilde{s}})=0$且其为孤立特征值，因此存在 $\epsilon>0$，使得对于 |s $-$ ˜s| $<\epsilon$，$\lambda_1(\mathscr{L}_{-,s})=0$且其为孤立特征值。注意，由算子 $\mathscr{L}_{-,s}$的范数预解式收敛，当 s $\to$ ˜ s 时，u -s 在 L$^2(\mathbb{R}^2)$ 中收敛。再次应用算子 $\mathscr{L}_{-,s}$ 的 Perron-Frobenius型性质，并利用 u$_{\tilde{s}}>$0这一事实，我们便可推出，对于任意|s $-$ ˜s| $<\epsilon$，$\phi_s>0$。

接下来，我们验证：若对于任意 s $\in$ [s0, ˜s)，存在某个 ˜s $<$ s$_*$，使得 u$_{\tilde{s}}>$ 0。令 ˜s $\in$ (s$_0$, s$_*$)，且取序列 {s$_n$} $\subset$ [s0, ˜s)，使得当 n $\to\infty$ 时，s$_n$ $\to$ ˜s。由于当 n $\to\infty$ 时，u$_{s_n}>0$，且 u$_{s_n}$ $\rightharpoonup$ u$_{\tilde{s}}$ 在 L$^2(\mathbb{R}^2)$ 中，因此 u -s $\ge$ 0。注意，由引理 4.3 可知 u$_{\tilde{s}}\neq$ 0，且 u -s $\ge$ 0，故由最大值原理可得 u -s $>$ 0。总之，对于任意 s $\in$ [s$_0$,s$_*$)，均有 $\phi_s>0$。证明完毕。□

引理4.5. 设 $\{s_n\}\subset[s_0,s_*)$ 为一个序列，使得当 $n\to\infty$ 时，$s_n\to s_*$，且对任意 $n\in\mathbb{N}$，$u_{s_n}>0$。那么存在 $u_*\in L^2(\mathbb{R}^2)\cap L^p(\mathbb{R}^2)$，使得当 $n\to\infty$ 时，$u_{s_n}\rightharpoonup u_*$ 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 和 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 中。进一步，有 $u_*>0$，且它满足方程

$$-\partial_{xx}u_*+(-\partial_{yy})^s u_*+u_*=u_*^{p-1}. \tag{4.28}$$

证明。 为简单起见，我们记 $u_n=u_{s_n}$。注意，由引理 4.1，$\{u_n\}\subset H^{1,s_n}(\mathbb{R}^2)$，于是 $\{u_n\}\subset H^{1,s_0}(\mathbb{R}^2)$，这是因为 $s_n\ge s_0>0$。由引理 4.3 可知，$\{u_n\}\subset H^{1,s_0}(\mathbb{R}^2)$ 有界。

于是存在 $u_* \in H^{1,s_0}(\mathbb{R}^2)$，使得当 $n \to \infty$ 时，$u_n \to u_*$ 属于 $H^{1,s_0}(\mathbb{R}^2)$。此外，由于 $H^{1,s_0}(\mathbb{R}^2)$ 紧嵌入 $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$，当 $n \to \infty$ 时，我们有 $u_n \to u_*$ 属于 $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$。利用引理4.4中的 (4.20)，可得当 $n \to \infty$ 时，$u_n \to u_*$ 属于 $L^2(\mathbb{R}^2)$。根据赫尔德不等式，我们进而得到当 $n \to \infty$ 时，$u_n \to u_*$ 属于 $L^p(\mathbb{R}^2)$。由于 $u_n \in H^{1,s_n}(\mathbb{R}^2)$ 是满足 $s = s_n$ 的 (4.1) 的一个解，因此

$$u_n = \frac{1}{-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^{s_n} + 1} |u_n|^{p-2} u_n. \tag{4.29}$$

考虑到 Hörmander-Mikhlin 定理，我们得到

$$\left\| \frac{1}{-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^{s_n} + 1} - \frac{1}{-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^{s_*} + 1} \right\|_{L^{\frac{p}{p-1}} \to L^{\frac{p}{p-1}}} = o_n(1). \tag{4.30}$$

此外，我们看到

$$\begin{aligned} \left\| |u_n|^{p-2} u_n - |u_*|^{p-2} u_* \right\|_{\frac{p}{p-1}} &\lesssim \left\| \left(|u_n|^{p-2} + |u_*|^{p-2} \right) |u_n - u_*| \right\|_{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq \left(\|u_n\|_p^{p-2} + \|u_*\|_p^{p-2} \right) \|u_n - u_*\|_p = o_n(1), \end{aligned}$$

这表明

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^{s_*} + 1} \left(|u_n|^{p-2} u_n - |u_*|^{p-2} u_* \right) \right\|_{\frac{p}{p-1}} &= \left\| \mathcal{K} * \left(|u_n|^{p-2} u_n - |u_*|^{p-2} u_* \right) \right\|_{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq \left\| |u_n|^{p-2} u_n - |u_*|^{p-2} u_* \right\|_{\frac{p}{p-1}} = o_n(1), \end{aligned} \tag{4.31}$$

其中我们使用了杨氏不等式，以及 $\mathcal{K} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 是该方程的基本解这一事实

$$-\partial_{xx} u + (-\partial_{yy})^{s_*} u + u = 0.$$

因此，由 (4.30) 和 (4.31)，我们可以得出

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^{s_n} + 1} |u_n|^{p-2} u_n - \frac{1}{-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^{s_*} + 1} |u_*|^{p-2} u_* \right\|_{\frac{p}{p-1}} \\ \leq &\left\| \left(\frac{1}{-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^{s_n} + 1} - \frac{1}{-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^{s_*} + 1} \right) |u_n|^{p-2} u_n \right\|_{\frac{p}{p-1}} \\ &+ \left\| \frac{1}{-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^{s_*} + 1} \left(|u_n|^{p-2} u_n - |u_*|^{p-2} u_* \right) \right\|_{\frac{p}{p-1}} = o_n(1). \end{aligned}$$

由此可由 (4.29) 得出，u_* 满足该方程

$$u_* = \frac{1}{-\partial_{xx} + (-\partial_{yy})^{s_*} + 1} |u_*|^{p-2} u_*,$$

这表明 u_* 满足 (4.28)。注意，由于 $u_{s_n} > 0$ 以及引理 4.3，$u_* \geq 0$ 和 $u^* \neq 0$。由最大值原理可知，$u_* > 0$。至此，证明完成。□

引理4.6. 设 $u_0 \in X^p$ 是 (4.1)的一个基态。则其极大分支 ϕ_s 在 $s \in [s_0, s_*)$时延伸至 $s_* = 1$。

证明. 注意到 $u_0 \in X^p$ 是 (4.1)的一个基态，因此 L_{+,s_0} 作用于 $L^2_a(\mathbb{R}^2)$ 时的莫尔斯指标为 1，即 $\mathcal{N}_{-,a}(\mathscr{L}_{-,s_0}) = 1$。仿照引理4.4的证明推理，我们也可以证明算子 $\mathscr{L}_{+,s}$的范数预解式收敛。这立即表明存在 $\epsilon > 0$，使得对任意 $s \in [s_0, s_0+\epsilon)$,

$$\mathcal{N}_{-,a}(\mathscr{L}_{-,s}) = \mathcal{N}_{-,a}(\mathscr{L}_{-,s_0}) = 1.$$

对于这样的 $\epsilon > 0$，设 $s_n \subset [s_0, s_0+\epsilon)$ 是一个满足 $s_n \to s_0+\epsilon$ 的序列，其中 $n \to \infty$。那么，当 $n \to \infty$ 时，$\mathscr{L}_{+,s_n} \to \mathscr{L}_{+,s_0+\epsilon}$ 在范数预解式意义下收敛。利用莫尔斯指标关于该收敛的下半连续性，我们于是得到

$$1 = \liminf_{n\to\infty} \mathcal{N}_{-,a}(\mathscr{L}_{+,s_n}) \geq \mathcal{N}_{-,a}(\mathscr{L}_{+,s_0+\epsilon}).$$

另一方面，由于 $u^{s_0+\epsilon}$ 是方程 (4.1) 的一个解，且 $s = s_0+\epsilon$，因此

$$\left(u_{s_0+\epsilon}, \mathscr{L}_{+,s_0+\epsilon} u_{s_0+\epsilon}\right) = -(p-2)\int_{\mathbb{R}^2} |u_{s_0+\epsilon}|^p \, dxdy < 0.$$

因此我们得出 $\mathcal{N}_{-,a}(\mathscr{L}_{+,s_0+\epsilon}) = 1$。重复上述讨论，我们可以推断，对于任意 $s \in [s_0, s_*]$，都有 $\mathcal{N}_{-,a}(\mathscr{L}_{+,s}) = 1$。特别地，有 $\mathcal{N}_{-,a}(\mathscr{L}_{+,s_*}) = 1$。由此可知，$u_* \in X^p$ 是方程 (4.1) 的一个基态。因此，我们得到 $\mathscr{L}_{+,s_*}$ 在 $L^2_a(\mathbb{R}^2)$ 上具有平凡核。若 $s_* < 1$，则 u_s 可以延拓至 s_* 之后。这与 s_* 的定义矛盾。因此，我们得出 $s_* = 1$，证明完毕。□

现在我们可以给出定理 1.3 的证明。

定理 1.3 的证明。设 $0 < s_0 < 1$ 且 $2 < p < p_{s_0}$。假设 $u_{s_0} \in X^p$ 和 $\phi_{s_0} \in X^p$ 是方程 (4.1) 的两个不同基态，其中 $s = s_0$。由引理 4.2 和引理 4.6 可知，存在 $u_s \in C^1([s_0, 1); X^p)$ 以及 $\phi_s \in C^1([s_0, 1); X^p)$。此外，由引理 4.2 中的局部唯一性可得，对于任意 $s \in [s_0, 1)$，有 $u_s \neq \phi_s$。随后，根据引理 4.5，我们知道存在 $u \in X^p$ 和 $\phi \in X^p$，使得当 $s \to 1^-$ 时，$u_s \to u$ 且 $\phi_s \to \phi$ 在 $L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^p(\mathbb{R}^2)$ 中。另一方面，$u \in X^p$ 和 $\phi \in X^p$ 是方程 (4.1) 的解，其中 $s = 1$。进一步地，仿照引理 4.1 的证明，我们可以证明 $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ 且 $\phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$。注意，根据引理4.4，对于任意 s，$\tilde{s} \in [s_0, 1)$，有 $u_s > 0$ 且 $u_{\tilde{s}} > 0$。结合引理4.3，可得 $u \neq 0$、$u \geq 0$ 以及 $\phi \neq 0, \phi \geq 0$。然后，由最大值原理可推出 $u > 0$ 且 $\phi > 0$。此外，由移动平面法可知，u, ϕ 是径向对称的。由 [12] 可进一步得到 $u = \phi$。因此，有

$$\|u_s - \phi_s\|_{X_p} \to 0 \quad \text{as } s \to 1.$$

由于线性化算子

$$\mathscr{L}_+ := -\partial_{xx} - \partial_{yy} + 1 - (p-1)u^{p-2}$$

在 $L^2_{rad}(\mathbb{R}^2)$ 上非退化，仿照引理 4.2 的证明，利用隐函数定理，可知存在唯一的分支 $\tilde{u}_s \in C^1((1-\epsilon, 1]; X^p)$，满足$\tilde{u}_1 = u = \phi$ 并且是方程 (4.1) 的解。这与假设对任意 $s \in [s_0, 1)$，$u_s \neq \phi_s$ 矛盾。因此证明完毕。□

最后，我们给出定理 1.4 的证明。

证明。令 $u_1 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ 为方程 (4.1) 在 $s = 1$ 时的唯一基态。众所周知，u_1 是非退化的，即

$$Ker\,\mathscr{L}_{+,1} = span\{\partial_x u_1, \partial_y u_1\}.$$

由于u_1是径向对称的，因此$\mathscr{L}_{+,1}$在$L^2_a(\mathbb{R}^2)$上具有平凡核。仿照引理 4.2 的证明，利用隐函数定理，我们可以推出基态的唯一性

对于X_p中接近 1 的s，方程 (4.1) 的解。设s接近 1 时，u_s是方程 (4.1) 的唯一基态。因此，我们看到

$$span\{\partial_x u_s, \partial_y u_s\} \subset Ker\mathscr{L}_{+,s}.$$

注意到，当$s \to 1^-$时，$dimKer\mathscr{L}_{+,1} = 2$和$\mathscr{L}_{+,s} \to \mathscr{L}_{+,1}$在范数-预解式意义下收敛，这可通过仿照引理4.4的证明得出；于是$dimKer\mathscr{L}_{+,s} \leq 2$。因此，有$dimKer\mathscr{L}_{+,s} = 2$，并且

$$Ker\mathscr{L}_{+,s} = span\{\partial_x u_s, \partial_y u_s\}.$$

至此，证明完成。 □

参考文献

[1] *Y. Bahri, S. Ibrahim, H. Kikuchi*，半波薛定谔方程的孤立波与柯西问题评述，*Commun. Contemp. Math. 23 (2021), no. 5, Paper No. 2050058, 31 pp.*[2] *A. Esfahani*，带分数阶导数的各向异性 *Gagliardo-Nirenberg* 不等式，*Z. Angew. Math. Phys. 66 (6) (2015), 3345–3356.*[3] *A. Esfahani, S. Ehsan Esfahani*，广义 *BO-ZK* 方程的正解和节点解，*Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM 112 (4) (2018), 1381–1390.*[4] *P. Felmer, A. Quaas, J. Tan*，具有分数阶拉普拉斯算子的非线性薛定谔方程的正解，*Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 142 (2012), no. 6, 1237–1262.*[5] *P. Felmer, Y. Wang*，混合积分微分方程正解的定性性质，*Discrete Contin. Dyn. Syst. 39 (1) (2019) 369–393.*[6] *R.L. Frank, E. Lenzmann*，$\mathbb{R}$中分数阶拉普拉斯算子的非线性基态的唯一性，*Acta Math. 210 (2013), no. 2, 261–318.*[7] *R.L. Frank, E. Lenzmann, L. Silvestre*，分数阶拉普拉斯算子的径向解的唯一性，*Comm. Pure Appl. Math. 69 (2016), no. 9, 167–1726.*[8] *H. Hajaiej, L. Song*，证明归一化解存在性的一种一般且统一的方法及若干应用，*arXiv.2208.11862.*[9] *T. M. Kapitula, P. G. Kevrekidis, B. Sandstede*，通过无限维哈密顿系统中的 *Krein* 指标计数特征值，*Physica D, 3-4,(2004) 263–282.*[10] *T. Kapitula, P.G. Kevrekidis, B. Sandstede*，增补："通过无限维哈密顿系统中的 *Krein* 指标计数特征值" *[Phys. D 195 (2004), no. 3-4, 263–282] Phys. D 201 (2005), no. 1-2, 199–201.*[11] *T. Kapitula, K. Promislow*，非线性波的谱稳定性与动力学稳定性，应用数学科学丛书，*185*，施普林格，纽约，*2013.*[12] *M.K. Kwong*，$\Delta u - u + u^p = 0$在$\mathbb{R}^n$中的正解的唯一性，*Arch. Rational Mech. Anal. 105 (1989), no. 3, 243–266.*[13] *D. Pelinovsky*，耦合非线性薛定谔方程中孤立波谱稳定性的惯性定律。*Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 461 (2005), no. 2055, 783–812.*[14] *M. Reed, B. Simon*，《现代数理物理方法》。第 *IV* 卷：算子分析，学术出版社，纽约，*1978.*[15] *R.L. Schilling, R. Song, Z. Vondracek*，伯恩斯坦函数：理论与应用，德格鲁伊特数学丛书 *37*，*2012.*[16] *Y. Shi, C. Shao, Y. Liu*，自伴子空间序列的预解式收敛与谱逼近，*J. Math. Anal. Appl. 409 (2014), no. 2, 1005–1020.*[17] *H. Xu*，波导非线性薛定谔方程的无界 *Sobolev* 轨道与修正散射理论，*Math. Z. 286 (2017), no. 1-2, 443–489*。

西安交通大学数学与统计学院，中国陕西西安 710049 电子邮箱：tianxiang.gou@xjtu.edu.cn 加利福尼亚州立大学洛杉矶分校数学系，美国加利福尼亚州洛杉矶 90032 电子邮箱：hhajaie@calstatela.edu 阿拉巴马大学伯明翰分校数学系，美国阿拉巴马州伯明翰南第 10 大道 1402 号，35294 电子邮箱：stefanov@uab.edu