arXiv:2303.03325v1 [math.CA] 6 Mar 2023

最大非退化类 Radon 变换的局部曲率

Philip T. Gressman*

2023年3月7日

摘要

本文对所有维数和余维数下的此类 Radon 变换给出了完整的几何刻画：除端点外，它们满足由二次型缩放所允许的最大范围的局部 $L^p \to L^q$ 不等式。必要且充分的曲率型判据通过一个相关的类牛顿图来表述。对于多项式图族上的平均算子，曲率条件还蕴含尖锐的端点估计。证明依赖于近期发展出的多线性 Radon–Brascamp–Lieb 检验判据[11]，以及对多项式微分不等式的一个精细改进版本；这类不等式最早出现在关于 Oberlin 仿射曲率条件 [9]的研究中。

目录

1 引言 2 1.1 表述与主要定理.2 1.2 总结与大纲.5

2 记号与结果来自 [11] 72
.1 Notational 约定 i 7
及.2.2 类 Radon 算子的检验条件.7

3 线性与多重线性代数 10
3.1 基替换结果.10 3.2 非退化性考察.14

4 几何微分不等式 23
4.1 向量场构造.25 4.2 纳什函数与多项式提升.28

*部分由美国国家科学基金会资助项目 DMS-2054602 提供资助 .

5 非退化条件的充分性 34
5.1 几何次水平集不等式.35 5.2 多项式情形下充分性的证明.39

6 非退化条件的必要性 41
6.1 归约到模型情形.41 6.2 模型情形的分析.44

7 非多项式平均算子 47
7.1 一般逼近结果.48 7.2 C^∞ 情形下充分性的证明.56

1 引言

1.1 表述与主要定理

为类 Radon 变换建立最优或近最优的 L^p-改善不等式，这一问题有着悠久的历史，可追溯至 20 世纪 70 年代初 Strichartz [22] 和 Littman [13]的工作。直到 20 世纪 90 年代以前，该问题的大多数研究都高度依赖傅里叶方法和振荡积分方法；这一途径的一项关键成果，是发现了 Phong-Stein旋转曲率条件 [17] （该条件本身受到 Guillemin 和 Sternberg 提出的傅里叶积分算子非退化条件的启发，且与之等价 [12, 第六章第 6]节）。考虑卷积算子的特殊情形可知，Phong-Stein旋转曲率不为零，恰好刻画了这样一类类 Radon 变换：即使在较高余维下，它们在 L^2 Sobolev 空间尺度上也具有最大的平滑程度（参见 Seeger 和 Wainger [21]）。从这个意义上说，关于何种类Radon变换能在 L^2 Sobolev 改善意义下成为“最佳”，人们实际上已有近四十年的认识。在一些重要情形下（尤其是对超曲面上的平均算子），这类方法也得出了类 Radon 算子的最优 L^p-改善不等式，但这种方法往往难以推广，尤其是在对中间维数和余维的子流形进行平均时，因为这类子流形在几何上不同于曲线和超曲面这两个端点情形。

本文回答了一个基本问题：在 L^p 空间尺度上表现出“最佳可能”正则性提升的那些类Radon变换具有怎样共同的几何性质。过去二十年间，人们对这类算子进行过多次研究，其中最值得一提的是 Ricci [20]和 D. Oberlin [16] （另见 [8]）；然而，直到现在，人们仍无法连贯地描述这类对象的局部几何。以往的方法通常也局限于维数与余维的某些特殊组合。相比之下，定理1以一个局部量为依据，对所有相关维数和余维下所谓的模型算子几何给出了精确刻画；该局部量仅通过子流形族的二阶导数计算得出。这个条件涉及计算一种非传统的

牛顿图，这使得相关研究颇具挑战性。因此，也有若干结果（例如引理1）专门用于理解非退化性的稳定性等基本性质。

这里采用的表述如下。设 d_1、n 和 k 为正整数，且 $n > k$。假设 U 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d_1}$ 的一个开子集，$\phi(x,t)$ 是关于 $(x,t) \in U$ 的光滑函数，其取值属于 $\mathbb{R}^k$，并且$\gamma_t(x) := (t, \phi(x,t))$。令 $n_1 := d_1 + k$ 和 $d := n - k$，并考虑 Radon 类变换

$$Tf(x) := \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(\gamma_t(x))\eta(x, \gamma_t(x))dt, \tag{1}$$

对于 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上所有非负博雷尔可测函数f，该变换先验地均有定义。这里，$\eta(x, y)$ 充当连续截断函数，其取值范围将受到限制，使得 $\eta(x, \gamma_t(x))$ 的支集是紧致的，并包含某个指定点 $(x_*, t_*) \in U$。此外还假设，雅可比矩阵$D_x\phi$（即 ϕ 关于 x 变量的一阶偏导数组成的矩阵）对于属于 $\eta(x, \gamma_t(x))$ 支集的每个 (x,t) 都具有满秩 k。尽管文献中通常不采用将 $\gamma_t(x)$ 表示为 $\phi(x,t)$ 的图像这一特定形式，但这并非实质性限制；只要 $t \mapsto \tilde{\gamma}_t(x)$ 对固定的 x 将 $\mathbb{R}^{n_1}$ 映成一个 d_1 维子流形，任何在 $(x_*, t_*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d_1}$ 的某个邻域内局部定义、取值于 $\mathbb{R}^{n_1}$ 的光滑映射 $\tilde{\gamma}_t(x)$，经过适当的坐标变换以及对 t 作变量代换后，都可以局部写成 $(t, \phi(x,t))$。

在研究此类类 Radon 变换的 $L^p \to L^q$ 映射性质时，通过 Knapp 型例子可得到一对特殊的指数，它们对于任意给定的 n、k 和 d_1，都是最佳的 p 和 q，即:

$$p_b := \frac{kd}{nd_1} + 1 \text{ and } q_b := \frac{n_1 d}{kd_1} + 1. \tag{2}$$

供参考，H¨older 对偶指数恰为

$$p_b' = \frac{nd_1}{kd} + 1 \text{ and } q_b' = \frac{kd_1}{n_1 d} + 1. \tag{3}$$

在特殊情形下，当 $n = n_1$ 且 $k = 1$、$p_b = (n+1)/n$ 和 $q_b = n+1$时；人们早已知道，当以 $x \in \mathbb{R}^n$ 为指标、由 $\gamma_t(x)$参数化的子流形族对于每个固定的 x 都具有 Phong 和 Stein 意义下的非零旋转曲率时，算子 (1) 当且仅当满足相应条件时将 $L^{(n+1)/n}(\mathbb{R}^n)$ 映射到 $L^{n+1}(\mathbb{R}^n)$。然而，当 $k > 1$时，非消失旋转曲率是充分条件，但通常并非必要条件。

决定式 (1) 在指数 (2) 处（以及附近）有界性的关键局部非退化条件，可用一个三线性曲率泛函来描述。由于假设雅可比矩阵 $D_x\phi$（排列方式为：行对应 ϕ 的坐标，列对应 x 的坐标）在 (x,t) 处的秩为 k，其核必定始终具有 d 维；在任意点 (x,t) 处，令 $z_1, \ldots, z_d$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中张成该核的任意正交归一向量

$D_x\phi$。对于 $i \in \{1, \dots, d_1\}$、 $i' \in \{1, \dots, k\}$ 和 $i'' \in \{1, \dots, d\}$，令

$$Q_{ii'i''} := \sum_{\ell=1}^{n} z_{i''}^{\ell} \frac{\partial^2 \phi^{i'}}{\partial t^i \partial x^\ell}(x,t)$$

（如 $p^{i'}$ 和 $z_{i''}^{\ell}$ 中的上标所示，我们用它们表示标准基下的坐标，例如， $\phi := (\phi^1, \dots, \phi^k)$ 和 $z_{i'} := (z_{i'}^1, \dots, z_{i'}^n)$）；我们通过以下公式将这些系数与一个三线性泛函 $Q\colon \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 联系起来

$$Q(u,v,w) := \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{i'=1}^{k} \sum_{i''=1}^{d} Q_{ii'i''} u^i v^{i'} w^{i''} \tag{4}$$

对所有 $u \in \mathbb{R}^{d_1}$、 $v \in \mathbb{R}^k$ 和 $w \in \mathbb{R}^d$均成立。一个关键的几何对象是与 Q 相关联的牛顿型图；事实证明，它包含了判断 (1) 是否满足最佳可能$L^{p_b} \to L^{q_b}$不等式的关键信息。（请注意，曲率在量化有界性方面发挥作用这一更广泛的观察并非新发现；事实上，非消失旋转曲率恰好对应于这样的情形：对于所有 $v \neq 0$， $Q(\cdot, v, \cdot)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上是一个非退化双线性型。）为定义它，需要先给出一个简单的辅助定义。给定一个多重指标 $\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k$ 以及一个由属于 $\{1, \dots, k\}$ 的整数构成的序列 $\mathcal{I} := (i_1, \dots, i_s)$，若对每个 $\ell \in \{1, \dots, k\}$，恰有 β_ℓ 个指标 $j \in \{1, \dots, s\}$ 满足$i_j = \ell$，则称 β计数 $\mathcal{I}$；换言之，对每个 ℓ， β_ℓ 就是序列 $\mathcal{I}$ 中等于 ℓ的元素个数。

给定 (4) 中的 Q，令 $N(Q)$ 表示 $[0,\infty)^{d_1+k+d}$ 中由所有三元组 $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d_1} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^k \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$（其中 $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| \leq \min\{d, k\}$，且 α、 β和 γ 视为多重指标）构成的集合的凸包；这些三元组满足以下任一条件：$(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$，或者存在 $\mathcal{I} := (i_1, \dots, i_s) \subset \{1, \dots, k\}^s$ 和 $\mathcal{J} := (j_1, \dots, j_s) \subset \{1, \dots, d\}^s$，使得 β 计数为 $\mathcal{I}$， γ 计数为 $\mathcal{J}$，并且

$$\partial_\tau^\alpha|_{\tau=0} \det \begin{bmatrix} Q(\tau, e_{i_1}, e'_{j_1}) & \cdots & Q(\tau, e_{i_1}, e'_{j_s}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q(\tau, e_{i_s}, e'_{j_1}) & \cdots & Q(\tau, e_{i_s}, e'_{j_s}) \end{bmatrix} \neq 0, \tag{5}$$

其中 $\{e_i\}_{i=1}^k$ 是 $\mathbb{R}^k$ 的标准基，$\{e'_j\}_{j=1}^d$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的标准基，并且 $\tau \in \mathbb{R}^{d_1}$。接着令

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathcal{R}}(Q) := \bigcap \Big\{ & N(Q') \mid Q'(u,v,q) = Q(O_1 u, O_2 v, O_3 w) \text{ for orthogonal} \\ & \text{matrices } O_1, O_2, O_3 \text{ and all } u \in \mathbb{R}^{d_1}, v \in \mathbb{R}^k, w \in \mathbb{R}^d \Big\} \end{aligned} \tag{6}$$

（即， $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}(Q)$ 是所有此类 $N(Q')$ 的交集）。当点

$$\Big(\overbrace{\frac{dk}{d_1 n}, \dots, \frac{dk}{d_1 n}}^{d_1 \text{ copies}}, \overbrace{\frac{d}{n}, \dots, \frac{d}{n}}^{k \text{ copies}}, \overbrace{\frac{k}{n}, \dots, \frac{k}{n}}^{d \text{ copies}} \Big) \tag{7}$$

属于 $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}(Q)$。对于不满足（7）属于 $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}(Q)$ 的任何 Q ，称其为退化的。本文的主要结果如下。

定理1. 考虑由 (1) 给出的变换 T。设 $(x_*, y_*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_1}$具有如下性质：对于某个 $(x_*, t_*) \in U$， $y_* = \gamma_{t_*}(x_*)$ 成立；并假设雅可比矩阵 $D_x\phi$ 在 (x_*, t_*) 处的秩为 k。设 Q 为点 (x_*, t_*) 处由 (4) 给出的三线性泛函。设 $\Delta \subset [0,1]^2$ 为顶点分别为 (0, 0)、(1, 1) 和 $(1/p_b, 1/q_b)$ 的闭三角形。

1. 若 Q 非退化，且 ϕ 是关于 x 和 t的多项式，则存在一个紧支撑且在 (x_*, y_*) 处不为零的 η ，使得 (1) 将 L^{p_b} 映射到 L^{q_b}。通过插值，对于属于三角形 Δ的所有点 $(1/p, 1/q)$， T 将 $L^p(\mathbb{R}^{n_1})$ 映射到 $L^q(\mathbb{R}^n)$。2. 若 Q非退化，且 ϕ 只是关于 x 和 t的光滑函数，则存在一个紧支撑且在 (x_*, y_*) 处不为零的 η，使得对于属于三角形 Δ 内部的所有点对 $(1/p, 1/q)$，(1) 将 $L^p(\mathbb{R}^{n_1})$ 映射到 $L^q(\mathbb{R}^n)$（注意，对于所有 $p \in [1, \infty]$， T 也会平凡地将 L^p 映射到自身）。3. 若 Q 在 处退化，且 $\eta(x_*, y_*) \neq 0$，则对于属于某个 $(1/p_b, 1/q_b)$ 邻域的所有点对 $(1/p, 1/q)$，(1) 都不能从 $L^p(\mathbb{R}^{n_1})$ 有界映射到 $L^q(\mathbb{R}^n)$。该邻域可取为仅依赖于 Q。

简言之，对于光滑的 ϕ， Q 的非退化性是某些点对（$1/p$， $1/q$）的 $L^p \to L^q$ 有界性的充分必要条件，其中（$1/p_b$， $1/q_b$）属于其闭包。

尽管即使在光滑情形下， Q 的非退化性似乎很可能也是（1）完全 $L^{p_b} \to L^{q_b}$ 有界性的充分必要条件，但 [11] 中出现的（1）有界性的稳健刻画在很大程度上依赖于多项式的代数性质。因此，解决定理1光滑情形下的端点问题，可能需要采用与本文所用方法截然不同的方法。

1.2 总结与提纲

定理1的证明包含三个主要要素。第一项是近期出现的结果： [11], 刻画了某些多线性类 Radon 变换在一条重要的缩放线上具有有界性；至关重要的是，这条缩放线经过（$1/p_b$， $1/q_b$）。 [11], 中的关键结果将在此作为黑箱使用，为方便起见记录于第2.2节。这是论证中两个涉及多项式映射与非多项式映射之间重要区别的环节之一。

尽管本文并未直接依赖几何不变理论领域的任何外部结果，但定理1的整体证明策略深受源自该领域的思想影响，而且已有不少相关结果和工具本可以在此使用。

熟悉几何不变量理论的读者会看出，式 (34) 与希尔伯特–芒福德判据之间的联系。受几何不变量理论启发的工作大多集中在第3节，其中联系最为紧密的是第 3.2 节；该节的核心是关于非退化性的定量刻画的引理1。

定理1证明的第二个主要组成部分，是对某些工具所作的修改；这些工具最初出现在 [9], ，用于研究 D. Oberlin 的仿射豪斯多夫测度及相关的曲率条件 [15]。这些工具是定理 3 的研究对象；该定理见第4节，并在其中得到证明。从某种意义上说，由此得到的不等式可视为更常见的多项式型函数概念的一种几何推广（见 [18]）：这类函数的不等式用简单的尺度因子和函数自身的上确界来控制“良好”函数的导数。定理 3 是对 [9] 中更一般的微分不等式的更新，具有两项主要创新：明确给出了各种常数对所涉多项式次数的依赖关系（这是推广到光滑函数所必需的一环）；并且将其置于纳什函数这一范畴中。从某种意义上说，纳什函数是能够使定理 3 的定量版本成立的最一般函数。这些结果及其证明记载于第4节。随后，在第 5 节完成证明：对于多项式映射，非退化性蕴含有界性。

第6节确立了非退化性的必要性。其中的策略本质上是对适当特征函数进行测试，开展非常细致的 Knapp型分析。具体而言，第6.1节证明，任何满足某个几乎最优的 $L^p \to L^q$ 的类Radon变换，都与一个更简单的算子密切相关；对于该算子，其 ϕ 是 x 和t的双线性函数。随后，第6.2节证明，模型情形中的退化性会导致算子在接近最优指数时不具备有界性。

定理1证明的第三个主要组成部分见第7节，讨论如何从多项式 ϕ 过渡到光滑 ϕ，这一过程借助Jackson定理和逼近来完成。Bourgain和Guth [4] 以及 Zahl [23], 早期的工作中也出现了类似思路，尽管具体背景相当不同。就本文而言，逼近是通过对 T 作简单的Littlewood-Paley分解来实现的；这使得一种粗略的想法得以精确表述：当 T 作用于尺度为 2^{-j}的函数时，我们基本上可以在误差为 2^{-j} 的范围内自由扰动映射 $\gamma_t(x)$。在端点$L^{p_b} \to L^{q_b}$ 处对Littlewood-Paley分量求和基本上是不可能的，因为多项式逼近伴随着算子范数，而这些范数会随着尺度愈发精细而发散至无穷大。不过，凭借Christ、Nagel、Stein和Wainger [5]开创性工作中出现的一般 L^2 Sobolev不等式，我们可以在邻近的指数对处求和这些分量，且损失仅为无穷小量。

2 记号及其结果 [11]

2.1 记号约定

如引言中所述，上标通常用于表示标准基中向量的坐标，例如，当 $x \in \mathbb{R}^n$时，$x := (x^1, \ldots, x^n)$。在下文的证明中，也广泛使用标准多重指标记号：给定 $\alpha := (\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，定义 $|\alpha| := \alpha^1 + \cdots + \alpha^n$,$\alpha! := \alpha^1! \cdots \alpha^n!$，$x^\alpha := (x^1)^{\alpha^1} \cdots (x^n)^{\alpha^n}$，对任意 $x := (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$，并且

$$\partial^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial (x^1)^{\alpha_1} \cdots (x^n)^{\alpha^n}}(x)$$

当 $x \in \mathbb{R}^n$。

接下来的工作中，相当一部分也涉及处理高度多重线性对象。为大幅简化记号，本文将采用以下非标准求和约定。当 F 是依赖于一组 k个对象的任意实值量时，我们作如下定义：

$$\sum_{i=1}^{n} F(\underline{\omega_i}_{|k}) := \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} F(\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}). \tag{8}$$

换言之，当含有求和变量的表达式下方带有下划线时，应将求和变量替换为一组 k个求和指标（或下划线右侧所示长度的元组），并将带下划线的表达式理解为对一组k个元素求和的简写，其中元组的每个元素都依赖于各自的求和指标。

记号 $A \lesssim B$ 表示存在有限正常数 C，使得 $A \leq CB$ 关于 A 和 B 的参数一致成立，除非另有说明；同样， $A \approx B$ 表示 $A \lesssim B$ 和 $B \lesssim A$。

2.2 类 Radon 算子的测试条件

本节回顾 [11] 中的关键结果，这些结果将被频繁使用。

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_1}$ 是一个开集，其点的形式为 (x, y)，其中$x \in \mathbb{R}^n$ 且 $y \in \mathbb{R}^{n_1}$。令 $\pi \colon \Omega \to \mathbb{R}^k$，其中某个 $k \leq \min\{n, n_1\}$，并假设 π 是光滑的。符号 $D_x\pi$ 表示 π 关于 x 的雅可比矩阵，即 $D_x\pi|_{(x,y)} := \partial\pi/\partial x|_{(x,y)}$，其行对应 π 的各项，列对应微分方向； $D_y\pi$ 也类似。对象 $d_x\pi$ 是一个交替的 k-线性泛函，定义在$\mathbb{R}^n$ 上，其定义式为

$$d_x\pi|_{(x,y)}(v_1, \ldots, v_k) := \det\left[D_x\pi|_{(x,y)}v_1, \ldots, D_x\pi|_{(x,y)}v_k\right], \tag{9}$$

对于 $d_y\pi$ 也同理，它是 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上的交替 k 线性泛函。

给定任意一组向量 ω ω_1、.....、 $\omega_n \in \mathbb{R}^n$,

$$
\begin{aligned}
||d_x\pi(x,y)||_\omega &:= \left[\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{n}\left|d_x\pi(\underline{\omega_i}_{|k})\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{1}{k!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}\left|d_x\pi|_{(x,y)}(\omega_{i_1},\ldots,\omega_{i_k})\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

并同样设定

$$
||d_y\pi(x,y)||_\omega := \left[\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{n_1}\left|d_y\pi|_{(x,y)}(\underline{\omega_i}_{|k})\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}
$$

对于 $\mathbb{R}^{n_1}$ 中任意一个由向量 $\omega_1, .. ., \omega_{n_1}$ 构成的 n_1-元组。记号 $||d_x\pi(x,y)||$ 和 $||d_y\pi(x,y)||$ 表示应将 ω 取为标准基向量的元组。

任何三元组 $(\Omega\ \pi, \Sigma)$ 称为 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_1}$ 上余维为 k 的光滑关联关系，当 $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_1}$ 为开集， $\pi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ 光滑，且

$$
\Sigma = \{(x,y) \in \Omega \mid \pi(x,y) = 0, ||d_x\pi(x,y)||, ||d_y\pi(x,y)|| > 0\}.
$$

记号 ${}^x\Sigma$ 和 Σ^y 分别表示固定 x 和 y 时 Σ 的切片:

$${}^x\Sigma := \{y \in \mathbb{R}^{n_1} \mid (x,y) \in \Sigma\} \text{ and } \Sigma^y := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \in \Sigma\right\},$$

并且在每个切片 ${}^x\Sigma$ 和 Σ^y 上， σ 表示所谓的余面积测度，其由以下公式给出

$$
\int_{{}^x\Sigma} f d\sigma := \int_{{}^x\Sigma} f(y)\frac{d\mathcal{H}^{d_1}(y)}{||d_y\pi(x,y)||} \text{ and } \int_{\Sigma^y} f d\sigma := \int_{\Sigma^y} f(x)\frac{d\mathcal{H}^{d}(x)}{||d_x\pi(x,y)||},
$$

其中 $d_1 = n_1 - k$、 $d = n - k$，以及 $d\mathcal{H}^s$ 是通常的 s 维豪斯多夫测度。

从 [11] 需要的主要结果如下，这是[11, 定理 4]的线性情形。

定理 2（参见 [11]中的定理 4）。设 $(\Omega\ \pi, \Sigma)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_1}$上的光滑关联关系，并假设 π: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^k$是多项式。类Radon变换

$$
Tf(x) := \int_{{}^x\Sigma} f(y)\eta(x,y)d\sigma(y)
$$

对于连续的 η ，只要存在一个有限常数 C ，就满足 $L^p \to L^{pn/k}$ 不等式

$$
\int_{{}^x\Sigma} \frac{|\eta(x,y)|^{p'} d\sigma(y)}{||d_x\pi(x,y)||_\omega^{p'-1}} \le C \tag{11}
$$

对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$、所有满足 $|\det(\omega_1, \ldots, \omega_n)| = 1$ 的 n 元组 $\{\omega_i\}_{i=1}^n$，以及所有 $\epsilon > 0$。T 的范数界至多为一个常数，该常数取决于 n、n_1 和 k，再乘以 C 的若干次幂（幂次取决于 n、n_1 和 k）以及多项式 π^i、$i \in \{1, \ldots, k\}$. 的次数之积

在专门研究（1）的背景时，需要进行一些虽小但很有用的化简。首先，可以根据 ϕ 一劳永逸地固定定义函数 π，使得 $\pi := (\pi^1, \ldots, \pi^k)$ 对于

$$\pi^j(x, y) := -y^{d_1+j} + \phi^j(x, (y^1, \ldots, y^{d_1})), \qquad j \in \{1, \ldots, k\}, \tag{12}$$

以及满足 $(x, (y^1, \ldots, y^{d_1})) \in U$ 的任意一对 (x, y)。其次，对于 π 的这个定义，余面积测度只不过是 $y^1, \ldots, y^{d_1}$ 中的勒贝格测度:

命题 1. 设 π 为定义函数（12）。子流形 ${}^x\Sigma$ 上的余面积测度 $d\sigma$ 恰好是勒贝格测度 dt，其中 ${}^x\Sigma$ 通过 $\gamma_t(x)$ 参数化（如（1）之前所定义），对于 $t \in \mathbb{R}^{d_1}$，即

$$\int_{{}^x\Sigma} f d\sigma = \int_{{}^xU} f(\gamma_t(x))\, dt = \int_{{}^xU} f(t, \phi(x, t))\, dt \tag{13}$$

对于 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上的所有非负博雷尔可测函数 f，其中 ${}^xU$ 是由满足 $D_x\phi(x, t)$ 满秩的所有 $t \in \mathbb{R}^{d_1}$ 构成的开子集。

证明。这是对 [10] 中命题 5 的一个小幅变体。根据余面积测度的定义和关联关系 Σ，只需证明 $dt = d\mathcal{H}^{d_1}(y)/||d_y\pi(x, y)||$ 在每个点 $y \in {}^x\Sigma$ 处对每个 x都成立。这是因为映射$t \mapsto \gamma_t(x)$显然参数化了每个 x对应的水平集 $\pi(x, \cdot) = 0$。图像 γ_t 上的豪斯多夫测度 $d\mathcal{H}^{d_1}$ 总是等于

$$\sqrt{\det\left(D_t\gamma_t(x)\right)^T \left(D_t\gamma_t(x)\right)} dt$$

当将 $D_t\gamma_t(x)$ 视为一个 $(d_1 + k) \times d_1$ 矩阵时。由于 $||d_y\pi(x, y)|| = \sqrt{\det(D_y\pi(x, y))(D_y\pi(x, y))^T}$（根据 [11] 中的命题 1），只需证明

$$\det\left(D_t\gamma_t(x)\right)^T \left(D_t\gamma_t(x)\right) = \det(D_y\pi(x, y))(D_y\pi(x, y))^T \tag{14}$$

当 $(y^1, \ldots, y^{d_1}) = (t^1, \ldots, t^{d_1})$ 时。令 P为如下给出的 $k \times d_1$ 矩阵

$$P := \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial t^1}(x, t) & \cdots & \frac{\partial \phi^1}{\partial t^{d_1}}(x, t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi^k}{\partial t^1}(x, t) & \cdots & \frac{\partial \phi^k}{\partial t^{d_1}}(x, t) \end{bmatrix}.$$

该矩阵 P作为 $D_y\pi(x, y)$ 的子矩阵（位于左侧），以及 $D_t\gamma_t(x)$ 的子矩阵（位于底部）出现。其余项是一个 $k \times$的负值

k 恒等映射块（对于 $D_y\pi(x,y)$）和 $d_1 \times d_1$ 恒等映射块（对于 $D_t\gamma_t(x)$）。因此

$$\det(D_y\pi)(D_y\pi)^T = \det(PP^T + I_{k\times k})$$

and

$$\det\left(D_t\gamma_t(x)\right)^T\left(D_t\gamma_t(x)\right) = \det(I_{d_1\times d_1} + P^TP).$$

根据奇异值分解，存在一个 $k \times d_1$ 对角矩阵 D和两个阶数分别为 $k \times k$和 $d_1 \times d_1$的正交矩阵 O_1、O_2，使得$P = O_1DO_2$。于是

$$PP^T + I_{k\times k} = O_1\left(DD^T + I_{k\times k}\right)O_1$$

and

$$I_{d_1\times d_1} + P^TP = O_2\left(D^TD + I_{d_1\times d_1}\right)O_2,$$

so

$$\det(D_y\pi)(D_y\pi)^T = \det\left(DD^T + I_{k\times k}\right)$$

and

$$\det\left(D_t\gamma_t(x)\right)^T\left(D_t\gamma_t(x)\right) = \det(I_{d_1\times d_1} + D^TD).$$

现在，DD^T 和 D^TD 的非零对角元素必定等于 D中对应非零对角元素的平方，因此 $\det(I_{d_1\times d_1} + D^TD)$ 和 $\det(DD^T + I_{k\times k})$ 都等于乘积 $\prod_j(1+\sigma_j^2)$，其中 σ_j 是 D 的第 j 个对角元素。因此（14）成立。

最后，还需对集合 ${}^xU$ 作一说明。注意，π 的定义保证了

$$D_x\pi(x,y) = D_x\phi(x,t)$$

当 $(y^1,\ldots,y^{d_1}) = (t^1,\ldots,t^{d_1})$ 时。π的定义也显然保证了 $D_y\pi(x,y)$ 始终是满秩的，因此，当$D_x\phi(x,t)$ 满秩时，点 (x,y) 将属于 ${}^x\Sigma$。因此，$y \in {}^x\Sigma$ 的集合恰好对应于那些$t \in {}^xU$。

□

由于假设 $D_x\phi(x,t)$ 在所有相关点上均为满秩，命题 1 保证了定义 (1) 与定理 2 中出现的类 Radon 变换的定义一致。

3 线性代数与多重线性代数

3.1 基替换结果

定理 2 中条件 (11) 的一个基本要求是，必须证明对所有体积为 1 的 $\mathbb{R}^n$ 的基 $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ 都有一致有界。或许不难想象，要在如此庞大的一类参数上证明一致有界既繁琐，也很容易掩盖问题的重要特征。为此，值得注意的是，表达式 (10) 是对基元素的某个平方量求和，它具有一个很大的

对称群，使得我们可以改变基 $\{\omega_i\}_{i=1}^n$，而不改变 $||d_x\pi(x,y)||_\omega$ 本身的值。本节讨论若干结果；一旦定理1的证明全面展开，最终可以将它们理解为“基替换结果”。这些基替换命题都以某种形式探讨这样的问题：如何用某些更理想的泛函集合或在某个更理想的基上，表示线性或多重线性泛函（例如 $||d_x\pi(x,y)||_\omega^2$）的平方和。下面给出第一个这样的结果；它允许在一定尺度的子空间中重新调整基向量，实质上是经典 Cholesky 分解的一种形式。

命题 2. 设 $\{V_j\}_{j=1}^\ell$ 是实希尔伯特空间 H 中一个非平凡子空间构成的递减序列。假设 $\{v_i\}_{i=1}^m$ 是 V_1 的一组基。那么存在 V_1 的一组基 $\{u_i\}_{i=1}^m$，使得对每个 $j \in \{1,\dots,\ell\}$，$u_{m-\dim V_j+1},\dots,u_m$ 的张成空间等于 V_j，并且

$$\sum_{i=1}^m \langle x, v_i\rangle \langle v_i, y\rangle = \sum_{i=1}^m \langle x, u_i\rangle \langle u_i, y\rangle \qquad \forall x,y \in H. \tag{15}$$

换言之，可以选取向量 $u_1,\dots,u_m$，使得对每个 $k \in \{0,\dots,$ $u_{m-k} \in V_j$，dim $V_j - 1\}$ 且 $j \in \{1,\dots,\ell\}$。

证明. 注意，(15) 的对角情形 $y = x$ 是真正关心的情形，但极化恒等式表明，双线性情形完全等价（见下文命题 4）。

设 V_1 的一组正交归一基为 $\{e_i\}_{i=1}^m$，使得对每个 $j \in \{1,\dots,\ell\}$，$\{e_{m-i+1}\}_{i=1}^{\dim V_j}$ 的张成空间为 V_j（即，基中最后 dim V_j 个向量属于 V_j）。总可以通过逆向构造这样一组基：先找出 V_ℓ 的一组正交归一基，再对每个 j，从 ℓ 递减至 2，在 $V_{j-1} \setminus V_j$ 中补入一组极大的线性无关向量集，最后按照构造顺序（这与按指标排列的顺序相反）应用格拉姆-施密特过程。现在考虑双线性形式

$$B(x,y) := \sum_{i=1}^m \langle x, v_i\rangle \langle v_i, y\rangle \qquad \forall x,y \in H.$$

这是对称的，并且在 V_1 上正定（因为没有非零向量 x 能够属于 v_i 的张成空间，同时还与每个 v_i 正交），因此 $(x,y) \mapsto B(x,y)$ 是 V_1 上的一个内积。在新的内积下对向量序列 $e_1,\dots,e_n$ 应用格拉姆-施密特过程，可知存在 $\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_n$，它们关于 $B(\cdot,\cdot)$ 正交归一，并且具有这样的性质：对于每个 j，$\tilde{e}_j$ 都属于 $e_1,\dots,e_j$ 的张成空间。在 $B(\cdot,\cdot)$ 中的正交归一性意味着

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^n B(x,\tilde{e}_i)B(\tilde{e}_i,y) \qquad \forall x,y \in V_1. \tag{16}$$

根据原内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 下的里斯表示定理，存在 $u_1,\dots,u_n \in V_1$，使得对所有 $x \in V_1$，$\langle u_i, x\rangle = B(\tilde{e}_i, x)$。由 (16) 以及

u_i 的定义可知，恒等式 (15) 对所有 $x, y \in V_1$ 都成立。此外，如果 x 或 y 中任一个属于 $(V_1)^\perp$，那么 (15) 的两边恒为零。因此，只需将 $x_0, y_0 \in V_1$ 和 $x_1, y_1 \in (V_1)^\perp$ 分别写成 $x = x_0 + x_1$ 和 $y = y_0 + y_1$，并利用双线性，(15) 便对所有 $x, y \in H$ 成立。在 B 内积下，$\tilde{e}_i$ 的正交归一性意味着 $\delta_{ii'} = B(\tilde{e}_i, \tilde{e}_{i'}) = \langle u_i, \tilde{e}_{i'} \rangle$（其中 $\delta_{ii'}$ 是克罗内克δ），这说明 u_i 与 $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_{i-1}$ 的张成空间正交（按通常意义），而该空间也等于 $e_1, \ldots, e_{i-1}$ 的张成空间。因此，对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，u_i 本身必属于 $e_i, \ldots, e_n$ 的张成空间。这意味着，对每个 $j \in \{1, \ldots, \ell\}$，$\{u_i\}_{i=1}^m$ 中最后 $\dim V_j$ 个向量都属于 V_j。但是，根据 (15)，$u_1, \ldots, u_m$ 必须线性无关（否则就存在一个非零的 $x \in V_1$，它与 $u_1, \ldots, u_m$ 的张成空间正交，此时右侧在对角线上必为零，尽管已知左侧在对角线上不为零）。因此，对每个 $j \in \{1, \ldots, \ell\}$，$u_{m-\dim V_j+1}, \ldots, u_m$ 必须张成 V_j。□

下一个命题表明，也总是可以将给定的基替换为一组向量两两正交的基（类比于奇异值分解）。

命题 3. 设 $\{v_i\}_{i=1}^m$ 是实希尔伯特空间 H 中的线性无关向量。存在 $\{v'_i\}_{i=1}^m$，它们两两正交，与 $\{v_i\}_{i=1}^m$ 张成相同的空间，并且满足

$$\sum_{i=1}^m \langle x, v_i \rangle \langle v_i, y \rangle = \sum_{i=1}^m \langle x, v'_i \rangle \langle v'_i, y \rangle \quad \forall x, y \in H. \tag{17}$$

证明. 令 A 为满足以下条件的 $m \times m$ 矩阵：$A_{ii'} := \langle v_i, v_{i'} \rangle$ 对每个 i，$i' \in \{1, \ldots, m\}$。存在一个由 A 的特征向量构成的正交矩阵 O，使得 $\sum_{jj'} O_{ij} A_{jj'} O_{i'j'} = D_{ii'}$，其中 D 是某个对角矩阵。令 $v'_i := \sum_j O_{ij} v_j$ 对应于该矩阵 O。向量 v'_i 两两正交，因为当 $i \neq i'$ 时，$\langle v'_i, v'_{i'} \rangle = \sum_{jj'} O_{ij} \langle v_j, v_{j'} \rangle O_{i'j'} = 0$。现在

$$\sum_{i=1}^m \langle x, v'_i \rangle \langle v'_i, y \rangle = \sum_{i,j,j'=1}^m O_{ij} \langle x, v_j \rangle O_{ij'} \langle v_{j'}, y \rangle = \sum_{j=1}^m \langle x, v_j \rangle \langle v_j, y \rangle$$

对于任意 x、$y \in H$，这一点可从中间表达式看出：先对 i 求和，并利用 O 的正交性。□

命题 2 和 3 作为后续各节中的基变换结果之所以有用，是以下命题中的恒等映射 (19) 所带来的结果。

命题 4. 设 $\{v_i\}_{i=1}^m$ 和 $\{w_i\}_{i=1}^m$ 是某个有限维实希尔伯特空间 H 中的线性无关向量组。以下各项等价：

1. 恒等映射

$$\sum_{i=1}^m \langle x, v_i \rangle \langle v_i, y \rangle = \sum_{i=1}^m \langle x, w_i \rangle \langle w_i, x \rangle \tag{18}$$

对所有 x、$y \in H$ 均成立。

2. 对每个整数 $k \geq 1$，每个 k-线性泛函 L 都满足

$$\sum_{i=1}^{m} |L(\underline{v_i}_{|k})|^2 = \sum_{i=1}^{m} |L(\underline{w_i}_{|k})|^2. \tag{19}$$

3. 存在一个正交矩阵 $m \times m$ O，使得

$$v_i = \sum_j O_{ij} w_j \ \textit{for all}\ i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{20}$$

证明。由 (18) 通过对 k 归纳可得 (19)，其中 $k = 1$ 是将 (18) 限制在对角线上的结果。于是，对于每个固定的 $i_1, \ldots, i_{k-1}$，有

$$\sum_{i_k=1}^{m} |L(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})|^2 = \sum_{i_k=1}^{m} |L(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k-1}}, w_{i_k})|^2$$

这仅仅是因为每个映射 $u \mapsto L(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k-1}}, u)$ 都是关于 u 的线性泛函，因此存在某个 $x \in H$，使得 $L(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k-1}}, z) = \langle x, z \rangle$ 对所有 $z \in H$ 都成立。但根据归纳法

$$\sum_{i=1}^{m} |L(\underline{v_i}_{|k-1}, w_{i_k})|^2 = \sum_{i=1}^{m} |L(\underline{w_i}_{|k-1}, w_{i_k})|^2$$

对每个 i_k 都成立，因为 $(u_1, \ldots, u_{k-1}) \mapsto L(u_1, \ldots, u_{k-1}, w_{i_k})$ 是一个 $(k-1)$-线性泛函。对 $i_k \in \{1, \ldots, m\}$ 求和即可完成证明。

要看出 (20) 如何由 (19) 得出，令 $\{u_i\}_{i=1}^m$ 为 w_i 的张成空间中的向量，使得 $\langle u_i, w_{i'} \rangle = \delta_{ii'}$ 对每个 $i, i' \in \{1, \ldots, m\}$ 都成立（这些向量可以构造出来，因为 w_i 线性无关）。现在令 $L(u) := \sum_{i=1}^m t^i \langle u, u_i \rangle$，其中 $t^1, \ldots, t^m \in \mathbb{R}$ 任意。根据 (19)，

$$|t|^2 = \sum_{i=1}^{m} |L(w_i)|^2 = \sum_{i''=1}^{m} |L(v_{i''})|^2 = \sum_{i,i',i''=1}^{m} t^i t^{i'} \langle v_{i''}, u_{i'} \rangle \langle v_{i''}, u_i \rangle$$

对所有 $t = (t^1, \ldots, t^m) \in \mathbb{R}^m$。对两边求偏导数可知，满足 $O_{ij} := \langle v_i, u_j \rangle$ 的矩阵 O 满足 $O^T O = I$，这意味着 O 必须正交。与前面的观察类似，(19) 迫使 v_i 的张成空间等于 w_i 的张成空间，因为否则就会存在一个向量 u，它与所有 v_i 正交，却不与所有 w_i 正交，或反之；令 L 为与该 u 的内积，就会违反 (19)。因此，总可以写成 $v_i = \sum_j c_{ij} w_j$，其中 c_{ij} 为常数；对两边与 $u_{j'}$ 取内积可得，对于每个 i, j'，都有 $O_{ij'} = \langle v_i, u_{j'} \rangle = c_{ij'}$。

最后，利用命题3中用于证明（17）的相同论证，（20）可推出（18）。□

3.2 对非退化性的考察

本节将证明曲率泛函 Q （定义见（4））的非退化条件所带来的一系列定量推论。不过，第一个结果是定性的，它揭示了非退化性与 H¨ormander 条件之间的关系；这一关系虽不起眼，却是第7节中从多项式映射过渡到 C^∞ 映射的重要一环。非退化性 Q 对应于强局部曲率判据，这一点并不令人意外。

命题 5. 设 $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d_1}$ 是一个开集，并假设 $\pi_1 \colon U \to \mathbb{R}^{n_1}$ 和 $\pi_2 \colon U \to \mathbb{R}^n$ 由 $\pi_1(x,t) := (t, \phi(x,t))$ 和 $\pi_2(x,t) := x$ 给出，其中 $\phi \colon U \to \mathbb{R}^k$ 是定义在 U 上的某个光滑函数，且其雅可比矩阵 $D_x\phi$ 处处满秩（此处与引言中一样，令 $d_1 := n_1 - k$ 和 $d := n - k$）。假设 $\{X_i\}_{i=1}^d$ 是定义在 U 上的光滑向量场，在每一点都张成 $D_{x,\ t}\pi_1$ 的核（即 π_1 关于两组变量 x 和 t 的雅可比矩阵），并且 $\{T_j\}_{j=1}^{d_1}$ 是光滑向量场，在每一点都张成 $D_{x,\ t}\pi_2$ 的核。若按 (4) 定义的 Q 是非退化的，则向量场

$$X_1, \dots, X_d, T_1, \dots, T_{d_1}, [X_1, T_1], \dots, [X_1, T_{d_1}], \dots, [X_d, T_1], \dots, [X_d, T_{d_1}] \quad (21)$$

张成 U 在 (x,t) 处的切空间。反过来，如果向量场 (21) 张成 U 在 (x,t) 处的切空间，这并不意味着 Q具有非退化性。

证明。根据 π_1 和 π_2的定义， $T_1, \dots, T_{d_1}$ 的张成空间处处都等于 $\{\partial/\partial t^j\}_{j=1}^{d_1}$ 的张成空间。同样，每个 X_i 都必须属于 $\{\partial/\partial x^i\}_{i=1}^n$ 的张成空间，并且满足

$$X_i\phi(x,t) \equiv 0. \quad (22)$$

由于 X_i 消去 t，可以将 X_i 视为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量（即，它在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d_1}$的 t 方向上没有非零分量），于是 (22) 等价于断言

$$D_x\phi|_{(x,t)} X_i|_{(x,t)} \equiv 0,$$

其中 $D_x\phi$ 是 ϕ 关于 x的通常雅可比矩阵。对该表达式关于 T_j 求导可得

$$T_j D_x\phi|_{(x,t)} X_i|_{(x,t)} \equiv 0$$

对于任意 $i \in \{1, \dots, d\}$和 $j \in \{1, \dots, d_1\}$。将 X_i和 T_j都写成 U 上的坐标形式后，就可以直接将微分算子 T_j 作用于取值于$\mathbb{R}^n$的函数 X_j；根据交换子的定义，并结合 T_1，.....，T_{d_1}张成了 t变量的所有方向这一事实，对于某些光滑函数 $c_j^{j'}$，有 $T_jX_i = [T_j, X_i] + \sum_{j'=1}^{d_1} c_j^{j'}(x,t)T_{j'}$。因此，根据乘积法则，

$$(T_j D_x\phi|_{(x,t)})X_i|_{(x,t)} + D_x\phi|_{(x,t)} \left[[T_j, X_i] + \sum_{j'=1}^{d_1} c_j^{j'}(x,t)T_{j'} \right] \equiv 0 \quad (23)$$

对于所有 $i \in \{1,\ldots,d\}$ 和所有 $j \in \{1,\ldots,d_1\}$，其中 $T_j D_x\phi$ 应理解为矩阵 $D_x\phi$ 在标准坐标下表示时的 T_j 导数。

假设向量场 (21) 未能张成 U 在 (x,t) 处的切空间。尽管如此，集合 $\{X_i\}_{i=1}^{d} \cup \{T_j\}_{j=1}^{d_1}$ 必定线性无关，因为 $\{X_i\}_{j=1}^{d}$ 和 $\{T_j\}_{j=1}^{d_1}$ 所张成的空间已知互为横截（且这两个集合本身都线性无关）。此外，由于 $\{T_j\}_{j=1}^{d_1}$ 与 $\{\partial/\partial t^j\}_{j=1}^{d_1}$ 张成相同的空间，集合 (21) 未能张成该空间意味着：在 $\{\partial/\partial x^i\}_{i=1}^{n}$ 的张成空间中必定存在某个方向 X_*，它无法表示为 X_1、……、X_d 与向量场 $[T_j, X_i] + \sum_{j'=1}^{d_1} c_j^{j'}(x,t) T_{j'}$ 的线性组合（这些向量场也属于 $\partial/\partial x^i$ 的张成空间，因为它们等于 $T_j X_i$）。缺失的方向 X_* 不可能属于 $D_x\phi$ 的核，因为 X_1、……、X_d 张成该核。因此 $D_x\phi|_{(x,t)} X_* \neq 0$。如果向量场 X_1、……、X_d 与向量场 $[T_j, X_i] + \sum_{j'=1}^{d_1} c_j^{j'}(x,t) T_{j'}$ 的某个线性组合 X' 满足 $D_x\phi|_{(x,t)} X' = D_x\phi|_{(x,t)} X_*$，那么 $X' - X_*$ 就属于 $D_x\phi|_{(x,t)}$ 的核，这将意味着 X_* 本身必定属于点 (x,t) 处向量场 (21) 的张成空间。因此，X_1、……、X_d 与 $[T_j, X_i] + \sum_{j'=1}^{d_1} c_j^{j'}(x,t) T_{j'}$ 的张成空间经由 $D_x\phi|_{(x,t)}$ 映射后的像不可能是满维的，进而，仅由向量 $D_x\phi|_{(x,t)} \left([T_j, X_i] + \sum_{j'=1}^{d_1} c_j^{j'}(x,t) T_{j'} \right)$ 在 (x,t) 处张成的空间也不可能是满维的。这意味着存在某个非零 $v \in \mathbb{R}^k$，使得对于所有 i 和 j，都有 $v \cdot D_x\phi|_{(x,t)} \left([T_j, X_i] + \sum_{j'=1}^{d_1} c_j^{j'}(x,t) T_{j'} \right) = 0$。由 (23) 可知，必定有

$$v \cdot (T_j D_x\phi|_{(x,t)}) X_i|_{(x,t)} = 0$$

对所有 i 和 j均成立。根据定义 (4)，这意味着，在点 (x,t) 处定义的 Q 存在一个非零向量 $v \in \mathbb{R}^k$，使得对所有u 和 w，$Q(u,v,w) = 0$。现在在 $\mathbb{R}^k$ 上选取一个坐标系，使向量 v 指向第一个坐标方向。在此坐标下，任何满足 (5) 的多重指标三元组 (α,β,γ) 必然满足 $\beta_1 = 0$（因为若 $\beta_1 > 0$，则 (5) 中矩阵至少有一行作为 τ 的函数恒为零）。这意味着所有此类 (α,β,γ) 的凸包也将包含在超平面 $\beta_1 = 0$ 中，因此 (7) 不会包含在该凸包内。因此 Q 必然是退化的。

要看出式(21)上的张成条件不足以推出 Q的非退化性，只需考虑 $\phi((x^1,x^2,x^3)\ t) := x^2 + x^1 t$ 在原点邻域内的情形。显然，$D_x\phi$ 从不为零，因此始终具有满秩。在此例中，$d = 3-1 = 2$ 和 $d_1 = 1$。向量场 X_1 和X_2 可分别取为 $\partial/\partial x^1 - t\partial/\partial x^2$ 和 $\partial/\partial x^3$，而 T_1 则可直接取为 $\partial/\partial t$。式(21)中的向量场在原点处张成空间，因为 $[X_1, T_1]$在那里指向 $\partial/\partial x^2$ 方向（该方向不属于 X_1、X_2和 T_1的张成空间），但在$(x,t) = (0,0)$处，存在非零的 w，使得对于所有 u，v，$Q(u,v,w) = 0$。这个 w 对应于沿 x^3方向对 ϕ 进行微分（即 $\partial^2\phi/\partial x^3 \partial t \equiv 0$）。如上所述，这迫使 Q 退化。 □

现在该转向本节的主要目标了，即以一般方式考察非退化性这一性质。为方便起见，假设Q： $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是任意三线性形式（即不一定由(4)导出，并且在此时不依赖于任何光滑参数，例如 x）。证明定理1的一个关键组成部分，是为 Q建立适当的定性和定量非退化性测度。如引言中所述，这涉及研究类似于(5)的行列式。对于任意整数 $s \geq 1$，令

$$Q_s(t, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_s) := \det \begin{bmatrix} Q(t, v_1, w_1) & \cdots & Q(t, v_1, w_s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q(t, v_s, w_1) & \cdots & Q(t, v_s, w_s) \end{bmatrix} \tag{24}$$

对于任意向量 $t \in \mathbb{R}^{d_1}$、 v_1、.....、 $v_s \in \mathbb{R}^k$ 和 w_1、.....、 $w_s \in \mathbb{R}^d$。给定任意基 $\{u_i\}_{i=1}^{d_1}$、 $\{v_i\}_{i=1}^{k}$ 和 $\{w_i\}_{i=1}^{d}$，令

$$\begin{aligned} \Big(\mathcal{Q}[\{u_i\}_{i=1}^{d_1}, \{v_i\}_{i=1}^{k}, \{w_i\}_{i=1}^{d}]\Big)^2 := \\ 1 + \sum_{s=1}^{\min\{d,k\}} \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{i'=1}^{k} \sum_{i''=1}^{d} \Big| (\underline{u_i}_{|s} \cdot \nabla_t^s) Q_s(t, \underline{v_{i'}}_{|s}, \underline{w_{i''}}_{|s}) \Big|^2 . \end{aligned} \tag{25}$$

这里的记号 $\underline{u_i}_{|s} \cdot \nabla_t^s$表示展开后得到阶数为 s 的微分算子 $(u_{i_1} \cdot \nabla_t) \cdots (u_{i_s} \cdot \nabla_t)$，其中 ∇_t是 t中的通常梯度。注意，对 s 求和在 $\max\{d, k\}$处结束是有简单原因的：任何更大的 s 值都必然涉及具有重复行或列的矩阵的行列式，因此恒等于零。还要注意，计算 t 中的导数时所取的点 t 并不重要，因为这是关于变量 t 的齐次 s 次多项式的阶数为 s 的导数。事实上，这意味着，对于右侧（25）的求和中每个固定的 s ，关于 $i_1, \dots, i_s$展开后的求和只是多项式$Q_s(t, v_{i'_1}, \dots, v_{i'_s}, w_{i''_1}, \dots, w_{i''_s})$的范数平方，因此可以用任何其他可比范数替代，而不会从根本上改变该量的大小。例如，若定义

$$B_u := \left\{ t \in \mathbb{R}^{d_1} \;\middle|\; t = \sum_{i=1}^{d_1} c_i u_i \text{ for some } \sum_{i=1}^{d_1} c_i^2 \leq 1 \right\} \tag{26}$$

and

$$\begin{aligned} \Big(\mathcal{Q}_{\sup}[\{u_i\}_{i=1}^{d_1}, \{v_i\}_{i=1}^{k}, \{w_i\}_{i=1}^{d}]\Big)^2 := \\ 1 + \sum_{s=1}^{\min\{d,k\}} \sum_{i'=1}^{k} \sum_{i''=1}^{d} \sup_{t \in B_u} \Big| Q_s(t, \underline{v_{i'}}_{|s}, \underline{w_{i''}}_{|s}) \Big|^2 , \end{aligned} \tag{27}$$

then

$$\mathcal{Q}_{\sup}[\{u_i\}_{i=1}^{d_1}, \{v_i\}_{i=1}^{k}, \{w_i\}_{i=1}^{d}] \approx \mathcal{Q}[\{u_i\}_{i=1}^{d_1}, \{v_i\}_{i=1}^{k}, \{w_i\}_{i=1}^{d}] \tag{28}$$

其隐常数仅依赖于 d_1、 d和 k。这将在第6节证明非退化性的必要性时用到。

利用多重指标来计数 $(i_1,\dots,i_s)$、$(i'_1,\dots,i'_s)$ 和 $(i''_1,\dots,i''_s)$，可以对展开式 (25) 中的项进行对称排序。(25) 右侧关于 $(i_1,\dots,i_s)$ 、 $(i'_1,\dots,i'_s)$ 和 $(i''_1,\dots,i''_s)$ 的置换具有对称性，因为对 $u_1,\dots,u_s$ 的置换保持 $\underline{u_i}_{|s}\cdot\nabla_t^s$ 不变，而在 (24) 中对 $v_1,\dots,v_s$ 或 $w_1,\dots,w_s$ 的置换只会改变 Q_s 的符号。因此，对于满足 $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=s$ 的每个 $\alpha\in\mathbb{Z}^{d_1}_{\geq 0}$、 $\beta\in\mathbb{Z}^{k}_{\geq 0}$ 和 $\gamma\in\mathbb{Z}^{d}_{\geq 0}$，(25) 右侧恰有 $(s!)^3/(\alpha!\beta!\gamma!)$ 个相等项，其中 α 计数 $(i_1,\dots,i_s)$， β 计数 $(i'_1,\dots,i'_s)$，而 γ 计数 $(i''_1,\dots,i''_s)$。接着，若定义 $(u\cdot\nabla_t)^\alpha Q_s(t,v_\beta,w_\gamma)$ 等于

$$(u_{i_1}\cdot\nabla_t)\cdots(u_{i_s}\cdot\nabla_t)Q_s(t,v_{i'_1},\dots,v_{i'_s},w_{i''_1},\dots,w_{i''_s})$$

对于某些 $i_1,\dots,i_s$, $i'_1,\dots,i'_s$ 和 $i''_1,\dots,i''_s$，使得 α 计数 $(i_1,\dots,i_s)$、 β 计数 $(i'_1,\dots,i'_s)$，且 γ 计数 $(i''_1,\dots,i''_s)$，可得

$$\begin{aligned}&\Big(\mathcal{Q}[\{u_i\}_{i=1}^{d_1},\{v_i\}_{i=1}^{k},\{w_i\}_{i=1}^{d}]\Big)^2=\\&\qquad 1+\sum_{s=1}^{\min\{d,k\}}\sum_{|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=s}\frac{(s!)^3}{\alpha!\beta!\gamma!}\left|(u\cdot\nabla_t)^\alpha Q_s(t,v_\beta,w_\gamma)\right|^2.\end{aligned}\tag{29}$$

利用这一表述，可以给出 $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}(Q)$ 一个稍微更具内蕴性的定义，且该定义与 (6) 完全一致。为此，设 $\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1}$、 $\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k}$和$\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d}$ 分别是 $\mathbb{R}^{d_1}$、$\mathbb{R}^k$和 $\mathbb{R}^d$ 的正交归一基。令

$$\begin{aligned}&N_0(Q,\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1},\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k},\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d})\\&\quad:=\Big\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{Z}^{d_1}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}^{k}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}^{d}_{\geq 0}\mid |\alpha|=|\beta|=|\gamma|\leq\min\{d,k\}\\&\qquad\qquad\text{and either } |\alpha|=0 \text{ or } (\tilde{u}\cdot\nabla_t)^\alpha Q_{|\alpha|}(t,\tilde{v}_\beta,\tilde{w}_\gamma)\neq 0\Big\}\end{aligned}\tag{30}$$

并令

$$\mathcal{N}_{\mathcal{R}}(Q):=\bigcap_{\substack{\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1},\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k},\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d}\\ \text{orthonormal}}}\text{conv. hull}\Big(N_0(Q,\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1},\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k},\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d})\Big).\tag{31}$$

注意，凸包是在 $[0,\infty)^{d_1+k+d}$ 中取的。这与 (6) 等价，原因很简单：每个正交归一基都可以通过一个正交矩阵映射到标准基；同样，任意正交矩阵对标准基的作用都是将其映射为一个正交归一基。 $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}(Q)$ 的重要性由以下引理说明。

引理1. 给定上述定义的 Q、 $\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}(Q)$，以下结论成立：

1. 对于任意 $s\geq 0$，点

$$\Big(\overbrace{\frac{s}{d_1},\dots,\frac{s}{d_1}}^{d_1\ copies},\overbrace{\frac{s}{k},\dots,\frac{s}{k}}^{k\ copies},\overbrace{\frac{s}{d},\dots,\frac{s}{d}}^{d\ copies}\Big)\tag{32}$$

当且仅当存在 $c > 0$，使得每个在标准拓扑中充分接近 Q 的 Q' 都会生成一个泛函 $\mathcal{Q}'$（在 (25) 右侧用 Q'_s 替换 Q_s），满足

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}'[\{u_i\}_{i=1}^{d_1},\{v_i\}_{i=1}^{k},\{w_i\}_{i=1}^{d}]\\ \geq c|\det\{u_i\}_{i=1}^{d_1}|^{\frac{s}{d_1}}|\det\{v_i\}_{i=1}^{k}|^{\frac{s}{k}}|\det\{w_i\}_{i=1}^{d}|^{\frac{s}{d}}\end{aligned} \tag{33}$$

对于任意基 $\{u_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{v_i\}_{i=1}^{k}$ 和 $\{w_i\}_{i=1}^{d}$。

2. 对于任意 $s \geq 0$，点 (32) 不属于 $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}(Q)$，当且仅当存在标准正交基 $\{u_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{v_i\}_{i=1}^{k}$ 和 $\{w_i\}_{i=1}^{d}$，分别将某些对称矩阵 D_1、D_2 和 D_3 对角化，使得 D_1 的迹为正，D_2 和 D_3 的迹为零，并且

$$\frac{\mathcal{Q}[\{e^{\tau D_1}u_i\}_{i=1}^{d_1},\{e^{\tau D_2}v_i\}_{i=1}^{k},\{e^{\tau D_3}w_i\}_{i=1}^{d}]}{|\det\{e^{\tau D_1}u_i\}_{i=1}^{d_1}|^{\frac{s}{d_1}}|\det\{e^{\tau D_2}v_i\}_{i=1}^{k}|^{\frac{s}{k}}|\det\{e^{\tau D_3}w_i\}_{i=1}^{d}|^{\frac{s}{d}}} \to 0 \tag{34}$$

当 $\tau \to \infty$ 时。特别要注意，对于所有 τ，$|\det\{e^{\tau D_1}u_i\}_{i=1}^{d_1}| \to \infty$ 当 $\tau \to \infty$，且 $|\det\{e^{\tau D_2}v_i\}_{i=1}^{k}| = |\det\{v_i\}_{i=1}^{k}| = 1 = |\det\{e^{\tau D_3}w_i\}_{i=1}^{d}| = |\det\{w_i\}_{i=1}^{d}|$。

证明。将命题 3 和 4 应用于 (25) 的右侧，可知总能将 $\{u_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{v_i\}_{i=1}^{k}$ 和 $\{w_i\}_{i=1}^{d}$ 替换为正交（不一定是归一化的）基，而不改变其值；此外，恒等式 (20) 保证，在正交化过程中，$|\text{行列式}\{u_i\}_{i=1}^{d_1}|$、$|\text{行列式}\{v_i\}_{i=1}^{k}|$ 和 $|\text{行列式}\{w_i\}_{i=1}^{d}|$ 的值也保持不变。若取 $u \in \mathbb{R}^{d_1}$，使得 $u := (||u_1||, \ldots, ||u_{d_1}||)$，并对 v 和 w 作同样处理，再令 $\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k}$ 和 $\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d}$ 为将 $\{u_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{v_i\}_{i=1}^{k}$ 和 $\{w_i\}_{i=1}^{d}$ 归一化后得到的标准正交基，则由 (29) 得，

$$\begin{aligned}\Big(\mathcal{Q}[\{u_i\}_{i=1}^{d_1},\{v_i\}_{i=1}^{k},\{w_i\}_{i=1}^{d}]\Big)^2 =\\ 1+\sum_{\substack{1\leq|\alpha|=|\beta|=\\ |\gamma|\leq\min\{d,k\}}}\frac{|\alpha|!|\beta|!|\gamma|!}{\alpha!\beta!\gamma!}\left|u^\alpha v^\beta w^\gamma(\tilde{u}\cdot\nabla_t)^\alpha Q_{|\alpha|}(t,\tilde{v}_\beta,\tilde{w}_\gamma)\right|^2.\end{aligned} \tag{35}$$

因此，只需针对任意标准正交基 $\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k}$、$\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d}$ 以及任意的 $u \in \mathbb{R}^{d_1}_{>0}$、$v \in \mathbb{R}^{k}_{>0}$、$w \in \mathbb{R}^{d}_{>0}$，研究右端 (35)。

令 o_s 表示点 (32)，并假设对于某个 $s \geq 0$，$o_s \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}}(Q)$。那么对于任意正交归一的 $\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k}$ 和 $\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d}$，存在一个有限的多重指标列表 $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\ldots,(\alpha_N,\beta_N,\gamma_N)$，其中每个都满足 $|\alpha_i| = |\beta_i| = |\gamma_i| \leq \min\{d,k\}$，并且存在非负的 $\theta_1,\ldots,\theta_N$，使得

$$\sum_{i=1}^{N}\theta_i = 1 \text{ and } \sum_{i=1}^{N}\theta_i(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i) = o_s \tag{36}$$

and

$$\min_{i\,:\,|\alpha_i|\neq 0} |(\tilde{u}\cdot\nabla_t)^{\alpha_i} Q_{|\alpha_i|}(t,\tilde{v}_{\beta_i},\tilde{w}_{\gamma_i})| > 0. \tag{37}$$

由 $(\tilde{u}\cdot\nabla_t)^{\alpha_i} Q_{|\alpha_i|}(t,\tilde{v}_{\beta_i},\tilde{w}_{\gamma_i})$ 关于 $\tilde{u}_i$、$\tilde{v}_i$ 和 $\tilde{w}_i$ 的连续性可知，对于充分接近 $\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k}$ 和 $\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d}$ 的所有正交归一基 $\{\tilde{u}'_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{\tilde{v}'_i\}_{i=1}^{k}$ 和 $\{\tilde{w}'_i\}_{i=1}^{d}$，最小值 (37) 必定非零。若将满足 (36) 和 (37) 的集合 $\{(\theta_i,\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)\}_{i=1}^{N}$ 称为 $\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k}$ 和 $\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d}$ 的一个系综，那么由正交群的紧致性可知，始终存在有限个系综，使得对于任意正交基 $\{\tilde{u}'_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{\tilde{v}'_i\}_{i=1}^{k}$ 和 $\{\tilde{w}'_i\}_{i=1}^{d}$，该有限集合中的某个系综 $\{(\theta'_i,\alpha'_i,\beta'_i,\gamma'_i)\}_{i=1}^{N'}$ 都将对给定的基满足 (36) 和 (37)。事实上，同样的紧致性论证还表明，对于每个固定的基 $\{\tilde{u}'_i\}_{i=1}^{d_1},\{\tilde{v}'_i\}_{i=1}^{k}$，该集合中至少有一个系综满足 (37)，即使将 Q 替换为充分小的扰动 Q'：(37) 的左侧关于 Q 是利普希茨连续的；并且当 $\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k}$ 和 $\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d}$ 遍历所有正交归一基时，我们有限个系综列表上的 $\min_{i\,:\,|\alpha_i|\neq 0} |(\tilde{u}\cdot\nabla_t)^{\alpha_i} Q_{|\alpha_i|}(t,\tilde{v}_{\beta_i},\tilde{w}_{\gamma_i})|$ 之和有正的下界，因此将 Q 替换为任何充分接近它的 Q'后，该和处处仍严格为正。

现在转向非归一化的正交基，由上述推理和等式 (35) 可知，存在一个正常数 c，使得所有充分接近 Q 的 Q' 以及所有正交基 $\{u_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{v_i\}_{i=1}^{k}$、$\{w_i\}_{i=1}^{d}$ 都存在一个系综 $\{(\theta_i,\ \alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i)\}_{i=1}^{N}$，满足 (36) 以及

$$\left(\mathcal{Q}'[\{u_i\}_{i=1}^{d_1},\{v_i\}_{i=1}^{k},\{w_i\}_{i=1}^{d}]\right)^2 \geq c^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{(|\alpha_i|!)^3}{\alpha_i!\beta_i!\gamma_i!} \left|u^{\alpha_i}v^{\beta_i}w^{\gamma_i}\right|^2.$$

于是，根据算术—几何平均不等式，

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}'[\{u_i\}_{i=1}^{d_1},\{v_i\}_{i=1}^{k},\{w_i\}_{i=1}^{d}] &\geq c\prod_{i=1}^{n} |u^{\alpha_i}v^{\beta_i}w^{\gamma_i}|^{\theta_i} \\
&= c(||u_1||\cdots||u_{d_1}||)^{\frac{s}{d_1}}(||v_1||\cdots||v_k||)^{\frac{s}{k}}(||w_1||\cdots||w_d||)^{\frac{s}{d}} \\
&= c|\det\{u_i\}_{i=1}^{d_1}|^{\frac{s}{d_1}}|\det\{v_i\}_{i=1}^{k}|^{\frac{s}{k}}|\det\{w_i\}_{i=1}^{d}|^{\frac{s}{d}}.
\end{aligned}$$

这就证明了该引理第一个主要结论的正向。

如果 $o_s \notin \mathcal{N}_{\mathcal{R}}(Q)$，则必定存在标准正交基 $\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1},\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k},\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d}$，使得 o_s 不属于 $N_0(Q,\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1},\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k},\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d})$，也不属于其凸包。根据分离超平面定理，存在一个 $x\in\mathbb{R}^{d_1+k+d}$，使得对于所有 $(\alpha,\beta,\gamma)\in N_0(Q,\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1},\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k},\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d})$，都有 $x\cdot o_s > x\cdot(\alpha,\beta,\gamma)$。由于 $(0,0,0)$ 属于 $N_0(Q,\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1},\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k},\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d})$，这意味着点积 $x\cdot o_s$ 严格为正。此外，由于对于 $N_0(Q,\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1},\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k},\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d})$ 中的所有三元组 (α,β,γ)，$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|$，并且特殊点 o_s 具有这样的性质：其前 d_1 个元素之和等于

接下来的 k 个元素与最后 d 个元素之和，因此可以添加任意向量

$$(\overbrace{a,\dots,a}^{d_1\text{ copies}},\overbrace{b,\dots,b}^{k\text{ copies}},\overbrace{c,\dots,c}^{d\text{ copies}})$$

使得 $a+b+c=0$ 作用于向量 x，而不改变 $x\cdot o_s$ 或 $x\cdot$（α、β、γ），对于任意三元组（α、β、γ）$\in N_0$（Q、$\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k}$、$\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d}$）。因此不失一般性，可以假设

$$x\cdot(\overbrace{0,\dots,0}^{d_1\text{ copies}},\overbrace{1,\dots,1}^{k\text{ copies}},\overbrace{0,\dots,0}^{d\text{ copies}})=x\cdot(\overbrace{0,\dots,0}^{d_1\text{ copies}},\overbrace{0,\dots,0}^{k\text{ copies}},\overbrace{1,\dots,1}^{d\text{ copies}})=0.$$

现在令 D_1 为具有特征向量 $\tilde{u}_1$、……、$\tilde{u}_{d_1}$ 及相应特征值 x^1、……、x^{d_1} 的矩阵；类似地，令 D_2 具有特征向量 $\tilde{v}_1$、……、$\tilde{v}_k$，其特征值为 x^{d_1+1}、……、x^{d_1+k}。最后，令 D_3 具有特征向量 $\tilde{w}_1$、……、$\tilde{w}_d$，其特征值为 x^{d_1+k+1}、……、x^{d_1+k+d}。对于任意实数 τ，在（35）左侧使用基 $\{e^{\tau D_1}\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{e^{\tau D_2}\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k}$、$\{e^{\tau D_3}\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d}$，得到 u、v 和 w；而在右侧，它们分别等于（$e^{\tau x^1}$、……、$e^{\tau x^{d_1}}$）、（$e^{\tau x^{d_1+1}}$、……、$e^{\tau x^{d_1+k}}$）和（$e^{\tau x^{d_1+k+1}}$、……、$e^{\tau x^{d_1+k+d}}$）。

因此，(35) 的渐近增长为 $o(e^{2\tau x\cdot o_s})$，因为 (35) 中每个非零项，对于某个属于 $N_0(Q,\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{d_1},\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{k},\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^{d})$ 的三元组 (α,β,γ)，都将是 $O(e^{\tau x\cdot(\alpha,\beta,\gamma)})$。但是

$$|\det\{u_i\}_{i=1}^{d_1}|^{\frac{s}{d_1}}|\det\{v_i\}_{i=1}^{k}|^{\frac{s}{k}}|\det\{w_i\}_{i=1}^{d}|^{\frac{s}{d}}=e^{\tau x\cdot o_s},$$

所以 (34) 必须成立。根据 x 的构造，对于所有 τ，$|$行列式$\{e^{\tau D_2}v_i\}_{i=1}^{k}|=|$行列式$\{v_i\}_{i=1}^{k}|=1$ 且 $|$行列式$\{e^{\tau D_3}w_i\}_{i=1}^{d}|=|$行列式$\{w_i\}_{i=1}^{d}|=1$，这迫使 $|$行列式$\{e^{\tau D_1}u_i\}_{i=1}^{d_1}|\to\infty$ 成立，因为 (34) 的分子总是大于或等于 1。

最后，注意到性质 (34) 和 (33) 互不相容：如果 (34) 成立，那么即使对于 $Q'=Q$，(33) 也不可能成立。因此，(33) 必然等价于断言 $o_s\in\mathcal{N}_{\mathcal{R}}(Q)$。同样，如果 (33) 对某个 $c>0$ 成立，那么 (34) 就不可能成立，因此 (34) 等价于断言 $o_s\notin\mathcal{N}_{\mathcal{R}}(Q)$。 □

熟悉几何不变理论的读者会认识到，(34) 类似于希尔伯特–芒福德判据的一个实例。[14] 的定理 2.1 是该判据的一种特别一般的表述。从分析的角度来看，[2]的定理 5.2 是一个较为易懂的参考，而 [3] 的定理 1.1 则更是如此。

将引理1和 (33) 具体应用于三线性泛函 (4) 时，由于需要指定 $\ker D_x\phi$ 的一组基，会出现一个小的技术问题。

推论 1. 设 Q 是在某点 (x_*,t_*) 处由式 (4) 定义的非退化三线性泛函，对于某个光滑的 $\mathbb{R}^k$ 值函数 $\phi(x,t)$。存在正常数 c、c'，使得对于任意在 (x_*,t_*) 附近定义的光滑 $\mathbb{R}^k$ 值函数 $\tilde{\phi}(x,t)$，若 $||D_x\phi|_{(x_*,t_*)}-D_x\phi|_{(x,t)}||<c'$（其中 $||\cdot||$ 为 Hilbert–Schmidt 范数）且对每个 $i\in\{1,\dots,d_1\}$ 都有 $|\partial^2_{t^ix^\ell}\phi|_{(x_*,t_*)}-\partial^2_{t^ix^\ell}\tilde{\phi}|_{(x,t)}|<c'$，并且

$\mathscr{l} \in \{1, \ldots, n\}$，则通过在点 (x, t) 处使用 $\tilde{}$ $\tilde{}$映射并由式 (4) 定义的泛函 Q，经由式 (25) 生成 $\mathcal{Q}$，满足

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Q}}[\{u_i\}_{i=1}^{d_1}, \{v_i\}_{i=1}^{k}, \{w_i\}_{i=1}^{d}] \\ \geq c |\det\{u_i\}_{i=1}^{d_1}|^{\frac{s}{d_1}} |\det\{v_i\}_{i=1}^{k}|^{\frac{s}{k}} |\det\{w_i\}_{i=1}^{d}|^{\frac{s}{d}} \end{aligned} \tag{38}$$

对于任意基 $\{u_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{v_i\}_{i=1}^{k}$、$\{w_i\}_{i=1}^{d}$。

证明。该推论几乎是 Q 的非退化性和（33）的直接推论，但还有一个很小的问题尚未解决：使用定义（4）时，必须能够为 $\sim D_x\phi$ 的核选取一个正交归一基，使其接近所使用的 $D_x\phi$ 的核的某个特定基 $\tilde{}$，从而定义 Q，并使 Q 和 Q 的坐标彼此接近。这种稳定性由紧随其后的命题保证。

□

命题 6。设 M 是一个具有 $n > k$ 的满秩实 $k \times n$ 矩阵。令 $\{z_i\}_{i=1}^{d}$ 为 M 的核的一个正交归一基。则对于所有满足 $||M - M'|| < c$ 的 $M' \in \mathbb{R}^{k \times n}$，其中存在某个取决于 M 的正的 c， M' 都是满秩的，并且存在 $\{z_i'\}_{i=1}^{d}$，它是 M' 的核的一个正交归一基，满足

$$|z_i - z_i'| \leq C||M - M'|| \tag{39}$$

其中常数 C 仅取决于 M。这里 $||\cdot||$ 表示希尔伯特－施密特范数。

证明。由于该命题在对 $\mathbb{R}^k$ 和 $\mathbb{R}^n$ 进行旋转后保持不变，根据奇异值分解，可以假设 M 仅在对角线上有非零元素，且这些元素 σ_{ii} 均为实数和正数。还可以假设 $\{z_i\}_{i=1}^{d}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中最后的 $d = n - k$ 个坐标方向重合。若 M_0 是 M 最左侧的 $k \times k$ 阶子式，则对所有 $v \in \mathbb{R}^k$，都有 $|M_0 v| \geq |v| \min_i \sigma_{ii}$；因此，若 M_0' 是任意满足 $||M_0 - M_0'|| < \min_i \sigma_{ii}/2$ 的 $k \times k$ 矩阵，则 $|M_0' v| \geq |M_0 v| - ||M_0' - M_0|| \cdot |v| \geq |v| \min_i \sigma_{ii}/2$，这意味着 M_0' 满秩。因此，对于任意正的 $c < \min_i \sigma_{ii}/2$，若 $||M - M'|| < c$，则 M' 最左侧的 $k \times k$ 阶子式将满秩。

现在考虑光滑映射

$$\Phi(M', \{z_i'\}_{i=1}^{d}) := \begin{pmatrix} M' z_1' \\ z_1' \cdot z_1' \\ M' z_2' \\ z_2' \cdot z_1' \\ z_2' \cdot z_2' \\ \vdots \\ M' z_d' \\ z_d' \cdot z_1' \\ \vdots \\ z_d' \cdot z_d' \end{pmatrix}$$

对于任意 $M' \in \mathbb{R}^{k\times n}$ 以及任意 z'_1、……、z'_d，其中 $\mathbb{R}^n$。此外，假设当 $j > k+i$ 时，z'^j_i 固定为零。Φ 关于变量集合 z'^1_1、……、z'^{k+1}_1、……、z'^1_d、……、z'^n_d 的雅可比矩阵具有特殊的分块结构：对角线上有若干非零块，其大小为 $(k+1)\times(k+1)$ 到 $n\times n$，此外这些块下方还有一些非零项（因此该雅可比矩阵为块下三角）。将这些块依次编号为 1、……、d，块 ℓ 的形式为

$$\begin{bmatrix} M'_{11} & M'_{12} & \cdots & M'_{1(k+\ell)} \\ M'_{21} & M'_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ M'_{k1} & \cdots & \cdots & M'_{k(k+\ell)} \\ z'^1_1 & z'^2_1 & \cdots & z'^{k+\ell}_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z'^1_{\ell-1} & z'^2_{\ell-1} & \cdots & z'^{k+\ell}_{\ell-1} \\ 2z'^1_\ell & 2z'^2_\ell & \cdots & 2z'^{k+\ell}_\ell \end{bmatrix}.$$

具体在 $M' = M$ 和 $\{z'_i\}_{i=1}^d = \{z_i\}_{i=1}^d$时计算这个分块，每个分块都是对角矩阵，其对角元素为 σ_{11}，……，σ_{kk}，接着是 $\ell-1$ 个对角元素 1，最后一个对角元素为 2。这意味着 Φ 在 M、$\{z_i\}_{i=1}^d$ 处的雅可比行列式非零。因此，根据隐函数定理，当 M'在 M附近变化时，方程组存在唯一解 $\{z'_i\}_{i=1}^d$

$$M'z'_i = 0, i \in \{1,\dots,d\},\ z'_i \cdot z'_{i'} = \delta_{ii'}, 1 \le i \le i' \le d,\ z'^j_i = 0 \text{ for } j > k+i,$$

该解随 M'光滑变化，并且当 $M' = M$时与 $\{z_i\}_{i=1}^d$一致。这就得到了（39）。□

关于非退化性，最后还需说明一个恒等式，它将量（25）表示为对偶化对象 Θ 的形式，而非直接用 Q 表示：$\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$。给定 $\mathbb{R}^k$的任意一组基 $\{v_i\}_{i=1}^k$，总存在一组对偶基 $\{v_i^*\}_{i=1}^k$，满足对于每个 i，$v_i \cdot v_{i'}^* = \delta_{ii'}$，$i' \in \{1,\dots,k\}$。这一恒等式的一个特别重要的推论是 $\det\{v_i^*\}_{i=1}^k = (\det\{v_i\}_{i=1}^k)^{-1}$；注意到以 v_i 为行的矩阵是以 $v_{i'}^*$ 为列的矩阵的逆矩阵，即可看出这一点。对偶基的另一个重要性质是，每个 $x \in \mathbb{R}^k$ 都满足 $x = \sum_{i=1}^k (x\cdot v_i^*)v_i$（当 $x = v_i$ 对于某个 i 成立时，这一点显然成立；再利用线性性以及 $\{v_i\}_{i=1}^k$ 是一个基，即可推广到所有 $\mathbb{R}^k$）。因此，以列为

$$v_{i_1},\dots,v_{i_\ell},y_1,\dots,y_{k-\ell}$$

可写为矩阵 VM 的乘积，其中 V 的各列恰好由 v_1，…，v_k 给出，而 M 具有关键的结构性质。第一点是，M 的第 1 列至第 ℓ 列中所有元素均为零，例外情况是：对于每个 $j \in \{1,\dots,\ell\}$，第 j 列的第 i_j 行的值为 1。对于任意

其余索引为 $i'+\ell$ 的列，其元素为 $v_1^*\cdot y_{i'}$，…，$v_k^*\cdot y_{i'_\ell}$。因此，若 $\{i'_1,\dots,i'_{k-\ell}\}$ 是 $\{1,\dots,k\}$ 中互不相同的指标，且 $\{i_1,\dots,i_\ell\}\cup\{i'_1,\dots,i'_{k-\ell}\}$，则

$$|\det(v_{i_1},\dots,v_{i_\ell},y_1,\dots,y_{k-\ell})| = |\det\{v_i\}_{i=1}^k||\det(v_{i'_j}^*\cdot y_{j'})_{j,j'=1}^{k-\ell}|.$$

根据这一恒等映射，若 Q 表示泛函 $Q(x,y,z):=y\cdot\Theta(x,z)$，则可推出

$$\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\min\{d,k\}}\sum_{i=1}^{d_1}\sum_{i'=1}^{k}\sum_{i''=1}^{d}|(\underline{u_i}_{|s}\cdot\nabla_t^s)\det(\underline{v_{i'}}_{|k-s},\underline{\Theta(t,w_{i''})}_{|s})|^2 = \\ &|\det\{v_i\}_{i=1}^k|^2\left[1+\sum_{s=1}^{\min\{d,k\}}\sum_{i=1}^{d_1}\sum_{i'=1}^{k}\sum_{i''=1}^{d}|(\underline{u_i}_{|s}\cdot\nabla_t^s)Q_s(t,\underline{v_{i'}^*}_{|s},\underline{w_{i''}}_{|s})|^2\right] \\ &\qquad = |\det\{v_i\}_{i=1}^k|^2\left(\mathcal{Q}[\{u_i\}_{i=1}^{d_1},\{v_i^*\}_{i=1}^k,\{w_i\}_{i=1}^d]\right)^2\end{aligned} \tag{40}$$

其中 $\mathcal{Q}$ 的定义与（25）中完全相同。这一恒等映射将在第5.1节中发挥作用。

4 几何微分不等式

本节重新讨论一族“良好”函数的导数估计，这些估计最早出现在 [9] 中。在那篇论文中，相关不等式适用于实解析函数的有限维族。对于定理1的 C^∞ 情形，主要策略将采用映射$\gamma_t(x)$的多项式逼近；因此，有必要重新建立[9, 第 5] 节中的关键不等式，以证明其中涉及的各种常数以一种可控的方式依赖于相关多项式的次数。这里不需要采用 [9] 中方法的完全一般性，因此所有函数都只需在 $\mathbb{R}^d$ 中具有开域。

设 $U_1\supset U_2\supset\cdots$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的开集，并且对于每个整数 $N\geq 1$，$\{X_i^{(N)}\}_{i=1}^d$ 是定义在 U_N 上的一族光滑向量场。任何满足 $N_1<N_2<\cdots<N_\ell$ 且 i_1、…、$i_\ell\in\{1,\dots,d\}$ 的 $\alpha:=((N_1,\dots,N_\ell),(i_1,\dots,i_\ell))$，都称为广义多重指标，并将 X^α 定义为微分算子

$$X^\alpha := X_{i_\ell}^{(N_\ell)}\cdots X_{i_1}^{(N_1)} \tag{41}$$

它作用于定义在 U_{N_ℓ} 上的光滑函数。该算子的阶为 ℓ（也记作 $|\alpha|$），N_ℓ 将称为算子 X^α 的生成级。我们还将 $\alpha:=(\emptyset,\emptyset)$ 视为一个阶为 0、生成级为 0 的广义多重指标，并将 X^α 定义为恒等算子。此类向量场系统正是下文定理 3 中构造的主要对象。

主要关注的情形是将这些向量场 $\{X_i^{(N)}\}_{i=1}^d$ 应用于 $\mathbb{R}^d$上的多项式。不过，最好能采用稍微宽泛一些的函数类

（即便没有其他理由，也至少可以借此通过定理 1[1] 推导出球面平均的尖锐 L^p–L^q不等式）。从多项式推广到稍微一般一些的函数，结果发现并不困难，因为下文定理 3 的证明已经（以一种似乎无法避免的方式）需要某种这样的结构。为此，我们考虑的函数类将是纳什函数。第 4.2 节将给出一个便于分析的定义；要理解定理 3，只需先了解其最基本的性质。纳什函数是代数实解析函数，因此包含多项式；每个纳什函数 f（零函数除外）都对应一个非负整数，称为其复杂度；复杂度记作 $c(f)$，而对于多项式，其复杂度绝不会大于次数。本节的主要结果如下。

定理 3. 假设 $U_0 \subset \mathbb{R}^d$ 是开集，且 $f\colon U_0 \to \mathbb{R}^m$ 是实解析的，并且在每个 $x \in U_0$ 处的雅可比矩阵 $D_x f$ 秩为 d。还假设每个分量函数 f^j 都是 U_0 上复杂度至多为 D 的纳什函数，并且 W 是 U_0 上某个非负局部可积函数。最后，假设 $E_0 \subset U_0$ 是一个紧集，使得对每个 j，$\sup_{x\in E_0} |f^j(x)| \le 1$。那么，对每个整数 $N \ge 1$，存在一个开集 $U_N \subset U_{N-1}$、一个紧集 $E_N \subset E_{N-1} \cap U_N$、定义在 U_N 上的光滑向量场 $\{X_i^{(N)}\}_{i=1,\dots,d}$，以及正常数 $c_{N,d}$，它们仅依赖于 d、N，并满足以下条件：

1. 对每个 $N \ge 1$，$W(E_N) \ge c_{N,d} m^{-Nd} W(E)$，其中，将 W 应用于一个集合表示该集合相对于 $W\,dx$ 的测度（即具有密度 W 的勒贝格测度）。

2. 对每个 N'、N，若 $1 \le N' < N$ 且对每个 $x \in U_N$，

$$X_i^{(N)}\Big|_x = \sum_{i'=1}^{d} c_i^{i'}(x)\; X_{i'}^{(N')}\Big|_x \tag{42}$$

   其中某些光滑系数 $c_i^{i'}$ 的大小至多为 2。

3. 对每个 $N \ge 1$ 以及每个 $x \in E_N$，

$$W(x)\,|\det(X_1^{(N)},\dots,X_d^{(N)})|\Big|_x \ge c_{N,d} m^{-Nd} D^{-(2d+2)^N} W(E_0). \tag{43}$$

   这里，$\det(X_1^{(N)},\dots,X_d^{(N)})$表示矩阵的行列式，该矩阵的各列分别由 $X_1^{(N)},\dots,X_d^{(N)}$ 在 $\mathbb{R}^d$的标准坐标下的表示给出。

[1]在此前的工作中，[11], 命题 3 是唯一需要用到贝祖定理的地方；正如那里指出的，当多项式的次数替换为复杂度时，该结果同样适用于纳什函数。因此，定理 4 的结论经过适当修改后也适用于纳什函数。下文第 5 节中的证明将推出，当 ϕ 为纳什函数时，L^{p_b}–L^{q_b} 不等式成立。

4. 对每个 $j \in \{1, \dots, m\}$ 以及每个生成级至多为 N的广义多重指标 α，

$$\sup_{x \in U_N} |X^\alpha f^j(x)| \leq 1. \tag{44}$$

除（43）外，定理 3 的所有结论都将直接由下面的引理 2 得出。该引理有一个很好的性质：它对任意光滑函数 f 都完全适用，因此无需在第 4.1 节中诉诸任何代数概念。引理 2 将用相关积分表达式从下方估计（43）中的常数所对应的 $|\det(X_1^{(N)}, \dots, X_d^{(N)})|$。随后，在第 4.2 节中，通过将所有函数 $X^\alpha f^j$ 提升到某个高维空间，使其成为多项式，从而利用贝祖定理对该表达式进行估计。即使每个 f^j 本身已经是多项式，这样的提升仍然是必要的，因为向量场 $X_i^{(N)}$ 的定义涉及除以多项式；如果不将所考虑的函数类扩展到多项式之外，就根本无法以直接的方式处理这一点。

4.1 向量场的构造

如上所述，本节给出引理 2 的证明。该证明与定理 3 的主要区别在于对 (43) 的表述：这里用不那么直观的不等式 (47) 取代了 (43)。

引理 2. 设 $U_0 \subset \mathbb{R}^d$ 是开集，并假设 $f\colon U_0 \to \mathbb{R}^m$ 光滑，且其雅可比矩阵 $D_x f$ 处处秩为 d。设 W 在 U_0 上非负且局部可积，并设 $E_0 \subset U_0$ 为紧集，满足对所有 $j = 1, \dots, m$，$\sup_{x \in E_0} |f^j(x)| \leq 1$。对于每个整数 $N \geq 1$，存在一个开集 $U_N \subset U_{N-1}$、一个紧集 $E_N \subset E_{N-1} \cap U_N$、定义在 U_N 上的光滑向量场 $\{X_i^{(N)}\}_{i=1}^d$，以及一个正常数 $c_{N,\,d}$，它们仅依赖于 N 和 d，并满足以下条件：

1. 对于每个 $N \geq 1$,

$$W(E_N) \geq c_{N,d} m^{-Nd} W(E_0). \tag{45}$$

2. 对于每个 N'、N，其中 $1 \leq N' < N$，以及每个 $x \in U_N$,

$$X_i^{(N)}\Big|_x = \sum_{i'=1}^{d} c_i^{i'}(x)\; X_{i'}^{(N')}\Big|_x \tag{46}$$

其中存在一些绝对值至多为 2 的光滑系数 $c_i^{i'}$。

3. 对每个 $N \geq 1$，都存在生成次数至多为 $N-1$ 的广义多重指标 $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ 和 $j_1, \dots, j_d \in \{1, \dots, m\}$，使得

$$\begin{aligned} W(x)\,|\det(X_1^{(N)}, \dots, X_d^{(N)})|\Big|_x \int_{E_{N-1}} \left|\det \frac{\partial(X^{\alpha_1} f^{j_1}, \dots, X^{\alpha_d} f^{j_d})}{\partial x}\right| dx \\ \geq \frac{c_{N,d}}{2^d} m^{-Nd} W(E_0) \end{aligned} \tag{47}$$

对所有 $x \in E_N$ 均成立。类似地，对于相同的 $\alpha_{i'}$ 和 $j_{i'}$，

$$X_i^{(N)} X^{\alpha_{i'}} f^{j_{i'}} = \frac{\delta_{ii'}}{2} \tag{48}$$

在 U_N的每一点处，并且对于每个 i、$i' \in \{1, \dots, d\}$。

4. 对每个 $N \geq 1$、每个生成级至多为 N的广义多重指标 α，以及每个 $j \in \{1, \dots, m\}$，

$$\sup_{x \in U_N} |X^\alpha f^j(x)| \leq 1. \tag{49}$$

证明。$N = 1$ 的情形涵盖了大部分难点。给定 $\mathcal{J} := (j_1, \dots, j_d) \in \{1, \dots, m\}^d$，令 $\varphi^{\mathcal{J}}(x)$ 定义为雅可比行列式

$$\det \frac{\partial(f^{j_1}, \dots, f^{j_d})}{\partial x}(x).$$

由于 $D_x f$ 在每一点 $x \in U_0$处都满秩，对于任意 x，至少存在一个 $\mathcal{J}$使得 $\varphi^{\mathcal{J}}(x)$ 非零。对于每个 $\mathcal{J} \in \{1, \dots, m\}^d$，定义

$$U_{\mathcal{J}} := \left\{ x \in U_0 \;\middle|\; \max_{\mathcal{I} \in \{1,\dots,m\}^d} \left|\varphi^{\mathcal{I}}(x)\right| < 2 \left|\varphi^{\mathcal{J}}(x)\right| \right\}.$$

每个 $U_{\mathcal{J}}$ 都是开集，因为 f 具有连续偏导数；并集 $\bigcup_{\mathcal{J}} U_{\mathcal{J}}$等于 U_0，因为每个 $x \in U_0$ 都必须属于集合 $U_{\mathcal{J}}$，其中 $\mathcal{J}$ 使得在 x处，$\max_{\mathcal{I} \in \{1,\dots,m\}^d} |\varphi^{\mathcal{I}}(x)|$ 取得非零最大值。

给定集合 E_0，固定选取一个 $\mathcal{J}$，使得 $W(E_0 \cap U_{\mathcal{J}}) \geq m^{-d} W(E_0)$。这样的 $\mathcal{J}$ 必然存在，因为所有 $U_{\mathcal{J}}$ 的并集包含 E_0，而非空的此类集合的数量不超过 m^d。对于固定的 $\mathcal{J}$，令 $U_1 := U_{\mathcal{J}}$。对于每个 $i \in \{1, \dots, d\}$，令 $X_1^{(1)}$，...，$X_d^{(1)}$ 为定义在U_1 上的向量场

$$X_i^{(1)} \varphi := (-1)^{i-1} \frac{1}{2\varphi^{\mathcal{J}}(x)} \det \frac{\partial(\varphi, f^{j_1}, \dots, \widehat{f^{j_i}}, \dots, f^{j_d})}{\partial x}(x). \tag{50}$$

(此处 f^{j_i} 表示省略。) 这些向量场在 $U_{\mathcal{J}}$ 上光滑，因为 $\varphi^{\mathcal{J}}$在 U_1上必然非零。根据 $U_{\mathcal{J}}$的定义，对于任意 $i \in \{1, \dots, d\}$ 和任意 $j \in \{1, \dots, m\}$，在每个点$x \in U_{\mathcal{J}}$都有 $|X_i^{(1)} f^j| \leq 1$，因为 $X_i^{(1)} f^j$的大小等于比值 $|\varphi^{\mathcal{I}}/(2\varphi^{\mathcal{J}})|$，其中 $\mathcal{I} := \{j, j_1, \dots, \widehat{j_i}, \dots, j_d\}$。由此得到 (49)。此外，显然，对于每个 i，在 $U_{\mathcal{J}}$的每个点都有 $i' \in \{1, \dots, d\}$，这在 α_1、.....、α_d为平凡项且 j_1、.....、j_d为 $\mathcal{J}$的元素时给出 (48)。(48) 的一个重要推论是

$$\left| \varphi^{\mathcal{J}} \det(X_1^{(1)}, \dots, X_d^{(1)}) \right| \Big|_x = 2^{-d} \text{ for all } x \in U_1, \tag{51}$$

这是因为雅可比矩阵 $\partial(f^{j_1},\dots,f^{j_d})/\partial x$ 与以 $X_1^{(1)}$、.....、$X_1^{(d)}$ 为列的矩阵相乘，所得矩阵的 (i',i) 项为 $X_i^{(1)}f^{j_{i'}}$，因此根据 $\varphi^{\mathcal{J}}$ 的定义，取行列式恰好得到 (51)。

若 $W(E_0)=0$，则令 E_1 为空集，此时 (47) 显然成立。否则，假设 $W(E_0)>0$（因此 $W(E_0\cap U_{\mathcal{J}})>0$ 也成立），并令 $E'\subset E_0\cap U_{\mathcal{J}}$ 为满足 $W(x)>0$ 且

$$\frac{\left|\varphi^{\mathcal{J}}(x)\right|}{W(x)}<\frac{2}{W(E_0\cap U_{\mathcal{J}})}\int_{E_0\cap U_{\mathcal{J}}}|\varphi^{\mathcal{J}}|. \tag{52}$$

若 E'' 是 $E_0\cap U_{\mathcal{J}}$ 中满足 $W(x)>0$ 且 (52) 不成立的子集，则由切比雪夫不等式，

$$\left(\frac{2}{W(E_0\cap U_{\mathcal{J}})}\int_{E_0\cap U_{\mathcal{J}}}|\varphi^{\mathcal{J}}|\right)\int_{E''}W(x)dx\le\int_{E''}W(x)\frac{\left|\varphi^{\mathcal{J}}(x)\right|}{W(x)}dx,$$

即，

$$\frac{2W(E'')}{W(E_0\cap U_{\mathcal{J}})}\int_{E_0\cap U_{\mathcal{J}}}|\varphi^{\mathcal{J}}|\le\int_{E''}|\varphi^{\mathcal{J}}|. \tag{53}$$

显然有 $\int_{E_0\cap U_{\mathcal{J}}}|\varphi^{\mathcal{J}}|\ge\int_{E''}|\varphi^{\mathcal{J}}|$，并且 $\int_{E_0\cap U_{\mathcal{J}}}|\varphi^{\mathcal{J}}|$ 必为严格正值，因为 $\varphi^{\mathcal{J}}$ 在 $E_0\cap U_{\mathcal{J}}$ 上恒不为零，且 $E_0\cap U_{\mathcal{J}}$ 的勒贝格测度为正（因为其权重为 W 时的测度也为正）。因此，可以将 (53) 两边同时除以 $\int_{E_0\cap U_{\mathcal{J}}}|\varphi^{\mathcal{J}}|$，从而得出 $W(E'')\le W(E_0\cap U_{\mathcal{J}})/2$。此外，由于 $E_0\cap U_{\mathcal{J}}$ 是不相交并集，由 E'、E'' 以及满足 $W\equiv 0$ 的集合组成，因此现在可知 $W(E')>0$。这也迫使 $\int_{E'}|\varphi^{\mathcal{J}}|>0$ 成立，因此

$$\int_{E_0\cap U_{\mathcal{J}}}|\varphi^{\mathcal{J}}|>\int_{E''}|\varphi^{\mathcal{J}}|,$$

也就是说，刚才观察到的不等式实际上必须是严格的。因此，事实上 $W(E'')<W(E_0\cap U_{\mathcal{J}})/2$ 且 $W(E')>W(E_0\cap U_{\mathcal{J}})/2$。由内正则性可知，$E'$ 必定包含一个紧子集 E_1，使得 $W(E_1)\ge W(E_0\cap U_{\mathcal{J}})/2$，而这本身大于 $m^{-d}W(E_0)/2$，从而得到 (45)。结合 (51) 和 (52) 得到

$$\begin{aligned}m^{-d}W(E_0)\le W(E_0\cap U_{\mathcal{J}})&<\frac{2W(x)}{|\varphi^{\mathcal{J}}(x)|}\int_{E_0\cap U_{\mathcal{J}}}|\varphi^{\mathcal{J}}|\\&=2^{d+1}W(x)\left|\det(X_1^{(1)},\dots,X_d^{(1)})\right|\Big|_x\int_{E_0\cap U_{\mathcal{J}}}\left|\det\frac{\partial(f^{j_1},\dots,f^{j_d})}{\partial x}\right|dx\end{aligned}$$

在所有点 $x\in E_1$ 处成立，这意味着 (47) 成立（其中 α_1、.....、α_d 取为平凡情形）。当 $N=1$ 时（其中 $c_{1,\,d}:=1/2$），引理的证明即告完成，因为在这种情况下 (46) 是空泛成立的。

假设该引理对某个 N 的取值均成立，则 $N+1$ 的结论（(46) 除外）可由将刚刚建立的 $N=1$ 情形应用于 U_N 上的新映射 $f^{(N)}$ 得出；该映射对于所有可能的 $j\in\{1,\dots,d\}$ 以及生成级至多为 N 的所有 α，均以 $X^\alpha f^j$ 为坐标。此类

函数的数量恰为 $m(d+1)^N$（因为在每个生成级中，可以选择对该生成级的任一 d 向量场求导，或者选择完全不求导）。给定前一步中的 U_N 和 E_N，必定存在 $U_{N+1}\subset U_N$ 和一个紧集 $E_{N+1}\subset E_N\cap U_{N+1}$，使得$W(E_{N+1})\geq W(E_N)/(2m^d(d+1)^{Nd})$ 并且

$$W(x)\left|\det(X_1^{(N+1)},\dots,X_d^{(N+1)})\right|\Big|_x\int_{E_N}\left|\det\frac{\partial(X^{\alpha_1}f^{j_1},\dots,X^{\alpha_d}f^{j_d})}{\partial x}\right|dx \geq\frac{W(E_N)}{2^{d+1}m^d(d+1)^{Nd}}$$

对所有 $x\in E_{N+1}$。恒等映射

$$\frac{1}{2m^d(d+1)^{(N-1)d}}\cdot\frac{1}{2m^d(d+1)^{(N-2)d}}\cdots\frac{1}{2m^d}=\frac{1}{2^N m^{dN}(d+1)^{dN(N-1)/2}}$$

给出 (45) 和 (47)，其中 $c_{N,\,d}:=2^{-N}(d+1)^{-dN(N-1)/2}$。同样，(48) 以及后者也可由归纳法立即得到。 (49)

唯一尚待确立的结论是向量场 $\{X_i^{(N)}\}_{i=1}^d$和 $\{X^{(N')}{}_i\}_{i=1}^d$之间的关系 (46)，其中 $N'<N$。由于存在α_1、.....、α_d，其生成级至多为 $N'-1$，以及 j_1、.....、$j_d\in\{1,\dots,d\}$，使得

$$X_i^{(N')}X^{\alpha_{i'}}f^{j_{i'}}=\frac{1}{2}\delta_{ii'}$$

在 $U_{N'}$ 上，将恒等映射 (46) 的两边作用于 $2X^{\alpha_{i'}}f^{j_{i'}}$，可得 $c_i^{i'}=2X_i^{(N)}X^{\alpha_{i'}}f^{j_{i'}}$ 在 U_N 上对每个 i、$i'\in\{1,\dots,d\}$成立。由 (49)，$|c_i^{i'}|\leq 2$在 U_N上。 □

4.2 纳什函数与多项式提升

要证明定理 3，引理 2 尚未解决的唯一难点，是估计（47）左侧出现的积分。概括而言，雅可比行列式的积分大小受某个底层方程组的非退化解的最大数量控制；在许多类似问题中，这一问题都通过某种方式应用贝祖定理得到解决。本例中还有一个额外难点：即使分量函数 f^j 是多项式，其导数 $X^\alpha f^j$ 也未必是多项式，因此当 $N\geq 2$时，不能直接应用贝祖定理。不过，事实证明，有一类比多项式更广的函数，即纳什函数，具有一个非常理想的性质：它在向量场$X_i^{(N)}$ 作用下微分仍保持封闭。既然无论如何都需要扩展到多项式类之外，那么每一步都直接使用纳什函数，所增加的复杂度也微乎其微。

非正式地说，定义在开子集 $U\subset\mathbb{R}^d$ 上的纳什函数，可以理解为定义在较大空间上的多项式函数限制到 $U\times\mathbb{R}^M$ 的某个足够良好的子流形上所得的函数。为此，假设 $U\subset\mathbb{R}^d$ 是开集。

若存在多项式映射 $p\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$，使得对于所有 $x \in U$ 都有 $p(x, \Phi(x)) \equiv 0$，且行列式 $\det D_y p(x,y)|_{y=\Phi(x)}$ 在 U 的任意开子集上都不恒等于零，则实解析映射 $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^M$ 称为代数提升映射。映射 p 称为相关湮灭映射。若函数 f 定义在 U 上，并且通过某个代数提升映射 Φ 提升为多项式，则称其为纳什函数；这意味着存在定义在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^M$ 上的多项式 F，使得对于所有 $x \in U$ 都有 $f(x) = F(x, \Phi(x))$。在分母不为零的定义域上，有理函数是纳什函数，光滑代数函数也是如此（$\sqrt{1+x^2}$ 在整个实轴上都是纳什函数，但 $\sqrt[3]{x}$ 不是）。

这与纳什函数的传统定义略有不同。纳什函数通常更常被定义为满足 $q(x, f(x)) = 0$ 于 U 上的实解析函数 f，其中 $D_z q$ 不恒等于零，并且 $q(x,z)$ 是一个含 $d+1$ 个变量的多项式。上述第一个定义对我们的目的而言会比经典定义更方便，但二者完全等价。

命题 7。设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 是开且连通的，并设 $f\colon U \to \mathbb{R}$ 是一个实解析函数。那么，f 可通过某个代数提升映射 $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^M$ 提升为多项式 F，且具有相关湮灭映射 $p(x,y)$，当且仅当存在一个含 $d+1$ 个变量的实多项式 $q(x,z)$，其中 $D_z q$ 不恒等于零，并且 $q(x, f(x)) \equiv 0$ 于 U 上。

证明。假设存在这样的 $q(x,z)$，不妨设 $D_z q(x, f(x))$ 在 U 上不恒等于零；因为如果情况并非如此，则多项式 $D_z q$ 可以通过归纳法替代 q，成为满足 $q(x, f(x)) \equiv 0$ 的多项式（注意，在这种情况下需要验证 $D_z^2 q(x,z)$ 不恒等于零；如果它恰好恒等于零，那么 $D_z q(x, f(x))$ 在 U 上为零将迫使 $D_z q(x,z)$ 在处处恒等于零，而已知情况并非如此）。于是，代数提升映射 $\Phi(x) := f(x)$（其中$M = 1$）具有相关湮灭映射 $p(x,y) := q(x,y)$，并且 f 通过 Φ 在 U 上提升为多项式 y。

反过来，给定 f、Φ、p 和 F，令 I 为所有满足下述条件的多项式 $g(x,y,z)$ 所组成的理想 $\in \mathbb{C}[x,y,z]$（其中 $x = (x^1, \dots, x^d)$、$y = (y^1, \dots, y^M)$ 和 z 均为一维）：对所有 $x \in U$，都有 $g(x, \Phi(x), f(x)) = 0$。理想 I 是素理想，因为如果对所有 $x \in U$ 都有 $g(x, \Phi(x), f(x))h(x, \Phi(x), f(x)) = 0$，那么由 Φ 和 f 的实解析性可知，$g \in I$ 或 $h \in I$。因此，代数簇 $V(I) \subset \mathbb{C}^{d+M+1}$（即每个 $g \in I$ 都在其上消失的点集）是不可约的。它的维数至多为 d，因为多项式 $p^1(x,y) \dots, p^M(x,y)$ 和 $-z + F(x,y)$ 都属于 I，且存在一个 $x_0 \in U$，使得在点 $(x_0, \Phi(x_0), f(x_0))$ 处，雅可比矩阵 $D_{y,z}(p^1(x,y) \dots, p^M(x,y), -z + F(x,y))$ 的行列式为 $-\det D_y p(x,y) \neq 0$，因而其秩为 $M+1$（关于雅可比矩阵与代数簇维数之间的关系，参见 [6, 9.6、定义 7 和定理 8]）。因此，必定存在一个非零多项式 $G(x,z) \in I \cap \mathbb{C}[x,z]$ [6, 9.5，推论 4]。若 $G \in \mathbb{C}[x]$，由于每个 $G \in I$ 在所有形如 $(x, \Phi(x), f(x))$、其中 $x \in U$ 的点处都消失，这就意味着 $G(x)$ 在 U 上恒为 $= 0$，从而 G 只是零多项式。因此，$G(x,z)$ 必须在所有形如 $(x, f(x))$、其中 $x \in U$ 的点处消失，并且必须非平凡地依赖于 z。

$G(x,z)$ 的实部和虚部在所有形如 $(x,f(x))$、其中 $x\in U$ 的点处也都消失，并且至少其中之一必须非平凡地依赖于 z，因此令 q 为 G 的实部或虚部，就得到一个实多项式，它非平凡地依赖于 z，且对所有 $x\in U$，都有 $q(x,f(x))=0$。 □

给定一个开集 $U\subset\mathbb{R}^d$ 和一个不恒为零的纳什函数 f，其复杂度记为 $c(f)$，定义为在所有多项式 F 和代数提升 $\Phi\colon U\to\mathbb{R}^M$ 中，使得相关湮灭映射 $p(x,y)$ 满足 $f(x)=F(x,\Phi(x))$ 且对所有 $x\in U$ 都有 $p(x,\Phi(x))=0$ 的情形下，乘积 $\deg F\deg p^1\cdots\deg p^M$ 的最小值。（为明确起见，将零函数的复杂度直接定义为零。）容易看出，当 f 是非零多项式时，$c(f)\le\deg f$：例如，可以使用平凡提升 $\Phi(x)=x$ 及其相关湮灭映射 $p(x,y)=-x+y$，将 $M=d$ 的 $f(x)$ 提升为 $f(y)$。利用命题 7 的证明中构造的提升，还可以看出，该复杂度定义始终不大于 Ramanakoraisina 的复杂度；Ramanakoraisina 证明了纳什函数的 Bézout 型定理。下面的结果表明，使用当前的复杂度概念时，Bézout 定理同样成立。

定理 4（纳什函数的贝祖定理）。设 $f_1,\dots,f_d$ 是某个开集 $U\subset\mathbb{R}^d$ 上的纳什函数。那么对于任意实数 $a_1,\dots,a_d$，方程组 $f_1(x)=a_1,\dots,f_d(x)=a_d$ 的非退化解 $x\in U$ 的数量不超过 $c(f_1)\cdots c(f_d)$。

定理 4 的证明并不特别复杂，下面给出证明。相关的关键计算如下列命题所示。

命题 8。设 $f(x):=(f_1(x)\dots,f_d(x))$ 在 U 上实解析，且每个 f_i 都是 U 上的纳什函数。令

$$\overline{F}(x,y_1,\dots,y_d):=(F_1(x,y_1),\dots,F_d(x,y_d),p_1(x,y_1),\dots,p_d(x,y_d)),$$

其中，对每个 $j=1,\dots,d$，$f_j(x)=F_j(x,\Phi_j(x))$ 对应于代数提升 Φ_j 及其相关湮灭映射 p_j。于是

$$\det D_{x,y_1,\dots,y_d}\overline{F}\big|_{(x,\Phi_1(x),\dots,\Phi_d(x))}=\det D_xf(x)\prod_{j=1}^{d}\det D_{y_j}p_j\big|_{(x,\Phi_j(x))}\qquad(54)$$

对所有 $x\in U$。

证明。为计算雅可比行列式 $\det D_{x,y_1,\dots,y_d}\overline{F}$，令 $\overline{F}$视为列向量，并令关于 $x^1,\dots,x^d$ 和 $y_1^1,\dots,y_1^{M_1}$ 通过 $y_d^1,\dots,y_d^{M_d}$ 求导所得的列分别对应雅可比矩阵的各列。不失一般性，每一列 $i\in\{1,\dots,d\}$ 都可以替换为

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{j=1}^{M_1}\frac{\partial(\Phi_1)^j}{\partial x^i}(x)\frac{\partial}{\partial y_1^j}+\cdots+\sum_{j=1}^{M_d}\frac{\partial(\Phi_d)^j}{\partial x^i}(x)\frac{\partial}{\partial y_d^j}\right]\overline{F}(x,y_1,\dots,y_d)$$

因为这样做等价于对雅可比矩阵进行一系列初等列运算，即将后续列的倍数加到列i 上（因此这些运算都不会改变行列式）。随后将行列式在 $(y_1, \dots, y_d) = (\Phi_1(x) \dots, \Phi_d(x))$ 处求值时，链式法则保证所得雅可比矩阵的前 d 列必定具有如下形式

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial x^d}(x) \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

在这前 d 行展开完整雅可比矩阵的行列式，并利用当 $i \neq j$ 时 p_i 不依赖于 y_j 这一事实，恰好得到 (54)。 □

定理 4 的证明。假设存在某个 $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$，以及互不相同的 $x_1, \dots, x_N \in U$，使得 $N > c(f_1) \cdots c(f_d)$ 是方程组 $f_1(x_i) = a_1, \dots, f_d(x_i) = a_d$ 对所有 $i \in \{1, \dots, N\}$ 都成立的非退化解；为方便起见，记作 $f(x_i) = a$。每个这样的 x_i 还必须满足以下性质： $\overline{x}_i := (x_i, \Phi_1(x_i) \dots, \Phi_d(x_i))$ 是方程组 $\overline{F}(\overline{x}_i) = (a, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{M_1 + \cdots + M_d}$ 的一个解。此外，由 (54) 可知， $\overline{F}$ 在 $\overline{x}_i$ 处的雅可比行列式恰好等于

$$\det D_x f(x_i) \prod_{j=1}^{d} \det D_{y_j} p_j|_{(x_i, \Phi_j(x_i))}.$$

由于根据假设，雅可比行列式 $\det D_x f$ 在每个 x_i 处均非零，反函数定理表明，存在定义在 $a \in \mathbb{R}^d$ 的某个邻域上的实解析映射 φ_i，使得 $\varphi_i(a) = x_i$，并且对于所有充分接近 a的 a'，都有 $f(\varphi_i(a')) = a'$。进一步缩小 φ_i的定义域后，还可以假设，对于所有这样的 a'，$\det D_x f|_{\varphi_i(a')}$ 也均非零，并且当 $i \neq j$时，$\varphi_i(a') \neq \varphi_j(a')$。对于每个 $i = 1$，....., N，该量为

$$B_i(a') := \prod_{j=1}^{d} \det D_{y_j} p_j|_{(\varphi_i(a'), \Phi_j(\varphi_i(a')))}$$

是关于 a' 的一个实解析函数，并非恒等于零。因此，乘积$B_1(a') \cdots B_N(a')$同样是定义在 a 的某个邻域上、关于 a'的实解析函数，并非恒等于零。因此，可以在 a 的任意给定邻域中找到一个 a'，使得

$$\det D_x f(\varphi_i(a')) \prod_{j=1}^{d} \det D_{y_j} p_j|_{(\varphi_i(a'), \Phi_j(\varphi_i(a')))} \neq 0$$

对每个 $i \in \{1, \ldots, N\}$均成立。由此可知，$\overline{x}_i' := (\varphi_i(a')\ \Phi_1(\varphi_i(a')) \ldots, \Phi_d(\varphi_i(a')))$ 将是 $\overline{F}(\overline{x}_i') = (a', 0, \ldots, 0)$的一个非退化解，对每个 i均如此。因此，系统$\overline{F}(\overline{x}) = (a', 0, \ldots, 0)$ 必然至少有 N 个不同的非退化解 $\overline{x}_i'$。现在，B′贝祖定理 [7, 第 8 章第 4] 节保证，系统 $\overline{F}(\overline{x}) = (a', 0, \ldots, 0)$的复孤立解数量至多等于组成该系统的多项式次数之积。实非退化解在被视为复解集中的元素时仍保持非退化，因此仍然是孤立解，由此可得 $N \leq \prod_{j=1}^{d} \deg F_j \deg p_j^1 \cdots \deg p_j^{M_j}$。选择每个 F_j 以及相应的Φ_j 和 p_j，使次数之积尽可能小，恰好得到 $N \leq c(f_1) \cdots c(f_d)$。

□

纳什函数具有一个很好的性质：它们在相当长的一系列自然运算下保持封闭。例如，如果 f 和 g 在某个开集U 上是纳什函数，那么 fg 和 $f+g$ 也都是纳什函数，并且在这两种情况下，fg 和$f+g$ 的复杂度都由 $c(f)c(g)$ 界定。（在认识到任何代数提升映射 $\Phi_i\colon\ U \to \mathbb{R}^{M_i}$ 对于 $i = 1$, ..., 2 都会通过 $\overline{\Phi}(x) = (\Phi_1(x)\ \Phi_2(x))$ 诱导出一个代数提升映射 $\overline{\Phi}\colon\ U \to \mathbb{R}^{M_1+M_2}$ 后，这两种情形的证明都很初等；其相关湮灭映射 $\overline{p}$ 的构造也很简单，只需将映射 p_1和 p_2 直接拼接起来，并将每个映射视为关于它不显式依赖的变量 $\mathbb{R}^{M_1} \times \mathbb{R}^{M_2}$ 的常数即可。）其他不那么显然但确实成立的事实是，$1/f$ 和 $\sqrt{f}$ 在 $f > 0$ 的集合上是纳什函数，并且复杂度至多为 $2c(f)$。纳什函数与定理 3 相关的关键性质如下。

引理 3. 若 $f_1, \ldots, f_{d+1}$ 是某个开集 $U \subset \mathbb{R}^d$ 上的纳什函数，则函数

$$\det \frac{\partial(f_1, \ldots, f_d)}{\partial x} \left(\det \frac{\partial(f_2, \ldots, f_{d+1})}{\partial x} \right)^{-1} \tag{55}$$

在集合 $U' := \{x \in U\ |\det\ \partial(f_2, \ldots, f_{d+1})/\partial x \neq 0\}$ 上是纳什函数。其复杂度至多为 $(c(f_1) \cdots c(f_{d+1}))^2$。

证明。与前面一样，对每个 $i = 1, \ldots, d+1$，令 $\Phi_i(x)$ 为一个代数提升映射，其湮灭多项式为 $p_i(x, y_i)$，并令 $F_i(x, y_i)$ 满足：在 U 上，$f_i(x) = F_i(x, \Phi_i(x))$。令 $\varphi(x)$ 表示函数 (55)，并考虑多项式

$$\begin{aligned} H_1(x, y_1, \ldots, y_{d+1}) &:= \det \frac{\partial(F_1, \ldots, F_d, p_1, \ldots, p_d)}{\partial(x, y_1, \ldots, y_d)} \det D_{y_{d+1}} p_{d+1}, \\ H_2(x, y_1, \ldots, y_{d+1}) &:= \det \frac{\partial(F_2, \ldots, F_{d+1}, p_2, \ldots, p_{d+1})}{\partial(x, y_1, \ldots, y_d)} \det D_{y_1} p_1, \end{aligned}$$

其中，每个 p_i 和 F_i 都被视为仅依赖于 x 和 y_i（即当 $j \neq i$ 时与 y_j 无关）。令

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}(x) &:= (\Phi_1(x), \ldots, \Phi_{d+1}(x), \varphi(x)), \\ \overline{p}(x, y_1, \ldots, y_{d+1}, z) &:= (p_1(x, y_1), \ldots, p_{d+1}(x, y_{d+1}), \\ &\qquad H_1(x, y_1, \ldots, y_{d+1}) - z H_2(x, y_1, \ldots, y_{d+1})). \end{aligned}$$

根据 (54)，必然有

$$H_1(x,\Phi_1(x),\dots,\Phi_{d+1}(x)) = \det \frac{\partial(f_1,\dots,f_d)}{\partial x}(x) \prod_{j=1}^{d+1} \det D_{y_j} p_j|_{(x,\Phi_j(x))}$$

and

$$H_2(x,\Phi_1(x),\dots,\Phi_{d+1}(x)) = \det \frac{\partial(f_2,\dots,f_{d+1})}{\partial x}(x) \prod_{j=1}^{d+1} \det D_{y_j} p_j|_{(x,\Phi_j(x))},$$

这意味着，当在 $(x,\overline{\Phi}(x))$ 处取值时， $H_1 - zH_2$ 对于$x \in U'$恒等于零。同样， $\overline{p}$ 的所有其他分量作为 $(x,\overline{\Phi}(x))$ 的函数也恒等于零。 $\overline{p}$ 关于 $y_1,\dots,y_{d+1},z$ 的雅可比行列式恰为

$$-H_2(x,y_1,\dots,y_{d+1}) \prod_{j=1}^{d+1} \det D_{y_j} p_j|_{(x,y_j)},$$

在取点 $(x,\overline{\Phi}(x))$ 处的值时，它在 U' 上并非恒为零。这意味着 $\overline{\Phi}$ 是 U' 上的代数提升映射，其湮灭映射为 $\overline{p}$。通过该映射， φ 提升到 z，因此 φ 的复杂度至多为

$$\left(\prod_{j=1}^{d+1}\prod_{i=1}^{M_i} \deg p_j^i\right) \cdot \deg(H_1 - zH_2).$$

由于 H_1 和 H_2 都是函数 F_j 和 p_j^i 的导数的乘积，其中 $i \in \{1,\dots,M_j\}$ 和 $j \in \{1,\dots,d+1\}$，因此 H_1 和 H_2 的次数都严格小于 $\prod_{j=1}^{d+1} \deg F_j \prod_{i=1}^{M_j} \deg\ p_j^i$，这意味着 $\overline{p}$ 中多项式的次数乘积不会超过 $\prod_{j=1}^{d+1} \deg\ F_j \prod_{i=1}^{M_j} (\deg p_j^i)^2$。经过优化可得， φ 的复杂度不超过 $(c(f_1)\cdots c(f_{d+1}))^2$，如前所述。

□

由引理 2 得出定理 3 的证明现在相当直接。

定理 3 的证明。由 (47) 可知，只需证明不等式

$$\int_{E_{N-1}} \left|\det \frac{\partial(X^{\alpha_1} f^{j_1},\dots,X^{\alpha_d} f^{j_d})}{\partial x}\right| dx \le 2^d D^{(2d+2)^N} \tag{56}$$

对于每个 N，当 α_1、.....、α_d 的生成级至多为 $N-1$，且当 f =(f^1、.....、f^m) 是某个开集 $U \subset \mathbb{R}^d$ 上的纳什映射，并且对所有 $j \in \{1,\dots,m\}$， $c($ f^j) 的复杂度 $\le D$ 时。在引理 2 的证明中，映射 $f_{(N)}$ 的定义使得 $f^{(N)}$ 的分量要么是 $f^{(N-1)}$ 的分量，要么具有 $X_i^{(N)} g$ 的形式，其中某个函数 g 是 $f^{(N-1)}$的一个分量。根据向量场 $X_i^{(N)}$ 的定义 (50) 和引理 3， $X_i^{(N)}\varphi$

当 φ 是纳什函数时，它是纳什函数；并且当 α_i 时，每个 $X^{\alpha_i} f^{j_i}$ 都是纳什函数，其中 j_i、 $i = 1$、.....、 d 如 (47) 中所示。由 (55)，对 N 作归纳法，

$$c(X_i^{(N)} X^\beta f^j) \le \left(c(X^\beta f^j) \prod_{i'=1}^{d} c(X^{\alpha_{i'}} f^{j_{i'}}) \right)^2$$

只要 β 的生成级不超过 $N-1$。由归纳法可知，该表达式右侧的每一项的复杂度都不超过 $D^{(2d+2)^{N-1}}$，因此 $c(X^\alpha f^j) \le (D^{(2d+2)^{N-1}})^{2(d+1)} = D^{(2d+2)^N}$，如所需。

现在考虑积分 (56)。已知在E_{N-1}的所有点处， $|X^{\alpha_i} f_i| \le 1$ 成立。由变量代换公式可得

$$\int_{E_{N-1}} \left| \det \frac{\partial (X^{\alpha_1} f^{j_1}, \dots, X^{\alpha_d} f^{j_d})}{\partial x} \right| dx$$

不超过 $[-1,1]^d$ 的勒贝格测度乘以系统 $X^{\alpha_i} f^{j_i}(x) = c_i$的非退化解 $x \in U_{N-1}$ 的最大数量，即

$$\int_{E_{N-1}} \left| \det \frac{\partial (X^{\alpha_1} f^{j_1}, \dots, X^{\alpha_d} f^{j_d})}{\partial x} \right| dx \le 2^d \sup_{(c_1,\dots,c_d)\in\mathbb{R}} \#\Big\{ x \in U_{(N-1)} \ \Big| \ X^{\alpha_i} f^{j_1}(x) = c_i, i = 1, \dots, d \text{ and } \left| \det \frac{\partial (X^{\alpha_1} f^{j_1}, \dots, X^{\alpha_d} f^{j_d})}{\partial x}(x) \right| \neq 0 \Big\}.$$

由定理 4 和复杂度界可得

$$\int_{E_{N-1}} \left| \det \frac{\partial (X^{\alpha_1} f^{j_1}, \dots, X^{\alpha_d} f^{j_d})}{\partial x} \right| dx \le 2^d \left(D^{(2d+2)^{N-1}} \right)^d.$$

因此，特别是，(47) 蕴含

$$W(x) \left| \det(X_1^{(N)}, \dots, X_d^{(N)}) \right| \Big|_x \ge c_{N,d} 4^{-d} D^{-(2d+2)^N} m^{-Nd} W(E_0)$$

对所有 $x \in E_N$ 均成立，由此得到 (43)。 □

值得指出的是，经过进一步推导，可以大幅改善式 (43) 中常数对参数 D 的依赖，条件是所有 f^j 恰好都是多项式（因为当所有原始函数恰好都是多项式时，当前证明在提升过程中对方程进行了不必要的重复），但目前这不会带来实质性应用，因此略去不论。

5 非退化条件的充分性

现在，证明多项式映射[2]的定理1所需的所有工具都已备齐。第5.1节推导了一些与

[2]事实上，该论证将证明：当相关的 ϕ 为 Nash 函数时，(1) 有界。这一点很有用，因为此时隐函数定理允许我们在映射 $\gamma_t(x)$ 是多项式、但不具有 $(t, \phi(x,t))$ 这种形式时，证明 (1) 有界。

非退化性相关的关键不等式，而第5.2节说明了这些不等式如何推出 L^{p_b}–L^{q_b}有界性。本节中，假设 $\phi(x,t)$ 是某个开集 $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d_1}$ 上的多项式函数，且 $D_x\phi(x,t)$ 在 U上满秩， $\gamma_t(x) := (x, \phi(x,t))$，并且 $\pi(x,y)$ 由式（12）给出。

5.1 几何次水平集不等式

引理 4. 假设映射 γ 和 π （如式 (1) 和第 2.2 节中所述）是多项式。设 $U \subset \mathbb{R}^{d_1}$ 为开集， F 是定义在 U 上的非负纳什函数， W 是定义在 U 上的非负可测函数。设 $E \subset U$ 是任意一个具有正勒贝格测度的紧集，设 $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，且满足 $|$行列式 $\{\omega_i\}_{i=1}^n| = 1$。若

$$\sup_{t\in E}(F(t))^2 ||d_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}||_\omega^2 \le 1 \tag{57}$$

（回忆式 (10)），对某个固定的 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立，则存在一点 $t_E \in E$ 以及 $\mathbb{R}^{d_1}$ 的一组基 $\{u_i\}_{i=1}^{d_1}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\{\omega_i'\}_{i=1}^n$，使得 $W(t_E)|$ 行列式 $\{u_i\}_{i=1}^{d_1}| \gtrsim W(E)$, $|$ 行列式 $\{\omega_i'\}_{i=1}^n| = 1$， ω_{k+1}'，…，ω_n' 张成空间 $\ker D_x\pi_{(x,\gamma_{t_E}(x))}$，并且

$$\sum_{s=0}^{\min\{d,k\}}\sum_{i=1}^{d_1}\sum_{i'=1}^{k}\sum_{i''=k+1}^{n}\left|F(t_E)(\underline{u_i}_{|s}\cdot\nabla_t^s)d_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}(\underline{\omega_{i'}'}_{|k-s},\underline{\omega_{i''}'}_{|s})\right|^2 \lesssim 1 \tag{58}$$

在 $t = t_E$ 处。上述隐含常数不依赖于 E、 W、 x 或 $\{\omega_i\}_{i=1}^n$，并且其增长至多如 π 和 γ 的次数以及 F 的复杂度的某个有限次幂。（注意， $\underline{u_i}_{|0}\cdot\nabla_t^0$ 应理解为恒等算子，且不存在关于变量 i 的相应求和。）

证明。固定 $N := \min\{d,k\}$。根据（57）以及 $||d_x\pi||_\omega$ 的定义（结合 $d_x\pi$ 是一个交错的 k-线性泛函这一事实），必有

$$\sup_{t\in E}F(t)\left|d_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}(\omega_{i_1},\dots,\omega_{i_k})\right| \le 1 \tag{59}$$

对于任意指标 $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$。此外， E 的紧致性意味着存在某个非零的 c，使得

$$\sup_{t\in E}|ct^i| \le 1 \tag{60}$$

其中，照例， t^1，…， t^{d_1}是$\mathbb{R}^{d_1}$上的标准坐标函数。将（59）和（60）左端出现的函数作为向量值映射 $f\colon \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^m$ 的分量，取适当的 $m \le n^k + d_1$，由定理 3 可知，存在一个开集 $U_N \subset \mathbb{R}^{d_1}$ 以及向量场族$\{T_{(j}{}_{i}{}_{)}\}_{i=1}^{d_1}$，使得对于 $j \in \{1,\dots,N\}$，

$$\sup_{t\in U_N}|T^\beta F(t)d_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}(\omega_{i_1},\dots,\omega_{i_k})| \le 1 \tag{61}$$

对任意次数至多为 N的 β以及任意 $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$均成立。定理 3 还保证存在一个紧集 $E_N \subset U_N \cap E$，使得$W(E_N) \gtrsim W(E)$且 $W(t)|$行列式$\{T($ $_{i}^{j}\}_{j=1}^{d_1}| \gtrsim |E|^{)}$在所有点 $t \in E_N$处均成立；在这两种情况下，隐常数只依赖于维数、次数和 N；作为 π 和 γ 的次数以及 F的复杂度的函数，这些隐常数至多按这些量的某个固定次幂增长。将（61）平方并求和可得

$$\sup_{t\in U_N} \sum_{\substack{|\beta|\le N \\ \mathrm{gen}(\beta)\le N}} \sum_{i=1}^{n} |T^\beta F(t) d_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}(\underline{\omega_i}_{|k})|^2 \lesssim 1 \tag{62}$$

其中隐常数仅依赖于 d、 d_1、 k和 N。对于每个 $N' < N$和每个 $i = 1$、.....、d_1，都存在定义在 U_N 上的系数 $c_i^{i'}$，使其在 U_N 的每一点处的绝对值至多为 2，从而

$$T_i^{(N)} = \sum_{i'=1}^{d_1} c_i^{i'} T_{i'}^{(N')}. \tag{63}$$

取 E_N 中任意一点 t_E（该集合非空，因为它具有正测度）。

接下来，将命题 2 应用于子空间序列 $V_1 : = \mathbb{R}^n \supset V_2 : = \ker D_x\pi|_{(x,y)}$及基 $\{\omega_i\}_{i=1}^n$。若 $\{\omega_i'\}_{i=1}^n$ 是所述的 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，且 ω_{k+1}'、.....、ω_n' 的张成空间恰为 V_2，则由 (15) 和命题 4 可得

$$\sum_{i=1}^{n} |T^\beta F(t) d_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}(\underline{\omega_i}_{|k})|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|T^\beta F(t) d_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}(\underline{\omega_i'}_{|k})\right|^2 \tag{64}$$

当每个 $|\beta| \le N$ 都满足 $t = t_E$ 时，并进一步可得，对某个正交的 O，有 $\omega_i' = \sum_j O_{ij}\omega_j$。由于 $|\det\{\omega_i\}_{i=1}^n| = 1$，这也迫使 $|\det\{\omega_i'\}_{i=1}^n| = 1$。

对于 (64) 左侧的任意 β，假设 β 的阶等于 $s \in \{0, \dots, \min\{d, k\}\}$。若将展开式 $\underline{\omega_i'}_{|k}$ 限制为：指标 i_1、.....、i_{k-s} 属于 $\{1, \dots, k\}$，且指标 i_{k-s+1}、.....、i_k 属于$\{k+1, \dots, n\}$，则右侧不会变大。换言之，

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \left|T^\beta F(t) d_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}(\underline{\omega_i}_{|k})\right|^2 \\ &\qquad \ge \sum_{i'=1}^{k} \sum_{i''=k+1}^{n} \left|T^\beta F(t) d_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}(\underline{\omega_{i'}'}_{|k-s}, \underline{\omega_{i''}'}_{|s})\right|^2 \end{aligned} \tag{65}$$

因为第二个和式中的各项仅仅是（64）右端各项的一个子集。根据 $d_x\pi$的定义，

$$\begin{aligned} &T^\beta F(t) d_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}(\omega_{i_1}', \dots, \omega_{i_k}') \\ &\qquad = T^\beta F(t) \det(D_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}\omega_{i_1}', \dots D_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}\omega_{i_k}'). \end{aligned}$$

由于 ω'_{k+1}，…，ω'_n 中的每一个都属于$D_x\pi|_{(x,\gamma_{t_E}(x))}$的核，当 $i \geq k+1$时，向量$D_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}\omega'_i$ 在 $t = t_E$ 处为零。因此，$d_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}(\underline{\omega'_{i'}}_{|k-s}, \underline{\omega'_{i''}}_{|s})$展开式中的每一项在 $t = t_E$处都至少以 s阶消失。这意味着，当在这个特定的t_E处计算（65）的右端时，微分算子 T^β 可替换为任意一个最高阶部分与 T^β一致的 s 阶微分算子（而不改变该和式的值）。特别地，若 $\beta = ((N_1, \dots, N_s), (i_1, \dots, i_s))$，且 $u_i^{(j)} \in \mathbb{R}^{d_1}$是一个在这个特殊的 $t = t_E$ 处等于 $T_i^{(j)}$ 的常向量，那么定义$(u\cdot\nabla_t)^\beta = (u^{(N_s)}{}_{j_s} \cdot\nabla_t) \cdots (u^{(N_1)}{}_{j_1} \cdot\nabla_t$，并将（65）右端的 T^β替换为$(u\cdot\nabla_t)^\beta$，其值保持不变。由（63）可知，若固定 u_1，…，u_{d_1}使其分别就等于 $u_1^{(N)}$，…，$u_{d_1}^{(N)}$，则

$$(u_{i_1}\cdot\nabla_t)\cdots(u_{i_s}\cdot\nabla_t)$$

可表示为以下各项的线性组合： T^β 对于满足 $|\beta| = s$ 的广义多重指标β。所需项数至多为 d_1^s，且每项系数的大小至多为 2^s。因此

$$\sum_{i'=1}^{k}\sum_{i''=k+1}^{n}\left|(u_{i_1}\cdot\nabla_t)\cdots(u_{i_s}\cdot\nabla_t)F(t)d_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}(\underline{\omega'_{i'}}_{|k-s}, \underline{\omega'_{i''}}_{|s})\right|^2$$

$$\leq \sum_{i'=1}^{k}\sum_{i''=k+1}^{n}\left|\sum_{\substack{|\beta|=s\\ \mathrm{gen}(\beta)=s}} 2^s|T^\beta d_x F(t)\pi|_{(x,\gamma_t(x))}(\underline{\omega'_{i'}}_{|k-s}, \underline{\omega'_{i''}}_{|s})|\right|^2$$

在 $t = t_E$ 处，因此由柯西–施瓦茨不等式可得

$$(4d_1)^s \sum_{\substack{|\beta|=s\\ \mathrm{gen}(\beta)\leq N}}\sum_{i'=1}^{k}\sum_{i''=k+1}^{n}\left|T^\beta F(t)d_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}(\underline{\omega'_{i'}}_{|k-s}, \underline{\omega'_{i''}}_{|s})\right|^2$$

$$\geq \sum_{i=1}^{d_1}\sum_{i'=1}^{k}\sum_{i''=k+1}^{n}\left|F(t)(\underline{u_i}_{|s}\cdot\nabla_t^s)d_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}(\underline{\omega'_{i'}}_{|k-s}, \underline{\omega'_{i''}}_{|s})\right|^2$$

在 $t = t_E$ 处；特别注意， $F(t)$ 中的 $\underline{u_i}_{|s}\cdot\nabla_t^s$可以移到导数之外，因为乘积法则产生的所有涉及 F 导数的项都必须消失，这是因为 $d_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}(\underline{\omega'_{i'}}_{|k-s}, \underline{\omega'_{i''}}_{|s})$ 在 $t = t_E$ 处至少 s 阶消失。对 s 求和，并回顾 (62) 和 (65)，可得 (58)，其中常数仅依赖于 n、k 和 d_1。条件 $W(t_*)|$ 行列式$\{u_i\}_{i=1}^{d_1}| \gtrsim W(E)$，且常数的增长至多为 γ 的次数、 π 的次数或 F 的复杂度的某个幂，是向量场 $\{T_i^{(N)}\}_{i=1}^{d_1}$ 在点 t_E 处具有类似性质的推论；定理 3 的不等式 (43) 保证了这一点。 □

命题 9. 在与引理 4 相同的假设下，设 $t \in \mathbb{R}^{d_1}$、 $\{u_i\}_{i=1}^{d_1}$ 和 $\{\omega'_i\}_{i=1}^n$ 如其中所述。固定 $y := \gamma_{t_E}(x)$，并令 Q 按照

(4) 中针对给定的 $\ker D_x\pi|_{(x,y)}$ 的正交归一基 $\{z_i\}_{i=1}^d$ 所定义。令 $\{v_i\}_{i=1}^k$ 为满足以下条件的 $\mathbb{R}^k$ 的基

$$v_i := D_x\pi|_{(x,y)}\omega_i' \qquad \forall i \in \{1,\dots,k\}, \tag{66}$$

并令 $\{w_i\}_{i=1}^d$ 为 $\mathbb{R}^d$ 的一组基，使得

$$\omega_{k+i}' = \sum_{i'=1}^{d} w_i^{i'} z_{i'} \qquad \forall i \in \{1,\dots,d\} \tag{67}$$

（即，向量 w_i 的系数由基变换矩阵给出）。则

$$\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\min\{d,k\}} \sum_{i=1}^{d_1}\sum_{i'=1}^{k}\sum_{i''=k+1}^{n} \left|(\underline{u_i}_{|s}\cdot\nabla_t^s) d_x\pi|_{(x,\gamma_t(x)}(\underline{\omega_{i'}'}_{|k-s}, \underline{\omega_{i''}'}_{|s})\right|^2 \\ &\qquad = |\det\{v_i\}_{i=1}|^2 (\mathcal{Q}[\{u_i\}_{i=1}^{d_1}, \{v_i^*\}_{i=1}^k, \{w_i\}_{i=1}^d])^2\end{aligned} \tag{68}$$

在 $t = t_E$处，其中 $\mathcal{Q}$ 由 Q 按式 (25) 导出，而 $\{v_i^*\}_{i=1}^k$ 是 $\{v_i\}_{i=1}^k$ 的对偶基，如式 (40) 所示。

证明。如前所述，当 $i \geq k+1$时，$D_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}\omega_i'$ 在所选点 $t = t_E$处至少一阶消失，这意味着当 $i_1', \dots, i_{k-s}' \leq k$以及 $i_1'', \dots, i_s'' \geq k+1$时，

$$\begin{aligned}&(u_{i_1}\cdot\nabla_t)\cdots(u_{i_s}\cdot\nabla_t)\det(D_x\pi\omega_{i_1'}', \dots, D_x\pi\omega_{i_{k-s}'}' D_x\pi\omega_{i_1''}', \dots, D_x\pi\omega_{i_s''}') \\ &= (u_{i_1}\cdot\nabla_t)\cdots(u_{i_s}\cdot\nabla_t)\det(v_{i_1'}, \dots, v_{i_{k-s}'}, D_x\pi\omega_{i_1''}', \dots, D_x\pi\omega_{i_s''}')\end{aligned}$$

对于所选 t处的任意 $\{u_i\}_{i=1}^{d_1}$。定义

$$\Theta(u,w) := (u\cdot\nabla_t) D_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}\left[\sum_{i=1}^{d} w^i z_i\right]$$

对于任意 (u,w)，$\in \mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^d$ 蕴含

$$\begin{aligned}&(u_{i_1}\cdot\nabla_t)\cdots(u_{i_s}\cdot\nabla_t)\det(v_{i_1'}, \dots, v_{i_{k-s}'}, D_x\pi\omega_{i_1''}', \dots, D_x\pi\omega_{i_s''}') \\ &\qquad = (u_{i_1}\cdot\nabla_{t'})\cdots(u_{i_s}\cdot\nabla_{t'})\det(v_{i_1'}, \dots, v_{i_{k-s}'}, \Theta(t', w_{i_1''}), \dots, \Theta(t', w_{i_s''}))\end{aligned}$$

对于任意$t' \in \mathbb{R}^{d_1}$，根据乘积法则（因为在等式两边，可能非零的项仅限于行列式最后的 s 个元素分别恰好对其中一个关于 t 或 t' 的导数求导的那些项）。因此

$$\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\min\{d,k\}} \sum_{i=1}^{d_1}\sum_{i'=1}^{k}\sum_{i''=k+1}^{n} \left|(\underline{u_i}_{|s}\cdot\nabla_t^s) d_x\pi|_{(x,\gamma_t(x))}(\underline{\omega_{i'}'}_{|k-s}, \underline{\omega_{i''}'}_{|s})\right|^2 \\ &\qquad = \sum_{s=0}^{\min\{d,k\}} \sum_{i=1}^{d_1}\sum_{i'=1}^{k}\sum_{i''=1}^{d} \left|(\underline{u_i}_{|s}\cdot\nabla_t^s)\det(\underline{v_{i'}}_{|k-s}, \underline{\Theta(t,w_{i''})}_{|s})\right|^2.\end{aligned}$$

恒等式 (68) 现在可由 (40) 直接推出，因为 $v \cdot \Theta(u,w) = Q(u,v,w)$，这是因为 $(u \cdot \nabla_t) D_x \pi|_{(x,\gamma_t(x))}$ 在 $t = t_E$ 处恰好等于 $(u \cdot \nabla_t) D_x \phi(x,t)$，根据定义 (12)。 □

5.2 多项式情形中充分性的证明

给定一点 $(x_*, t_*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d_1}$ 以及在 (x_*, t_*) 附近定义的多项式映射 $\phi(x,t)$，假设 Q（由 (4) 给出）在 (x_*, t_*) 处非退化。令 $y_* := \gamma_{t_*}(x_*)$。推论 1 保证存在一个有限常数 c，它仅依赖于在 (x_*, t_*) 处定义的 Q，并且存在一个仅依赖于 ϕ 在 (x_*, t_*) 附近的 C^3 范数的 (x_*, t_*) 的邻域，使得当 $\tilde{\phi}$ 是任意一个在该邻域内充分接近 ϕ 的映射（同样以 C^3 范数度量）时，对于由该 ϕ 在邻域中任一点计算得到的所有 Q，(38) ~ ~ 都对同一个固定的 c 值成立。令 $\eta(x,y)$ 为任意连续截断函数，使得$\eta(x, \gamma_t(x))$ 的支集紧包含于该给定邻域内。

要证明由此 ϕ 和 η定义的算子 (1) 将 L^{p_b} 映射到 L^{q_b}，根据定理 2 和 (13)，只需证明存在某个常数 C 使得

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \frac{(\eta(x,\gamma_t(x)))^{p_b'} dt}{||d_x \pi(x,\gamma_t(x))||_\omega^{p_b'-1}} \leq C \tag{69}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及所有满足归一化条件 $\lrcorner \det(\omega_1, .., \omega_n)| = 1$ 的基 $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ 均成立。我们将证明，事实上，对所有充分接近 ϕ 的 ϕ，此估计都成立，且常数 C 的增长至多为 ϕ 和 π 对应多项式次数的某个幂。

固定 $x \in \mathbb{R}^n$ 和基 $\{\omega_i\}_{i=1}^n$，并且不失一般性地假设 (69) 左侧的积分非零。令 $E \subset \mathbb{R}^{d_1}$ 为 $\eta(x, \gamma_t(x))$ 的支集内任意一个具有正测度的紧集，其中 x 固定。令 F 为纳什函数 $||d_x \pi|_{x,\ \gamma_t(x)}||_\omega^{-1}$（其复杂度的增长不超过 π 和 ϕ 的次数的某个幂，并且根据我们所作的假设，$D_x \phi$ 在 (x_*, t_*) 处满秩，因此它在积分的支集上不为零），并令 $W(t) := ||d_x \pi|_{x,\ \gamma_t(x)}||_\omega^{-nd_1/(dk)}$。由于显然有

$$\sup_{t \in E} (F(t))^2 ||d_x \pi|_{(x,\gamma_t(x))}||_\omega^2 \leq 1,$$

引理 4 适用；令 t_E 为该引理所保证的 t 的特定值，并令 Q 为在 (x, t_E) 处计算的三线性泛函 (4)。由于 η 的支集已取得足够小，数量 $\mathcal{Q}$ 满足 (38)，其中常数 c（上文已讨论）与 E、x 和 t_E 无关。结合 (58) 和 (68) 可得

$$c(F(t_E))^2 |\det\{v_i\}|_{i=1}^d|^2 |\det\{u_i\}_{i=1}^{d_1}|^{\frac{2s}{d_1}} |\det\{v_i^*\}_{i=1}^k|^{\frac{2s}{k}} |\det\{w_i\}_{i=1}^d|^{\frac{2s}{d}} \lesssim 1$$

对于 $s := dk/n$，其隐常数不依赖于 x 或 E，且其增长至多为 π 的次数的幂（或等价地，ϕ）。由于基 $\{v_i\}_{i=1}^k$ 和 $\{v_i^*\}_{i=1}^k$ 互为对偶，这意味着

$$c(F(t_E))^2 |\det\{u_i\}_{i=1}^{d_1}|^{\frac{2s}{d_1}} |\det\{v_i\}_{i=1}^k|^{2-\frac{2s}{k}} |\det\{w_i\}_{i=1}^d|^{\frac{2s}{d}} \lesssim 1. \tag{70}$$

引理 4 保证 $\{u_i\}_{i=1}^{d_1}$ 满足 $W(t_E)|\det\{u_i\}_{i=1}^{d_1}| \gtrsim W(E)$。权重 W 和函数 F 具有性质 $W = (F)^{d_1/s}$，因此可得

$$\sqrt{c}(W(E))^{\frac{s}{d_1}}|\det\{v_i\}_{i=1}^{k}|^{1-\frac{s}{k}}|\det\{w_i\}_{i=1}^{d}|^{\frac{s}{d}} \lesssim 1 \tag{71}$$

其中隐常数仅依赖于 d、d_1、k 以及 π 的次数（与往常一样，其增长有一个由该次数的幂所控制的上界）。

引理 4 还保证 $|\det\{\omega_i'\}_{i=1}^{n}| = 1$。对于每个 $i \in \{1,\dots,k\}$，令 ω_i'' 为 $\ker D_x\pi|_{(x,\gamma_i(x))}$ 的正交补中的唯一向量，使得 $\omega_i'' - \omega_i' \in \ker D_x\pi|_{(x,\gamma_i(x))}$，并且当 $i > k$ 时，令 $\omega_i'' := \omega_i'$。由于对于适当的系数 $\theta_{ii'}$ 有 $\omega_i'' = \omega_i' + \sum_{i'=k+1}^{n}\theta_{ii'}\omega_i'$，且对每个 $i \in \{1,\dots,k\}$，$|\det\{\omega_i''\}_{i=1}^{n}| = 1$ 也成立。现在考虑映射 $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，使得对每个 i，$M\omega_i'' = (D_x\pi|_{(x,\gamma_i(x))}\omega_i'', z_1\cdot\omega_i'', \dots, z_d\cdot\omega_i'')$，其中 $z_1,\dots,z_d$ 是定义 Q 时所用的 $\ker D_x\pi|_{(x,\gamma_{t_E}(x))}$ 的正交归一基。若 $i \in \{1,\dots,k\}$，则 $M\omega_i'' = (v_i, 0, \dots, 0)$；若 $i \geq k$，则根据命题 9 中的 $w_i^{i'}$，$M\omega_i'' = (0, w_{i-k}^1, \dots, w_{i-k}^d)$。因此，必有

$$|\det\{v_i\}_{i=1}^{k}||\det\{w_i\}_{i=1}^{d}| = |\det M||\det\{\omega_i''\}_{i=1}^{n}| = |\det M|.$$

现在考虑矩阵 MM^T。由于 $\{z_1,\dots,z_d\}$ 是 $\ker D_x\pi|_{(x,y_j)}$ 的正交归一基，因此 MM^T 具有分块结构

$$\begin{bmatrix} (D_x\pi(x,y))(D_x\pi(x,y))^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

（其中 $y := \gamma_{t_E}(x)$），这意味着 $|\det M| = \sqrt{\det(D_x\pi(x,y))(D_x\pi(x,y))^T}$，（根据 [11], 的命题 1，这等于 $||d_x\pi(x,y)||$）。特别地，这意味着 $|\det M|$ 是 (x,y) 的连续函数，在 (x_*,y_*) 处不为零，并且只依赖于 ϕ 的一阶导数。因此，可以假设截断函数 η 的支集已充分缩小，使得 $|\det M|$ 在该支集上有一个统一的下界，该下界只依赖于 ϕ 在 (x_*,t_*) 处的值，并且当 ϕ 被 C^3 意义下接近它的任意 $\tilde{\phi}$ 替换时保持稳定。因此，(71) 意味着

$$\int_E \frac{dt}{||d_x\pi(x,\gamma_t(x))||_{\omega}^{p_b'-1}} \leq C_0 \tag{72}$$

对于某个与 x、$\{\omega_i\}_{i=1}^{n}$ 和 E 无关的常数。将 ϕ 替换为在 C^3 意义下与其充分接近的任意 ϕ 时，相应的 $\tilde{}$ 估计仍然成立，只是新的常数 $\tilde{C}_0$ 至多按受扰映射 ϕ 的次数 $\tilde{}$ 的某个幂增长。由于 E 可以是 $\eta(x,\gamma_t(x))$ 的支集中的任意紧集，且由于 η 有界，因此可知，(69) 确实必须在 x 和 $\{\omega_i\}_{i=1}^{n}$ 上一致成立，并且对于所有在 $\sim\phi$ 附近的 ϕ 也必须继续成立，其中常数 C 至多按 ϕ 的次数的某个幂增长。因此，算子 (1) 不仅会映射 $L^{p_b} \to L^{q_b}$，还必须具有某种稳定性：如果将 ϕ 替换为在 C^3 意义下与其充分接近的 $\tilde{\phi}$，那么新的算子 T 也必须将 L^{p_b} 映射到 L^{q_b}，且算子范数应当

˜由 ϕ 的次数的某个幂所界定。这一稳定性结果将是从多项式映射过渡到光滑映射的关键组成部分，而这一过程将在第7节中展开。

6 非退化条件的必要性

本节证明：对于任何将 T $L^p(\mathbb{R}^{n_1})$ 映射到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 的算子，只要某一对 $(1/p, 1/q)$ 足够接近最佳可能配对 $(1/p_b, 1/q_b)$，非退化性就是必要的。第6.1节将问题归约到一个模型情形，在该情形下，$\phi(x,t)$ 关于 x 和 t 是双线性的；随后，第6.2节将在这一模型情形下证明非退化性的必要性。证明的核心是为模型算子构造恰当的 Knapp 型例子，并结合一个过程（命题10）对这些例子作适当修改，使其同样适用于非模型情形。

为方便起见，本节始终假设所研究的算子 T 定义在原点 $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d_1}$ 的一个邻域内。

6.1 归约到模型情形

设 $\phi(x,t)$ 是定义在原点 $(0,0)$ 的某个邻域上的光滑 $\mathbb{R}^k$ 值函数 $\in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d_1}$，并假设 $D_x\phi$ 在 $(0,0)$ 处的秩为 k，且 $\phi(0,0) = 0$。令 T 为与 ϕ 相关的算子 (1)，并假设 $\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}$ 是一个在 $(0,0)$ 处非零的连续函数，且 $\eta(x, \gamma_t(x))$ 的支集是紧致的，并包含于 ϕ 的给定定义域内。必要时对 $\mathbb{R}^n$ 的坐标进行旋转，不失一般性地，可假设 $\partial\phi/\partial x^i = 0$ 在 $i \in \{1, \dots, d\}$ 的原点处。将每个向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 视为一对 $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$，为简便起见，将量 $\phi((x_0, x_1)\ t)$ 记作 $\phi(x_0, x_1, t)$。令 $M := D_{x_1}\phi|_{(0,0)}$,

$$\Theta(u,w) := \sum_{i=1}^{d} \sum_{i''=1}^{d_1} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^i \partial x_0^{i''}} \right|_{(0,0,0)} u^i w^{i''}, \tag{73}$$

and

$$\tilde{\phi}(x_0, x_1, t) := Mx_1 + \Theta(t, x_0). \tag{74}$$

˜与 $\phi(x,t)$和 $\gamma_t(x)$的情形一样，令 $\tilde{\gamma}_t(x_0, x_1) := (t, \phi(x_0, x_1, t))$。

命题10。假设对所有充分小的正的 δ，都存在一列紧集 $G_\delta \subset \mathbb{R}^{n_1}$和 $F_\delta \subset \mathbb{R}^n$，满足以下性质:

1. 对某些 $\epsilon > 0$ 和 $C < \infty$，每个集合 G_δ 和 F_δ 都包含在以原点为中心、半径至多为 $C\delta^{-\epsilon}$ 的球内。
2. 存在某个 $\epsilon' > 0$ 使得

$$\limsup_{\delta \to 0^+} \delta^{\epsilon'} \frac{\int \chi_{F_\delta}(x_0, x_1) \chi_{G_\delta}(\tilde{\gamma}_t(x_0, x_1)) dx_0 dx_1 dt}{|F_\delta|^{1/q_b'} |G_\delta|^{1/p_b}} > 0. \tag{75}$$

3. 集合 G_δ 关于前 d_1 个坐标的切片是紧致且凸的，即，

$$G_\delta(t) := \{ y_1 \in \mathbb{R}^k \mid (t, y_1) \in G_\delta \}$$

对所有 $t \in \mathbb{R}^{d_1}$，都是紧致且凸的。

4. 所有非空的切片 $G_\delta(t)$ 都满足 $|G_\delta(t)| \geq c\delta^M$，其中某个正的$M$ 和 c。

5. 对所有充分小的 δ， $|F_\delta| \geq c'\delta^N$ 和 $|G_\delta| \geq c'\delta^N$，其中某个正的$N$ 和 c'。

那么，对所有充分接近 $(1/p_b, 1/q_b)$ 的点对 $(1/p, 1/q)$， T作为从 L^p 到 L^q的映射是无界的。

证明。只需对集合 F_δ 和 G_δ关于 δ的依赖关系进行重新参数化，并在每个 δ 的位置代入 δ^θ （其中 θ取某个充分小的正值），即可不失一般性地假设 $\epsilon \in (0, 1/(k+4))$，且非空切片 $G_\delta(t)$ 满足 $|G_\delta(t)| \geq c\delta^{1-(k+4)\epsilon}$。

令 $\phi_1(x_0, x_1, t) := \phi(x_0, x_1 + R(x_0)\ t) - \phi(0, 0, t)$，其中 $\mathbb{R}^k$ 值齐次二次函数 R 将在下文确定。由于当 $i \leq d$ 时， $\partial_{x_i^0}\phi$ 在原点处为零，因此

$$\partial_{x_0^i}|_{(0,0,0)}\phi_1(x_0, x_1, t) = 0 \text{ and } \partial_{t^i}\phi_1(x_0, x_1, t) = 0$$

对于第一个方程中的每个 $i \in \{1, \ldots, d\}$ 和第二个方程中的 $i \in \{1, \ldots, d_1\}$，结论均成立。同样，

$$\partial_{x_1^i}\phi_1 = \partial_{x_1^i}\phi, \quad \partial^2_{t^i x_0^{i'}}\phi_1 = \partial^2_{t^i x_0^{i'}}\phi, \quad \text{and} \quad \partial^2_{t^i t^{i'}}\phi_1 = 0$$

当各量在 $(0, 0, 0)$ 处取值时，且

$$\partial^2_{x_0^i x_0^{i'}}|_{(0,0,0)}\phi_1(x_0, x_1, t) = \partial^2_{x_0^i x_0^{i'}}|_{(0,0,0)}\phi + D_{x_1}\phi|_{(0,0,0)}\partial^2_{x_0^i x_0^{i'}}|_{(0,0,0)}R(x_0).$$

由于 $D_{x_1}\phi|_{(0,0,0)}$ 可逆，因此可以选择 R，使得所有二阶导数 $\partial^2_{x_0^i x_0^{i'}}\phi_1$ 在原点处均为零。由带余项的泰勒定理可知，恒等式

$$\phi_1(x_0, x_1, t) = Mx_1 + \Theta(t, x_0) + E(x_0, x_1, t)$$

其中 E 可表示为 x_1 的二次函数、 x_1 与 t 的双线性函数，以及有限个形如 (x_0, x_1, t) 中的三次单项式与光滑函数乘积的项。因此

$$\phi_1(\delta x_0, \delta^2 x_1, \delta t) = \delta^2(Mx_1 + \Theta(t, x_0)) + O(\delta^{3-3\epsilon})$$

在集合 $K_\delta := \{(x_0, x_1, t) \mid |x_0| + |x_1| + |t| < C\delta^{-\epsilon}\}$ 上关于 $\delta \to 0$一致成立。对于每个小的 δ，令 $\phi_\delta(x_0, x_1, t) := \delta^{-2}\phi_1(\delta x_0, \delta^2 x_1, \delta t)$ 且 $\gamma_{\delta,\ t}(x_0, x_1) := (t, \phi_\delta(x_0, x_1, t))$。于是

$$\phi_\delta(x_0, x_1, t) = \tilde{\phi}(x_0, x_1, t) + O(\delta^{1-3\epsilon}) \tag{76}$$

在 K_δ 上关于 $\delta \to 0$一致成立。

现在假设 F_δ、G_δ 和 $\epsilon' > 0$ 满足 (75)，且 G_δ 的切片具有所需的性质。令 $G'_\delta(t)$ 为所有满足以下条件的点 y'_1 构成的集合：对于某个 $y_1 \in G_\delta(t)$，有 $|y'_1 - y_1| \leq \delta^{1-4\epsilon}$；令 G'_δ 为一个集合，其切片对每个t均为 $G'_\delta(t)$。根据约翰椭球定理，每个非空的 $G_\delta(t)$ 都包含一个椭球$E \subset \mathbb{R}^k$，使得

$$E \subset G_\delta(t) \subset kE$$

（其中 kE 是与 E 中心相同、且所有轴均按 k倍伸长的椭球）。由此可得 $|E| \leq |G_\delta(t)| \leq k^k|E|$。由于 $G_\delta(t)$ 的测度至少为 $c\delta^{1-\epsilon(k+4)}$，且 E 的任何轴都不可能长于$C\delta^{-\epsilon}$，因此存在一个仅依赖于 C、c 和 k 的固定常数 C'，使得当 δ充分小时，E 的每条轴都至少为 $C'\delta^{1-5\epsilon}$。特别地，当 δ充分小时，椭球 $2kE$ 必然包含 $G_\delta(t)$ 与半径为 $\delta^{1-4\epsilon}$的球的向量和。因此，这意味着当 δ 充分小时，$|G'_\delta| \leq (2k)^k|G_\delta|$。此外，对于充分小的$\epsilon$，若 $(x_0, x_1) \in F_\delta$ 且 $\tilde{\gamma}_t(x_0, x_1) \in G_\delta$，则 $\phi(x_0, x_1, t)$ 属于切片$G_\delta(t)$，因此由 (76) 可得 $\phi_\delta(x_0, x_1, t) \in G'_\delta(t)$，或者 $\gamma_{\delta,t}(x_0, x_1) \in G'_\delta$。因此

$$\int \chi_{F_\delta}(x_0, x_1)\chi_{G'_\delta}(\gamma_{\delta,t}(x_0, x_1))dxdt \geq \int \chi_{F_\delta}(x_0, x_1)\chi_{G_\delta}(\tilde{\gamma}_t(x_0, x_1))dxdt.$$

根据（75），必然有

$$\limsup_{\delta \to 0^+} \delta^{\epsilon'} \frac{\int \chi_{F_\delta}(x_0, x_1)\chi_{G'_\delta}(\gamma_{\delta,t}(x_0, x_1))dx_0dx_1dt}{|F_\delta|^{1/q'_b}|G'_\delta|^{1/p_b}} > 0. \tag{77}$$

经过一系列变量代换（将 x_0 替换为 $\delta^{-1}x_0$、将 x_1 替换为 $\delta^{-2}x_1$、将 t 替换为 $\delta^{-1}t$，最后将 x_1 替换为 $x_1 - R(x_0)$），并回忆 $\phi_1(x_0, x_1, t) = \phi(x_0, x_1 + R(x_0)\ t) - \phi(0, 0, t)$ 以及 $\phi_\delta = \delta^{-2}\phi_1(\delta x_0, \delta^2 x_1, \delta t)$，可得恒等映射

$$\begin{aligned}\int \chi_{F_\delta}(x_0, x_1)\chi_{G'_\delta}(\gamma_{\delta,t}(x_0, x_1))dx_0dx_1dt = \\ \delta^{-2k-d-d_1} \int \chi_{F_\delta}(\delta^{-1}x_0, \delta^{-2}(x_1 - R(x_0))) \\ \cdot \chi_{G'_\delta}(\delta^{-1}t, \delta^{-2}(\phi(x_0, x_1, t) - \phi(0, 0, t)))dxdt.\end{aligned}$$

现在令 F'_δ 和 G''_δ 满足

$$\chi_{F'_\delta}(x_0, x_1) := \chi_{F_\delta}(\delta^{-1}x_0, \delta^{-2}(x_1 - R(x_0)))$$

and

$$\chi_{G''_\delta}(y_0, y_1) := \chi_{G'_\delta}(\delta^{-1}y_0, \delta^{-2}(y_1 - \phi(0, 0, y_0))).$$

由此可得 $|F'_\delta| = \delta^{d+2k}|F_\delta|$ 和 $|G''_\delta| = \delta^{d_1+2k}|G'_\delta|$，而对于特定指数 p_b 和 q'_b，

$$|F'_\delta|^{1/q'_b}|G''_\delta|^{1/p_b} = \delta^{2k+d+d_1}|F_\delta|^{1/q'_b}|G'_\delta|^{1/p_b}.$$

由 (77) 可得

$$\limsup_{\delta\to 0^+}\delta^{\epsilon'}\frac{\int\chi_{F'_\delta}(x_0,x_1)\chi_{G''_\delta}(\gamma_t(x_0,x_1))dx_0dx_1dt}{|F'_\delta|^{1/q'_b}|G''_\delta|^{1/p_b}}>0.$$

由于对于所有充分小的 δ，F'_δ 和 G''_δ 分别包含在 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^{n_1}$ 中围绕原点的任意给定小球内，因此由 η 的连续性以及 $\eta(0,0)$ 不为零可得

$$\begin{aligned}\eta(0,0)&\int\chi_{F'_\delta}(x_0,x_1)\chi_{G''_\delta}(\gamma_t(x_0,x_1))dx_0dx_1dt\\&\approx\int\chi_{F'_\delta}(x)\chi_{G''_\delta}(\gamma_t(x))\eta(x,\gamma_t(x))dxdt\end{aligned}$$

对于所有充分小的 δ 均成立（上下界中的隐含常数在 $\delta\to 0^+$ 时都趋于 1）。最后，由于 ϵ' 为正，且 F'_δ 和 G''_δ 的测度介于某个固定的正幂和负幂 δ 之间，因此可得

$$\limsup_{\delta\to 0^+}\frac{\left|\int\chi_{F'_\delta}(x)\chi_{G''_\delta}(\gamma_t(x))\eta(x,\gamma_t(x))dxdt\right|}{|F'_\delta|^{1/q'}|G''_\delta|^{1/p}}=\infty$$

对于所有充分接近 $(1/p_b,1/q_b)$ 的 $1/p$ 和 $1/q$ 均成立。这意味着 T 不属于限制弱型 (p,q)，因此也不是从 L^p 到 L^q 的有界算子。 □

6.2 模型情形的分析

回顾模型情形 (74) 的定义。通过线性变量替换 $x_1\to M^{-1}x_1$，不失一般性地假设 M 是恒等映射（因为这对 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 范数的影响仅仅是乘以一个非零常数），因此可以假设

$$\tilde\phi(x_0,x_1,t):=x_1+\Theta(t,x_0)\text{ and }\tilde\gamma_t(x_0,x_1):=(t,x_1+\Theta(t,x_0))$$

由 (73) 给出。假设 $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的任意给定基，并且

$$B_\omega:=\left\{\sum_{i=1}^n\theta_i\omega_i\;\middle|\;\sum_{i=1}^n\theta_i^2\le 1\right\}.$$

令 L 为从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^k$ 的任意线性映射（通常记作 $k<n$），并令 ω 为 $n\times n$ 矩阵，其第 i 列是在标准坐标下表示的 ω_i。于是，集合 LB_ω 就等于 $L\omega\mathbb{B}_n$，其中 $\mathbb{B}_n$ 是 n 维欧几里得单位球。根据奇异值分解，存在正交矩阵 O_1 和 O_2，使得对于某个 $k\times n$ 矩阵 D，有 $L\omega=O_1DO_2$；该矩阵的非零元素仅位于对角线上，且均为非负数。由于 $\mathbb{B}_n=O_2\mathbb{B}_n$，因此 $LB_\omega=O_1D\mathbb{B}_n$，这意味着 LB_ω 是以原点为中心、位于 $\mathbb{R}^k$ 中的一个椭球，其半轴恰好是 D 的对角线元素。

LB_ω 的体积恰好为 $|\mathbb{B}_k|\sqrt{\det(L\omega)\overline{(L\omega)^T}}$，根据 [11], 的命题 1，这个量也等于

$$|\mathbb{B}_k|\sqrt{\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{n}\left|\det(\underline{L\omega_i}_{|k})\right|^2}. \tag{78}$$

~ ~若将 L_t 取为雅可比矩阵 $D_x\phi(x_0,x_1,t)$（即 ϕ 关于 x 变量的雅可比矩阵），并且若选取 $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ 具有如下特殊形式：当 $i\in\{1,\dots,d\}$ 时，$\omega_i:=(w_i,0)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^k$；对于 $i\in\{1,\dots,k\}$，$\omega_{i+d}:=(0,v_i)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^k$，那么对于任意固定的 t，表达式 (78) 变为

$$|\mathbb{B}_k|\sqrt{\sum_{s=0}^{\min\{d,k\}}\frac{1}{s!(k-s)!}\sum_{i'=1}^{k}\sum_{i''=1}^{d}\left|\det(\underline{v_{i'}}_{|k-s},\underline{\Theta(t,w_{i''})}_{|s})\right|^2}$$

因为对于 $i''=1,\dots,d$，有 $L\omega_{i''}=\Theta(t,w_{i''})$，而对于 $i'=1,\dots,k$，有 $L\omega_{i'+d}=v_{i'}$（其中 Θ 与 (40) 中相同）。

从直观上说，为了运用命题10证明 T 无界，目标是构造 Knapp 型例集 F_δ 和 G_δ，使得 F_δ 集是椭球 B_ω（其中基 ω 的选取依赖于 δ），而 G_δ 集具有这样的性质：其非空切片 $G_\delta(t)$ 对于其自身某个椭球中的所有 t，都是形如 L_tB_ω 的集合。问题在于，尽管 L_tB_ω 的测度有精确公式，但它对 t 的依赖关系并不明了。解决办法是证明 L_tB_ω 的大小通常尽可能大，然后将范围限制在那些使 $|L_tB_\omega|$ 满足良好上下界的 t 子集上。（因此，使 $G_\delta(t)$ 非空的 t 集本身并非椭球，而只是某个合适椭球的相当大一部分。）此时，我们需要一个关于单位球上齐次多项式的辅助结果:

命题 11. 对每个自然数 s 以及每个 $\epsilon\in(0,1)$，都存在一个正常数 c，使得

$$\left|\left\{t\in\mathbb{B}_{d_1}\;\middle|\;|P(t)|<c\sup_{t'\in\mathbb{B}_{d_1}}|P(t')|\right\}\right|\le\epsilon|\mathbb{B}_{d_1}| \tag{79}$$

对于定义在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上的所有次数为 s 的实齐次多项式 P，其中 $\mathbb{B}_{d_1}$ 是欧几里得单位球。

证明。由于当 P 恒等于零时，(79) 显然成立，因此如果对某个 $c>0$，(79) 不成立，那么经过重新归一化后，就存在一个多项式序列 $\{P_N\}_{N=1}^\infty$，使得对每个 N，都有 $\sup_{t\in\mathbb{B}_{d_1}}|P_N(t')|=1$，但对每个 $t'\in\mathbb{B}_{d_1}$，在一个测度至少为 $\epsilon|\mathbb{B}_{d_1}|$ 的集合上都有$|P_N(t')|\le 1/N$。由于次数为 s 的齐次多项式空间是有限维的，因此总可以取一个子列，使其在紧集上一致收敛到某个极限多项式 P_*。极限多项式不可能

恒等于零，因为它必须在单位球上取到值 1。此外，对任意 $\delta > 0$，必定存在某个 N，使得对所有 $t' \in \mathbb{B}_{d_1}$，都有 $|P_N(t') - P_*(t')| \leq \delta/2$，且在一个测度至少为 $\epsilon|\mathbb{B}_{d_1}|$ 的集合上有 $|P_N| \leq \delta/2$；这意味着次水平集 $\{t \in \mathbb{B}_{d_1} : |P_*(t)| \leq \delta\}$ 对每个 $\delta > 0$ 的测度都至少为 $\epsilon|\mathbb{B}_{d_1}|$。对示性函数 $\chi_{|P_*(t)|\leq\delta}$ 应用勒贝格控制收敛定理，并令 δ 趋于 0，可知满足 $P_*(t) = 0$ 的点集 $t \in \mathbb{B}_{d_1}$ 的勒贝格测度也至少为$\epsilon|\mathbb{B}_{d_1}|$，这是不可能的，因为 P_* 并非恒等于零。

□

对 (79) 进行线性变量替换后，当用任意中心椭球 $E \subset \mathbb{R}^{d_1}$替换 $\mathbb{B}_{d_1}$时，也有类似的结果。现在，每个表达式

$$\det(\underline{v_{i'}}_{|k-s}, \underline{\Theta(t, w_{i''})}_{|s})$$

都是关于 t 变量的 s 次齐次多项式，因此对于任意固定的$\epsilon \in (0,1)$，可以假设存在某个 $c > 0$，使得

$$|\det(\underline{v_{i'}}_{|k-s}, \underline{\Theta(t, w_{i''})}_{|s})|^2 \geq c \sup_{t' \in E} |\det(\underline{v_{i'}}_{|k-s}, \underline{\Theta(t', w_{i''})}_{|s})|^2$$

对于除某个测度至多为 $\epsilon|E|$ 的例外集之外的所有 $t \in E$，上述结论均成立。通过将ϵ 固定得足够小可知，在任意中心椭球 E上，都存在一个测度至少为 $|E|/2$ 的子集E'，使得

$$\sum_{s=0}^{\min\{d,k\}} \frac{1}{s!(k-s)!} \sum_{i'=1}^{k} \sum_{i''=1}^{d} \inf_{t \in E'} \left|\det(\underline{v_{i'}}_{|k-s}, \underline{\Theta(t, w_{i''})}_{|s})\right|^2 \geq c \sum_{s=0}^{\min\{d,k\}} \sum_{i'=1}^{k} \sum_{i''=1}^{d} \sup_{t \in E} \left|\det(\underline{v_{i'}}_{|k-s}, \underline{\Theta(t, w_{i''})}_{|s})\right|^2$$

其中某个常数 c 仅依赖于 d_1、d 和 k。结合 (40) 和 (28)，由这一观察可知，当 $E := B_u$ 对于 $\mathbb{R}^{n_1}$ 的某个基 $\{u_i\}_{i=1}^{d_1}$ 成立时，总存在一个集合 $B'_u \subset B_u$，满足 $|B'_u| \geq |B_u|/2$，且在该集合上

$$\inf_{t \in B'_u} |L_t B_\omega| \geq c_{d_1,d,k} |\det\{v_i\}_{i=1}^k| \mathcal{Q}[\{u_i\}_{i=1}^{d_1}, \{v_i^*\}_{i=1}^k, \{w_i\}_{i=1}^d],$$

其中，$\mathcal{Q}$ 恰好是原点处与 ϕ 相关的 (25)，核基就是 x_0 变量中的标准基。（注意，由于勒贝格测度的内正则性，我们可以假设 B'_u 是紧致的。）根据 (28)，用同一个表达式给出$|L_t B_\omega|$ 的上界是显然的，因此有

$$|L_t B_\omega| \approx |\det\{v_i\}_{i=1}^k| \mathcal{Q}[\{u_i\}_{i=1}^{d_1}, \{v_i^*\}_{i=1}^k, \{w_i\}_{i=1}^d]$$

对所有 $t \in B'_u$均成立，其中隐含常数仅依赖于 d_1、d和 k。

在假设 Q 退化的情况下，由 (34) 可知，存在正交归一的选取 $\{u_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{v_i^*\}_{i=1}^k$和 $\{w_i\}_{i=1}^d$，以及在这些基下为对角矩阵的矩阵 D_1、D_2、D_3，使得

$$\frac{\mathcal{Q}[\{e^{\tau D_1} u_i\}_{i=1}^{d_1}, \{e^{\tau D_2} v_i^*\}_{i=1}^k, \{e^{\tau D_3} w_i\}_{i=1}^d]}{|\det\{e^{\tau D_1} u_i\}_{i=1}^{d_1}|^{\frac{dk}{nd_1}}} = O(e^{-\epsilon\tau}) \tag{80}$$

对于某个 $\epsilon > 0$，如 $\tau \to \infty$。此外已知，对于所有 τ，|行列式$\{e^{\tau D_2} v_i^*\}_{i=1}^k| = 1$ 且|行列式$\{e^{\tau D_3} w_i\}_{i=1}^d| = 1$。

按如下方式进行：对于每个 $\tau > 0$，令 $\omega^{(\tau)}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的基，由形如 $(0, e^{-\tau D_2} v_i)$（其中 $i = 1, \dots, k$）和 $(e^{\tau D_3} w_{i'}, 0)$（其中 $i' = 1, \dots, d$）的向量组成（$e^{-\tau D_2}$ 中的负号是恰当的，因为这些向量与基$\{e^{\tau D_2} v_i^*\}_{i=1}^k$对偶）。令 $\delta := e^{-\tau}$，固定 $F_\delta := B_{\omega^{(\tau)}}$，并令 G_δ 为集合

$$\left\{(t, y) \in B'_{e^{\tau D_1} u} \times \mathbb{R}^k \mid y = x_1 + \Theta(t, x_0) \text{ for some } (x_0, x_1) \in F_\delta \right\}.$$

由此可得

$$\int \chi_{F_\delta}(x) \chi_{G_\delta}(\tilde{\gamma}_t(x)) dx dt = |F_\delta| |B'_{e^{\tau D_1} u}| \approx |\det e^{\tau D_1}|$$

因为对于每个 $(x_0, x_1) \in F_\delta$ 和每个 $t \in B'_{e^{\tau D_1} u}$，$\chi_{F_\delta}(x) \chi_{G_\delta}(\tilde{\gamma}_t(x))$ 都等于一。此处还用到了以下事实：$|F_\delta|$ 关于 δ 是常数，且 $|B'_{e^{\tau D_1} u}|$ 与 $|B_{e^{\tau D_1} u}|$ 可比。隐常数仅依赖于d_1、d 和 k。另一方面，

$$|G_\delta| \approx |\det e^{\tau D_1}| \mathcal{Q}[\{e^{\tau D_1} u_i\}_{i=1}^{d_1}, \{e^{\tau D_2} v_i^*\}_{i=1}^k, \{e^{\tau D_3} w_i\}_{i=1}^d]$$

因为切片 $G_\delta(t)$ 恰好等于 $L_t B_{\omega^{(\tau)}}$（当 $t \in B'_{e^{\tau D_1} u}$ 时），否则为空（并且由于 $|\det\{e^{-\tau D_2} v_i\}_{i=1}^k| = 1$）。再一次，隐含常数仅取决于基本参数 d_1、d 和 k。这些观察与 (80) 结合可得

$$\begin{aligned} &\frac{\int \chi_{F_\delta}(x) \chi_{G_\delta}(\tilde{\gamma}_t(x)) dx dt}{|F_\delta|^{1/q_b'} |G_\delta|^{1/p_b}} \\ &\approx \left[\frac{|\det e^{\tau D_1}|^{p_b - 1}}{\mathcal{Q}[\{e^{\tau D_1} u_i\}_{i=1}^{d_1}, \{e^{\tau D_2} v_i^*\}_{i=1}^k, \{e^{\tau D_3} w_i\}_{i=1}^d]} \right]^{1/p_b} \geq c e^{\tau \epsilon / p_b} = c \delta^{-\epsilon / p_b} \end{aligned} \tag{81}$$

对所有充分小的 δ 均成立。因此，紧集 F_δ 和 G_δ 满足命题10的所有必要性质，因为基 $\{e^{\tau D_1} u_i\}_{i=1}^{d_1}$、$\{e^{\tau D_2} v_i^*\}_{i=1}^k$ 和 $\{e^{\tau D_3} w_i\}_{i=1}^d$ 中向量的长度至多以 τ 为指数增长（因此按 δ^{-1} 的幂增长），不等式 (75) 成立（由 (81) 可知），集合 G_δ 的切片是椭球，其测度不低于按 τ 指数衰减的量，而 G_δ 和 F_δ 的测度也同样不低于按 τ 指数衰减的量。因此，对于接近 $(1/p_b, 1/q_b)$ 的所有配对 $(1/p, 1/q)$，算子 (1) 必须是从 L^p 到 L^q 无界的。由于基于 $\tilde{\gamma}_t(x)$ 的模型算子仅依赖于在原点处针对 (1) 定义的量 Q，因此可假设：对于使 T 无界的、接近 $(1/p_b, 1/q_b)$ 的配对，其邻域仅取决于原点处的 Q。

7 非多项式平均

本节最后讨论从多项式 ϕ 到 C^∞ 范畴的过渡。第 7.1 节建立了过渡所需的抽象工具，旨在

继续用于未来对退化对象的研究。第7.2节随后将这些工具应用于所关注的主要情形，即式（4）中三线性形式 Q 的非退化性。

7.1 一般逼近结果

与全文前文一样，设 $\phi(x,t)$ 是一个以 $\mathbb{R}^k$ 为值、关于参数 (x,t) 的光滑函数，对属于某个开集 $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d_1}$ 的所有此类点均成立。假设雅可比矩阵 $D_x\phi$ 在 (x_*,t_*) 处满秩，并设对每个 $(x,t) \in U$， $\gamma_t(x) := (t,\phi(x,t)) \in \mathbb{R}^{n_1}$。下面的第一个命题证明了 (1) 的局部 L^p-有界性。

命题12. 若 η 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_1}$ 上的连续函数，且 $\eta(x,\gamma_t(x))$ 在点 (x_*,t_*) 的充分小邻域内紧支撑，则算子 (1) 对所有 $1 \le p \le \infty$ 都将 $L^p(\mathbb{R}^{n_1})$ 映射到 $L^p(\mathbb{R}^n)$。

证明. 由插值，只需考虑 $p = 1$ 和 $p = \infty$ 的情形。先考虑 $p = 1$。不失一般性，可以假设映射 $(t,x^1,\dots,x^k) \mapsto (t,\phi(x,t))$ 对每个固定的 $x^{k+1},\dots,x^n$ 都是局部单射且具有非退化雅可比矩阵，前提是点 x 和 t 分别充分接近 x_* 和 t_*。令 $K \in \mathbb{R}^d$ 为一个紧集，使得当 $(x^{k+1},\dots,x^n) \notin K$ 时，$\eta(x,\gamma_t(x)) = 0$，于是

$$\begin{aligned}\int \left| \int g(\gamma_t(x))\eta(x,\gamma_t(x))dt \right| dx &\le \int |g(t,\phi(x,t))||\eta(x,\gamma_t(x))|dtdx \\ &\le \int_K \left(\int |g(t,\phi(x,t))||\eta(x,\gamma_t(x))|dtdx^1\cdots dx^k \right) dx^{k+1}\cdots dx^n \\ &\le C|K|||g||_{L^1}||\eta||_\infty\end{aligned}$$

其中 C 是在满足 $\eta(x,\gamma_t(x)) \neq 0$ 的所有 (x,t) 上， $1/|\det \partial\phi(x,t)/\partial(x^1,\dots,x^k)|$ 的上确界。使 $\eta(x,\gamma_t(x))$ 的支集充分接近 (x_*,t_*)，即可确保 C 有限。

当 $p = \infty$ 时，对不属于某个零测集的所有 y，均有 $|g(y)| \le ||g||_\infty$；由刚刚对 $p = 1$ 证明的不等式可知，几乎每个 x 都具有这样的性质：只有对一个零测参数集，$\gamma_t(x)$ 才属于这个零测集 t。因此，将 g 在这个零测集上重新定义为零，不会改变 $Tg(x)$ 在几乎处处的点 x 处的值，故只需假设 $|g(y)| \le ||g||_\infty$ 处处成立。然后

$$|Tg(x)| \le ||g||_\infty \int |\eta(x,\gamma_t(x))|dt,$$

并且右侧的积分对所有 x 都一致有界，因为 $\eta(x,\gamma_t(x))$ 有界，且仅可能在某个紧集的 $t \in \mathbb{R}^{d_1}$ 上非零。

□

下一个命题为满足 H¨ormander 条件的算子 T 建立一种非常基础的 L^2-Sobolev 不等式。这里给出的估计恰好足以在对 T 的 Littlewood-Paley分解各项求和时提供关键的衰减。

命题 13. 设开集 $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d_1}$ 上的双纤维化 $\pi_1(x,t) := \gamma_t(x)$ 和 $\pi_2(x,t) := x$ 在点 (x_*, t_*) 满足 H ¨ormander 条件。那么，对于所有支集充分靠近 (x_*, t_*) 的光滑 η，其中 $\eta(x, \gamma_t(x))$，以及所有充分大的 N，算子 (1) 具有如下性质：$(T^*T)^N$ 可表示为对某个核 $K_N(y, y')$ 的积分，使得

$$\int |K_N(y, y' + h) - K_N(y, y')|\, dy' \leq C|h|^\delta. \tag{82}$$

对某个正的 δ，关于 $y, h \in \mathbb{R}^{n_1}$ 一致成立。因此，若 ψ 是定义在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上、积分为零的任意紧支撑连续函数，且 R 是与 ψ 的卷积（即 $Rf := f * \psi$），那么对于任意足够大的 N，只要 (82) 成立，

$$||TRf||_2 \leq ||\psi||_1^{1-\frac{1}{2N}} \left[C \int |h|^\delta |\psi(h)| dh \right]^{\frac{1}{2N}} ||f||_2 \tag{83}$$

对所有 $f \in L^2$（$\mathbb{R}^{n_1}$）均成立，其中 C 和 δ 与 (82) 中相同。

证明。若 $n = n_1$，则满足 (82) 的 K_N 的存在性，直接源自 Christ、Nagel、Stein 和 Wainger 的开创性著作 [5], 中的引理 20.1 和命题 7.2（经过适当的变量代换）。因此，唯一需要考虑的情形是 $n \neq n_1$。值得庆幸的是，这些情形都是等维情形相当直接的推论，只需利用新增方向上的平凡性质，在“欠缺”的一侧补上额外方向即可证明。

当 $n < n_1$ 时，论证如下。考虑定义在点 $(x_*, 0, t_*)$ 的一个开子集上的双纤维化 $\in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_1 - n} \times \mathbb{R}^{d_1}$，它由下式给出

$$\overline{\pi}_1(x, s, t) := \gamma_t(x) \text{ and } \overline{\pi}_2(x, s, t) := (x, s).$$

对于这些扩展映射，H¨ormander 条件必须在 $(x_*, 0, t_*)$ 处成立。这是因为，当将所有被 $d\pi_1$ 和 $d\pi_2$ 分别湮灭的向量场通过令其在新参数 s上为常数的方式传输到新空间后，它们也分别被 $d\overline{\pi}_1$ 和 $d\overline{\pi}_2$ 湮灭。根据假设，对这些原始向量场连续取李括号，最终会得到一族光滑向量场，其张成空间包含所有原始切向方向。其余方向（即新的方向 $\partial/\partial s^i$）属于 $d\overline{\pi}_1$ 的核，因此所有方向都被张成。由此可知，当$\overline{T}$ 为通过对偶按下式定义的算子时

$$\int f(x, s) \overline{T} g(x, s) dx ds = \int f(\overline{\pi}_2(x, s, t)) g(\overline{\pi}_1(x, s, t)) \eta(x, \gamma_t(x)) \varphi(s) dx dt ds$$

对于光滑的 η，使得 $\eta(x, \gamma_t(x))$ 的支集位于 (x_*, t_*) 附近；以及光滑的 φ，使得 φ 的支集充分靠近零，所有充分大的 N 都满足：$(\overline{T}^* \overline{T})^N$ 可表示为对某个核的积分，该核关于 L^1_δ 一致，且如 (82) 所示。

设 φ 是 $\mathbb{R}^{n_1-n}$ 中一个非负的光滑紧支撑函数，其支集充分靠近原点，并满足性质 $\int|\varphi(s)|^2ds=1$。根据对偶公式，$\overline{T}g(x,s)=\varphi(s)Tg(x)$，其中 T 是带有截断函数η的算子 (1)。对两边取对偶，得到

$$\overline{T}^*\overline{f}(y)=T^*\left(\int\overline{f}(\cdot,s)\varphi(s)ds\right)$$

对于定义在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n_1-n}$ 上的任意适当的 $\overline{f}$，由此可得 $\overline{T}^*\overline{T}=T^*T$。因此，当 N 足够大时，$(T^*T)^N$ 的核必须关于 L^1_δ 一致，因为 $(\overline{T}^*\overline{T})^N$ 也具有同样的性质。

$n_1<n$ 情形类似，但稍微复杂一些。在此情形下，令 $\overline{\pi}_1(x,s,t):=(\gamma_t(x)\ s)$，并令 $\overline{\pi}_2(x):=x$，定义 $\overline{T}$ 使得

$$\int f(x)\overline{T}g(x)dx=\int f(\overline{\pi}_2(x,s,t))g(\overline{\pi}_1(x,s,t))\eta(x,\gamma_t(x))\varphi(s)dxdtds.$$

与之前一样，H¨ormander 性质在这一扩展情形下仍然成立，这意味着，只要 η 和 φ 适当地局部化，$(\overline{T}^*\overline{T})^N$ 的核就关于 L^1_δ 一致。类似于上述情形，

$$\overline{T}\overline{g}(x)=T\left(\int\overline{g}(\cdot,s)\varphi(s)ds\right)$$

对于定义在 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n-n_1}$ 上的任意函数 $\overline{g}$。令 $P\overline{g}(y,s):=\int\overline{g}(y,s')\varphi(s')ds'\varphi(s)$。该投影 P 是自伴的，并满足 $\overline{T}P=\overline{T}$。由此可得，对于任意 $N\geq1$，$P(\overline{T}^*\overline{T})P=\overline{T}^*\overline{T}$ 且 $P(\overline{T}^*\overline{T})^NP=(\overline{T}^*\overline{T})^N$，因此 $(\overline{T}^*\overline{T})^N$ 的核 $\overline{K}_N$ 必须具有如下性质：

$$\begin{aligned}\overline{K}_N((y,s),(y',s'))&=\varphi(s)\varphi(s')\int\overline{K}_N((y,s''),(y',s''''))\varphi(s'')\varphi(s''')ds''ds'''\\&=:K_N(y,y')\varphi(s)\varphi(s')\end{aligned}$$

对于某个独立于 s 和 s' 的 K_N。量 K_N 实际上必须是 $(T^*T)^N$ 的核，因为 $\overline{T}^*\overline{T}(g(\cdot)\varphi(\cdot))=\varphi T^*Tg$，其中 $g(\cdot)\varphi(\cdot)$ 表示 $g(y)\varphi(s)$ 在 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n-n_1}$ 上的函数。对 N 使用归纳法，$(\overline{T}^*\overline{T})^N(g(\cdot)\varphi(\cdot))=\varphi(\cdot)(T^*T)^Ng$，因此

$$\begin{aligned}\varphi(s)(T^*T)^Ng(y)&=\overline{T}^*\overline{T}(g(\cdot)\varphi(\cdot))(y)\\&=\varphi(s)\int K_N(y,y')\varphi(s')g(y')\varphi(s')ds'dy'\\&=\varphi(s)\int K_N(y,y')g(y')dy,\end{aligned}$$

这显然迫使 K_N成为（T^*T）^{N}的核。由于对于所有成对的（y，s），$\overline{K}_N$（（y，s）$\cdot$）都一致地处于 L^1_δ中，K_N（y，y'）也必须一致地处于 L^1_δ中

所有 y:

$$\begin{aligned}
&\int |K_N(y,y'+h)-K_N(y,y')|dy' \\
&\quad=\int |K_N(y,y'+h)-K_N(y,y')||\varphi(s)|^2|\varphi(s')|^2dy'dsds' \\
&\quad=\int |\overline{K}_N((y,s),(y'+h,s'))-\overline{K}_N((y,s),(y'+h,s')||\varphi(s)||\varphi(s')|dy'dsds' \\
&\quad\le ||\varphi||_\infty\int |\overline{K}_N((y,s),(y'+h,s'))-\overline{K}_N((y,s),(y'+h,s')||\varphi(s)|dy'dsds' \\
&\quad\le ||\varphi||_1||\varphi||_\infty\sup_s\int |\overline{K}_N((y,s),(y'+h,s'))-\overline{K}_N((y,s),(y'+h,s')|dy'ds' \\
&\quad\le C|h|^\delta||\varphi||_1||\varphi||_\infty,
\end{aligned}$$

这就完成了 (82) 的证明。

现在假设 (82) 成立。令 ψ 为 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上任意一个紧支撑且积分为零的连续函数，并令 $Rg:=\psi*g$。所需的不等式 (83) 可由一个初等论证结合以下观察得出:

$$||R^*T^*TR||_{2\to2}\le||R^*R||_{2\to2}^{1-\frac{1}{N}}||R^*(T^*T)^NR||_{2\to2}^{\frac{1}{N}}. \tag{84}$$

对所有 $N\ge1$ 均成立。这个不等式的证明基于一个更简单的观察：对每个整数 $N\ge0$,

$$||R^*(T^*T)^{N+1}R||_{2\to2}\le\left(||R^*(T^*T)^NR||_{2\to2}||R^*(T^*T)^{N+2}R||_{2\to2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{85}$$

当 N 为偶数时，(85) 成立，因为

$$\begin{aligned}
||R^*(T^*T)^{N+1}R||_{2\to2}&\le||R^*(T^*T)^{\frac{N}{2}}||_{2\to2}||(T^*T)^{\frac{N}{2}+1}R||_{2\to2}\\
&=||(T^*T)^{\frac{N}{2}}R||_{2\to2}||(T^*T)^{\frac{N}{2}+1}R||_{2\to2}\\
&=\left(||R^*(T^*T)^NR||_{2\to2}||R^*(T^*T)^{N+2}R||_{2\to2}\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

当 N 为奇数时，则有 (85) 成立，因为

$$\begin{aligned}
||R^*(T^*T)^{N+1}R||_{2\to2}&\le||R^*(T^*T)^{\frac{N-1}{2}}T^*||_{2\to2}||T(T^*T)^{\frac{N-1}{2}+1}R||_{2\to2}\\
&=||T(T^*T)^{\frac{N-1}{2}}R||_{2\to2}||T(T^*T)^{\frac{N-1}{2}+1}R||_{2\to2}\\
&=\left(||R^*(T^*T)^NR||_{2\to2}||R^*(T^*T)^{N+2}R||_{2\to2}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

因为只要 $||R^*T^*TR||_{2\to2}=0$ 或 $||R^*R||_{2\to2}=0$（即 $R=0$），(84) 就显然成立，所以不失一般性，可以假设这两个范数都不为零。于是，当 $||R^*(T^*T)^NR||_{2\to2}$ 和 $||R^*(T^*T)^{N+1}R||_{2\to2}$ 均不为零时，由 (85) 可知 $||R^*(T^*T)^{N+2}R||_{2\to2}\neq0$。根据

归纳法，可以假设对于每个非负整数 N， $||R^*(T^*T)^N R||_{2\to 2}$ 均不为零。在这种情况下，不等式 (85) 意味着

$$\frac{||R^*(T^*T)^{N+1}R||_{2\to 2}}{||R^*(T^*T)^N R||_{2\to 2}} \leq \frac{||R^*(T^*T)^{N+2}R||_{2\to 2}}{||R^*(T^*T)^{N+1}R||_{2\to 2}}$$

对每个 $N \geq 0$，这由关于 N 的归纳法推出

$$\frac{||R^*T^*TR||_{2\to 2}}{||R^*R||_{2\to 2}} \leq \frac{||R^*(T^*T)^{N+1}R||_{2\to 2}}{||R^*(T^*T)^N R||_{2\to 2}}$$

对所有 $N \geq 0$，进而推出

$$\left(\frac{||R^*T^*TR||_{2\to 2}}{||R^*R||_{2\to 2}}\right)^N \leq \frac{||R^*(T^*T)^N R||_{2\to 2}}{||R^*R||_{2\to 2}}$$

对所有 $N \geq 1$。重新整理各项可得（84）。根据通常的 L^2 希尔伯特空间理论，可知

$$||TR||_{2\to 2} \leq ||R||_{2\to 2}^{1-\frac{1}{N}} ||R^*(T^*T)^N R||_{2\to 2}^{\frac{1}{2N}} \tag{86}$$

对每个 $N \geq 1$。现在，当 N 足够大时，核光滑性条件（82）意味着

$$\begin{aligned}(T^*T)^N Rg(y) &= \int K_N(y,y')\psi(y'-y'')g(y'')dy'dy'' \\ &= \int K_N(y,y''+h)\psi(h)g(y'')dhdy'' \\ &= \int \left[K_N(y,y''+h) - K_N(y,y'')\right]\psi(h)g(y'')dhdy'',\end{aligned}$$

其中，可以加入项 $-K_N(y,y'')$ 而不改变积分，因为 $\psi(h)$ 在 h 上的积分为零。因此，当 K_N 满足（82）时，可知

$$\begin{aligned}||R^*(T^*T)^N Rg||_\infty &\leq C||g||_\infty ||R^*||_{\infty\to\infty} \int |h|^\delta |\psi(h)|dh \\ &\leq C||g||_\infty \int |\psi(h)|dh \int |h|^\delta |\psi(h)|dh.\end{aligned}$$

由于 $R^*(T^*T)^N R$ 是自伴的，对偶与插值结合可得 $||R^*(T^*T)^N R||_{2\to 2} \leq C||\psi||_1 ||\,|\cdot|^\delta \psi||_1$。此不等式结合（86）以及平凡不等式 $||R||_{2\to 2} \leq ||\psi||_1$，可得（83）。 □

本节的主要结果是下面的定理 5。非正式地说，该定理保证：如果对于所有正的整数 j，都能以这样的方式用多项式映射 $\gamma_t^j(x)$ 在距离 2^{-j} 内逼近映射 $\gamma_t(x)$，使得多项式类 Radon 变换从 L^{p_0} 到 L^{q_0} 有界，且范数仅缓慢增长，那么原始的 T 必须对于任意接近于 $(1/p_0, 1/q_0)$ 的点对 $(1/p, 1/q)$ 有界。

定理 5。设 $\gamma_t(x)$ 如上所述，并且以下两个假设均成立：

1. 双纤维化 $\pi_1(x,t) := \gamma_t(x)$ 和 $\pi_2(x,t) := x$ 在点 (x_*, t_*) 处满足 H ¨or mander 条件。2. 存在一个非负连续函数 η_0，使得 $\eta_0(x, \gamma_t(x))$ 在 U 的定义域中具有紧支撑，并且在 (x_*, t_*) 处不为零；还存在映射 $\gamma_t^j(x) := (t, \phi^j(x,t))$，对每个 $j \geq 1$ 定义在包含 $\eta_0(x, \gamma_t(x))$ 支集的开集 U_j 上，使得在 U_j 上 $|\gamma_t^j(x) - \gamma_t(x)| \leq 2^{-j}$。此外，假设这些算子

$$T^j f(x) := \int f(\gamma_t^j(x))\eta_0(x, \gamma_t(x))dt \tag{87}$$

具有如下性质：对于每个 $\epsilon > 0$，存在一个常数 C_ϵ，使得

$$||T^j f||_{L^{q_0}(\mathbb{R}^n)} \leq C_\epsilon 2^{\epsilon j}||f||_{L^{p_0}(\mathbb{R}^{n_1})} \tag{88}$$

对于所有紧支撑连续函数 f，当 j 足够大时（阈值与 f 无关），其中 $1 \leq p_0 < q_0 \leq \infty$。

那么，对于所有连续的 η，使得 $\eta(x, \gamma_t(x))$ 的支集充分接近 (x_*, t_*)，算子 (1) 将 L^p 映射为 L^q，其中 $(1/p, 1/q)$ 是由顶点 (0,0)、(1,1) 和 $(1/p_0, 1/q_0)$ 构成的三角形内部的任意点对。

定理 5 的证明只需要最基本的 Littlewood-Paley 分解。设 φ 是 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上的径向施瓦茨函数，该函数非负，关于半径单调不增，积分为 1，并且在半径为 $1/2$ 的球外为零。令 $\psi(x) := \varphi(x) - 2^{-n_1}\varphi(x/2)$，并且对于每个 $j \geq 1$，令 $\psi_j(x) = 2^{n_1 j}\psi(2^j x)$。每个 ψ_j 都是 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上的一个 C^∞ 函数，具有零均值，并且支集包含于半径为 2^{-j} 的球内。通过经典方法很容易验证

$$f = f * \varphi + \sum_{j=1}^{\infty} f * \psi_j \tag{89}$$

对于任意满足几乎处处逐点收敛且在L^p 范数下收敛的 $f \in L^p(\mathbb{R}^{n_1})$，其中 $1 < p < \infty$。为方便起见，对每个 $j \geq 1$，令 $R_j f := f * \psi_j$，并令 $R_0 f := f * \varphi$。

定理 5 的证明还依赖于以下两个非常基本的命题。

命题 14。设 η 是定义在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d_1}$ 上的非负连续函数，且 $\eta(x, \gamma_t(x))$ 的支集紧支撑于 ϕ 的定义域内；设 T 和 T 是由下式定义的类 Radon 变换：

$$\begin{aligned} Tf(x) &:= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(\gamma_t(x))\eta(x, \gamma_t(x))dt, \\ \tilde{T}f(x) &:= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(\tilde{\gamma}_t(x))\eta(x, \gamma_t(x))dt, \end{aligned} \tag{90}$$

~对 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上所有紧支撑的连续函数 f 均成立，其中 γ_t 和 $\tilde{\gamma}_t(x) := (t, \phi(x,t))$ 定义在足够大的开集上，使其包含 $\eta(x, \gamma_t(x))$ 的支集（因此积分 (90) 有定义），并取值于 $\mathbb{R}^{n_1}$，满足

$$|\gamma_t(x) - \tilde{\gamma}_t(x)| \leq 2^{-j}$$

对于所有属于 $\eta(x, \gamma_t(x))$ 支集的 (x,t)。那么对于任意 $p, q \in [1, \infty]$,

$$||TR_j||_{p\to q} \leq C_{n_1} ||\tilde{T}||_{p\to q}. \tag{91}$$

证明。在证明 (91) 之前顺带指出，当 $\tilde{\eta}(x, (t, y')) := \eta(x, \gamma_t(x))$ 时，可得 $\eta(x, \gamma_t(x)) = \tilde{\eta}(x, \tilde{\gamma}_t(x))$。因此，尽管 T 中的截断~函数写成了关于 $\gamma_t(x)$ 而非 $\tilde{\gamma}_t(x)$ 的函数形式，但它仍与此前的所有假设相容。

对于任意紧支撑连续 f， $TR_j f(x) - \tilde{T}R_j f(x)$ 等于

$$\int \left[\int \left[\psi_j(\gamma_t(x) - y) - \psi_j(\tilde{\gamma}_t(x) - y) \right] f(y) dy \right] \eta(x, \gamma_t(x)) dt.$$

根据中值定理,

$$|\psi_j(\gamma_t(x) - y) - \psi_j(\tilde{\gamma}_t(x) - y)| \leq |\gamma_t(x) - \tilde{\gamma}_t(x)| \sup_{y'} |\nabla \psi_j(y')| \leq C_{n_1} 2^{n_1 j}$$

对于所有 (x,t)。当 $|\tilde{\gamma}_t(x) - y| \geq 2^{-j+1}$ 时，差值 $\psi_j(\gamma_t(x) - y) - \psi_j(\tilde{\gamma}_t(x) - y)$ 也必为零，因为 $|\gamma_t(x) - y| \geq |\tilde{\gamma}_t(y) - y| - |\tilde{\gamma}_t(y) - \gamma_t(y)| \geq 2^{-j+1} - 2^{-j} \geq 2^{-j}$，因此 $\psi_j(\gamma_t(x) - y)$ 和 $\psi_j(\tilde{\gamma}_t(x) - y)$ 已经都为零。令 Ψ_j 为一个函数，它在半径为 2^{-j+1} 的球上等于 $C_{n_1} 2^{n_1 j}$，在其他地方为零，则可得

$$|T(f * \psi_j)(x) - \tilde{T}(f * \psi_j)(x)| \leq \tilde{T}(|f| * \Psi_j)(x)$$

对所有 x。因此

$$||TR_j f||_q \leq ||\tilde{T}(f * \psi_j)||_q + ||\tilde{T}(|f| * \Psi_j)||_q \leq C_{n_1} ||\tilde{T}||_{p\to q} ||f||_p$$

因为与 ψ_j 和 Ψ_j 的卷积在 L^p 上是一致有界的，且其界与 p 和 j 无关，并将紧支撑连续函数映射到其自身。当 $j = 0$时，必须将ψ_j 替换为 φ来修改此证明；但由于刚才并未用到 ψ_j 的任何消去性质，同样的论证也表明此时（91）成立。

□

命题 15。在与命题 13 相同的假设下，若 η 光滑，且 $\eta(x, \gamma_t(x))$的支集充分靠近(x_*, t_*)，则存在存在$\epsilon > 0$ 使得

$$||TR_j f||_2 \leq C 2^{-\epsilon j} ||f||_2 \tag{92}$$

对于某个与 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 和 $j \geq 0$ 无关的常数 C。

证明。这是将（83）应用于 R_j 后立即得到的，因为

$$\int |h|^{\delta}|\psi_j(h)|dh = \int |2^{-j}h|^{\delta}|\psi(h)|dh = C2^{-j\delta}$$

对于某个与 f 和 j 无关的常数 C。由此可知，对于任意充分大的 N，都有 $\epsilon = \delta/2N$，使得 (83) 成立。尽管在 $j = 0$ 的情形下 (83) 不适用，但 T 和 R_0 在 L^2 上均有界，因此可得 (92)。 □

定理 5 的证明。设 η_0 是定理 5 所假设的连续非负截断函数，它产生满足 (88) 的类 Radon 变换

$$T^j f(x) := \int f(\gamma_t^j(x))\eta_0(x, \gamma_t(x))dt$$

。设 η_1 是满足命题 15 假设且在 $(x_*, \gamma_{t_*}(x_*))$ 处不为零的任意光滑非负截断函数，使得未扰动的类Radon变换 T 满足 (92)，其中 T 由下式给出

$$Tf(x) := \int f(\gamma_t(x))\eta_1(x, \gamma_t(x))dt.$$

如有必要，将 η_1 乘以一个小的正常数和一个光滑凸起函数后，总可以假设对所有 x 和 t，均有 $\eta_1(x, \gamma_t(x)) \leq \eta_0(x, \gamma_t(x))$。令

$$\tilde{T}^j f(x) := \int f(\gamma_t^j(x))\eta_1(x, \gamma_t(x))dt.$$

根据（88）和不等式

$$\left|\int f(\gamma_t^j(x))\eta_1(x, \gamma_t(x))dt\right| \leq \int |f(\gamma_t^j(x))|\eta_0(x, \gamma_t(x))dt,$$

对于每个 $\epsilon_1 > 0$，当 j 足够大时，必有 $||\tilde{T}^j||_{p_0 \to q_0} \leq C_{\epsilon_1} 2^{\epsilon_1 j}$。于是，（91）和（88）推出

$$||TR_j||_{p_0 \to q_0} \leq C'_{\epsilon_1} 2^{\epsilon_1 j}$$

对于某个与 j 无关的常数 C'_{ϵ_1}（我们可以假设该不等式对所有 $j \geq 0$ 都成立，因为当 j 低于我们对 $||\tilde{T}^j||_{p_0 \to q_0}$ 有界估计的有限阈值时，R_j 仍将 L^{p_0} 映射到 L^{q_0}，且 T 在 L^{q_0} 上有界）。结合（92）进行插值可得

$$||TR_j||_{\tilde{p} \to \tilde{q}} \leq C''_{\epsilon_1} 2^{-j\tilde{\epsilon}}$$

其中

$$\frac{1}{\tilde{p}} := \frac{\epsilon}{\epsilon + 2\epsilon_1}\frac{1}{p_0} + \frac{2\epsilon_1}{\epsilon + 2\epsilon_1}\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{\tilde{q}} := \frac{\epsilon}{\epsilon + 2\epsilon_1}\frac{1}{q_0} + \frac{2\epsilon_1}{\epsilon + 2\epsilon_1}\frac{1}{2},$$

and

$$\tilde{\epsilon} := \frac{\epsilon}{\epsilon + 2\epsilon_1}(-\epsilon_1) + \frac{2\epsilon_1}{\epsilon + 2\epsilon_1}\epsilon = \frac{\epsilon\epsilon_1}{\epsilon + 2\epsilon_1} > 0.$$

˜ ˜对 j 求和可得， T 必须是从 L^p 到 L^q的有界算子。当 $\epsilon_1 \to 0$时，数对（$\tilde{p}$， $\tilde{q}$）趋于（p_0， q_0），因此，在此 $L^{\tilde{p}} \to L^{\tilde{q}}$ 不等式与由命题12建立的 T 的平凡 L^p-有界性之间进行插值，可得只要（$1/p$， $1/q$）属于 $[0,1]^2$中所述的开三角形， T 就是有界的。最后，若 η（x， y）是任意一个仅连续的截断函数，其支集 η（x， γ_t（x））与（x_*， t_*）足够接近，使得 η_1（x， γ_t（x））在该处有正的下界，那么不等式 $|\eta$（x， γ_t（x））$| \leq C|\eta_1$（x， γ_t（x））$|$ 对某个有限的 C 成立，便意味着（正如前文所述），使用此截断函数定义的算子（1）对刚才为截断函数η_1建立的所有数对（p， q）均有界。 □

7.2 在 C^∞ 情形下证明充分性

现在应用定理 5 即可完成定理1的证明。

假设 Q 在点 (x_*, t_*) 处非退化。命题 5（来自第 3.2 节）表明，双纤维化 $\pi_1(x,t) := \gamma_t(x)$ 和 $\pi_2(x,t) := x$ 满足点 (x_*, t_*) 处的 H¨ormander 条件，且至多只需用到一阶交换子，因此定理 5 的第一个假设成立。同样，根据推论 1（也见第 3.2 节后半部分），存在一个以 (x_*, t_*) 为中心的球，以及一个常数 $c > 0$，使得当 $||\phi - \phi_j||_{C^3(B)}$ 足够小时，

$$\begin{aligned} &\mathcal{Q}_j|_{(x,t)}[\{u_i\}_{i=1}^{d_1}, \{v_i\}_{i=1}^{k}, \{w_i\}_{i=1}^{d}] \\ &\quad \geq c|\det\{u_i\}_{i=1}^{d_1}|^{\frac{s}{d_1}}|\det\{v_i\}_{i=1}^{k}|^{\frac{s}{k}}|\det\{w_i\}_{i=1}^{d}|^{\frac{s}{d}} \end{aligned} \tag{93}$$

对所有 $(x,t) \in B$ 均成立，其中 Q_j 由使用 ϕ_j 和 $s = dk/n$ 的式 (4) 定义。这里的常数 c 关于 x、t 和 j 是一致的。

根据多元 Jackson 定理，例如 Bagby、Bos 和 Levenberg 的定理 2 [1], ，若 ϕ 在以 (x_*, t_*) 为中心的固定欧几里得球 B的某个邻域上属于类 $C^m \in U$，那么对每个整数 D和每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，都存在一个次数至多为 D 的多项式 $p_D^i(x,t)$，使得

$$\sup_{(x,t)\in B} |\partial_{x,t}^{\alpha}\phi^i(x,t) - \partial_{x,t}^{\alpha}p_D^i(x,t)| \leq C||\phi^i||_{C^m(B)}D^{-m+|\alpha|} \tag{94}$$

对所有 $|\alpha| \leq \min\{m, D\}$均成立，其中 C 是一个与 α 和ϕ 无关的常数（仅取决于 m、球 B以及通常的参数 n、d_1）。

任取正的 ϵ，并令 m 为任意一个大于 ϵ^{-1}的整数。对每个非负整数 j D $C||\phi^i||_{C^m\ B}\ D^{-m} <$，选择尽可能小的值，使得 $()$对每 $k^{-1}2^{-j}$ 个 i 都成立，即令

$$\max_i(C||\phi^i||_{C^m(B)}k2^j)^{1/m} < D \leq \max_i(C||\phi^i||_{C^m(B)}k2^j)^{1/m} + 1.$$

令 $\phi_j(x,t)$ 为多项式函数 $(\phi_D^1(x,t) \ldots, \phi_D^k(x,t))$，且令 $\gamma_t^j(x)$: $=(t, \phi_j(x,t))$。根据对 D 的选择， $|\phi(x,t) - \phi^j(x,t)| < 2^{-j}$ 在球 B 上。如果这D 本身不能保证 $||\phi - \phi_j||_{C^3(B)}$ 足够小，从而得到（93），那么可以将 D 至多增加一个与

j，使得（93）确实成立。根据对 m 的选择可知，对于某个与 j 无关的常数 C'，有 $D \le C'2^{\epsilon j}$。因此

$$\sup_{(x,t)\in B} |\gamma_t(x) - \gamma_t^j(x)| \le 2^{-j} \tag{95}$$

根据定理 5 的要求。由定理 2 和 (72) 可知，当 η 满足 $\eta(x,\gamma_t(x))$ 的支集充分靠近 (x_*,t_*) 时，便可得出

$$T_j f(x) := \int f(\gamma_t^j(x))\eta(x,\gamma_t(x))dt$$

将 L^{p_b} 映射到 L^{q_b} 的不等式，其范数增长至多如 D 的某个固定幂次。这可以与命题12给出的 T 的平凡 L^p-有界性进行插值（注意，由于命题12中已证明常数仅取决于 ϕ 的一阶导数以及其在支集上的大小，因此每个 T_j 的 L^p 范数关于 j 都是一致的），从而得出

$$||T_j f||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le CD^M ||f||_{L^p(\mathbb{R}^{n_1})} \le C(C'2^{\epsilon j})^M ||f||_{L^p(\mathbb{R}^{n_1})}$$

对于三角形中顶点为 (0, 0)、(1, 1) 和 $(1/p_b, 1/q_b)$ 的任意一对 $(1/p, 1/q)$。由于该三角形是开集，现在可以对三角形中任意 $(1/p_0, 1/q_0)$ 应用定理 5；对所有此类点取并集，即可证明 T 在同一三角形的所有内部点处均有有界性。由此完成了定理1在 C^∞ 情形下的证明[3]。

参考文献

[1] T. Bagby、L. Bos 和 N. Levenberg, *Multivariate simultaneous approximation*, Constr. Approx. 18 (2002)，第 4 期，569–577。[2] D. Birkes, *Orbits of linear algebraic groups*, Ann. of Math. (2) 93 (1971)，459–475。[3] C. B¨ohm 和 R. A. Lafuente, *Real geometric invariant theory*，整体微分几何，2021年，第 11–49 页。[4] J. Bourgain 和 L. Guth, *Bounds on oscillatory integral operators*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 349 (2011)，第 3-4 期，137–141。[5] M. Christ、A. Nagel、E. M. Stein 和 S. Wainger, *Singular and maximal Radon transforms: analysis and geometry* 2 **150** 1999 2, 489 577 ,

Ann. of Math. ( ) ( )，第 – 期。[6] D. A. Cox、J. Little 和 D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*，第四版，数学本科教材，Springer，Cham，2015。计算代数几何与交换代数导论。[7] W. Fulton, *Intersection theory*，数学及其边界领域成果 (3) [数学及相关领域成果 (3)]，第 2 卷，Springer-Verlag，柏林，1984。[8] P. T. Gressman, *Generalized curvature for certain Radon-like operators of intermediate dimension* **68** 2019 246 ,

Indiana Univ. Math. J. ( )，第 1 期，201–。

[3]另请注意，对这一论证稍作修改，即可在 ϕ 关于 m 的 $||\phi||_{C^m(B)}^{1/m}$ 有界时，得到端点 L^{p_b}–L^{q_b} 有界性。在这种情况下，只需取 $m > \ln j$，并令 $j \to \infty$ 趋于极限，使 T_j 逼近 T。

[9] ,
_____ *On the Oberlin affine curvature condition* **168** 2019 11, , Duke 2075 2126
Math. J. ( ), 第 – 期。[10] ,
_____ *L^p-improving estimates for Radon-like operators and the Kakeya-Brascamp-Lieb inequality* **387** 2021 107831, 57 4271482 , Adv. Math. ( ), 论文编号 。MR[11] ,
Testing conditions for multilinear Radon-Brascamp-Lieb inequalities, 2021年。未发表。[12] V. Guillemin 和 S. Sternberg, *Geometric asymptotics*, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1977年。数学调查丛书, 第 14 号。[13] W. Littman, *L^p—L^q-estimates for singular integral operators arising from hyperbolic equations* , 偏微分方程（专题讨论会论文集, 纯数学, 第 XXIII 卷, 加利福尼亚大学伯克利分校, 伯克利, 加利福尼亚州, 1971年）, 1973年, 第 479–481 页。[14] D. Mumford、J. Fogarty 和 F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, 第三版, 数学及其边界领域成果 (2) [数学及相关领域成果 (2)], 第 34 卷, Springer-Verlag, 柏林, 1994年。[15] D. M. Oberlin, *Affine dimension: measuring the vestiges of curvature*, Michigan Math. J. 51 (2003), 第 1 期, 13–26。[16] , *Convolution estimates and model surfaces of low codimension*, J. Fourier Anal. Appl. 14 (2008), 第 3 期, 484–491。MR2399110[17] D. H. Phong 和 E. M. Stein, *Hilbert integrals singular integrals and Radon transforms.* , , , *I* **157** 1986 1 157 Acta Math. ( ), 第 -2 期, 99–。[18] , *Operator versions of the van der Corput lemma and Fourier integral operators*, Math. Res. Lett. 1 (1994), 第 1 期, 27–33。[19] R. Ramanakoraisina, *Bezout theorem for Nash functions*, J. Pure Appl. Algebra 61 (1989), 第 3 期, 295–301。[20] F. Ricci, *L^p-L^q boundedness for convolution operators defined by singular measures in* R^n, Boll. Un. Mat. Ital. A (7) 11 (1997), 第 2 期, 237–252。MR1477777[21] A. Seeger 和 S. Wainger, *Bounds for singular fractional integrals and related Fourier integral operators* **199** 2003 1, 48 91 , J. Funct. Anal. ( ), 第 – 期。[22] R. S. Strichartz, *Convolutions with kernels having singularities on a sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. 148 (1970), 461–471。MR0256219[23] J. Zahl, *On the Wolff circular maximal function*, Illinois J. Math. 56 (2012), 第 4 期, 1281–1295。