arXiv:2303.03330v1 [math.NT] 6 Mar 2023

罗杰斯–拉马努金恒等式所计数的所有分拆中部分的数量

CRISTINA BALLANTINE 和 Amanda Folsom

*De*谨以此文献给 M.V. Subbarao教授，庆祝他诞辰一百周年 .

Abstract. 著名的罗杰斯–拉马努金恒等式指出， n ($n \in \mathbb{N}_0$)的整数分拆中各部分模 5 同余于 ± 1 的分拆数（以及模 5 同余于 ± 2 的分拆数），分别等于 n 的超互异部分分拆数（以及大于1的超互异部分分拆数）。本文沿袭 Andrews 和 Beck 关于欧拉分拆恒等式的早期研究思路，建立了罗杰斯–拉马努金恒等式的伴随恒等式，考察上述类型的 n 所有分拆中部分的数量。

1. Introduction

罗杰斯–拉马努金恒等式是一对恒等式，指出 n ($n \in \mathbb{N}_0$)的整数分拆中各部分模 5 同余于 ± 1 的分拆数（以及模 5 同余于 ± 2的分拆数），分别等于 n的超互异部分分拆数（以及大于1的超互异部分分拆数）。超互异部分也称为 2-互异部分，各部分之间至少相差 2。通常，这些恒等式以解析形式表示为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q;q^5)_\infty (q^4;q^5)_\infty},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q^2;q^5)_\infty (q^3;q^5)_\infty},$$

注意到，出现的级数和乘积正是相关的分拆生成函数。本文中， q-Pochhammer 符号对 $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 定义如下:

$$(a;q)_n := \prod_{j=0}^{n-1} (1-aq^j) = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots(1-aq^{n-1}).$$

在本文剩 余部分中，我们假设 $|q| < 1$ ，从而所有级数都绝对收敛 .

罗杰斯–拉马努金恒等式拥有悠久而丰富的历史。Rogers 和 Ramanujan 在19世纪末至20世纪初分别独立发现了这些恒等式，而 Rogers 给出了已知的第一个证明 [17]。后来，Rogers 和 Ramanujan 发表了联合证明 [18], ；大约在同一时期，Schur 也独立重新发现并证明了这些恒等式 [19]。此后，这些恒等式在多个领域发挥了重要作用，并与组合学、 q-超几何级数、李代数、模形式、统计力学等众多领域建立了联系（更多内容请参见 [1, 3, 10–14, 20, 21], ）。

2010年数学主题分类。11P84，05A17，05A19，33D15。关键词和短语：罗杰斯–拉马努金恒等式、分拆、Beck 型恒等式、 q-级数。1

与罗杰斯–拉马努金恒等式类似，整数分拆领域中的许多其他恒等式，都将 n 其部分属于某个特定集合的分拆数，与 n满足某一特定条件的分拆数联系起来。或许最古老的此类结果是欧拉恒等式，它将 n 含有奇部件的分拆数与 n 含有互异部件的分拆数联系起来。几个世纪后，即2017年，Beck 针对欧拉恒等式中所出现类型的全部分拆的部分数，提出了如下相关猜想，我们将其表述如下 [16], [4, 猜想]。

猜想 1（Beck）。 n 中所有奇部件分拆的部分总数超过 n 中所有互异部件分拆的部分总数的数量，等于 n 中恰有一个偶部件（可重复）的分拆数。

Andrews [4] 很快证明了 Beck 的猜想，并进一步表明，这一超额也等于 n 中恰有一个部件重复（其余所有部件均互异）的分拆数。Yang [23]和 Ballantine–Bielak [7] 也分别给出了 Beck 猜想的独立组合证明。继 Beck 关于欧拉恒等式中出现的各类分拆的部分总数的猜想之后，又出现了许多对其他著名恒等式的推广以及 Beck 型伴随恒等式，例如 $[5, 8, 15, 23]$。在[9], 中，Beck 型恒等式被推广到 Subbarao 在 [22]中定义的所有阶为 r 的欧拉对。

本文陈述并证明了关于罗杰斯–拉马努金恒等式的 Beck 型伴随恒等式： n 中所有部件同余于± 1 （模 5）（分别同余于 ± 2 （模 5））的分拆的部分总数，超过 n 中所有超互异部件分拆（分别为大于1的超互异部分分拆）的部分总数的超额。这些结果陈述于下文的定理 3.1 和定理 4.1 中；在随后的各节中，我们给出了兼具解析性和组合性的证明。

2. Preliminaries

本节介绍有关分拆和 q-级数的一些背景知识与预备知识。

2.1. 整数分拆。设 $n \in \mathbb{N}_0$。 n 的一个分拆记作 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j)$，是由正整数 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_j$ 组成的非递增序列，这些正整数之和为 n。我们将 n 称为 λ 的大小。λ 的长度是 λ 中部分的个数，记作 $\ell(\lambda)$。为简便起见，我们用 λ 表示其部分构成的多重集或部分组成的非递增序列。我们用 $a \in \lambda$ 表示正整数 a 是 λ 的一个部分。我们用 $|\lambda|$ 表示 λ 的大小，并用 $\lambda \vdash n$ 表示 λ 是大小为 n 的一个分拆。对于一对分拆 (λ, μ)，我们也写作 $(\lambda, \mu) \vdash n$，表示 $|\lambda| + |\mu| = n$。按照惯例，对于所有 $k > \ell(\lambda)$，都有 $\lambda_k = 0$。需要时，我们也会对分拆中的部分使用指数记号：部分的指数表示该部分在分拆中的重数。此记号主要用于矩形分拆。我们将 (a^b) 表示由 b 个等于 a 的部分构成的分拆。

分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j)$ 的费雷尔图是一个左对齐的方格阵列，其中从上往下第 i 行包含 λ_i 个方格。我们稍作滥用记法，用 λ 表示一个分拆或其费雷尔图。例如， $\lambda = (5, 2, 2, 1)$ 的费雷尔图如图1所示。

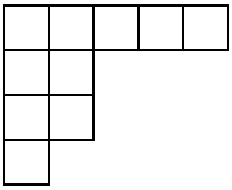

FIGURE 1. 一个费雷尔图

给定一个分拆 λ，其共轭分拆 λ' 是这样一个分拆：它的费雷尔图中的各行，恰好对应于 λ 的费雷尔图中的各列。例如，$\lambda = (5, 2, 2, 1)$ 的共轭分拆是 $\lambda' = (4, 3, 1, 1, 1)$。

我们将分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j)$ 与 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$ 的和定义为分拆 $\lambda + \mu = (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ldots, \lambda_\ell + \mu_\ell)$，其中 $\ell = \max\{j, k\}$。

如第1节所述，如果一个分拆的任意两个部分之差至少为 2，则称其部分是超互异的。我们将部分超互异的分拆称为超互异分拆。

由于我们的目标是研究分拆中部分的数量，因此我们引入带标记分拆的概念。带标记分拆是标记了一个单独部分的分拆。注意，$(5, 2^*, 2, 1)$ 和 $(5, 2, 2^*, 1)$ 是不同的带标记分拆。于是，满足某些条件的 n 的所有分拆中的部分数量，等于满足相同条件的n 的带标记分拆数量。

如果 $\mathcal{M}(n)$ 是大小为 n 且其部分满足某些条件的带标记分拆集合，那么 $\mathcal{M}(n)$ 与分拆对的集合 $(\lambda, (a^b)) \vdash n$ 之间存在一一对应，其中 b 是一个正整数，而 λ 和 (a) 是其部分满足 $\mathcal{M}(n)$ 中条件的分拆。为解释这一点，若 $\mu \in \mathcal{M}(n)$ 有标记部分 $\mu_j = a$，且 μ_j 是等于 a 的第 b 个部分，我们就从 μ 中去掉前 b 个等于 a 的部分，从而得到分拆 λ。于是得到 $\mu \leftrightarrow (\lambda, (a^b))$。因此，满足某些条件的 n 的所有分拆中的部分总数，等于满足以下条件的分拆对 $(\lambda, (a^b)) \vdash n$ $a\,b > 0$ 的数量：a，且 λ 的部分满足相同的条件。

有关分拆的更多细节，请参阅 [2, 6]。

2.2. 关于 q-级数的一些结果。q-二项式系数 $\left[\begin{matrix} A+k \\ k \end{matrix} \right]_q$ 可定义为生成函数，用于表示将 n 分拆为至多含有 k 个部分、且每个部分至多为 A [6, p67], 的分拆数，由此可得

$$\sum_{0 \le n_1 \le n_2 \cdots \le n_k \le A} q^{n_1+n_2+\cdots+n_k} = \left[\begin{matrix} A+k \\ k \end{matrix} \right]_q, \tag{1}$$

$$\left[\begin{matrix} A+k \\ k \end{matrix} \right]_q = \left[\begin{matrix} A+k \\ A \end{matrix} \right]_q, \tag{2}$$

and

$$\left[\begin{matrix} A+k \\ k \end{matrix} \right]_q = 0, \text{ if } A < 0,\, k < 0, \text{ or } A + k < 0. \tag{3}$$

q-二项式级数 [6, 定理 9]给出了 ($|t| < 1$) 中 q-二项式系数的以下生成函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} A+k \\ k \end{bmatrix}_q t^k = \frac{1}{(t;q)_{A+1}}. \tag{4}$$

另一个我们将用到的 q-级数恒等式是

$$\sum_{A \le n_1 \le n_2 \cdots \le n_k} q^{n_1+n_2+\cdots+n_k} = \frac{q^{Ak}}{(q;q)_k}, \tag{5}$$

可以直接通过解析方法验证此式，也可以从组合角度验证：将一个部分大于或等于 $A > 0$、含有 k 个部分的分拆 λ 视为 $\lambda = \eta + (A^k)$，其中 η 是一个至多含有 k 个部分的分拆。若 $A = 0$，则 (5) 是至多含有 k 个部分的分拆的生成函数。

3. The number of parts in the first Rogers-Ramanujan identity

我们的第一个结果——定理 3.1——给出了第一罗杰斯–拉马努金恒等式中所涉及分拆的部件数的超额。我们将空分拆视为超互异分拆。

定理 3.1. 所有部分满足 ± 1（模 5）同余条件的 n 分拆的部分总数，超过 n 的所有超互异分拆的部分总数，其超额等于满足以下全部条件的分拆对 $(\lambda, (a^b))$ 的数量：λ 是 $n - ab$ 的超互异分拆，$a \equiv \pm 1$（模 5），$b \ge 1$，并且若 $a = 1$，则 λ 中至少有一个部分是 $b-1$、b、$b+1$。

在证明定理之前，我们指出，原始的贝克恒等式（猜想 1）可以按照上面的定理 3.1，改写为关于分拆对的如下形式。n 的所有互异部件分拆中的部分总数，减去 n 的所有奇部件分拆中的部分总数，等于满足以下条件的分拆对 $(\lambda, (a^b)) \vdash n$ 的数量：λ 是一个奇部件分拆，$a, b > 0$ 且 a 为偶数。这也等于分拆对 $(\lambda, (a^b)) \vdash n$ 的数量，其中 λ 是一个互异部件分拆，$a > 0$, $a \notin \lambda$，且 $b \ge 2$。

例 1. 设 $n = 4$。部件与 ± 1 模 5 同余的分拆为 (4) 和 (1, 1, 1, 1)，因此这些分拆中共有五个部分。超互异部件分拆为 (4) 和 (3, 1)，这些分拆中共有三个部分。满足定理条件的分拆对有两组：$((2), (1^2))$ 和 $(\emptyset, (4))$。

下面我们给出定理 3.1 的两种证明：第一种是解析证明，第二种是组合证明。

3.1. 定理 3.1 的解析证明。设 $a(n, m)$ 表示将 n 分拆为模 5 同余于 ± 1 的部分，且恰有 m 个部分的分拆数。那么，$a(n, m)$ 的生成函数为

$$P_1(z;q) := \sum_{n \ge 0} \sum_{m \ge 0} a(n,m) z^m q^n = \frac{1}{(zq;q^5)_\infty (zq^4;q^5)_\infty}.$$

类似地，若 $b(n,m)$ 表示将 n 分拆为由超互异部件组成、且恰有 m 个部分的分拆数，则 $b(n,m)$ 的生成函数为

$$R_1(z;q) := \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} b(n,m) z^m q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{n^2}}{(q;q)_n}.$$

考虑这些函数对 z 的导数在 1 处的差，我们得到一个生成函数，它表示 n 中部分模 5 同余于 ± 1 的所有分拆的部分数，减去 n 的所有超互异分拆的部分数所得的超额。我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{z=1} (P_1(z;q) - R_1(z;q)) \\
&\quad = \frac{1}{(q;q^5)_\infty (q^4;q^5)_\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{5m-1}}{1-q^{5m-1}} + \frac{q^{5m-4}}{1-q^{5m-4}} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n q^{n^2}}{(q;q)_n} \\
&\quad = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{5m-1}}{1-q^{5m-1}} + \frac{q^{5m-4}}{1-q^{5m-4}} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n q^{n^2}}{(q;q)_n} \\
&\quad =: T_1(q) - T_2(q). \qquad (6)
\end{aligned}$$

接下来，我们写出五个不同的生成函数，它们的和是分拆对 $(\lambda, (a^b))$ 数目的生成函数，其中 $|\lambda| + ab = n$ 满足定理 3.1 中给出的所有条件。完成后，我们将证明所得生成函数之和等于 $T_1(q) - T_2(q)$。

情形 1. 分拆对 $(\lambda, (1^b))$ 数目的生成函数，其中 λ 是 $n-b$ 的超互异分拆，且 $b-1 \in \lambda$，$b+1 \notin \lambda$ 为

$$\sum_{b=1}^{\infty} q^b \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{0\leq n_1\leq n_2\cdots\leq n_{j-1}\leq n_j < n_{j+1}\leq n_{j+2}\cdots\leq n_m \\ 2j-1+n_j=b-1}} q^{(1+n_1)+(3+n_2)+\cdots+(2m-1+n_m)}, \qquad (7)$$

解释如下。任何有 $m \geq 1$ 个部分的超互异分拆都具有形式 $(2m-1+n_m, 2m-3+n_{m-1}, \ldots, 3+n_2, 1+n_1)$，其中 $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_m$。我们对指定部分 $b-1$ 可能出现的位置求和，即对其中的位置 $2j-1+n_j = b-1$（$1 \leq j \leq m$）求和。由于 $b+1$ 不可能出现在这样的分拆中，因此相邻部分 $2j+1+n_{j+1}$ 和 $2j-1+n_j = b-1$ 之差至少为 3；等价地，$n_j < n_{j+1}$。分拆对 $(\lambda, (1^b))$ 中第二个分拆 1^b 的大小出现在 q^b 的指数中，我们对所有可能的 $b \geq 1$ 求和。

我们将式 (7) 中的内层求和改写为

$$\begin{aligned}
&q^{m^2+b-2j} \left(\sum_{0\leq n_1\leq n_2\leq\cdots\leq n_{j-1}\leq b-2j} q^{n_1+n_2+\cdots+n_{j-1}} \right) \\
&\qquad \times \left(\sum_{b-2j+1\leq n_{j+1}\leq n_{j+2}\leq\cdots\leq n_m} q^{n_{j+1}+n_{j+2}+\cdots+n_m} \right),
\end{aligned}$$

其中我们还用到了 $1+3+5+\cdots+2m-1=m^2$。利用式 (1) 和 (5)，可将其改写为

$$q^{m^2+b-2j}\begin{bmatrix} b-j-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q \frac{q^{(b-2j+1)(m-j)}}{(q;q)_{m-j}}. \tag{8}$$

利用 (8)，(7) 中的生成函数变为

$$\begin{aligned}
&\sum_{b=1}^{\infty} q^b \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} q^{m^2+b-2j}\begin{bmatrix} b-j-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q \frac{q^{(b-2j+1)(m-j)}}{(q;q)_{m-j}} \\
&\quad=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\frac{q^{m^2-2j+(-2j+1)(m-j)}}{(q;q)_{m-j}}\sum_{b=1}^{\infty}\begin{bmatrix} b-j-1 \\ b-2j \end{bmatrix}_q q^{b(m-j+2)} \\
&\quad=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\frac{q^{m^2+m+j}}{(q;q)_{m-j}}\sum_{b=0}^{\infty}\begin{bmatrix} b+j-1 \\ b \end{bmatrix}_q q^{b(m-j+2)} \\
&\quad=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\frac{q^{m^2+m+j}}{(q;q)_{m-j}(q^{m-j+2};q)_j} \\
&\quad=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m^2}}{(q;q)_{m+1}}\sum_{j=1}^{m} q^{m+j}(1-q^{m-j+1}),
\end{aligned} \tag{9}$$

其中我们还使用了 (2)、(3) 和 (4)。

情形 2。通过与情形 1 中所给出的类似说明，对于满足 λ 是 $n-b$ 的一个超互异分拆，且 $b+1\in\lambda, b-1\notin\lambda$ 是的分拆对 $(\lambda,(1^b))$ 数目的生成函数为

$$\sum_{b=1}^{\infty} q^b \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\substack{0\le n_1\le n_2\le\cdots\le n_{j-1}<n_j\le n_{j+1}\le\cdots\le n_m \\ 2j-1+n_j=b+1}} q^{(1+n_1)+(3+n_2)+\cdots+(2m-1+n_m)}. \tag{10}$$

与情形 1 类似地论证，并利用 (1)–(5)，我们得到这等于

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m^2}}{(q;q)_{m+1}}\sum_{j=1}^{m} q^{m+j}(1-q^{m-j+1}). \tag{11}$$

情形 3。与前述情形类似，对于满足 λ 是 $n-b$ 的一个超互异分拆，且 $b-1, b+1\in\lambda$是的分拆对 $(\lambda,(1^b))$ 数目的生成函数为

$$\sum_{b=1}^{\infty} q^b \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{m}\sum_{\substack{0\le n_1\le n_2\cdots\le n_{j-1}\le n_j\le n_{j+1}\le\cdots\le n_m \\ 2j-3+n_{j-1}=b-1 \\ 2j-1+n_j=b+1}} q^{(1+n_1)+(3+n_2)+\cdots+(2m-1+n_m)}. \tag{12}$$

仿照情形 1 的论证并利用 (1)–(5)，我们得到这等于

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m^2}}{(q;q)_{m+1}}\sum_{j=2}^{m} q^{2j-2}(1-q^{m-j+1})(1-q^{m-j+2}). \tag{13}$$

情形 4. 与前面的情形类似，我们有：满足 λ 是 $n-b$ 的超互异分拆且 $b\in\lambda$ 是

$$\sum_{b=1}^{\infty} q^{b} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{0\le n_1\le n_2\cdots\le n_{j-1}\le n_j\le n_{j+1}\le n_{j+2}\cdots\le n_m\\ 2j-1+n_j=b}} q^{(1+n_1)+(3+n_2)+\cdots+(2m-1+n_m)}. \tag{14}$$

仿照情形 1 的论证并利用 (1)–(5)，我们得到这等于

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m^2}}{(q;q)_{m+1}}\sum_{j=1}^{m} q^{2j-1}(1-q^{m-j+1}). \tag{15}$$

情形 5. 不难看出，满足 $a\equiv\pm1$ （模 5）且 $a>1$，并且 λ 是 $n-ab$ 的超互异分拆的分拆对 $(\lambda,(a^b))$ 的生成函数为

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{m^2}}{(q;q)_m}\right)\left(\frac{q^4}{1-q^4}+\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{q^{5m-1}}{1-q^{5m-1}}+\frac{q^{5m-4}}{1-q^{5m-4}}\right)\right), \tag{16}$$

u利用 $R_1(1;q)$ 是超互异分拆的生成函数这一事实 .

利用上述情形 1–5 中的生成函数，我们现在完成定理 3.1 的解析证明。定理 3.1 中描述的分拆对可表示为上述情形 1–5 中所描述的分拆对的不相交并。因此，定理 3.1 中所描述的差额的生成函数可表示为式 (9)、(11)、(13)、(15) 和 (16) 中给出的生成函数之和。我们先将式 (9)、(11)、(13) 和 (15) 相加，得到：

$$\begin{aligned}
&2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m^2}}{(q;q)_{m+1}}\sum_{j=1}^{m} q^{m+j}(1-q^{m-j+1})\\
&\qquad+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m^2}}{(q;q)_{m+1}}\sum_{j=1}^{m-1} q^{2j}(1-q^{m-j})(1-q^{m-j+1})\\
&\qquad\qquad+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m^2}}{(q;q)_{m+1}}\sum_{j=1}^{m} q^{2j-1}(1-q^{m-j+1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{m^2}}{(q;q)_{m+1}} \\
&\times \left(\sum_{j=1}^{m-1} \left(2q^{m+j}(1-q^{m-j+1}) + q^{2j}(1-q^{m-j})(1-q^{m-j+1}) + q^{2j-1}(1-q^{m-j+1}) \right) \right. \\
&\qquad \left. + 2q^{2m}(1-q) + q^{2m-1}(1-q) \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{m^2}}{(q;q)_{m+1}} \left(\sum_{j=1}^{m-1} \left(q^{2j} + q^{2j-1} - q^{m+j+1} - q^{2m+1} \right) \right. \\
&\qquad \left. + 2q^{2m}(1-q) + q^{2m-1}(1-q) \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{m^2}}{(q;q)_{m+1}} \left(q\frac{1-q^{2m-2}}{1-q} - q^{m+2}\frac{1-q^{m-1}}{1-q} \right. \\
&\qquad \left. - (m-1)q^{2m+1} + 2q^{2m}(1-q) + q^{2m-1}(1-q) \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{m^2}}{(q;q)_{m+1}} \left(q\frac{1-q^{m+1}}{1-q} - (m+1)q^{2m+1} \right) \\
&= \frac{q}{1-q} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{m^2}}{(q;q)_m} - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{mq^{m^2}}{(q;q)_m} \\
&= \frac{q}{1-q} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m^2}}{(q;q)_m} - T_2(q). \qquad (17)
\end{aligned}
$$

将式 (16) 与 $\frac{q}{1-q}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{m^2}}{(q;q)_m}$ 中的式 (17) 相加，得到 $T_1(q)$，由此完成证明。 □

注 1. 还可以这样看出，(9)、(11)、(13) 和 (15) 分别是上述情形 1–4 开头所述分拆对的生成函数：将由 m 超互异部件组成的分拆视为长度为 m、 $\delta_m =$ 的奇数阶梯（$2m-1$、$2m-3, \ldots, 3, 1$）与一个部分不超过 m 的分拆的共轭之和。下面以 (15) 为例说明；(9)、(11) 和 (13) 也可作类似解释。

为了组合地证明 (15) 是分拆对 $(\lambda,(1^b)) \vdash n$ 的数量的生成函数，其中 λ 具有超互异部件，且 $b \in \lambda$，我们注意到，在

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} q^{2j-1}\cdot q^{m^2}\cdot\frac{1-q^{m-j+1}}{(q;q)_{m+1}},$$

对于固定的 m, j，项 $1-q^{m-j+1}$ $(q;q)_{m+1}$ 生成部件不大于 $m+1$ 且不含等于 $m-j+1$的部件的分拆。通过共轭，它生成至多含有 $m+1$ 个部分且$\eta_{m-j+1}=\eta_{m-j+2}$的分拆 η。项 q^{m^2} 生成阶梯 δ_m，而项 q^{2j-1} 生成

分拆 (1^{2j-1})。因此，$q^{2j-1}\cdot q^{m^2}\cdot\dfrac{1-q^{m-j+1}}{(q;\,q)_{m+1}}$ 生成三元组 $(\delta_m,\eta,(1^{2j-1}))$。每个这样的三元组都对应于一对 $(\lambda,(1^b))$，其中 $b=2j-1+\eta_{m-j+2}$，且 $\lambda=\delta_m+(\eta\setminus\{\eta_{m-j+2}\})$ 有 m 个超互异部件并且 $\lambda_{m-j+1}=2j-1+\eta_{m-j+1}=b$。

3.2. 定理 3.1 的组合证明。我们将 (6) 中定义的 $T_1(q)$ 解释为 $|\mathcal{T}_1(n)|$ 的生成函数，其中 $\mathcal{T}_1(n)$ 是由分拆对 $(\lambda,(a^b))\vdash n$ 构成的集合，满足 λ 是超互异分拆，$a\equiv\pm1$ (模 5)，且 $b\geq1$。根据第一个 Rogers-Ramanujan 恒等式，$|\mathcal{T}_1(n)|$ 也等于满足以下条件的分拆对 $(\lambda,(a^b))\vdash n$ 的数量：λ 是部件同余于 ±1 (模 5)、$a\equiv\pm1$ (模 5)，且 $b\geq1$ 的分拆。于是，正如第1节所述，$|\mathcal{T}_1(n)|$ 等于将 n 分拆为部件同余于 ±1 (模 5) 的所有分拆中部件的总数。

我们将 (6) 中定义的 $T_2(q)$ 解释为 $|\mathcal{T}_2(n)|$ 的生成函数，其中 $\mathcal{T}_2(n)$ 是由具有超互异部件的 n 的带标记分拆构成的集合。因此，正如第1节所述，$|\mathcal{T}_2(n)|$ 等于将 n 分拆为超互异部件的所有分拆中部件的总数。

为了组合地证明定理 3.1，我们如下构造一个单射 $\varphi:\mathcal{T}_2(n)\to\mathcal{T}_1(n)$。若 $\mu\in\mathcal{T}_2(n)$ 有一个标记部件 μ_i，则

$$\varphi(\mu):=(\mu\setminus\{\mu_i\},(1^{\mu_i})).$$

从费雷尔图的角度来看，φ 移除长度为 μ_i 的行，并将其变换为一个矩形分拆 (a^b)，其中有 $a=1$ 和 $b=\mu_i$。该单射的像 $\varphi(\mathcal{T}_2(q))$ 由满足以下条件的分拆对 $(\lambda,(1^b))\in\mathcal{T}_1(n)$ 组成：$b-1$、b、$b+1$ 均不是 λ 的部件。在 $\varphi(\mathcal{T}_2(q))$ 上，φ 的逆映射将 $(\lambda,(1^b))\in\mathcal{T}_1(n)$ 变换为满足 $b-1$、b、$b+1\notin\lambda$ 的对象，并通过向 λ 中插入一个等于 b 的部件并将其标记，构造出一个带标记分拆 μ。

在 n 的所有分拆中，部件模 5 同余于 ±1 的分拆的部件总数，减去 n 的所有超互异部件分拆的部件总数，其差等于 $\mathcal{T}_2(n)\setminus\varphi(\mathcal{T}_2(n))$ 的大小；该集合由满足以下条件的分拆对 $(\lambda,(a^b))$ 构成：λ 是 $n-ab$ 的超互异分拆，$a\equiv\pm1$ (模 5)，$b\geq1$；并且若 $a=1$，则 $b-1$、b、$b+1$ 中至少有一个是 λ的部件。□

推论 3.2. 设 $n\geq1$。将 n 分拆为超互异部件所得的所有分拆中，部件的数量少于将 n 分拆为同 ±1 (模 5)同余的部件所得的所有分拆中，等于 1 的部件数量。

证明. 根据引言中的论证，将 n 分拆为同 ±1 (模 5)同余的部件所得的所有分拆中，等于 1 的部件数量等于$|\mathcal{T}_{1,\,1}(n)|$，其中 $\mathcal{T}_{1,\,1}(n)$ 是将 n 分拆为同 ±1 (模 5) 同余的部件、至少含有一个等于 1 的部件，且标记部件是等于 1 的部件之一的带标记分拆的集合。

设 φ 是定理 3.1 的证明中定义的单射。若 $\mu\in\mathcal{T}_2(n)$ 中标记了 μ_j，则 $\varphi(\mu)=(\mu\setminus\{\mu_j\},(1^{\mu_j}))$。由于 $\mu\setminus\{\mu_j\}$ 是将 $n-\mu_j$分拆为超互异部件所得的一个分拆，根据第一罗杰斯–拉马努金恒等式，它对应于唯一的一个将 $n-\mu_j$分拆为同 ±1 (模 5)同余的部件的分拆 η。考虑带标记分拆 $\xi(\mu)=\eta\cup(1^{\mu_j})$，其中第 μ_j 个部件被标记且等于 1。这给出了从 $\mathcal{T}_2(n)$ 到 $\mathcal{T}_{1,\,1}(n)$ 的一个单射。□

注 2. 上述定理 3.1 的组合证明中的单射表明，n 的带标记超互异分拆的数量，等于满足以下条件的分拆对 $(\lambda,(1^b))\vdash n$ 的数量：λ是一个由超互异部件构成的分拆，$b\geq1$，且 $b-1$、b、$b+1$均不在 λ 中（等价地，分拆对 $(\lambda,(1^b))\vdash n$的数量之差

其中 λ 是一个由超互异部件构成的分拆， $b \geq 1$，以及至少有一个 $b-1$、b、$b+1$ 在 λ 中的此类分拆对的数量）。同一恒等式也可独立地由定理 3.1 的解析证明得到，解释如下。我们有，(17) 是满足以下条件的分拆对 $(\lambda, (1^b)) \vdash n$的数量与 n 的带标记超互异分拆数量之差的生成函数： λ 是一个由超互异部件构成的分拆， $b \geq 1$。另一方面，(17) 起源于 (7)、(10)、(12) 和 (14) 的和；该和是满足以下条件的分拆对 $(\lambda, (1^b)) \vdash n$数量的生成函数： λ是一个由超互异部件构成的分拆， $b \geq 1$，且 $b-1$、b、$b+1$中至少有一个在 λ中。令 (17) 的 q 级数系数的这两种解释相等，便得到由定理 3.1 的组合证明中的单射所导致的（等价）恒等式。

4. The number of parts in the second Rogers-Ramanujan identity

本节针对第二个罗杰斯–拉马努金恒等式提出并证明一个与定理 3.1 类似的结果。出人意料的是，证明这一定理要困难得多。正如定理 4.1 的证明将要表明的，所有满足部分与 $\pm 2 \pmod 5$ 同余的 n 的分拆中部分的数量，与所有由大于1的超互异部分组成的 n 的分拆中部分的数量之差，可以组合地描述为集合 $\mathcal{S}(n)$（见下文 (18)）的大小；该集合是由分拆对 $(\lambda, (a^b))$ 构成的集合的一个子集，其中 λ 的部分大于1且超互异， $a \equiv \pm 2 \pmod 5$， $b \geq 1$。 $\mathcal{S}(n)$ 中分拆对所满足的条件可以明确列出。这份相当长的条件清单围绕 a 的剩余类，以及 a、b 与 λ 的某些部分之间的相互作用展开。为简洁起见，我们不在此明确列出这些条件。

定理 4.1. n 的所有分拆中，部分均满足模 5 同余于 ± 2 的分拆的部分总数，减去 n 的所有分拆中具有大于1的超互异部分的分拆的部分总数，等于满足以下条件的配对或分拆 $(\lambda,(a^b)) \vdash n$ 的数量： λ 具有大于1的超互异部分， $a \equiv \pm 2$ （模 5） $b \geq 1$，并满足 $\mathcal{S}(n)$ 规定的条件。

证明. 令 $c(n,m)$ 表示将 n 分拆为部分满足模 5 同余于 ± 2 且恰有 m 个部分的分拆数。那么，$c(n,m)$ 的生成函数为

$$P_2(z;q) := \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} c(n,m) z^m q^n = \frac{1}{(zq^2;q^5)_\infty (zq^3;q^5)_\infty}.$$

类似地，如果 $d(n,m)$ 表示 n 的分拆数，其中包含大于1的超互异部分，且恰有 m个部分

$$R_2(z;q) := \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} d(n,m) z^m q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{n^2+n}}{(q;q)_n}.$$

考虑关于 z 的导数在 1 处的差，我们得到部件数超额的生成函数。我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{z=1}(P_2(z;q)-R_2(z;q))\\
&\quad=\frac{1}{(q^2;q^5)_\infty(q^3;q^5)_\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{5m-2}}{1-q^{5m-2}}+\frac{q^{5m-3}}{1-q^{5m-3}}\right)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nq^{n^2+n}}{(q;q)_n}\\
&\quad=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{5m-2}}{1-q^{5m-2}}+\frac{q^{5m-3}}{1-q^{5m-3}}\right)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nq^{n^2+n}}{(q;q)_n}\\
&\quad=:S_1(q)-S_2(q).
\end{aligned}$$

我们将 $S_1(q)$ 解释为 $|\mathcal{S}_1(n)|$ 的生成函数，其中 $\mathcal{S}_1(n)$ 是满足以下条件的分拆对 $(\lambda,(a^b))$：$\vdash n$ 其中 λ 具有大于 1 的超互异部分，$a\equiv\pm2$ (模 5)}，且当 $n\geq1$ 时，$b\geq1$；并且 $|\mathcal{S}_1(0)|:=0$。注意，$\lambda=\emptyset$ 是允许的。如第1节所述，$|\mathcal{S}_1(n)|$ 是 n 的所有部分同余于 ±2 (模 5) 的分拆中的部分总数。我们将 $S_2(q)$ 解释为 $|\mathcal{S}_2(n)|$ 的生成函数，其中 $\mathcal{S}_2(n)$ 是满足以下条件的 n 的带标记分拆集合：当 $n\geq1$ 时，具有大于 1 的超互异部分；并且 $|\mathcal{S}_2(0)|:=0$. 因此，$|\mathcal{S}_2(n)|$ 是 n 的所有具有大于 1 的超互异部分的分拆中的部分总数。

对于 $n\geq1$，我们按如下方式构造单射 $\psi:\mathcal{S}_2(n)\to\mathcal{S}_1(n)$。

从 $\mu\in S_2(n)$ 开始，并假设 μ 的标记部件为 $\mu_i=c$。令

$$x:=\begin{cases}\mu_{i+1} & \text{if } i<\ell(\mu)\\ 0 & \text{if } i=\ell(\mu),\end{cases}$$

并令 $y=c-x$。因此，如果标记部件不是 μ的最后一个部件，y 就是标记部件与下一个部件之差。否则，y 等于标记部件。因此，$y\geq2$。此外，μ 不包含任何 $c+1$、$c-1$、$x+1$ 和 $x-1$（若 $x\neq0$）作为部件。

我们用 $\widetilde{\mu}$ 表示从 μ 中移除标记部件后得到的分拆，即 $\widetilde{\mu}:=\mu\setminus\{c\}$.

ψ 的定义取决于 c的奇偶性。

情形 1：$c=2k$，$k\geq1$。然后，我们定义

$$\psi(\mu):=(\widetilde{\mu},(2^k)).$$

就费雷尔图而言，ψ 从 μ 中移除长度为 $2k$ 的行，并将其转化为一个矩形分拆（a^b），其中有 $a=2$ 和 $b=k$。

在此情形下，$\mathcal{S}_2$（n）中过分拆子集在 ψ 下的像为

$$\mathcal{I}_1(n):=\{(\lambda,(2^k))\in\mathcal{S}_1(n)\mid 2k-1,2k,2k+1\notin\lambda\}.$$

为证明 ψ 是到 $\mathcal{I}_1$（n）上的映射，给定（λ，（2^k））$\in\mathcal{I}_1$（n），令 $\mu=\lambda\cup\{2k\}$ 并标记部分 $2k$。于是，$\mu\in\mathcal{S}_2$（n）和 ψ（μ）=（λ，（2^k））。

情形 2：$c=2k+1$，$k\geq1$。为定义 ψ，我们需要考虑 c模 5 的不同剩余类。

(A) 若 $c\equiv2$ 或 3（模 5），则定义

$$\psi(\mu):=(\widetilde{\mu},(c)).$$

用费雷尔图表示， ψ 从 μ 中移除长度为 c 的一行，并将其转换为矩形分拆（a^b），其中 $a=c$ 和 $b=1$。

在此情形下， $\mathcal{S}_2(n)$中过分拆子集在 ψ 下的像为

$$\mathcal{I}_2(n) := \{(\lambda,(a)) \in \mathcal{S}_1(n) \mid a \text{ odd and } a-1, a, a+1 \notin \lambda\}.$$

为说明 ψ 映满 $\mathcal{I}_2(n)$，给定 $(\lambda,(a)) \in \mathcal{I}_2(n)$，令 $\mu = \lambda \cup \{a\}$ 并标记部分 a。则 $\mu \in \mathcal{S}_2(n)$ 且 $\psi(\mu) = (\lambda,(a))$。

（B）若 $c \neq 2$ 或 3（模 5），则 $c = 2k+1 \geq 5$，即 $k \geq 2$，并根据 y 的大小考虑若干子情形。

（i）若 $y = 2$ 或 3，则 $x \neq 0$，并定义

$$\psi(\mu) := (\widetilde{\mu} \setminus \{x\} \cup \{x+1\}, (2^k)).$$

就费雷尔图而言， ψ 从 μ 中移去长度为 c 的行，将下一部分 x 加一，并将 $c-1=2k$ 变换为一个矩形分拆 (a^b)，其中 $a=2$ 且 $b=k$。

注意，如果 $y=2$，那么 $x+1=2k$；如果 $y=3$，那么 $x+1=2k-1$。

在此情形下， $\mathcal{S}_2(n)$ 中过分拆子集在 ψ 下的像为

$$\mathcal{I}_3(n) := \left\{ (\lambda,(2^k)) \in \mathcal{S}_1(n) \middle| \begin{array}{l} k \geq 2, 2k \in \lambda \text{ and} \\ 2k-2, 2k+2 \notin \lambda \end{array} \right\} \bigcup \left\{ (\lambda,(2^k)) \in \mathcal{S}_1(n) \middle| \begin{array}{l} k \geq 2, 2k-1 \in \lambda \text{ and} \\ 2k-3, 2k+1, 2k+2 \notin \lambda \end{array} \right\}.$$

注意，在上面的第一个集合中，还有 $2k-1$ 和 $2k+1$ 不是 λ 的部分。不过，这显然成立，因为 $2k \in \lambda$ 和 $(\lambda,(2^k)) \in \mathcal{S}_1(n)$。类似地，在第二个集合中，$2k-2$，$2k \notin \lambda$；但我们不明确提及这一点，因为它可由 $2k-1 \in \lambda$ 和 $(\lambda,(2^k)) \in \mathcal{S}_1(n)$ 推出。在证明的其余部分，我们将不再明确写出这些排除条件。

显然，两个并集为 $\mathcal{I}_3(n)$ 的集合互不相交。为证明 ψ 是到 $\mathcal{I}_3(n)$ 上的满射，设 $(\lambda,(2^k)) \in \mathcal{I}_3(n)$。若 $2k \in \lambda$，则将部分 $2k$ 替换为部分 $2k-1$ 和 $2k+1$，并标记 $2k+1$。若 $2k \notin \lambda$，则 $2k-1 \in \lambda$，并将部分 $2k-1$ 替换为部分 $2k-2$ 和 $2k+1$，并标记 $2k+1$。我们得到一个分拆 $\mu \in S_2(n)$，使得 $\psi(\mu) = (\lambda,(2^k))$。

(ii)] 若 $y \geq 4$ 且 $c \equiv 0$（模 5），由于 c 是奇数，我们写作写作 $c = 10j+5 = 2(5j+2)+1$，其中 $j \geq 0$。注意，若 $j=0$，则 $x=0$。定义

$$\psi(\mu) := \begin{cases} (\widetilde{\mu} \setminus \{x\} \cup \{x+1\}, ((5j+2)^2)) & \text{if } x \neq 0 \\ (\widetilde{\mu} \cup (5j+3), (5j+2)) & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

用费雷尔图表示，若标记部件不是 μ 的最后一个部件， ψ 会移除 μ 中与标记部件 c 对应的行，将 x 的下一部件加 1，并将$c-1$ 变换为一个矩形分拆（a^b），其中 $a=(c-1)/2$ 且 $b=2$。若标记部件 c 是 μ 的最后一个部件， ψ 会从 μ中移除部件 c，并将其变换为 μ 中一个等于（$c+1$）/2 的新部件，以及一个矩形分拆（a^b），其中 $a=(c-1)/2$ 且 $b=1$。

在描述这种情况下 ψ 的像之前，我们先引入一些有用的记号。对于正整数 u，我们用 $z_{u,\lambda}$ 表示不大于 u 的 λ 的最大部分；这个记号隐含地表明， λ 中存在这样的部分。然后， ψ 下列

这种情况下 $\mathcal{S}_2(n)$ 中过分拆子集的像为

$$\mathcal{I}_4(n) := \left\{ (\lambda,(a^2)) \in \mathcal{S}_1(n) \,\middle|\, \begin{array}{l} a>2, a\equiv 2 \pmod 5 \text{ and} \\ 2a-1, 2a, 2a+1, 2a+2 \notin \lambda \\ z_{2a-2,\lambda} \geq 3 \text{ and } z_{2a-2,\lambda} - 2 \notin \lambda \end{array} \right\} \bigcup$$
$$\left\{ (\lambda,(a)) \in \mathcal{S}_1(n) \,\middle|\, \begin{array}{l} a \equiv 2 \pmod 5,\ a+1 \in \lambda \text{ and} \\ \text{if } z \leq 2a+2, z \neq a+1, \text{ then } z \notin \lambda \end{array} \right\}.$$

显然，两个并集为 $\mathcal{I}_4(n)$ 的集合是不相交的。为证明 ψ 是满射到 $\mathcal{I}_4(n)$，令 $(\lambda,(a^k)) \in \mathcal{I}_4(n)$。于是 $a \equiv 2$ (模 5)，且 $k=1$ 或 2。若 $k=2$，我们将 λ 中不大于 $2a-2$ 的最大部分加 1，并在λ中插入一个等于 $2a-1$ 的部分并将其标记。若 $k=1$，则将 a 加到 λ 中最小的部分上，并标记所得的部分。我们得到一个分拆 $\mu \in S_2(n)$，使得 $\psi(\mu) = (\lambda,(a^k))$。

(iii) 若 $y \geq 4$ 和 $c \equiv 4$ (模 5)，由于 c 是奇数，我们写写 $c = 10j+9 = 2(5j+3)+3$，其中 $j \geq 0$。定义

$$\psi(\mu) := \begin{cases} (\widetilde{\mu} \setminus \{x\} \cup \{x+3\}, ((5j+3)^2)) & \text{if } x \neq 0 \\ (\widetilde{\mu} \cup \{3\}, ((5j+3)^2)) & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

就费雷尔图而言， ψ 移除 μ 中与标记部分 c对应的行；如果满足 $x \neq 0$ ，则将下一部分 x 加上 3；如果满足 $x=0$，则在 μ 中插入若干个等于 3 的部分；并将 $c-3$ 变换为一个矩形分拆（a^b），其中有 $a =$（$c-3$）$/2$ 和 $b=2$。

$\mathcal{S}_2$（n）中过分拆子集在 ψ 下的像在此情形下为

$$\mathcal{I}_5(n) :=$$
$$\left\{ (\lambda,(a^2)) \in \mathcal{S}_1(n) \,\middle|\, \begin{array}{l} a \equiv 3 \pmod 5 \text{ and} \\ 2a+3, 2a+4 \notin \lambda \\ z_{2a+2,\lambda} \geq 5 \text{ and } z_{2a+2,\lambda} - t \notin \lambda \text{ for } t = 2,3,4 \end{array} \right\} \bigcup$$
$$\left\{ (\lambda,(a^2)) \in \mathcal{S}_1(n) \,\middle|\, \begin{array}{l} a \equiv 3 \pmod 5,\ 3 \in \lambda \text{ and} \\ \text{if } z \leq 2a+4, z \neq 3, \text{ then } z \notin \lambda \end{array} \right\}.$$

考虑小于或等于 $2a+2$的部分，我们看到，其并集为 $\mathcal{I}_5$（n）的两个集合是不相交的。为证明 ψ 是满射到 $\mathcal{I}_5$（n）上，令（λ，（a^2））$\in \mathcal{I}_5$（n）。如果 3 是唯一一个小于或等于 $2a+4$的部分，则从 λ中移除部分 3。否则，从 λ中小于或等于 $2a+2$的最大部分减去 3。最后，在 λ中插入并标记一个等于 $2a+3$ 的部分。我们得到一个分拆 $\mu \in S_2$（n），使得 ψ（μ）=（λ，（a^2））。

(iv) 若 $y \geq 4$ 且 $c \equiv 1$（模 5），由于 c 是奇数，我们写作 $c = 10j+1$，其中 $j \geq 1$。若对于某个 $h \geq 0$，有 $c = 20h+11 = 4$（$5h+2$）$+3$，则定义

$$\psi(\mu) := \begin{cases} (\widetilde{\mu} \setminus \{x\} \cup \{x+3\}, ((5h+2)^4)) & \text{if } h>0, x \neq 0 \\ (\widetilde{\mu} \cup \{3\}, ((5h+2)^4)) & \text{if } h>0, x = 0 \\ (\widetilde{\mu} \setminus \{x\} \cup \{x+2\}, (3^3)) & \text{if } h=0, x \neq 0 \\ (\widetilde{\mu} \cup \{2\}, (3^3)) & \text{if } h=0, x = 0. \end{cases}$$

ψ 下， $\mathcal{S}_2$（n）中该过分拆子集的像为

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_6(n) := \\
&\left\{(\lambda,(a^4)) \in \mathcal{S}_1(n) \,\middle|\, \begin{array}{l} a \equiv 2 \pmod 5, a>2 \text{ and} \\ 4a+3, 4a+4 \notin \lambda \\ z_{4a+2,\lambda} \geq 5 \text{ and } z_{2a+2,\lambda} - t \notin \lambda \text{ for } t=2,3,4 \end{array}\right\} \bigcup \\
&\left\{(\lambda,(a^4)) \in \mathcal{S}_1(n) \,\middle|\, \begin{array}{l} a \equiv 2 \pmod 5, a>2,\ 3 \in \lambda \text{ and} \\ \text{if } z \leq 4a+4, z \neq 3, \text{ then } z \notin \lambda \end{array}\right\} \bigcup \\
&\left\{(\lambda,(3^3)) \in \mathcal{S}_1(n) \,\middle|\, \begin{array}{l} 10,11,12 \notin \lambda \\ \text{if } z_{9,\lambda} \geq 4 \text{ and } z_{9,\lambda} - t \notin \lambda \text{ for } t=2,3 \end{array}\right\} \bigcup \\
&\left\{(\lambda,(3^3)) \in \mathcal{S}_1(n) \,\middle|\, \begin{array}{l} 2 \in \lambda \text{ and} \\ \text{if } z \leq 12, z \neq 2, \text{ then } z \notin \lambda \end{array}\right\}.
\end{aligned}$$

考察小于或等于 $4a+2$ 且满足 $a \equiv 2 \pmod 5$ 的部分，以及其他情况下小于 10 的部分，可以看出，其并集为 $\mathcal{I}_6(n)$ 的四个集合两两不相交。与前面的情形一样，可以验证 ψ 是到 $\mathcal{I}_6(n)$ 的满射。

若 $c = 20h+1$ 对某个 $h \geq 1$ 成立，则写作 $c = 3m+r$，其中 $0 \leq r \leq 2$。注意， $m \geq 7$。此外，若 $r=0$，则 $m \equiv 7 \pmod{20}$；若 $r=1$，则 $m \equiv 0 \pmod{20}$；若 $r=2$，则 $m \equiv 13 \pmod{20}$。我们定义

$$\begin{aligned}
&\psi(\mu) := \\
&\begin{cases}
(\widetilde{\mu} \setminus \{x\} \cup \{x+r\}, (3^m)) & \text{if } x \neq 0 \\
\widetilde{\mu} \cup \{r\}, (3^m)) & \text{if } x = 0, r \neq 1 \\
(\widetilde{\mu} \cup \{5(h-1)+8, 5(h-1)+6, 5(h-1)+4\}, (5(h-1)+3)) & \text{if } x = 0, r = 1.
\end{cases}
\end{aligned}$$

在这种情况下， ψ 对 $\mathcal{S}_2(n)$ 中过分拆子集的像为

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_7(n) := \\
&\left\{(\lambda,(3^m)) \in \mathcal{S}_1(n) \,\middle|\, \begin{array}{l} m \equiv 7 \pmod{20} \text{ and} \\ 3m-3, 3m-2, 3m-1, 3m, 3m+1 \notin \lambda \\ \text{There is } z \in \lambda, z \leq 3m-4 \end{array}\right\} \bigcup \\
&\left\{(\lambda,(3^m)) \in \mathcal{S}_1(n) \,\middle|\, \begin{array}{l} m \equiv 0 \pmod{20}, m>0 \text{ and} \\ 3m+1, 3m+2 \notin \lambda \\ z_{3m-2,\lambda} \geq 3 \text{ and } z_{3m-2,\lambda} - 2 \notin \lambda \end{array}\right\} \bigcup \\
&\left\{(\lambda,(3^m)) \in \mathcal{S}_1(n) \,\middle|\, \begin{array}{l} m \equiv 13 \pmod{20} \text{ and} \\ 3m+1, 3m+2, 3m+3 \notin \lambda \\ z_{3m,\lambda} \geq 4 \text{ and } z_{3m,\lambda} - t \notin \lambda \text{ for } t=2,3 \end{array}\right\} \bigcup \\
&\left\{(\lambda,(3^m)) \in \mathcal{S}_1(n) \,\middle|\, \begin{array}{l} m \equiv 7 \pmod{20} \text{ and} \\ \text{if } z \leq 3m+1, \text{ then } z \notin \lambda \end{array}\right\} \bigcup \\
&\left\{(\lambda,(3^m)) \in \mathcal{S}_1(n) \,\middle|\, \begin{array}{l} m \equiv 13 \pmod{20}, 2 \in \lambda \text{ and} \\ \text{if } z \leq 3m+3, z \neq 2, \text{ then } z \notin \lambda \end{array}\right\} \bigcup \\
&\left\{(\lambda,(a)) \in \mathcal{S}_1(n) \,\middle|\, \begin{array}{l} a \equiv 13 \pmod{15}, a+1, a+3, a+5 \in \lambda \text{ and} \\ \text{if } z \leq 4a+10, z \neq a+1, a+3, a+5, \text{ then } z \notin \lambda \end{array}\right\}.
\end{aligned}$$

显然，其并集为 $\mathcal{I}_7(n)$ 的六个集合两两不相交。

仔细观察可知，集合 $\mathcal{I}_j$、 $1 \le j \le 7$ 两两不相交。它们的并集是 $\mathcal{S}_2(n)$ 在 ψ 下的像。因此，所有部件与 $\pm 2 \pmod 5$ 同余的 n 分拆中的部分总数，减去所有具有大于1的超互异部分的 n 分拆中的部分总数，其差等于 $|\mathcal{S}(n)|$，其中

$$\mathcal{S}(n) := \mathcal{S}_1(n) \setminus \bigcup_{j=1}^{7} \mathcal{I}_j. \tag{18}$$

□

例 2. 设 $n = 4$。唯一一个所有部分都与 ± 2 (模 5) 同余的分拆是 (2, 2)，它有两个部分。唯一一个由大于1的超互异部分组成的分拆是 (4)，它有一个部分。在 $\mathcal{S}(4)$ 中唯一的一对分拆是 $(\lambda, (a^b)) = ((2), (2))$。显然，$((2), (2)) \in \mathcal{S}_1(4)$。由于 $a = 2$ 和 $b = 1$，对于 $j = 2$、 3、 5、 6、7，该分拆对不属于 $\mathcal{I}_j(4)$。该分拆对不属于 $\mathcal{I}_1(4)$，因为 $2b = 2$ 是 $\lambda = (2)$ 的一个部分。此外，该分拆对不属于 $\mathcal{I}_2(4)$，因为 $a + 1 = 3$ 不是 $\lambda = (2)$ 的一个部分。

注 3. 上述单射 ψ 的构造表明，很可能还存在其他单射选择。欢迎提出一种更简单的单射，使其像在 $\mathcal{S}_1(n)$ 中的补集有简洁的描述。

References

[1] G. E. Andrews, 《罗杰斯–拉马努金–戈登恒等式的解析证明》, 《美国数学杂志》88(1966), 844–846.[2] ———, 《分拆理论》, 1976年原版重印。剑桥数学文库。剑桥大学出版社，剑桥，1998。255页。[3] ———, 硬六角模型与 Rogers-Ramanujan 型恒等式, 《美国国家科学院院刊》78 (1981), 第9期，第1部分，5290–5292.[4] ———, Euler 分拆恒等式与 George Beck 的两个问题。《数学学生》86 (2017), 第1–2期，115–119.[5] G. E. Andrews 和 C. Ballantine，近似分拆恒等式, 《美国国家科学院院刊》116 (2019)。第12期，5428–5436.[6] G. E. Andrews 和 K. Eriksson, 《整数分拆》, 剑桥大学出版社，2014。[7] C. Ballantine 和 R. Bielak，Andrews 提出的两个 Euler 型恒等式的组合证明。《组合数学年刊》23 (2019), 第3–4期，511–525.[8] C. Ballantine 和 A. Welch，通过模精化得到 Franklin 恒等式的 Beck 型伴随恒等式。《离散数学》344 8 (2021), 112480.[9] ———, 阶数为 r 的 Euler 对的 Beck 型恒等式, 《代数、组合学、几何与数论中的超越性》, PROMS 373，施普林格 (2021), 141–161.[10] W. D. Duke，连分数与模函数, 《美国数学会通报》42 (2005), 137–162.[11] A. Folsom，Selberg 的模单位与 q-差分方程, 《数学研究快报》17 (2010), 第2期，283–299.[12] M. J. Griffin、K. Ono 和 S. O. Warnaar, Rogers-Ramanujan 恒等式框架及其算术性质, 《杜克数学杂志》165 (2016), 第8期，1475–1527.[13] J. Lepowsky 和 R. L. Wilson，罗杰斯–拉马努金恒等式的李理论解释与证明, 《数学进展》45 (1982), 第1期，21–72.[14] ———,支撑 Rogers-Ramanujan 恒等式及其推广的一个新代数族, 《美国国家科学院院刊》78 (1981), 第12期，第1部分，7254–7258.[15] R. Li 和 A. Y. Z. Wang，与两个五阶假 theta 函数相关的分拆及 Beck 型恒等式。《国际数论杂志》(2020), 第4期，841–855.[16] 《整数数列在线百科全书》, 数列 A090867，https://oeis.org/A090867

[17] L. J. Rogers，关于某些无限乘积展开的第二篇回忆录，伦敦数学会会刊 25 (1894), 318–343.[18] L. J. Rogers 和 S. Ramanujan，组合分析中某些恒等式的证明，剑桥哲学会会刊 19 (1919), 211–216.[19] I. Schur，《对加法数论和连分数理论的贡献》，Sitzungsber.Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Klasse (1917) 302–321. ¨A. V. Sills，《罗杰斯–拉马努金恒等式导论》，George E. Andrews 作序。CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2018。233页。[20] L. Slater，Rogers-Ramanujan 型恒等式的进一步结果，伦敦数学会会刊 (2) 54 (1952), 147–167.[21] M. V. Subbarao，欧拉对的分拆定理。美国数学会会刊 28 (1971), 330–336.[22] J. Y. X. Yang，与 Euler 分拆定理相关猜想的组合证明与推广。《欧洲组合学杂志》76 (2019), 62–72。

Acknowledgements

作者感谢浦那印度科学教育与研究学院于2021年7月举办的Subbarao百年诞辰研讨会的组织者；此次合作正是在研讨会之后开始的。第二作者部分受美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-1901791。

Department of Mathematics and Computer Science, College of the Holy Cross, Worces-ter, MA 01610, USA电子邮箱：cballant@holycross.edu

Department of Mathematics and Statistics, Amherst College, Amherst, MA 01002, USA电子邮箱: afolsom@amherst.edu