arXiv:2303.03337v2 [math.RT] 9 Feb 2024

# $A_2$ 型不可约模融合积的分次特征公式与 Littlewood-Richardson 系数

TANUSREE KHANDAI 和 SHUSHMA RANI

ABSTRACT. 我们研究 $\mathfrak{sl}_3$ 的一类特定 Chari–Venkatesh 模，并为这些模建立了一个正合列。通过维数论证，我们证明该模同构于不可约模的融合积，从而为融合积与参数无关这一猜想提供了一种新的证明。通过分析正合列中核的滤过，我们推导出融合积模的分次特征公式。此外，我们利用分次特征推导出 Littlewood-Richardson（LR）系数的代数刻画，并给出了 $A_2$ 型饱和定理的另一种证明。

## 1. 引言

设 $\mathfrak{g}$ 是复数域上的有限维单李代数， $\mathfrak{g}[t]$ 是相应的流代数。本文研究 $\mathfrak{sl}_3[t]$ 模的一类分次有限维表示，称为融合积模。众所周知，这类模推广了流李代数的若干重要表示类，例如局部 Weyl 模、Demazure 模和 Kirillov-Reshitikhin 模。

对于任意 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathbb{C}^k$， 不可约 $\mathfrak{g}$-模 $V(\lambda_1)$、 $V(\lambda_2)$ $\cdots$、$V(\lambda_k)$ 的张量积，其最高权为 $\lambda_1$、 $\cdots$、 $\lambda_k$，并获得如下所述的 $\mathfrak{g}[t]$-模结构，称为求值模：

$$x \otimes P(t).v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k = \sum_{i=1}^{k} P(a_i) v_1 \otimes \cdots v_{i-1} \otimes x.v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots v_k.$$

我们将这个 $\mathfrak{g}[t]$-模记为 $V(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{a})$，其中 $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$。当 $a_i$ 彼此均不同时，$V(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{a})$ 是一个不可约 $\mathfrak{g}[t]$-模。在不可约 $\mathfrak{g}[t]$-模 $V(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{a})$ 上构造一个 $\mathfrak{g}$-等变滤过，其对应的融合积 $V(\lambda_1)^{a_1} * \cdots * V(\lambda_k)^{a_k}$，最初发表于 [7]。提出这些模是为了构造 Kostka 多项式的推广版本，

2010 *Mathematics Subject Classification.* 17B10, 52B20, 17B67, 05E10。1

并且有人猜想，作为一个 $\mathfrak{g}[t]$-模，它们与求值点无关。尽管这一猜想尚未得到彻底解决，但已有研究表明，在若干特殊情形下该猜想成立[4, 8, 14, 9, 10, 13, 6, 14, 1]。

$_n$给定一个主导整权 $\lambda = \sum r_i\omega_i$，带有$_{i=1}$最高权 $\lambda$ 的 $\mathbb{Z}_+$分次循环 $\mathfrak{g}[t]$模 $W_{loc}(\lambda)$ 在 [5] 中被引入。该模称为最高权为 $\lambda$ 的局部 Weyl 模。它通过生成元与关系来定义，并具有如下性质：每个由权为 $\lambda$ 的最高权向量生成的有限维循环 $\mathfrak{g}[t]$ 模，都是局部 Weyl 模 $W_{loc}(\lambda)$ 的商模。根据构造，求值模的融合积是流李代数的最高权循环表示，因此是局部 Weyl 模的商模。此外，融合积模的底层向量空间以及相应的维数均已知。在 [4]，中，通过为 $\mathfrak{sl}_{n+1}[t]$ 上的局部 Weyl 模构造显式基，证明了$W_{loc}(\lambda)$ 的维数等于融合积 $V(\omega_1)^{z_{11}} * \cdots * V(\omega_1)^{z_{1r_1}} * \cdots * V(\omega_n)^{z_{nr_n}}$ 的维数，从而证明 $\mathfrak{sl}_{n+1}$ 的最高权为 $\lambda$ 的基本表示的融合积实际上与 $W_{loc}(\lambda)$ 同构。这为 $\mathfrak{sl}_{n+1}$ 的基本表示融合积情形下 [4] 中的猜想提供了证明。在 [6]，中，引入了称为 Chari-Venkatesh（CV）模的局部 Weyl 模的适当商模。再次通过确定这一新模族的显式基，证明了 $\mathfrak{sl}_2[t]$ 上的每个融合积模都同构于一个 Chari-Venkatesh 模，并由此为 $A_1$ 型的 $\mathfrak{g}$ 在 [4] 中的猜想提供了另一种证明。

Chari-Venkatesh 模是局部 Weyl 模的一族有限维商模，由 [6] 引入。这些模与一族分拆 $\boldsymbol{\xi}$ 相关联，这些分拆由 $\mathfrak{g}$ 的正根集合索引，并满足某些自然的相容条件。近年来，由于它们与不可约模的融合积之间有着显著的联系，以及它们在研究融合积对参数的独立性方面所发挥的作用，这些模受到了广泛关注。本文聚焦于 $\mathfrak{sl}_3[t]$ 上一类特定的 Chari-Venkatesh 模。

我们的主要目标是探究 $\mathfrak{sl}_3[t]$ 上 CV-模的性质，并进一步深入理解其结构。为此，我们为这些模给出了一个正合列，为理解它们之间的相互关系提供了全新的视角。通过维数论证，我们证明了 CV 模与某些融合积之间的同构，从而为关于融合积与参数无关的猜想提供了一种有力的新证明。关于

A2 型的两个不可约模 $A_2$ 已在 [1]中得到解决。然而，我们的研究方法有所不同。事实上，在第6.6节中，我们通过一个例子表明，我们的方法甚至可以扩展到理解两个以上不可约 $\mathfrak{sl}_3[t]$-模的融合积结构。

此外，我们研究了正合列中核的滤过，并由此推导出融合积模的分次特征公式。该公式使我们得以对 Littlewood-Richardson（LR）系数——对称群表示论中的一个基础主题——给出代数刻画。从分次特征中获得的见解，有助于为 $A_2$ 型的饱和定理提供另一种证明。总之，本文全面研究了 $\mathfrak{sl}_3[t]$ 上的 CV-模，揭示了它们与融合积及 LR 系数之间错综复杂的关系。

本文结构如下。在第 2 节中，我们确立记号，并回顾局部 Weyl 模和融合积模的定义。在第 3 节中，我们回顾 [6, 3] 中引入的 Chari-Venkatesh 模的定义及其性质。在第 4 节中，我们从主定理4.2 的陈述出发，研究与 $\mathfrak{sl}_3$ 的一对主导整权相关的 Chari-Venkatesh 模。我们证明，可以为这样的模构造一系列 $\mathfrak{sl}_3[t]$-模的短正合列。在第 5 节和第 6 节中，我们分析这些短正合列，并对相应的模运用维数论证，从而完成主要结果的证明。在第 7 节中，我们给出融合积模的分次特征，并据此推导出 Littlewood-Richardson 系数的另一种定义，见定理 7.1。在第 8 节中，我们为 $A_2$ 型模的饱和张量积定理给出另一种证明。本研究有助于加深对 CV-模及其与融合积和某些组合恒等式之间联系的理解。

致谢。作者谨向 Vyjayanthi Chari 教授表示感谢，感谢她就本研究提出了相关问题；感谢 Niranjan Nehra 参与最初的讨论，并感谢 Mrigendra Singh Kushwava 就饱和张量积定理进行的讨论。此外，第二作者感谢 CSIR-SRF资助，项目编号为 09/947(0082)/2017-EMR-I。

## 2. Preliminaries

在本文中，$\mathbb{C}$ 表示复数域，$\mathbb{Z}$ 表示整数集，$\mathbb{Z}_+$（分别是 $\mathbb{N}$）表示非负整数集（分别是正整数集）。

2.1. 令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ 为迹为零的 $3 \times 3$ 矩阵李代数， $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 中由对角矩阵组成的嘉当子代数。令 $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ 为相对于 $\mathfrak{h}$的 $\mathfrak{g}$ 的单根，$\theta = \alpha_1 + \alpha_2$ 为 $\mathfrak{g}$ 的最长根， $R^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \theta\}$ （分别是 $R^- = -R^+$）为相对于 $\Delta$的 $\mathfrak{g}$ 的正根（负根）集合。令 $\{\omega_i : i = 1, 2\}$ 为与 $\{\alpha_i : i = 1$对偶的 $\mathfrak{g}$ 的基本权， $2\}$、 $P = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ （分别是 $Q = \mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_2$）为 $\mathfrak{g}$ 的权格（分别为 $P^+ = \mathbb{Z}_+\omega_1 + \mathbb{Z}_+\omega_2$ 的根格）。对于 $\alpha \in R^+$，令 $\mathfrak{g}_\alpha$ 为相应的根空间。对于 $\alpha_i \in \Delta$，取非零元素 $x^{\pm}_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha_i}$ 和 $h_{\alpha_i} \in \mathfrak{h}$ ，使得

$$[h_{\alpha_i}, x^{\pm}_{\alpha_i}] = \pm 2x^{\pm}_{\alpha_i} \quad [h_{\alpha_i}, x^{\pm}_{\alpha_i}] = \pm 2x^{\pm}_{\alpha_i}.$$

于是， $\mathfrak{g}_{\pm\theta}$由 $x^{\pm}_\theta = \pm[x^{\pm}_{\alpha_1}, x^{\pm}_{\alpha_2}]$和 $h_\theta = [x^+_\theta, x^-_\theta] = h_{\alpha_1} + h_{\alpha_2}$张成。令 $\mathfrak{n}^{\pm} = \underset{\alpha\in R^+}{\oplus} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$.

对于 $\lambda \in P^+$，令 $V(\lambda)$ 表示具有最高权向量 $v_\lambda$ （其权为 $\lambda$）的不可约有限维 $\mathfrak{g}$-模，即由 $v_\lambda$ 生成并满足以下定义关系的循环模:

$$\mathfrak{n}^+.v_\lambda = 0, \quad h.v_\lambda = \lambda(h)v_\lambda, \quad (x^-_{\alpha_i})^{\lambda(h_{\alpha_i})+1}v_\lambda = 0, \qquad \forall\, h \in \mathfrak{h} \,\text{and}\, i = 1, 2. \tag{2.1}$$

令 $W$为 $\mathfrak{g}$的韦伊群， $w_0$为 $W$的最长元素。于是对于所有 $\lambda \in P^+$，模 $V(-w_0\lambda)$ 是 $V(\lambda)$ 的 $\mathfrak{g}$-对偶。

令 $\mathbb{Z}[P]$为具有整数系数、以 $e(\mu)$（对于 $\mu \in P$）为基的 $P$的群环。 $\mathfrak{g}$-模 $V(\lambda)$ 的特征是 $\mathbb{Z}[P]$ 中的如下元素:

$$\mathrm{ch}_{\mathfrak{g}} V(\lambda) = \sum_{\mu\in P} \dim V(\lambda)_\mu e(\mu), \qquad \text{where } V(\lambda)_\mu = \{v \in V(\lambda) : hv = \mu(h)v\, \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

2.2. 设 $\mathfrak{g}[t]$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的流形代数。作为向量空间， $\mathfrak{g}[t] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$，其中 $\mathbb{C}[t]$ 表示以不定元 $t$ 为变量的多项式环。显然， $\mathfrak{g}[t]$ 是一个李代数，其李括号定义为

$$[a \otimes f, b \otimes g] = [a, b] \otimes fg, \qquad \forall\, a, b \in \mathfrak{g},\ f, g \in \mathbb{C}[t].$$

$\mathbb{C}[t]$ 具有由多项式次数确定的自然 $\mathbb{Z}_+$ 分次。令 $\mathrm{U}(\mathfrak{g}[t])$ 表示 $\mathfrak{g}[t]$ 的泛包络代数。赋予从 $\mathfrak{g}[t]$ 继承的 $\mathbb{Z}_+$ 分次后，$\mathrm{U}(\mathfrak{g}[t])$ 是 $\mathbb{Z}_+$ 分次的。我们称 $\mathrm{U}(\mathfrak{g}[t])$ 中的元素 $X \in$ 具有等级 $r_1 + r_2 + \cdots + r_p$，如果 $X$ 的形式为 $(x_{\alpha_1} \otimes t^{r_1})(x_{\alpha_2} \otimes t^{r_2}) \cdots (x_p \otimes t^{r_p})$。对于正整数 $s$，我们将 $\mathrm{U}(\mathfrak{g}[t])$ 中由 $s$ 分次元素张成的子空间记为 $\mathrm{U}(\mathfrak{g}[t])[s]$ 。

对于每个 $\alpha \in R^+$，定义关于不定元 $u$ 的幂级数：

$$H_\alpha(u) = \exp\left(-\sum_{r=1}^{\infty} \frac{h_\alpha \otimes t^r}{r} u^r\right),$$

对于 $r$、$s \in \mathbb{N}$，定义集合

$$S(r,s) = \{(b_p)_{p\geq 0} : b_p \in \mathbb{Z}_+, \sum_{p\geq 0} b_p = r, \sum_{p\geq 0} p b_p = s\}, \qquad x(r,s) = \sum_{(b_p)_{p\geq 0}\in S(r,s)} \prod_{i=0}^{s} (x\otimes t^i)^{(b_i)}.$$

以下结果已在 [11, 引理 7 中得到证明。5] 并在 [5, 引理 1 中表述为3] 如下。

引理。给定 $s \in \mathbb{N}$、$r \in \mathbb{Z}_+$ 和 $\alpha \in R^+$，有

$$(x_\alpha^+ \otimes t)^{(s)}(x_\alpha^- \otimes 1)^{(r+s)} - (-1)^s (\sum_{k\geq 0} x_\alpha^-(r, r+s-k) P_\alpha(u)_k) \in \mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])\mathfrak{n}^+[t]. \tag{2.2}$$

其中，$P_\alpha(u)_k$ 表示幂级数 $H_\alpha(u)$ 中 $u^k$ 的系数，并且 $(y)^{(s)} := \frac{y^s}{s}!$ 对于 $y \in \mathfrak{g}[t]$。

2.3. $\mathfrak{g}[t]$ 的分次表示是一个 $\mathbb{Z}_+$-分次向量空间，满足

$$V = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}_+} V[r], \qquad \mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])[s].V[r] \subseteq V[r+s], \ \forall\, r,s \in \mathbb{Z}_+.$$

若 $U$、$V$ 是 $\mathfrak{g}[t]$的两个分次表示，则称 $\psi: U \to V$ 为分次 $\mathfrak{g}[t]$-模之间的态射，若对所有 $r \in \mathbb{Z}_+$，都有 $\psi(U[r]) \subseteq V[r]$。对于 $s \in \mathbb{Z}$，令 $\tau_s^*$为由下式给出的分次移位算子

$$\tau_s^*(V)[k] = V[k-s] \qquad \forall\ k \in \mathbb{Z}_+,$$

以及 $\mathfrak{g}[t]$的分次表示 $V$。给定 $z \in \mathbb{C}$ 和一个 $\mathfrak{g}$-模 $U$，令 $\mathsf{ev}_z(U)$表示对应于 $\mathfrak{g}[t]$的求值模。显然，对于 $z = 0$，$\mathsf{ev}_0(U)$是一个分次表示，并且 $\mathsf{ev}_0(U)[0] = U$.

2.4. 对于 $\lambda \in P^+$，局部 Weyl 模 $W_{loc}(\lambda)$是由元素 $w_\lambda$生成的 $\mathfrak{g}[t]$-模，其定义关系如下：

$$(\mathfrak{n}^+ \otimes \mathbb{C}[t])w_\lambda = 0, \quad (h_{\alpha_i}\otimes t^s)w_\lambda = \lambda(h_{\alpha_i})\delta_{s,0} w_\lambda, \quad (x_{\alpha_i}^-\otimes 1)^{\lambda(h_{\alpha_i})+1} w_\lambda = 0, \tag{2.3}$$

对于所有 $i = 1$、2 和 $s \in \mathbb{Z}_+$。显然，$W_{loc}(\lambda)$ 是一个分次 $\mathfrak{g}[t]$ 模，并且每个最高权为 $\lambda$ 的有限维循环模都是 $W_{loc}(\lambda)$ 的商模。这些模最早在 [5] 中引入。

2.5. 给定一个由支配积分权 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_s) \in (P^+)^s$ 和 $\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_s)$ 组成的 $s$ 元组，其中 $s$ 是一个由互不相同的复数组成的元组，文献 [2] 证明了求值模 $V(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z})$ 是一个不可约 $\mathfrak{g}[t]$ 模。$\mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])$ 中的 $\mathbb{N}$ 分次在 $V(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z})$ 上诱导出一个 $\mathfrak{g}$ 等变分次，其定义如下：

$$V(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z})[k] = \bigoplus_{0 \le r \le k} \mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])[r].v_1 \otimes \cdots \otimes v_s,$$

其中 $v_i$ 是 $1 \le i \le s$ 的 $V(\lambda_i)$ 的生成元。关联分次 $\mathfrak{g}[t]$-模

$$V(\lambda_1)^{z_1} * \cdots * V(\lambda_s)^{z_s} := V(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z})[0] \oplus \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \frac{\mathbf{V}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z})[k]}{\mathbf{V}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z})[k-1]}$$

称为 $V(\lambda_1)$ $\cdots$、 $V(\lambda_s)$ 在 $\mathbf{z}$ 处的融合积。这些模是在 [7 中引入的 ].

在此背景下，下面的引理很有用：

引理。设 $V(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z})$ 是一个不可约的 $\mathfrak{g}[t]$-模。若对于 $v \in \mathbf{V}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z})$， $\bar{v}$ 表示其在$V(\lambda_1)^{z_1} * \cdots * V(\lambda_s)^{z_s}$ 中的像，则

$$x \otimes t^p.\bar{v} = x \otimes (t - a_1) \cdots (t - a_p).\bar{v}, \quad \forall\ x \in \mathfrak{g},\ \textit{and}\ a_1, \cdots, a_p \in \mathbb{C}.$$

注。给定一个由主导整权 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 构成的 $k$-元组，以及一个由两两不同的复数 $\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_k)$ 构成的元组，融合积模 $V(\lambda_1)^{z_1} * \ldots * V(\lambda_k)^{z_k}$ 是一个循环、有限维的最高权模，其最高权为 $\sum \lambda_i$。因此，根据局部 Weyl 模的泛性质 $_{i=1}^{k}$，它是 $W_{loc}(\sum_k \lambda_i)$ 的商模。由于给定融合积的底层向量空间为 $\bigotimes_{i=1}^{k} V(\lambda_i)$，故 $V(\lambda_1)^{z_1} * \ldots * V(\lambda_k)^{z_k}$ 的维数等于 $\prod_{i=1} \dim V(\lambda_i)$。

## 3. The Chari Venkatesh Modules

本节回顾 Chari 和 Venkatesh 在 [6] 中引入的一族局部 Weyl 模的商模的定义和性质。这些模称为 Chari Venkatesh 模（$CV$-模）。

定义。给定 $\lambda \in P^+$，若一个 $|R^+|$ 分拆组 $\boldsymbol{\xi} = (\xi^\alpha)_{\alpha \in R^+}$，则称其为 $\lambda$-相容的，条件是：

$$\xi^\alpha = (\xi_1^\alpha \ge \xi_2^\alpha \ge \cdots), \quad \text{and} \quad \sum_{i \ge 1} \xi_i^\alpha = \lambda(h_\alpha), \quad \forall\ \alpha \in R^+.$$

设 $\Xi_\lambda$ 为所有 $\lambda$-相容的 $R^+$ 分拆组的集合。给定一个 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_\alpha)_{\alpha\in R^+}\in\Xi_\lambda$，Chari-Venkatesh 模 $V(\boldsymbol{\xi})$ 定义为由一个非零向量 $v_{\boldsymbol{\xi}}$ 生成的循环 $\mathfrak{g}[t]$-模，并满足以下定义关系：

$$(\mathfrak{n}^+\otimes\mathbb{C}[t])v_{\boldsymbol{\xi}}=0,\quad (h_{\alpha_i}\otimes t^s)v_{\boldsymbol{\xi}}=\lambda(h_{\alpha_i})\delta_{s,0}v_{\boldsymbol{\xi}},\quad (x^-_{\alpha_i}\otimes 1)^{\lambda(h_{\alpha_i})+1}v_{\boldsymbol{\xi}}=0,\quad \text{for } i=1,2, \tag{3.1}$$

$$(x^+_\alpha\otimes t)^{(s)}(x^-_\alpha\otimes 1)^{(r+s)}v_{\boldsymbol{\xi}}=0,\quad \alpha\in R^+, r,s\in\mathbb{N}, s+r\geq 1+rk+\sum_{j\geq k+1}\xi^\alpha_j,\ \text{for } k\in\mathbb{N}. \tag{3.2}$$

根据定义，$CV$-模 $V(\boldsymbol{\xi})$ 是局部 Weyl 模 $W_{loc}(\lambda)$ 对由分次元素生成的子模取商所得的分次商模

$$\{(x^+_\alpha\otimes t)^{(s)}(x^-_\alpha\otimes 1)^{(r+s)}w_\lambda : \alpha\in R^+, r,s\in\mathbb{N}, s+r\geq 1+rk+\sum_{j\geq k+1}\xi^\alpha_j,\ \text{for } k\in\mathbb{N}\}.$$

3.1. 对于 $k\in\mathbb{Z}_+$ 和 $r,\ s\in\mathbb{N}$，令，

$${}_kS(r,s)=\{(b_p)_{p\geq 0}\in S(r,s):\ b_p=0,\ \text{对于 } p<k\},\quad S(r,s)_k=\{(b_p)_{p\geq 0}\in S(r,s):\ b_p=0,\ \text{对于 } p\geq k\},$$

$${}_kx(r,s)=\sum_{(b_p)_{p\geq 0}\in {}_kS(r,s)}\prod\nolimits_{i=0}^s(x\otimes t^i)^{(b_i)},\quad x(r,s)_k=\sum_{(b_p)_{p\geq 0}\in S(r,s)_k}\prod\nolimits_{i=0}^s(x\otimes t^i)^{(b_i)}$$

以下引理已在 [6, 引理 2.5，命题 26]中证明。

引理。设 $r$、$s$、$k\in\mathbb{N}$ 和 $L\in\mathbb{Z}_+$ 满足 $r+s\geq kr+L$。则有如下结论。

(i) 对于 $\alpha\in R^+$,

$$x^-_\alpha(r,s)={}_kx^-_\alpha(r,s)+\sum_{(r',s')}x^-_\alpha(r-r',s-s')_k\ {}_kx^-_\alpha(r',s'),$$

其中求和遍历所有满足 $r'<r$、$s'<s$ 和 $r'+s'\geq r'k+L$. 的数对 $r'$、$s'\in\mathbb{N}$

(ii) 若 $V$ 是一个 $\mathfrak{g}[t]$-模且 $v\in V$，则对于 $\alpha\in R^+$,

$$x^-_\alpha(r,s)v=0,\quad \textit{if and only if }\ {}_kx^-_\alpha(r,s).v=0.$$

以下引理由引理2.2, [6, 命题 2.6]推得。

引理。给定一个 $R^+$-分拆组 $\boldsymbol{\xi} = (\xi^\alpha)_{\alpha\in R^+}$，设 $V(\boldsymbol{\xi})$ 为相应的 $CV$-模，其生成元为 $v_{\boldsymbol{\xi}}$。则对所有 $\alpha \in R^+$，有

$$(x_\alpha^+ \otimes t)^{(r)}(x_\alpha^- \otimes 1)^{(r+s)}.v_{\boldsymbol{\xi}} = x_\alpha^-(r,s).v_{\boldsymbol{\xi}}, \tag{3.3}$$

$$(x_\alpha^-(r,s) - {}_1x_\alpha^-(r,s))v_{\boldsymbol{\xi}} \in \sum_{r'<r} \mathbf{U}(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}))x_\alpha^-(r',s)v_{\boldsymbol{\xi}}, \tag{3.4}$$

证明。 根据上述引理 3.1 的第(2)部分，对于 $r$， $s$， $k \in \mathbb{N}$ 以及 $L \in \mathbb{Z}_+$,

$$x_\alpha^-(r,s)v_{\boldsymbol{\xi}} = 0, \quad \text{if and only if } {}_kx_\alpha^-(r,s).v_{\boldsymbol{\xi}} = 0.$$

根据 [6, 命题 2。7]， $V(\boldsymbol{\xi})$ 所表示的 $CV$-模由 $v_{\boldsymbol{\xi}}$ 生成，其定义关系为 $W_{loc}(\lambda)$ 以及 ${}_kx_\alpha^-(r,\ s)$ $.v_{\boldsymbol{\xi}} = 0$. 因此，根据 CV-模的定义,

$$(x_\alpha^+ \otimes t)^{(r)}(x_\alpha^- \otimes 1)^{(r+s)}.v_{\boldsymbol{\xi}} = x_\alpha^-(r,s).v_{\boldsymbol{\xi}}.$$

再次利用引理 3.1 对 $k = 1$，可得 $s = s'$ 以及

$$x_\alpha^-(r,s) = {}_1x_\alpha^-(r,s) + \sum_{r'} x_\alpha^-(r-r',0)_1\ {}_1x_\alpha^-(r',s),$$

其中求和遍历满足 $r' < r$ 的 $r' \in \mathbb{N}$。由于 $x_\alpha^-(r-r',0)_1 \in U(\mathfrak{sl}_3)$。因此 ,

$$(x_\alpha^-(r,s) - {}_1x_\alpha^-(r,s))v_{\boldsymbol{\xi}} \in \sum_{r'<r} \mathbf{U}(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}))x_\alpha^-(r',s)v_{\boldsymbol{\xi}}.$$

所以引理得证。 □

3.2. 集合 $P^+(\lambda,k)$ 及模 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$（对应于 $\boldsymbol{\lambda} \in P^+(\lambda,k)$）。对于 $\lambda \in P^+$ 和正整数 $k$，令

$$P^+(\lambda,k) = \{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\cdots,\lambda_k) \in (P^+)^{\times k} : \sum_{i=1}^k \lambda_i = \lambda\}.$$

给定 $\boldsymbol{\lambda} \in P^+(\lambda,k)$ 和 $\alpha \in R^+$，令 $p(\lambda(h_\alpha)) = (\lambda_1(h_\alpha)^\downarrow \geq \ldots \geq \lambda_k(h_\alpha)^\downarrow)$ 为将 $(\lambda_1(h_\alpha)\ldots,\lambda_k(h_\alpha))$ 的各分量按非递增顺序重新排列后得到的 $k$ 元整数元组。显然，$p(\lambda(h_\alpha))$ 是 $\lambda(h_\alpha)$ 的一个分拆。我们称这样的分拆为 $\lambda(h_\alpha)$ 的 $\boldsymbol{\lambda}_\alpha$-相容分拆，并记作 $\boldsymbol{\lambda}_\alpha^\downarrow$。令 $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\lambda}} = (\boldsymbol{\lambda}_\alpha^\downarrow)_{\alpha\in R^+}$。显然， $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\lambda}} \in \Xi_\lambda$。令 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 为与 $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\lambda}}$. 相关联的 Chari–Venkatesh模

在 $P^+(\lambda,k)$ 上定义如下一个序关系。给定 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)\in P^+(\lambda,k)$ 和 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\cdots,\mu_k)\in P^+(\lambda,k)$, 若对每个 $\alpha\in R^+$, $\boldsymbol{\lambda}$ 主序 $\boldsymbol{\mu}$, 则称之为, 并记作 $\boldsymbol{\lambda}\succeq\boldsymbol{\mu}$。

$$\sum_{j=i}^{k}\lambda_j(h_\alpha)^{\downarrow}\geq\sum_{j=i}^{k}\mu_j(h_\alpha)^{\downarrow},\qquad \text{for all } 1\leq i\leq k.$$

将 $w_\lambda$ 在 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 中的像记为 $^v\boldsymbol{\lambda}$, 可见 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 是由 $^v\boldsymbol{\lambda}$ 生成、满足以下定义关系的分次 $\mathfrak{g}[t]$ 模:

$$(\mathfrak{n}^-\otimes\mathbb{C}[t])v_{\boldsymbol{\lambda}}=0,\quad (h_{\alpha_i}\otimes t^s)v_{\boldsymbol{\lambda}}=\lambda(h_{\alpha_i})\delta_{s,0}v_{\boldsymbol{\lambda}},\quad (x_{\alpha_i}^-\otimes 1)^{\lambda(h_{\alpha_i})+1}v_{\boldsymbol{\lambda}}=0,\quad \text{for } i=1,2,\tag{3.5}$$

$$(x_\alpha^+\otimes t)^s(x_\alpha^-\otimes 1)^{r+s}v_{\boldsymbol{\lambda}}=0,\quad s+r\geq 1+r\ell+\sum_{j\geq\ell+1}\lambda_j(h_\alpha)^{\downarrow},\ \forall\,\ell\in\mathbb{N},\ \alpha\in R^+.\tag{3.6}$$

容易看出, 由 $\boldsymbol{\lambda}\mapsto\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 给出的 $\boldsymbol{\xi}$: $P^+(\lambda,k)\to\Xi_\lambda$ 是一个定义良好的映射。显然, 当 $k>2$ 时, $\boldsymbol{\xi}$ 不是单射。例如, $\boldsymbol{\lambda}=(2\omega_2+\omega_1,\omega_2,2\omega_1)$ 和 $\boldsymbol{\mu}=(2\omega_2,\omega_1,2\omega_1+\omega_2)$ 是 $P^+(3\omega_1+3\omega_2)$ 的元素, 且满足 $\boldsymbol{\xi}_\lambda=\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\mu}}$。

3.3. 以下引理列出模 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 关于 $\boldsymbol{\lambda}\in P^+(\lambda,k$ 的一些性质　　).

引理。设 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$、 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_k)\in P^+(\lambda,k)$。则

(i) $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\mu}}$ 是 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 的一个商模, 当 $\boldsymbol{\lambda}\succeq\boldsymbol{\mu}$时成立。特别地, 对于所有 $\boldsymbol{\lambda}\in P^+(\lambda,k)$, $\mathrm{ev}_0(V(\lambda))$是 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$的唯一不可约商。(ii) $\mathfrak{g}\otimes t^k\mathbb{C}[t].\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}=0$。因此, $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 是李代数 $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t]/(t^k)$的一个模。(iii) 对于所有由互不相同的复数$(z_1,\cdots,z_k)$组成的 $k$元组, 融合积模 $V(\lambda_1)^{z_1}*\cdots*V(\lambda_k)^{z_k}$是 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$的一个商模。

证明。给定 $\lambda\in P^+$和 $\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}\in P^+(\lambda,k)$, 令 $^v\boldsymbol{\lambda}$, $^v\boldsymbol{\mu}$分别为 $w_\lambda$在 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$和 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\mu}}$中的像。(i) 根据定义, 对所有 $\alpha\in R^+$,

$$(x_\alpha^+\otimes t)^{(s)}(x_\alpha^-\otimes 1)^{(r+s)}.v_{\boldsymbol{\mu}}=0,\ \text{whenever}\, r,s,q\in\mathbb{N},\ \text{satisfy}\, r+s\geq 1+qr+\sum_{j=q+1}^{k}\mu_j(h_\alpha)^{\downarrow}.$$

由于 $\boldsymbol{\lambda} \succeq \boldsymbol{\mu}$, $\sum_{j=q+1}^{k} \lambda_j(h_\alpha)^{\downarrow} \geq \sum_{j=q+1}^{k} \mu_j(h_\alpha)^{\downarrow}$, 对于所有 $0 \leq q \leq k-1, \alpha \in R^+$, 我们有: 对于满足 $r'+s' \geq 1 + r'q + \sum_{j=q+1}^{k} \lambda_j(h_\alpha)^{\downarrow}$的 $r', s', q \in \mathbb{N}$,

$$(x_\alpha^+ \otimes t)^{(s')}(x_\alpha^- \otimes 1)^{(r'+s')} v_{\boldsymbol{\mu}} = 0, \text{ whenever } r', s', q \in \mathbb{N}, \text{ satisfy } r'+s' \geq 1 + qr' + \sum_{j=q+1}^{k} \lambda_j(h_\alpha)^{\downarrow}.$$

因此, 存在一个满射的 $\mathfrak{g}[t]$-模同态 $\Psi_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\lambda}} : \mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}} \to \mathcal{F}_{\boldsymbol{\mu}}$, 使得 $\Psi_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\lambda}}(v_{\boldsymbol{\lambda}}) = v_{\boldsymbol{\mu}}$。由于对所有 $\boldsymbol{\lambda} \in P^+(\lambda, k)$, 均有 $\boldsymbol{\lambda} \succeq (\lambda, 0, \cdots, 0)$, 且根据定义, $\mathcal{F}_{(\lambda,0,\cdots)} = \mathsf{ev}_0(V(\lambda))$, 我们得出, 对所有 $\boldsymbol{\lambda} \in P^+(\lambda, k)$, $\mathsf{ev}_0(V(\lambda))$ 是 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 的唯一不可约商模。

(ii) 给定 $\boldsymbol{\lambda} \in P^+(\lambda, k)$, 对所有 $\alpha \in R^+$, $\boldsymbol{\lambda}_\alpha^{\downarrow}$ 是 $\lambda(h_\alpha)$ 的一个分拆, 且至多有 $k$ 个部分。因此, 根据 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 的定义, 我们有

$$(x_\alpha^+ \otimes t)^{(s)}(x_\alpha^- \otimes 1)^{(r+s)} . v_{\boldsymbol{\lambda}} = 0, \quad r+s \geq 1+kr.$$

特别地, 对于 $r=1$, 对所有 $\alpha \in R^+$, 我们有 $x_\alpha^- \otimes t^k . v_{\boldsymbol{\lambda}} = 0$, 这意味着 $\mathfrak{g} \otimes t^k \mathbb{C}[t] . v_{\boldsymbol{\lambda}} = 0$.

(iii) 我们知道 $ev_{z_i} V(\lambda_i)$ 是 $1 \leq i \leq k$ 的局部 Weyl 模 $W_{loc}(\lambda_i)$ 的一个商模。若 $v_i$ 是 $w_{\lambda_i}$ 在 $ev_{z_i}(V(\lambda_i))$ 中的像, 则 $V(\lambda_1)^{z_1} * \cdots * V(\lambda_k)^{z_k}$ 是一个最高权为 $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \lambda$ 的可积 $\mathfrak{g}[t]$-模, 由向量 $v_1 * \cdots * v_k$ 生成, 因此是 $W_{loc}(\lambda)$ 的一个商模。这意味着,

$$(\mathfrak{n}^+ \otimes \mathbb{C}[t]) v_1 * \cdots * v_k = 0, \quad (h_{\alpha_i} \otimes t^s) . \lambda(h_{\alpha_i}) \delta_{s,0} v_1 * \cdots * v_k = 0$$

$$(x_{\alpha_i}^- \otimes 1)^{\lambda(h_{\alpha_i})+1} . v_1 * \cdots * v_k = 0.$$

对于 $\alpha \in R^+$, 若 $\sigma$ 是对称群 $\mathcal{S}_k$ 的一个元素, 且满足 $\boldsymbol{\lambda}_\alpha^{\downarrow} = (\lambda_{\sigma(1)}(h_\alpha) \geq \cdots \geq \lambda_{\sigma(k)}(h_\alpha))$, 则利用这一事实:

$$x_\alpha^- \otimes (t - z_{\sigma(1)})(t - z_{\sigma(2)}) \cdots (t - z_{\sigma(\ell)}) . ev_{z_{\sigma(1)}} V(\lambda_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes ev_{z_{\sigma(\ell)}} V(\lambda_{\sigma(\ell)}) = 0,$$

and

$$(x_\alpha^+ \otimes t)^s (x_\alpha^- \otimes 1)^{r+s} v_{\sigma(\ell+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)} = 0 \ \ \forall \ r+s \geq 1 + r\ell + \sum_{j=\ell+1}^{k} \lambda_{\sigma(j)}(h_\alpha),$$

与[6, 命题 6 相同的证明8] 表明, 对于每个 $\alpha \in R^+$,

$$_\ell x_\alpha^-(r, s) . v_1 * \cdots * v_k = 0$$

分次 A型 $A_2$ 11中的融合积与LR系数的特征公式

当 $r, s, \ell \in \mathbb{N}$ 满足 $r+s \geq 1+r\ell+\sum_{j\geq \ell+1} \lambda_j(h_\alpha)^\downarrow$. 时，由于 $V(\lambda_1)^{z_1} * \cdots * V(\lambda_k)^{z_k}$ 是 $W_{loc}(\sum \lambda_i)$ 的一个 $k$ 商模，因此可得 $V(\lambda_1)^{z_1} * \cdots * V(\lambda_k)^{z_k}$ 是 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 的一个商模。$\square_{i=1}$

$_k$注记。由注记2.5和引理3.3的(iii)部分可得，维数 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}} \geq \prod$ 维数 $V(\lambda_i)$。$_{i=1}$

## 4. The CV module $\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu}$ for $\mathfrak{sl}_3[t]$

给定一个主导整权 $\lambda = n\omega_1$，属于 $\mathfrak{sl}_2$，容易看出集合 $P^+(\lambda,\ k)$与所有 $n.$ 的分拆构成的集合一一对应。在[6], 中，利用一系列典范短正合序列，已为 $V(\xi)$构造了单项式基，适用于所有 $\xi \in P^+(n\omega_1,$ $k)$。随后，通过维数论证证明， $\mathfrak{sl}_2[t]$ 的融合积模同构于Chari-Venkatesh模，其定义与任何赋值参数无关。当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$且 $\boldsymbol{\lambda} \in P^+(\lambda,\ 2)$时，我们将此方法推广到 $\lambda \in P^+$的情形。本节陈述论文的主要结果，并证明有助于确立该结果的预备结论。

**4.1.** 对于 $\lambda = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \in P^+$，令 $|\lambda| := \lambda_1 + \lambda_2$。

定义。令 $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$。给定 $\nu \in P^+$ 以及 $(\lambda, \mu) \in P^+(\nu, 2)$，其中 $\lambda = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$ 和 $\mu = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2$，我们称:

i. 若对 $i = 1, 2$，有 $|\lambda| \geq |\mu|$, $\lambda_i \geq \mu_i$，则 $(\lambda, \mu)$ 是 $\nu$的第一类分拆;
ii. 若 $|\lambda| \geq |\mu|$, $\lambda_1 \geq \mu_1$ 且 $\mu_2 > \lambda_2$，则 $(\lambda, \mu)$ 是 $\nu$ 的第二类分拆。iii. 若 $|\lambda| \geq |\mu|$, $\lambda_2 \geq \mu_2$ 且 $\mu_1 > \lambda_1$.，则 $(\lambda, \mu)$ 是 $\nu$ 的第三类分拆

注意，若 $(\lambda, \mu)$ 是第三类分拆，则 $(-w_0\lambda, -w_0\mu) := (\lambda_2\omega_1+\lambda_1\omega_2, \mu_2\omega_1+\mu_1\omega_2)$ 是第二类分拆，并且将 $\alpha_1$ 映为 $\alpha_2$的 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ 的Dynkin图自同构给出了 $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ 和 $\mathcal{F}_{-w_0\lambda,-w_0\mu}$之间的一个 $\mathfrak{g}[t]$-模同构。因此，在本文其余部分，我们将只研究第一类和第二类 $\lambda+\mu$ 的分拆 $(\lambda, \mu)$ 所对应的模 $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$。

**4.2.** 给定主导整权 $\lambda = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$、 $\mu = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2$，使得 $|\lambda| \geq |\mu|$ 和 $\lambda_1 \geq \mu_1$，令

$$\mathcal{F}^+_{\lambda,\mu} = \begin{cases} \mathcal{F}_{\lambda+\omega_2,\mu-\omega_2} & \text{if } \lambda_2 \geq \mu_2 > 0 \\ \mathcal{F}_{\lambda+\omega_1,\mu-\omega_1} & \text{if } \mu_1 > 0, \mu_2 = 0 \\ \mathcal{F}_{\lambda+(\mu_2-\lambda_2)\omega_2,\mu-(\mu_2-\lambda_2)\omega_2} & \text{if } \lambda_2 < \mu_2. \end{cases}$$

定理。设 $\lambda = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$、 $\mu = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2 \in P^+$ 满足 $|\lambda| \geq |\mu|$ 和 $\lambda_1 \geq \mu_1$。存在一个短正合列

$$0 \to \operatorname{Ker}\phi(\lambda,\mu) \to \mathcal{F}_{\lambda,\mu} \xrightarrow{\phi(\lambda,\mu)} \mathcal{F}^+_{\lambda,\mu} \to 0$$

其中，子模 $\operatorname{Ker}\phi(\lambda,\mu)$ 存在一个滤过，其连续商为：

i.
$$\bigoplus_{a\in S_j^{\lambda,\mu}} \tau^*_{|\mu|}(V(\lambda + w_0\mu + a\alpha_2 + (j-a)\alpha_1), \qquad 0 \leq j < \mu_1+\mu_2,$$
$$\tau^*_{|\mu|}\mathcal{F}_{\lambda+\mu_2(\omega_1-\omega_2),\mu_1\omega_1},$$
其中 $S^{\lambda}{}_{,j}{}^{\mu} = \{a \in \mathbb{Z} : \ 0 \leq a \leq \mu_1, 0 \leq j-a < \mu_2, \mu_2-\lambda_1 \leq j-2a \leq \lambda_2-\mu_1\}$，当 $(\lambda,\mu)$ 是第一类分拆且 $\mu_2 \neq 0$ 时。

ii.
$$\tau^*_{\mu_1} V(\lambda + w_0\mu + j\alpha_2), \qquad \max\{0, \mu_1-\lambda_2\} \leq j \leq \mu_1,$$
当 $(\lambda,\mu)$ 是 $\lambda+\mu$ 的第一类分拆且满足 $\mu_2 = 0$ 时。

iii.
$$\bigoplus_{a\in S^{(\ell,k)}_{\lambda,\mu}} \tau^*_{\mu_1+\lambda_2+\ell} V(\lambda + w_0\mu + (\mu_2-\lambda_2-\ell)\theta + a\alpha_2 + (k-a)\alpha_1), \qquad \begin{matrix} 1 \leq \ell \leq \mu_2-\lambda_2, \\ 0 \leq k \leq \mu_1+\lambda_2 \end{matrix},$$
with $S^{(\ell,k)}_{\lambda,\mu} = \{a \in \mathbb{Z} : 0 \leq a \leq \mu_1,\ 0 \leq k-a \leq \lambda_2,\ \mu_1-\mu_2+\ell \leq 2a-k \leq \lambda_1-\lambda_2-\ell\}$, when $(\lambda,\mu)$ is a partition of $\lambda+\mu$ of second kind.

给定 $(\lambda,\mu) \in P^+(\lambda+\mu, 2)$，使得 $\lambda(h_\theta) = |\lambda| \geq |\mu| = \mu(h_\theta)$ 且 $\lambda(h_{\alpha_1}) \geq \mu(h_{\alpha_1})$，

$$(\lambda,\mu) \succeq \begin{cases} (\lambda+\omega_2, \mu-\omega_2) & \text{when } \lambda_2 \geq \mu_2 > 0, \\ (\lambda+\omega_1, \mu-\omega_1) & \text{when } \lambda_1 \geq \mu_1 > 0, \mu_2 = 0, \\ (\lambda+(\mu_2-\lambda_2)\omega_2, \mu-(\mu_2-\lambda_2)\omega_2) & \text{when } \lambda_2 < \mu_2. \end{cases}$$

因此，若 $v_{\lambda,\mu}$ 和 $v^+_{\lambda}{}_{,\mu}$ 分别生成 CV-模 $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ 和 $\mathcal{F}^+_{\lambda}{}_{,\mu}$，则由引理 3.3(2) 可知，存在一个满射态射 $\phi(\lambda,\mu) : \mathcal{F}_{\lambda,\mu} \to \mathcal{F}^+_{\lambda}{}_{,\mu}$，使得 $\phi(\lambda,\mu)(v_{\lambda,\mu}) = v^+_{\lambda}{}_{,\mu}$。因此，为了证明该定理，我们需要分析核 $\operatorname{Ker}\phi(\lambda,\mu)$ 的结构。我们将在接下来的两节中进行分析。

4.3. 以下结果确定了子模 $\operatorname{Ker}\phi(\lambda,\mu)$ 的生成元。

分次　　关于 A 型 $A_2$　　13 中融合积和 LR系数的特征公式

命题。对于 $\lambda, \mu \in P^+$，设 $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}, \mathcal{F}^+_{\lambda,\mu}$ 是定理4.2中所述的分次 $\mathfrak{g}[t]$-模。设 $v_{\lambda,\mu}$ 和 $v^+_{\lambda,\mu}$ 分别是 $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ 和 $\mathcal{F}^+_{\lambda,\mu}$ 的生成元，并设 $\phi(\lambda,\mu) : \mathcal{F}_{\lambda,\mu} \to \mathcal{F}^+_{\lambda,\mu}$ 是一个满射的 $\mathfrak{g}[t]$-模态射，使得 $\phi(\lambda,\mu)(v_{\lambda,\mu}) = v^+_{\lambda,\mu}$。则核 $\phi(\lambda,\mu)$ 是由集合 $\mathcal{K}_{\lambda,\mu}$ 生成的 $\mathfrak{g}[t]$-模，该集合描述如下:

$$\mathcal{K}_{\lambda,\mu} = \begin{cases} \{(x^-_{\alpha_2} \otimes t)^{\mu_2} v_{\lambda,\mu}, (x^-_\theta \otimes t)^{\mu_1+\mu_2} v_{\lambda,\mu}\}, & when\ \lambda_2 \geq \mu_2 > 0, \\ \{(x^-_{\alpha_1} \otimes t)^{\mu_1} v_{\lambda,\mu}, (x^-_\theta \otimes t)^{\mu_1} v_{\lambda,\mu}\}, & when\ \mu_2 = 0\ and\ \mu_1 > 0, \\ \{(x^-_\theta \otimes t)^{\mu_1+\lambda_2+s} v_{\lambda,\mu} : 0 < s \leq \mu_2 - \lambda_2\}, & when\ \lambda_2 < \mu_2 \end{cases}$$

证明。情形 1。假设 $0 < \mu_2 < \lambda_2$。根据定义（4.2），$\mathcal{F}^+_{\lambda,\mu} = \mathcal{F}_{\lambda+\omega_2,\ \mu-\omega_2}$。因此，

$$\begin{aligned} x^-_{\alpha_1}(r,s).v^+_{\lambda,\mu} &= 0, \quad \forall\ r,s \in \mathbb{N}, \text{ with } r+s \geq 1+r+\mu_1 \\ x^-_{\alpha_2}(r,s).v^+_{\lambda,\mu} &= 0, \quad \forall\ r,s \in \mathbb{N}, \text{ with } r+s \geq 1+r+\mu_2-1 \\ x^-_\theta(r,s).v^+_{\lambda,\mu} &= 0, \quad \forall\ r,s \in \mathbb{N}, \text{ with } r+s \geq 1+r+\mu_1+\mu_2-1 \end{aligned}$$

而，

$$\begin{aligned} x^-_{\alpha_i}(r,s).v_{\lambda,\mu} &= 0, \quad \forall\ r,s \in \mathbb{N}, \text{ with } r+s \geq 1+r+\mu_i, \text{ for } i = 1,2 \\ x^-_\theta(r,s).v_{\lambda,\mu} &= 0, \quad \forall\ r,s \in \mathbb{N}, \text{ with } r+s \geq 1+r+\mu_1+\mu_2 \end{aligned}$$

由于对所有 $\alpha \in R^+$ 都有 $x^-_\alpha \otimes t^2.v_{\lambda,\ \mu} = 0$，因此在此情形下，

$$x^-_{\alpha_2}(r,s).v_{\lambda,\mu},\ x^-_\theta(r',s').v_{\lambda,\mu} \in \operatorname{Ker}\phi(\lambda,\mu)$$

对于 $s = \mu_2$ 和 $s' = \mu_1+\mu_2$，即，$(x^-_{\alpha_2} \otimes t)^{\ \mu_2} v_{\lambda,\ \mu}$，$(x^-_\theta \otimes t)^{\ \mu_1+\mu_2}.v_{\lambda,\ \mu} \in$ 核 $\phi$ $(\lambda,\mu)$。

情形2。假设 $\mu_2 = 0$ 和 $\lambda_1 \geq \mu_1 > 0$。根据定义，我们有$\mathcal{F}^+_{\lambda,\ \mu} = \mathcal{F}_{\lambda+\omega_1,\ \mu-\omega_1}$。按照类似的论证，很容易看出

$$(x^-_{\alpha_1} \otimes t)^{\mu_1} v_{\lambda,\mu},\ (x^-_\theta \otimes t)^{\mu_1}.v_{\lambda,\mu} \in \operatorname{Ker}\phi(\lambda,\mu).$$

情形3。假设 $\mu_2 > \lambda_2 \geq 0$。根据定义，我们有 $\mathcal{F}^+_{\lambda,\ \mu} = \mathcal{F}_{\lambda+(\mu_2-\lambda_2)\omega_2,\ \mu-(\mu_2-\lambda_2)\omega_2}$，考虑 $\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu}$ 和 $\mathcal{F}^+_{\lambda,\ \mu}$的以下定义关系，可得，

$$\begin{aligned} x^-_{\alpha_i}(r,s).v^+_{\lambda,\mu} &= 0, \quad \forall\ r,s \in \mathbb{N}, \text{ with } r+s \geq 1+r+\mu_i,\ \text{ for } i = 1,2, \\ x^-_\theta(r,s).v^+_{\lambda,\mu} &= 0, \quad \forall\ r,s \in \mathbb{N}, \text{ with } r+s \geq 1+r+\mu_1+\lambda_2 \end{aligned}$$

而,

$$x^-_{\alpha_i}(r,s).v_{\lambda,\mu}=0,\quad \forall\ r,s\in\mathbb{N}, \text{ with } r+s\geq 1+r+\mu_i, \text{ for } i=1,2$$
$$x^-_{\theta}(r,s).v_{\lambda,\mu}=0,\quad \forall\ r,s\in\mathbb{N}, \text{ with } r+s\geq 1+r+\mu_1+\mu_2$$

如，$x^-_\alpha\otimes t^2.v_{\lambda,\ \mu}=0$，因此 $x^-_\theta(r,s).v_{\lambda,\ \mu}\in$核$\phi(\lambda,\mu)$，对于 $\mu_1+\lambda_2<s\leq\mu_2+\mu_1$，即

$$\{(x^-_\theta\otimes t)^{\mu_1+\lambda_2+\ell}.v_{\lambda,\mu}:0<\ell\leq\mu_2-\lambda_2\}\subset \operatorname{Ker}\phi(\lambda,\mu).$$

为完成该命题的证明，我们考虑满足 $X.v^+_{\lambda\ ,\ \mu}=0$ 的 $X\in\mathsf{U}(\mathfrak{g}[t])$。那么 $X$可写为 $X=Y+Z$，其中 $Y$属于由集合生成的 $\mathsf{U}(\mathfrak{g}[t])$ 的左理想

$$I_Y(\lambda,\mu)=\left\{x^+_\alpha\otimes t^q,\,(x^-_\alpha\otimes 1)^{(\lambda+\mu)(h_\alpha)+1},(h\otimes t^q)-\delta_{q,0}(\lambda+\mu)(h).1:q\in\mathbb{Z}^+,\alpha\in R^+,\,h\in\mathfrak{h}\right\},$$

且 $Z$属于由集合 $I^+_Z(\lambda,\mu)$ 生成的 $\mathsf{U}(\mathfrak{g}[t])$ 的左理想，其中,

i. 对于 $0<\mu_2\leq\lambda_2$,

$$I^+_Z(\lambda,\mu):=\begin{array}{l}\{x^-_{\alpha_1}(r,s):r,s\in\mathbb{N},\,r+s\geq 1+r+\mu_1\}\\ \cup\ \left\{x^-_{\alpha_2}(r,s),x^-_\theta(r',s'):r,s,r',s'\in\mathbb{N},\,r+s\geq r+\mu_2,\ r'+s'\geq r'+\mu_1+\mu_2\right\}.\end{array}$$

ii. 对于 $0<\mu_1\leq\lambda_1$, $\mu_2=0$,

$$I^+_Z(\lambda,\mu):=\{x^-_{\alpha_1}(r,s),x^-_\theta(r',s'):r,s,r',s'\in\mathbb{N},\,r+s\geq r+\mu_1,\,r'+s'\geq r'+\mu_1\}.$$

iii. 对于 $\mu_2>\lambda_2$,

$$I^+_Z(\lambda,\mu):=\begin{array}{l}\left\{x^-_{\alpha_1}(r,s),x^-_{\alpha_2}(r',s'):r,s,r',s'\in\mathbb{N},\,r+s\geq 1+r+\mu_1,r'+s'\geq 1+r'+\lambda_2\right\}\\ \cup\{x^-_\theta(r,s):r,s\in\mathbb{N},\,r+s\geq 1+r+\mu_1+\lambda_2\}.\end{array}$$

由于 $Y.v_{\lambda,\mu}=0$，对于所有 $Y\in I_Y(\lambda,\mu)$，且 $Z.v_{\lambda,\mu}=0$，对于

$$Z\in\begin{cases}\{x^-_{\alpha_1}(r,s):r,s\in\mathbb{N},\,r+s\geq 1+r+\mu_1\},\text{ when } 0\leq\mu_2\leq\lambda_2\\ \{x^-_{\alpha_1}(r,s),x^-_{\alpha_2}(r',s'):r,s,r',s'\in\mathbb{N},\,r+s\geq 1+r+\mu_1,\,r'+s'>1+r'+\lambda_2\}\text{ when }\mu_2>\lambda_2,\end{cases}$$

显然，$\operatorname{Ker}\phi(\lambda,\mu)$ 由 $\mathcal{K}_{\lambda,\mu}$ 中的元素生成。因此命题得证。

4.4. 以下引理及其推论很容易验证。

引理。给定 $a$、$b$、$p\in\mathbb{Z}_+$，有:

i. $[x^+_{\alpha_1}\otimes t^a,(x^-_\theta\otimes t^b)^{(p)}]=-(x^-_\theta\otimes t^b)^{(p-1)}($
$x^-_{\alpha_2}\otimes t^{a+b})$, ii. $[x^+_{\alpha_2}\otimes t^a,(x^-_\theta\otimes t^b)^{(p)}]=(x^-_\theta\otimes t^b)^{(p-1)}($
$x^-_{\alpha_1}\otimes t^{a+b})$, iii. $[x^-_{\alpha_1}\otimes t^a,(x^+_\theta\otimes t^b)^{(p)}]=(x^+_\theta\otimes t^b)^{(p-1)}($
$x^+_{\alpha_2}\otimes t^{a+b})$, iv. $[x^-_{\alpha_2}\otimes t^a,(x^+_\theta\otimes t^b)^{(p)}]=-(x^+_\theta\otimes t^b)^{(p-1)}($
$x^+_{\alpha_1}\otimes t^{a+b})$。

4.5. 在论文余下部分，给定 $s$、$r\in\mathbb{N}$ 和 $\alpha\in R^+$，我们令 $\mathbf{X}_\alpha(r,s)=(x^+_\alpha\otimes t)^{(s)}(x^-_\alpha\otimes 1)^{(r+s)}$.

引理。设 $V$ 是一个 $\mathfrak{sl}_3[t]$-模，且 $v\in V$ 是满足以下条件的非零权向量，

$$\mathfrak{n}^+\otimes\mathbb{C}[t].v=0,\quad \mathfrak{h}\otimes t\mathbb{C}[t].v=0,\quad x^-_\alpha\otimes t^2.v=0.$$

若对每个 $\alpha\in R^+$，都存在 $l_\alpha$、$l^1_\alpha\in\mathbb{N}$ 使得

$$(x^-_\alpha\otimes 1)^r.v=0,\forall\, r\geq l_\alpha,\qquad \mathbf{X}_\alpha(r,s)v=0\quad for\ r,s\in\mathbb{N},\ \ s\geq l^1_\alpha,$$

*then*

i. 对所有 $\alpha$、$\beta\in R^+$，使得 $\langle\alpha$、$\beta\rangle\geq 0$,

$$\mathbf{X}_\beta(r,s)(x^-_\alpha\otimes t)^d v=0,\qquad \forall\ s\geq l^1_\alpha-\langle\alpha,\beta\rangle d, \tag{4.1}$$

ii. 对所有满足 $\langle\alpha,\beta\rangle<0$ 的 $\alpha,\beta\in R^+$,

$$\mathbf{X}_\beta(r,s)(x^-_\alpha\otimes t)^d.v=0\quad for\ s\geq l^1_\beta,\qquad (x^-_\beta\otimes 1)^r(x^-_\alpha\otimes t)^d.v=0\quad for\ \ l\geq l_\beta+d \tag{4.2}$$

证明. i. 设 $\alpha,\beta\in R^+$ 满足 $\langle\alpha,\beta\rangle\geq 0$。

由于 $\langle\alpha,\ \beta\rangle=2$ 当且仅当 $\alpha=\beta$，(4.1) 可由 [6, 推论 6。6] 当 $\langle\alpha,\ \beta\rangle=2$。

现在设 $\langle\alpha,\beta\rangle=1$。不失一般性，假设 $\beta-\alpha\in R^+$. 若$N_{-\alpha,\ \beta},N_{\beta-\alpha,\ -\beta}\in\mathbb{Z}$ 满足 $[x^-_\alpha,x^+_\beta]=N_{-\alpha,\ \beta}x^+_{\beta-\alpha}$ 且 $[x^+_{\beta-\alpha},x^-_\beta]=N_{\beta-\alpha,\ -\beta}x^-_\alpha$，则

$$x^-_\alpha.\mathbf{X}_\beta(r,s).v=\mathbf{X}_\beta(r,s)x^-_\alpha.v+N_{-\alpha,\beta}N_{\beta-\alpha,-\beta}\mathbf{X}_\beta(r,s-1)(x^-_\alpha\otimes t).v.$$

利用（2.2），以及 $v$ 满足的关系式，可知对于 $\beta\in R^+$ 和 $r,\ s\in\mathbb{N}$,

$$\mathbf{X}_\beta(r,s)v=(-1)^s(x^-_\beta(r,s)h_\beta.v+\sum_{k\geq 1}x^-_\beta(r,s-k)P_\beta(u)_k).v=(-1)^s x^-_\beta(r,s)h_\beta.v.$$

进一步对 $k$ 使用归纳法，并利用条件 $x^- \otimes t^2.v = 0$，容易看出，对于所有 $k \in \mathbb{Z}_+$，$P_\beta(u)$ $_{k+1}.(x_\alpha^-)^k.v = 0$。因此，

$$\begin{aligned} x_\alpha^-.\mathbf{X}_\beta(r,s).v = & (-1)^s \left( x_\beta^-(r,s) h_\beta x_\alpha^-.v + x_\beta^-(r,s-1)(h_\beta \otimes t) x_\alpha^-.v \right) + N_{-\alpha,\beta} N_{\beta-\alpha,-\beta} \mathbf{X}_\beta(r,s-1).x_\alpha^- \otimes t.v. \\ = & (-1)^s \left( x_\beta^-(r,s) x_\alpha^-.v + x_\beta^-(r,s-1) x_\alpha^- \otimes t.v \right) + \mathbf{X}_\beta(r,s-1).x_\alpha^- \otimes t.v. \\ = & (-1)^s \left( x_\alpha^-.x_\beta^-(r,s).v + x_\beta^-(r,s-1) x_\alpha^- \otimes t.v \right) + \mathbf{X}_\beta(r,s-1).x_\alpha^- \otimes t.v. \end{aligned}$$

由于 $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$, $\alpha + \beta \notin R^+$, $[x_\alpha^-, x_\beta^- \otimes t^s] = 0$。因此，利用 $v$ 满足的关系，并由引理 3.1，对于 $s \geq l_\beta^1$，我们有：

$$\mathbf{X}_\beta(r,s-1).x_\alpha^- \otimes t.v = (-1)^{s-1} x_\beta^-(r,s-1).x_\alpha^- \otimes t.v. \tag{4.3}$$

另一方面，根据条件 $(x_\beta^- \otimes t)^{(s)}.v = 0$，对于 $s \geq l_\beta^1$，我们可知

$$x_{\beta-\alpha}^+ (x_\beta^-)^{(r-s)} (x_\beta \otimes t)^{(s)} = 0 \qquad \text{for} \quad s \geq l_\beta^1,$$

$$\Rightarrow \quad N_{\beta-\alpha,\ -\beta}[(x_\beta^-)^{(r-s)}(x_\beta^- \otimes t)^{(s-1)}(x_\alpha^- \otimes t).v + (x_\alpha^-).(x_\beta^-)^{(r-s-1)}(x_\beta^- \otimes t)^{(s)}].v = 0, \text{ 对于 } \quad s \geq l_\beta^1,$$

$$\Rightarrow \quad N_{\beta-\alpha,-\beta}(x_\beta^-)^{(r-s)}(x_\beta^- \otimes t)^{(s-1)}(x_\alpha^- \otimes t).v.v = 0, \quad \text{for} \quad s \geq l_\beta^1.$$

因此，由（4.3）可得

$$\mathbf{X}_\beta(r,s-1).x_\alpha^- \otimes t.v = (-1)^{s-1} x_\beta^-(r,s-1).x_\alpha^- \otimes t.v = 0, \quad \text{for} \quad s \geq l_\beta^1.$$

也就是说，当 $s \geq l_\beta^1 - 1.$ 时，$\mathbf{X}_\beta(r,s).x_\alpha^- \otimes t.v = 0$

由于 $\alpha$, $\gamma \in R^+$, $\alpha \neq \gamma$, $x_\alpha^+.(x_\gamma^- \otimes t)^q.v = 0$，对于所有 $q > 0$ 且在给定条件下，$h \otimes t^s.(x_{\alpha_2}^- \otimes t)^q.v = 0$, $s > 0$，重复上述论证可知，式（4.1）成立。

ii. 对于类型为 $\mathfrak{g}$ $A_2$ 的情形，给定 $\alpha, \beta \in R^+$，使得 $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$, $\alpha + \beta \in R^+$ 且 $[x_\alpha^+, x_\beta^+] = -x_{\alpha+\beta}^+ [x_\alpha^-, x_\beta^-] = x_{\alpha+\beta}^-$。因此，我们有

$$x_\alpha^- \otimes t.\mathbf{X}_\beta(r,s).v \quad = \mathbf{X}_\beta(r,s) x_\alpha^- \otimes t + \mathbf{X}_\beta(r-1,s).x_{\alpha+\beta}^- \otimes t.v$$

现在利用 $[x^-_{\alpha+\beta}\otimes t, x^-_\beta\otimes 1]=0$ 以及对所有 $\gamma\in R^+$ 均成立的关系式 $x^-_\gamma\otimes t^2.v=0$，上面的关系式可化简为

$$x^-_\alpha\otimes t.\mathbf{X}_\beta(r,s).v \quad = \mathbf{X}_\beta(r,s).x^-_\alpha\otimes t + x^-_{\alpha+\beta}\otimes t.\mathbf{X}_\beta(r-1,s).v. \tag{4.4}$$

因此，在给定条件下，我们有 $\mathbf{X}_\beta(r,s)x^-_\alpha\otimes t.v=0$，其中 $s\geq l^1_\beta$.

此外，将 $x^-_\alpha\otimes t$ 应用于关系式 $(x^-_\beta\otimes 1)^s.v=0$，其中 $s\geq l^1_\beta$，我们得到

$$0=(x^-_\alpha\otimes t)(x_\beta\otimes 1)^{(s)}.v=[(x_\beta\otimes 1)^{(s)}.(x^-_\alpha\otimes t)+(x^-_{\alpha+\beta}\otimes t)(x_\beta\otimes 1)^{(s-1)}].v \quad \text{for } s>l_\beta,$$

$$\Rightarrow (x^-_\beta\otimes 1)^s.x^-_\alpha\otimes t.v=0, \quad \text{for } \ s\geq l_\beta+1.$$

如上所述，通过重复上述论证，我们可知4.2成立。 □

推论。设 $V$ 是一个 $\mathfrak{sl}_3[t]$-模，并且 $v\in V$ 是满足引理4.5中给定条件的非零权向量。若 $\alpha$，$\beta\in R^+$ 使得 $\alpha+\beta\in R^+$，则，

*i.*

$$\begin{aligned}&(x^+_\beta)(x^-_\beta\otimes t)^{(a)}(x^-_{\alpha+\beta}\otimes t)^{(b)}(x^-_\alpha\otimes t)^{(a)}.v\\&=-N_{\beta+\alpha,\beta}(x^-_\beta\otimes t)^{(a)}(x^-_{\alpha+\beta}\otimes t)^{(b-1)}(x^-_\alpha\otimes t)^{(c+1)}.v\end{aligned}. \tag{4.5}$$

*ii.*

$$\sum_{d=0}^{l}\binom{l}{d}(x_\beta\otimes 1)^{a-d}(x^-_{\alpha+\beta}\otimes t)^d(x^-_\alpha\otimes t)^{l-d}v=0, \quad \forall\ a\geq l_\beta. \tag{4.6}$$

*iii.*

$$\sum_{d=0}^{l}\binom{l}{d}\mathbf{X}_\beta(r-d,s)(x^-_{\alpha+\beta}\otimes t)^d(x^-_\alpha\otimes t)^{l-d}v=0, \quad \forall\ s\geq l^1_\beta. \tag{4.7}$$

证明。i. 由于 $\mathfrak{g}$ 是 $A$型，(4.5)可直接由向量 $v$ 满足的条件以及$[x^+_\alpha, x^-_{\alpha+\beta}]=N_{\alpha,\ \alpha+\beta}x^-_\beta$ 这一事实得出。

ii. 由于 $(x^-_\beta\otimes 1)^a.v=0$ 对 $a>l_\beta$成立，我们得到

$$\begin{aligned}0 \quad &=(x^-_\alpha\otimes t)^l(x^-_\beta\otimes 1)^a.v\\&=\sum_{d=0}^{l}\tbinom{l}{d}(x_\beta\otimes 1)^{a-d}(x^-_{\alpha+\beta}\otimes t)^d(x^-_\alpha\otimes t)^{l-d}v, \quad \text{for } a>l_\beta.\end{aligned}$$

iii. 在等式 $(x_\alpha^- \otimes t)^l$ 两边作用4.4，并利用 $v$满足的关系、$[x_\alpha^-, x_\beta^-] = x_{\alpha+\beta}^-$以及引理 2.2，我们得到

$$\sum_{d=0}^{l} \binom{l}{d} \mathbf{X}_\beta(r-d,s)(x_{\alpha+\beta}^- \otimes t)^d (x_\alpha^- \otimes t)^{l-d} v = 0, \qquad \forall\ s \geq l_\beta^1.$$

这表明（4.7）成立。 □

## 5. Filtration of 核 $\phi(\lambda,\mu)$

本节研究满同态的核的结构 $\phi(\lambda,\mu) : \mathcal{F}_{\lambda,\mu} \twoheadrightarrow \mathcal{F}_\lambda^+{}_{,\mu}$。在命题 5.1 （分别在命题 5.2 中）我们考虑 $(\lambda,\mu)$ 是 $P^+(\lambda+\mu,2)$ 的第一类（分别为第二类）分拆的情形。

**5.1.**

命题。设 $(\lambda,\mu)$ 是 $\lambda+\mu$ 的第一类分拆，且 $\mu = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2$。则核 $\phi(\lambda,\mu)$ 具有一个滤过 $V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_{|\mu|}$，满足以下性质。

i. 当 $\mu_2 > 0$ 时，

$$\phi_{|\mu|}^{(\lambda,\mu)} : \tau_{\mu_2}^*(\mathcal{F}_{\lambda+\mu_2(\omega_1-\omega_2),\mu_1\omega_1}) \to V_{|\mu|},$$

*and*

$$\phi_j^{(\lambda,\mu)} : \bigoplus_{a\in S_j^{\lambda,\mu}} \tau_{|\mu|}^*(V(\lambda + w_0\mu + (j-a)\alpha_1 + a\alpha_2) \to V_j/V_{j+1}, \quad \forall\ 0 \leq j < |\mu|,$$

是满射的 $\mathfrak{sl}_3[t]$-同态，且 $S^{\lambda,}{}_j{}^{\mu} = \{a \in \mathbb{Z} \colon 0 \leq a \leq \mu_1, 0 \leq j-a < \mu_2, \mu_2-\lambda_1 \leq j-2a \leq \lambda_2-\mu_1\}$.

ii. 当 $\mu_2 = 0$ 时，对于每个 $\max\{0,\mu_1-\lambda_2\} \leq j \leq \mu_1$,

$$\phi_j^{(\lambda,\mu)} : \tau_{\mu_1}^* V(\lambda + w_0\mu + j\alpha_2) \to V_j/V_{j+1},$$

是满射的 $\mathfrak{sl}_3[t]$-同态。

证明。 i . 设 $\mu_2 > 0$。根据命题 4.3,

$$\operatorname{Ker}\phi(\lambda,\mu) = \mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])(x_\theta^- \otimes t)^{|\mu|} v_{\lambda,\mu} + \mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])(x_{\alpha_2}^- \otimes t)^{\mu_2} v_{\lambda,\mu}.$$

Set,

$$V_{|\mu|}=\mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])(x^-_{\alpha_2}\otimes t)^{\mu_2}v_{\lambda,\mu},$$

and $\quad V_j=\sum_{a_1+a_2=j}\mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])(x^+_{\alpha_1}\otimes 1)^{a_1}(x^+_{\alpha_2}\otimes 1)^{a_2}(x^-_{\theta}\otimes t)^{|\mu|}v_{\lambda,\mu}+V_{|\mu|},\quad 0\le j<|\mu|.$

显然，$\mathrm{Ker}\,\phi(\lambda,\mu)=V_0$ 且 $V_{j+1}\subset V_j$ 对于 $0\le j\le|\mu|$. 由于 $h\otimes t^s v_{\lambda,\ \mu}=0$ 对所有 $h\in\mathfrak{h}$、$s\in\mathbb{N}$、$g\otimes t^2 v_{\lambda,\ \mu}=0$ 对所有 $g\in\mathfrak{g}$，且 $(x^-_{\alpha_i}\otimes t)^s v_{\lambda,\ \mu}=0$ 对于 $s>\mu_i$，i=1,2,

$$(x^+_{\alpha_1}\otimes 1)^{a_1}(x^+_{\alpha_2}\otimes 1)^{a_2}(x^-_{\theta}\otimes t)^{|\mu|}v_{\lambda,\mu}=(-1)^{a_1}(x^-_{\alpha_1}\otimes t)^{a_2}(x^-_{\theta}\otimes t)^{|\mu|-a_1-a_2}(x^-_{\alpha_2}\otimes t)^{a_1}v_{\lambda,\mu}.$$

因此,

$$V_j=\sum_{j-a=0}^{\mu_2-1}\sum_{a=0}^{\mu_1}\mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])(x^-_{\alpha_1}\otimes t)^{a}(x^-_{\theta}\otimes t)^{|\mu|-j}(x^-_{\alpha_2}\otimes t)^{j-a}v_{\lambda,\mu}+V_{|\mu|},\quad \text{for } 1\le j<|\mu|.$$

进一步地，由于 $(x^-_{\theta}\otimes t)^{s}v_{\lambda,\ \mu}=0$ 对 $s\ge|\mu|+1$ 成立意味着

$$(x^-_{\alpha_1}\otimes t)^{a_1}(x^-_{\theta}\otimes t)^{s-a_1-a_2}(x^-_{\alpha_2}\otimes t)^{a_2}v_{\lambda,\mu}=0,\qquad \text{for } s>|\mu|,$$

我们有

$$g\otimes t.\frac{V_j}{V_{j+1}}=0,\quad \forall\ g\in\mathfrak{g},\ 0\le j\le|\mu|-1,$$

这意味着，对于 $0\le j<|\mu|$，$\dfrac{V_j}{V_{j+1}}$ 是一个形如 $\tau^*_{|\mu|}W_j$ 的分次 $\mathfrak{g}[t]$-模，其中 $W_j$ 是有限维 $\mathfrak{g}$-模。因此存在 $\lambda_{kj}\in P^+$，使得 $W_j$ 与 $\bigoplus V(\lambda_{kj})$ 同构。$_k$

现在注意到，当 $(x^-_{\alpha_1}\otimes 1)^{s_1}v_{\lambda\text{时},\ \mu}=0$ 对于 $r=|\mu|-a_2$，$s=a_1$ 以及 $l=|\mu|-a_1$ 在 (4.7) 中满足 $r+s=|\mu|-a_2+a_1>\lambda_1+\mu_1$，我们有

$$\sum_{d=0}^{|\mu|-a_1}\binom{|\mu|-a_1}{d}\mathbf{X}_1(|\mu|-a_2-d,a_1)(x^-_{\theta}\otimes t)^{d}(x^-_{\alpha_2}\otimes t)^{|\mu|-a_1-d}v_{\lambda,\mu}=0.$$

利用如下事实：$(x^-_{\alpha_2}\otimes t)^{|\mu|-a_1-d}v_{\lambda,\mu}=0$ 对 $|\mu|-a_1-d>\mu_2$ 成立，因此可得$\sum_{i=0}^{\mu_2}\binom{|\mu|-a_1}{\mu_1-a_1+i}$

$\mathbf{X}_1(\mu_2-a_2+a_1-i,a_1)(x^-_{\theta}\otimes t)^{\mu_1-a_1+i}(x^-_{\alpha_2}\otimes t)^{\mu_2-i}v_{\lambda,\mu}=0$，只要 $\mu_2-a_2+a_1>\lambda$

因此，对 $\mu_2 - a_2 + a_1 > \lambda_1$,

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{i=0}^{\mu_2-a_2-1} \binom{|\mu|-a_1}{\mu_1-a_1+i}\mathbf{X}_1(\mu_2-a_2+a_1-i,a_1)(x_\theta^-\otimes t)^{\mu_1-a_1+i}(x_{\alpha_2}^-\otimes t)^{\mu_2-i}v_{\lambda,\mu}\\
&+\tbinom{|\mu|-a_1}{\mu_1-a_1+\mu_2-a_2}\mathbf{X}_1(a_1,a_1)(x_\theta^-\otimes t)^{\mu_1-a_1+\mu_2-a_2}(x_{\alpha_2}^-\otimes t)^{a_2}v_{\lambda,\mu}\\
&+\textstyle\sum_{i=\mu_2-a_2+1}^{\mu_2} \binom{|\mu|-a_1}{\mu_1-a_1+i}\mathbf{X}_1(\mu_2-a_2+a_1-i,a_1)(x_\theta^-\otimes t)^{\mu_1-a_1+i}(x_{\alpha_2}^-\otimes t)^{\mu_2-i}v_{\lambda,\mu}=0.
\end{aligned}$$

利用关系式 $x_\alpha^-\otimes t^s.v_{\lambda,\mu}=0$ ，对于 $s\geq 2$，由上文可推得

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{i=0}^{\mu_2-a_2-1} \binom{|\mu|-a_1}{\mu_1-a_1+i}\mathbf{X}_1(\mu_2-a_2+a_1-i,a_1)(x_\theta^-\otimes t)^{\mu_1-a_1+i}(x_{\alpha_2}^-\otimes t)^{\mu_2-i}v_{\lambda,\mu}\\
&\quad=-\tbinom{|\mu|-a_1}{\mu_1-a_1+\mu_2-a_2}(x_{\alpha_1}^-\otimes t)^{(a_1)}(x_\theta^-\otimes t)^{\mu_1-a_1+\mu_2-a_2}(x_{\alpha_2}^-\otimes t)^{a_2}v_{\lambda,\mu}.
\end{aligned}$$

若 $(a_1,a_2)$ 是一对满足 $a_1+a_2=j$ 的整数，则利用以下事实:

$$\mathbf{X}_1(\mu_2-a_2+a_1-i,a_1)(x_\theta^-\otimes t)^{\mu_1-a_1+i}(x_{\alpha_2}^-\otimes t)^{\mu_2-i}v_{\lambda,\mu}\in V_{\mu_2-i+a_1},$$

我们看到，当 $a_2<\mu_2$ 时，对于 $0\leq i\leq \mu_2-a_2-1$, $V_{\mu_2-i+a_1}\subset V_{j+1}$。因此，

$(x_{\alpha_1}^-\otimes t)^{(a_1)}(x_\theta^-\otimes t)^{(|\mu|-j)}(x_{\alpha_2}^-\otimes t)^{(a_2)}v_{\lambda,\mu}\in V_{j+1}$，当 $a_1+a_2=j$ 时，且 $|\mu|-a_2+a_1>\lambda_1+\mu_1$.

类似地，利用关系式 $(x_{\alpha_2}^-\otimes t)^{(s_2)}v_{\lambda,\mu}=0$ ，对于 $s_2>\lambda_2+\mu_2$，可以证明 $(x_{\alpha_1}^-\otimes t)^{(a_1)}(x_\theta^-\otimes t)^{(|\mu|-j)}(x_{\alpha_2}^-\otimes t)^{(a_2)}v_{\lambda,\mu}\in V_{j+1}$，当 $a_1+a_2=j$ 时，且 $|\mu|-a_1+a_2>\lambda_2+\mu_2$。因此可得 $\dfrac{V_j}{V_{j+1}}$ 是一个由.....生成的 $\mathfrak{g}$-模

$$\{(x_{\alpha_1}^-\otimes t)^{(a)}(x_\theta^-\otimes t)^{(|\mu|-j)}(x_{\alpha_2}^-\otimes t)^{(j-a)}v_{\lambda,\mu}:\ 0\leq a\leq\mu_1, 0\leq j-a<\mu_2, \mu_2-\lambda_1\leq j-2a\leq\lambda_2-\mu_1\}.$$

Set, $S^{\lambda,\mu}_j=\{a\in\mathbb{Z}:\ 0\leq a\leq\mu_1, 0\leq j-a<\mu_2, \mu_2-\lambda_1\leq j-2a\leq\lambda_2-\mu_1\}$.

注意，对于所有 $a\in S^{\lambda,\mu}_j$，$(x_{\alpha_1}^-\otimes t)^{(a)}(x_\theta^-\otimes t)^{(|\mu|-j)}(x_{\alpha_2}^-\otimes t)^{(j-a)}v_{\lambda,\mu}=\lambda+w_0\mu+(j-a)\alpha_1+a\alpha_2$ 和 $\lambda+w_0\mu+(j-a)\alpha_1+a\alpha_2\in P^+$ 的权。根据构造，$(x_{\alpha_i}^+\otimes 1)$。$(x_{\alpha_1}^-\otimes t)^{(a)}(x_\theta^-\otimes t)^{(|\mu|-j)}(x_{\alpha_2}^-\otimes t)^{(j-a)}v_{\lambda,\mu}\in V_{j+1}$ 对于 $i=1,2$，并且对固定的 $0\leq j<|\mu|$，当 $0\leq a\leq \min\{\mu_1,j\}$ 时，数对 $(a,j)$ 两两不同。由此可知，分次 $\mathfrak{g}$-模 $\dfrac{V_j}{V_{j+1}}$ 是 $\bigoplus_{a\in S^{\lambda,\mu}_j}\tau^*_{|\mu|}V(\lambda+w_0\mu+(j-a)\alpha_1+a\alpha_2)$ 的商模；也就是说，对于 $0\leq j\leq|\mu|-1$，存在一个满射 $\mathfrak{sl}_3[t]$-同态 $\phi_j^{(\lambda,\mu)}:\bigoplus_{a\in S^{\lambda,\mu}_j}\tau^*_{|\mu|}V(\lambda+w_0\mu+(j-a)\alpha_1+a\alpha_2)\to\dfrac{V_j}{V_{j+1}}$.

要看出 $V_{|\mu|}$ 是 $\tau_{\mu_2}^{*}\mathcal{F}_{\lambda+\mu_2(\omega_1-\omega_2)\ \mu_1\omega_1}$ 的商模，注意到 $V_{|\mu|}$ 的生成元 $(x_{\alpha_2}^{-}\otimes t)^{\mu_2}v_{\lambda,\mu}$ 是 $\mu_2$-分次元素。进一步利用向量 $v_{\lambda,\mu}$ 满足的关系式，我们得到：

$$x_{\alpha_i}^{+}.(x_{\alpha_2}^{-}\otimes t)^{(\mu_2)}v_{\lambda,\mu}=0,\ \text{for } i=1,2 \qquad h\otimes t^{k+1}.(x_{\alpha_2}^{-}\otimes t)^{(\mu_2)}v_{\lambda,\mu}=0,\ \forall\ k\geq 0,$$

这意味着 $V_{|\mu|}$ 是 $W_{loc}(\lambda+\mu-\mu_2\alpha_2)$的商模。此外，注意到对于 $i=1,\ 2,\ \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=-1$，有 $\langle\theta,\alpha_i\rangle=1$，并使用引理 4.5，其中 $l_\gamma=(\lambda+\mu)(h_\gamma),\ l_\gamma^1=\mu(h_\gamma)$，对每个 $\gamma\in R^+$，可得 $V_{|\mu|}$是 $CV$-模 $\tau_{\mu_2}^{*}V(\boldsymbol{\xi})$的商模，其中 $\boldsymbol{\xi}=(\xi^\alpha)_{\alpha\in R^+}$，满足

$$\xi^{\alpha_1}=(\lambda_1+\mu_2\geq\mu_1\geq 0),\ \ \xi^{\alpha_2}=(\lambda_2-\mu_2\geq 0),\ \ \xi^{\theta}=(\lambda_1+\lambda_2\geq\mu_1\geq 0).$$

显然， $V(\boldsymbol{\xi})$与 $\mathcal{F}_{\lambda+\mu_2(\omega_1-\omega_2)\ \mu_1\omega_1}$同构。

ii. 假设 $\mu_2=0$ 和 $\mu_1>0$。令

$$K_1(\lambda,\mu_1)=\mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])(x_\theta^{-}\otimes t)^{\mu_1}v_{\lambda,\mu_1}.$$

在这种情况下， $e_2^k e_1^j(x_\theta^{-}\otimes t)v_{\lambda,\mu_1}=0,\quad \forall j>0$，因为 $(x_{\alpha_2}^{-}\otimes t)v_{\lambda,\mu_1}=0$。因此，令

$V_j=\mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])e_2^j(x_\theta^{-}\otimes t)^{\mu_1}v_{\lambda,\ \mu_1}=\mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])(x_{\alpha_1}^{-}\otimes t)^{j}(x_\theta^{-}\otimes t)^{\mu_1-j}v_{\lambda,\ \mu_1}$，当 $0\leq j\leq\mu_1$时，

我们看到 $V_{j+1}\subset V_j$和 $V_{\mu_1}=\mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])(x_{\alpha_1}^{-}\otimes t)^{\mu_1}v_{\lambda,\ \mu_1}$。因此，由命题 4.3，

$$K_1(\lambda,\mu)=\mathrm{Ker}(\lambda,\mu).$$

现在，使用与命题第(i)部分相同的论证，我们推导出，对于每个 $0\leq j\leq\mu_1$，$\dfrac{V_j}{V_{j+1}}$ 都是一个分次 $\mathfrak{g}[t]$-模，其形式为 $\tau^{*}W_j$，其中 $W_j$ 是由 $(x_{\alpha_1}^{-}\otimes t)^{j}(x_\theta^{-}\otimes t)^{\mu_1-j}v_{\lambda,\ \mu_1}$生成的有限维 $\mathfrak{g}$-模。

由于 $(x_{\alpha_2}^{-}\otimes 1)^{k}v_{\lambda,\mu}=0$，对于 $k\geq\lambda_2+1$，我们可以看到

$$\sum_{d=0}^{\mu_1}\binom{\mu_1}{d}(x_{\alpha_1}^{-}\otimes t)^{\mu_2-d}(x_\theta^{-}\otimes t)^{d}(x_{\alpha_2}^{-}\otimes 1)^{k-d}v=0,\qquad\forall\ k\geq\lambda_1+1. \tag{5.1}$$

因此，当 $\mu_1>\lambda_2$ 且 $k=\lambda_2+1$时，（5.1）化简为

$$\sum_{d=0}^{\lambda_2+1}\binom{\mu_1}{d}(x_{\alpha_1}^{-}\otimes t)^{\mu_1-d}(x_\theta^{-}\otimes t)^{d}(x_{\alpha_2}^{-}\otimes 1)^{\lambda_2+1-d}v=0,$$

这意味着,

$$(x_\theta^- \otimes t)^{\lambda_1+1}(x_{\alpha_1}^- \otimes t)^{\mu_1-\lambda_2-1}v_{\lambda,\mu} = \sum_{d=0}^{\lambda_2}\binom{\mu_1}{d}(x_{\alpha_1}^- \otimes t)^{\mu_1-d}(x_\theta^- \otimes t)^d(x_{\alpha_2}^- \otimes 1)^{\lambda_2+1-d}v_{\lambda,\mu}. \tag{5.2}$$

由于元素 $(x_{\alpha_1}^- \otimes t)^{\mu_1-d}(x_\theta^- \otimes t)^d(x_{\alpha_1}^- \otimes 1)^{\lambda_2+1-d}v_{\lambda,\mu} \in V_{\mu_1-d}$ 和 $V_{\mu_1-d} \subseteq V_{\mu_1-\lambda_2}$ for $0 \le d \le \lambda_2$, 由 (5.2) 可知, $\frac{V_j}{V_{j+1}}$ 与 $0 \le d \le \lambda_2$的零模同构。因此 Ker $\phi(\lambda,\mu) = V_M$, 其中 $M = \max\{0, \mu_1-\lambda_2\}$。由于 $(x_{\alpha_1}^- \otimes t)^j(x_\theta^- \otimes t)^{\mu_1-j}v_{\lambda,\mu}$的权为 $\lambda - \mu_1\omega_2 + j\alpha_2$, 且根据构造, $x_\alpha^+.(x_{\alpha_1}^- \otimes t)^j(x_\theta^- \otimes t)^{\mu_1-j}v_{\lambda,\mu} \in V_{j+1}$, 因此 $\frac{V_j}{V_{j+1}}$是 $\tau_{\mu_1}^* V(\lambda - \mu_1\omega_2 + j\alpha_2)$ 对于 $M \le j \le \mu_1$ 的一个商模。命题得证。□

**5.2.**

2命题。设$(\lambda,\mu)$是 $\lambda+\mu$的第二类分拆, 且 $|\rho_\lambda^\mu| = \sum \min\{\lambda_i,\mu_i\}$。则$_{i=1}$核 $\phi(\lambda,\mu)$具有一个滤过, 其连续商是下列对象的商模

$$\bigoplus_{a\in S_{\lambda,\mu}^{(\ell,k)}} \tau_{\mu_1+\lambda_2+\ell}^* V(\lambda + w_0\mu + (\mu_2-\lambda_2-\ell)\theta + a\alpha_2 + (k-a)\alpha_1), \qquad \begin{matrix} 1 \le \ell \le \lambda_2-\mu_2, \\ 0 \le k \le \mu_1+\lambda_2, \end{matrix}$$

其中 $S_\lambda^{(\ell,k)}{}_{,\ \mu} = \{a \in \mathbb{Z} :\ 0 \le a \le \mu_1,\ 0 \le k-a \le \lambda_2,\ \mu_1-\mu_2+\ell \le 2a-k \le \lambda_1-\lambda_2-\ell\}$。

证明。设

$$K_2(\lambda,\mu) = \mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])(x_\theta^- \otimes t)^{\mu_1+\lambda_2+1}v_{\lambda,\mu}.$$

由于对于 $\ell \ge 1$, $K_2$, $\lambda(\mu)$等于由向量集 $\{\mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])(x_\theta^- \otimes t)^{\mu_1+\lambda_2+s}v_{\lambda,\ \mu}$ 生成的$\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu}$ 的子模, 其中 $\mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])(x_\theta^- \otimes t)^{\mu_1+\lambda_2+\ell}v_{\lambda,\ \mu} \subseteq \mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])(x_\theta^- \otimes t)^{\mu_1+\lambda_2+1}v_{\lambda,\ \mu}$, 因此由命题4.3, $K_2(\lambda,\ \mu) =$核 $\phi(\lambda,\ \mu)$。对于 $1 \le \ell \le \mu_2-\lambda_2$和 $0 \le k \le |\rho_\lambda^\mu|$, 设

$$V_{\ell,k} = \sum_{\{(a_1,a_2):a_1+a_2=k, 0\le a_i\le \min\{\mu_i,\lambda_i\}, i=1,2\}} \mathbf{U}(\mathfrak{g}[t])(x_{\alpha_1}^+ \otimes 1)^{(a_2)}(x_{\alpha_2}^+ \otimes 1)^{(a_1)}(x_\theta^- \otimes t)^{\mu_1+\lambda_2+\ell}v_{\lambda,\mu}.$$

注意, 对于所有 $1 \le \ell \le \mu_2-\lambda_2$和 $0 \le k \le |\rho_\lambda^\mu|-1$, $V_{\ell,k+1} \subset V_{\ell,k}$ 以及 $V_{\ell+1,0} \subset V_{\ell,|\rho_\lambda^\mu|}$。此外, 由于 $x_\gamma^- \otimes t^2.v_{\lambda,\mu} = 0$ 对所有 $\gamma \in R^+$均成立, $(x_\theta^- \otimes t)^s.v_{\lambda,\mu} = 0$, 对于 $s > |\mu|$ 和

$$(x_{\alpha_1}^+ \otimes 1)^{(a_2)}(x_{\alpha_2}^+ \otimes 1)^{(a_1)}(x_\theta^- \otimes t)^{\mu_1+\lambda_2+\ell}v_{\lambda,\mu} = (x_{\alpha_1}^- \otimes t)^{(a_1)}(x_\theta^- \otimes t)^{\mu_1+\lambda_2+\ell-a_1-a_2}(x_{\alpha_2}^- \otimes t)^{(a_2)}v_{\lambda,\mu} \in V_{\ell,a_1+a_2},$$

因此，对于所有 $g \in \mathfrak{g}$,

$$g \otimes t.\frac{V_{\ell,k}}{V_{\ell,k+1}} = 0, \qquad \forall \quad 0 \leq k \leq |\rho_\lambda^\mu| - 1,\ 1 \leq \ell \leq \mu_2 - \lambda_2,$$

$$g \otimes t.\frac{V_{\ell,|\rho_\lambda^\mu|}}{V_{\ell+1,0}} = 0, \qquad \forall\, 1 \leq \ell \leq \mu_2 - \lambda_2 - 1, \qquad \text{and} \qquad g \otimes t.V_{\mu_2-\lambda_2,|\rho_\lambda^\mu|} = 0.$$

这意味着，对于所有 $0 \leq k \leq |\rho_\lambda^\mu| - 1$, $1 \leq \ell \leq \mu_2 - \lambda_2$, $V_{\ell,\ \overline{V_\ell}^{k}}$, $_{k+1}$ 都同构于如下形式的分次 $\mathfrak{g}[t]$-模：$\tau^*_{\mu_1+\lambda_2+\ell} W_{\ell,\ k}$ 其中 $W_{\ell,\ k}$ 是有限维 $\mathfrak{g}$-模，且 $1 \leq \ell \leq \mu_2 - \lambda_2 - 1$。类似地，$V_{\ell,\ \overline{V_{\ell+1\,0}}^{|\rho_\lambda^\mu|}}$, 以及 $V_{\mu_2-\lambda_2,\ |\rho_\lambda^\mu|}$ 分别同构于如下形式的分次 $\mathfrak{g}[t]$- 模：$\tau^*_{\mu_1+\lambda_2+\ell} W_{\ell,\ |\rho_\lambda^\mu|}$ 和 $\tau^*_{|\mu|} W_{\mu_2-\lambda_2,\ |\rho_\lambda^\mu|}$，其中 $W_{\ell,\ |\rho_\lambda^\mu|}$ 是 $1 \leq \ell \leq \mu_2 - \lambda_2$ 的有限维 $\mathfrak{g}$-模。

对于 $1 \leq \ell \leq \mu_2 - \lambda_2$，若 $k = |\rho_\lambda^\mu| = \mu_1 + \lambda_2$，则满足条件 $a_1 + a_2 = |\rho_\lambda^\mu|$、$a_1 \leq \mu_1$ 和 $a_2 \leq \lambda_2$ 的 $a_1$、$a_2 \in \mathbb{Z}_+$ 仅有 $a_1 = \mu_1$ 和 $a_2 = \lambda_2$。因此，在这种情况下，$(x^-_{\alpha_1} \otimes t)^{(a_1)}(x^-_\theta \otimes t)^{\mu_1+\lambda_2+\ell-a_1-a_2}(x^-_{\alpha_2} \otimes t)^{(a_2)} v_{\lambda,\mu}$ 的权为 $\lambda + \mu - \ell\theta - \mu_1\alpha_1 - \lambda_2\alpha_2 \in P^+$，其中 $\underline{1 \,|\text{必}|}\ell \leq \mu_2 - \lambda_2$，因为我们考虑的是 $\mu_2 > \lambda_2$ 和 $|\lambda| \geq |\mu|$ 的情形。因此可得，$V_{\mu_2-\lambda_2,|\rho_\lambda^\mu|}$ 和 $V_{\ell,\ \overline{V_{\ell+1\,0}}}$, 分别是 $\tau^*_{|\mu|} V(\lambda + w_0\mu - \mu_1\alpha_1 - \lambda_2\alpha_2)$ 和 $\tau^*_{\mu_1+\lambda_2+\ell} V(\lambda + \mu - \ell\theta - \mu_1\alpha_1 - \lambda_2\alpha_2)$ 的商模，其中 $1 \leq \ell \leq \mu_2 - \lambda_2 - 1$。

另一方面，由于 $v_{\lambda,\mu}$ 满足引理 4.5的条件，因此我们看到，若 $r = \mu_1 + \lambda_2 - a_2 + \ell$,$s = a_1$ 且 $l = \mu_1 + \lambda_2 + \ell - a_1$ 在 (4.7) 中成立，则对于 $r + s = \mu_1 + \lambda_2 + \ell - a_2 + a_1 > \lambda_1 + \mu_1$ 我们有：

$$\sum_{d=0}^{\mu_1+\lambda_2+\ell-a_1} \binom{\mu_1 + \lambda_2 + \ell - a_1}{d} \mathbf{X}_1(\mu_1 + \lambda_2 + \ell - a_2 - d, a_1)(x^-_\theta \otimes t)^d (x^-_{\alpha_2} \otimes t)^{\mu_1+\lambda_2+\ell-a_1-d} = 0.$$

类似地，若 $r = \mu_1 + \lambda_2 - a_1 + \ell$, $s = a_2$ 和 $l = \mu_1 + \lambda_2 + \ell - a_2$，则对于 $r + s = \mu_1 + \lambda_2 + \ell - a_1 + a_2 > \lambda_2 + \mu_2$ 我们有：

$$\sum_{d=0}^{\mu_1+\lambda_2+\ell-a_2} \binom{\mu_1 + \lambda_2 + \ell - a_2}{d} \mathbf{X}_2(\mu_1 + \lambda_2 + \ell - a_1 - d, a_2)(x^-_\theta \otimes t)^d (x^-_{\alpha_1} \otimes t)^{\mu_1+\lambda_2+\ell-a_2-d} = 0.$$

因此，若 $a_1$、$a_2 \in \mathbb{Z}_+$ 满足 $a_1 + a_2 = k$ 且 $0 \leq k < |\rho_\lambda^\mu|$，则通过类似命题 5.1(i) 中的计算可知，当 $\mu_1 + \lambda_2 + \ell - a_2 + a_1 > \lambda_1 + \mu_1$ 或 $\mu_1 + \lambda_2 + \ell - a_1 + a_2 > \lambda_2 + \mu_2$ 时，$(x^-_{\alpha_1} \otimes t)^{(a_1)}(x^-_\theta \otimes t)^{\mu_1+\ell-a_1-a_2}(x^-_{\alpha_2} \otimes t)^{(a_2)} v_{\lambda,\mu} \in V_{\ell,k+1}$。因此，对于 $1 \leq \ell \leq \mu_2 - \lambda_2$ 和

$0 \le k \le |\rho^{\mu}_{\lambda}| - 1$、$\underline{V_\ell V_\ell}^{k}{}_{,k+1}$ 是有限维分次 $\mathfrak{g}[t]$-模的一个商模

$$\bigoplus_{a \in S^{(\ell,k)}_{\lambda,\mu}} \tau^{*}_{\mu_1+\lambda_2+\ell} V(\lambda + w_0\mu + (\mu_2 - \lambda_2 - \ell)\theta + a\alpha_2 + (k-a)\alpha_1),$$

其中 $S^{(\ell,k)}_{\lambda,\mu} = \{a \in \mathbb{Z} : 0 \le a \le \mu_1, 0 \le k-a \le \lambda_2, \mu_1 - \mu_2 + \ell \le 2a - k \le \lambda_1 - \lambda_2 - \ell\}$。这就完成了该命题的证明。

□

## 6. Proof of Theorem 4.2

**6.1.** 在本节中，我们完成定理 4.2 的证明。我们已经看到（注 3.3），

$$\dim \mathcal{F}_{\lambda,\mu} \ge \dim V(\lambda).\dim V(\mu), \qquad \forall\ (\lambda,\mu) \in P^{+}(\lambda+\mu, 2). \tag{6.1}$$

现在，我们利用第 5 节的结果证明反向不等式。在本节中，我们始终假设：只要 $\nu$ 或 $\gamma$ 不为零，$\dim \mathcal{F}_{\nu,\gamma} = 0$ 就是非支配权，并且 $\dim \mathcal{F}_{\nu,\gamma} = \dim V(\nu)$，其中 $\gamma = 0$ 且 $\nu \in P^{+}$。

命题。设 $\lambda = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$、$\mu = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2 \in P^{+}$ 和 $\rho^{\mu}_{\lambda} = \mu_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$。

i. 若 $(\lambda,\mu)$ 是具有 $\mu_1 > 0$ 和 $\mu_2 = 0$ 的 $\lambda+\mu$ 第一类分拆，则命题 5.1(ii) 中给出的满同态 $\{\phi_j^{(\lambda,\mu)} : \max\{0, \mu_1 - \lambda_2\} \le j \le \mu_1\}$ 是同构。ii. 若 $(\lambda,\mu)$ 是具有 $\mu_2 > 0$ 和 $\mu_1 > 0$ 的 $\lambda+\mu$ 第一类分拆，则命题 5.1(i) 中给出的满同态 $\{\phi_j^{(\lambda,\mu)} : 0 \le j \le |\mu|\}$ 是同构。iii. 若 $(\lambda,\mu)$ 是 $\lambda+\mu$ 的第二类分拆，则核 $\phi(\lambda,\mu)$ 有一个滤过，其连续商同构于 $\bigoplus_{a \in S^{(\ell,k)}_{\lambda}{}_{,\mu}} \tau^{*}_{\mu_1+\lambda_2+\ell}$（$\lambda + w_0\mu + (\mu_2 - \lambda_2 - \ell)\theta + a\alpha_2 + (k-a)\alpha_1$），其中 $S^{(\ell,k)}_{\lambda,\mu} = \{a \in \mathbb{Z} : 0 \le a \le \mu_1, 0 \le k-a \le \lambda_2, \mu_1 - \mu_2 + \ell \le 2a - k \le \lambda_1 - \lambda_2 - \ell\}$。因此，$\dim \mathcal{F}_{\lambda,\mu} = \dim V(\lambda) \dim V(\mu)$。

**6.2.** 命题**6.1**(i) 的证明。我们通过考察两个子情形来证明第 (i) 部分。

子情况 1. 假设 $\lambda$ 和 $\mu$ 都是 $\omega_1$的倍数。由于 $\lambda_1 \ge \mu_1$，根据命题 5.1(ii)，核 $\phi(\lambda_1\omega_1, \mu_1\omega_1)$ 是 $V((\lambda_1 - \mu_1)\omega_1 + \mu_1\omega_2$的一个商模，因此，

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{F}_{\lambda,\mu} = &\ \dim \mathcal{F}_{(\lambda_1+1)\omega_1,(\mu_1-1)\omega_1} + \dim \operatorname{Ker} \phi(\lambda,\mu) \\ &\le \dim \mathcal{F}_{(\lambda_1+1)\omega_1,(\mu_1-1)\omega_1} + \dim V((\lambda_1 - \mu_1)\omega_1 + \mu_1\omega_2). \end{aligned} \tag{6.2}$$

由归　设想，对于　$\mu_1 = 1$, $\mathcal{F}_{(\lambda_1+1)\omega_1,\ (\mu_1-1)\omega_1}$ 与　$V((\lambda_1+1)\omega_1)$ 同构。因此我们有　　，

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{F}_{\lambda,\mu} \leq\ & \dim V(\lambda_1+1)\omega_1) + \dim V((\lambda_1-1)\omega_1+\omega_2) = \tfrac{1}{2}[(\lambda_1+2)(\lambda_1+3)+\lambda_1(\lambda_1+2)] \\ \leq\ & \tfrac{3}{2}(\lambda_1+1)(\lambda_1+2) = \dim V(\lambda_1\omega_1)\dim V(\omega_1).\end{aligned}$$

结合（6.1），这意味着，$\dim \mathcal{F}_{\lambda_1\omega_1,\omega_1} = \dim\ V(\lambda_1\omega_1)\dim\ V(\omega_1)$。

现在，根据归纳假设，假设对于所有满足$\mathcal{F}_{\lambda_1\omega_1,\mu_1\omega_1} = \dim\ V(\lambda_1\omega_1)\dim\ V(\mu_1\omega_1)$ 的 $\mu_1 \in \mathbb{N}$，均有 $\mu_1 < n$。那么，利用命题 5.1(ii)，我们得到：

$$\begin{aligned}4\dim \mathcal{F}_{\lambda_1\omega_1,n\omega_1} \leq\ & 4\dim \mathcal{F}_{(\lambda_1+1)\omega_1,(n-1)\omega_1} + 4\dim V((\lambda_1-n)\omega_1+n\omega_2) \\ \leq\ & [(\lambda_1+2)(\lambda_1+3)n(n+1)+2(\lambda_1-n+1)(n+1)(\lambda_1+2)] \\ \leq\ & (\lambda_1+1)(\lambda_1+2)(n+1)(n+2) = 4\dim V(\lambda_1\omega_1)\dim V(n\omega_1).\end{aligned}$$

结合（6.1），这意味着，$\dim \mathcal{F}_{\lambda_1\omega_1,n\omega_1} = \dim\ V(\lambda_1\omega_1)\dim\ V(n\omega_1)$。因此，

$$\operatorname{Ker}\phi(\lambda_1\omega_1,\mu_1\omega_1) \cong_{\mathfrak{sl}_3[t]} \tau_{\mu_1}^* V((\lambda_1-\mu_1)\omega_1+\mu_1\omega_2) = \tau_{\mu_1}^* V(\lambda + w_0\mu + \mu_1\alpha_2).$$

取子代数 2。设 设 $\lambda = \lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2$，　$\mu = \mu_1\omega_1 \in P^+$ 且 $\lambda_1 > \mu_1 > 0$。由命题 5.1(ii)，

$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda,\mu_1\omega_1) \leq \sum_{j=\max\{0,\mu_1-\lambda_2\}}^{\mu_1} \dim V(\lambda-\omega_2+j(2\omega_2-\omega_1)). \tag{6.3}$$

特别地，当　$\mu_1 = 1$ 时，

$$\begin{aligned}2\text{ 维数 }\mathcal{F}_{\lambda,\omega_1} \leq\ & 2\text{ 维数 }V(\lambda+\omega_1)\ + 2\text{ 维数 }V(\lambda+(\omega_2-\omega_1))\ + 2\text{ 维数 }V(\lambda-\omega_2) \\ \leq\ & (\lambda_1+2)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+3)+\lambda_1(\lambda_2+2)(\lambda_1+\lambda_2+2)+(\lambda_1+1)(\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2+1) \\ \leq\ & 3(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)+(\lambda_2+1)(2\lambda_1+\lambda_2+4)-(\lambda_2-\lambda_1+1)(\lambda_1+\lambda_2+2) \\ & -(\lambda_1+1)(\lambda_1+2\lambda_2+2) \\ \leq\ & 3(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2) = 2\dim V(\omega_1).\dim V(\lambda)\end{aligned}$$

结合（6.1），这表明 $\dim \mathcal{F}_{\lambda,\ \mu_1\omega_1} = \dim\ V(\lambda)\dim\ V(\omega_1)$，并且

$$\operatorname{Ker}\phi(\lambda,\omega_1) \cong_{\mathfrak{sl}_3[t]} \tau_1^* V(\lambda-(\omega_1-\omega_2)) \oplus \tau_1^* V(\lambda-\omega_1) = \bigoplus_{j=0}^{1} \tau_1^* V(\lambda+w_0\mu+j\alpha_2),$$

正如定理 4.2中所声称的。现由归纳假设，假定命题6.1(i) 对所有满足 $\mu_1 < n$ 的 CV 模 $\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu_1\omega_1}$ 均成立，即,

$$\dim \mathcal{F}_{\lambda,\mu_1\omega_1} = \dim V(\lambda)\dim V(\mu_1\omega_1) \quad \text{whenever } \mu_1 < n.$$

于是，利用命题 5.1(ii) 并应用归纳假设，我们可知，对于 $\mu_1 = n$,

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Ker}\phi(\lambda, n\omega_1) \leq &\quad \dim V(\lambda + n(\omega_2-\omega_1)) + \sum_{j=\max\{0,n-\lambda_2\}}^{n-1} \dim V(\lambda-\omega_2+-(n-1)\omega_2 + j(2\omega_2-\omega_1))\\ \leq &\quad \dim V(\lambda+n(\omega_2-\omega_1)) + \dim \operatorname{Ker}\phi(\lambda-\omega_2,(n-1)\omega_1).\end{aligned}$$

根据命题 5.1，dim 核 $\phi(\lambda,\mu_1\omega_1) = \dim \mathcal{F}_{\lambda,\ \mu_1\omega_1} - \dim \mathcal{F}_{\lambda+\omega_1,\ (\mu_1-1)\omega_1}$。因此,

$$\dim \mathcal{F}_{\lambda,\ n\omega_1} \leq \text{di}\quad \text{m}\, \mathcal{F}_{\lambda+\omega_1,\quad (n-1)\ \omega_1} + \text{维数}\, \mathcal{F}_{\lambda-\omega_2,\quad (n-1)\ \omega_1} - \text{维数}\, \mathcal{F}_{\lambda+\omega_1-\omega_2,\quad (n-2)\ \omega_1} + \text{维数}\, V(\lambda+n(\omega_2-\omega_1))。 \tag{6.4}$$

因此,

$$\begin{aligned}4\dim \mathcal{F}_{\lambda,n\omega_1} \leq &\quad (n)(n+1)[(\lambda_1+2)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+3)+(\lambda_1+1)(\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2+1)]\\ &\quad -(\lambda_1+2)(\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2+2)(n-1)n+2(\lambda_1-n+1)(\lambda_2+n+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)\\ \leq &\quad (n)(n+1)[3(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)-\lambda_1(\lambda_2+2)(\lambda_1+\lambda_2+2)]\\ &\quad -(\lambda_1+2)(\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2+2)(n-1)n+2(\lambda_1-n+1)(\lambda_2+n+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)\\ &\qquad\qquad\qquad

命题 5.1,

$$\begin{aligned}\dim\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu} &= \dim\mathcal{F}_{\lambda+\omega_2,\ \mu-\omega_2} + \text{核}(\lambda,\mu)\\ &\leq \dim\mathcal{F}_{\lambda+\omega_2,\mu-\omega_2} + \dim\mathcal{F}_{\lambda+\mu_2(\omega_1-\omega_2),\mu_1\omega_1} + \sum_{(a_1,a_2)\in\mathbb{S}^{\lambda,\mu}} \dim V(\lambda+w_0\mu+a_2\alpha_1+a_1\alpha_2).\end{aligned} \tag{6.6}$$

特别地，对于 $\mu_2=1$，若 $(a_1,a_2)\in\mathbb{S}^{\lambda,\ \mu_1\omega_1+\omega_2}$，则根据 $S^{\lambda,\ \mu}_{\ j}$ 的定义，

$$a_2=0,\qquad \mu_1-\lambda_2\leq a_1\leq\min\{\mu_1,\lambda_1-1\}.$$

因此,

$$\dim\mathcal{F}_{\lambda,\mu_1\omega_1+\omega_2}\leq\dim\mathcal{F}_{\lambda+\omega_2,\mu_1\omega_1}+\dim\mathcal{F}_{\lambda+(\omega_1-\omega_2),\mu_1\omega_1}+\sum_{j=\max\{0,\mu_1-\lambda_2\}}^{\min\{\mu_1,\lambda_1-1\}}\dim V(\lambda+w_0\mu+j\alpha_2). \tag{6.7}$$

另一方面，利用命题 5.1(ii) 和命题6.1(i)，我们有,

$$\dim\mathrm{Ker}(\lambda-\theta,\mu-\theta)=\quad\dim\mathrm{Ker}(\lambda-\theta,(\mu_1-1)\omega_1)=\sum_{j=\max\{0,\mu_1-\lambda_2\}}^{\mu_1-1}\dim V(\lambda-\theta+w_0(\mu-\theta)+j\alpha_2)$$

因此（6.7）可改写为:

$$\begin{aligned}\dim\mathcal{F}_{\lambda,\mu_1\omega_1+\omega_2}\leq\quad&\dim\mathcal{F}_{\lambda+\omega_2,\mu_1\omega_1}+\dim\mathcal{F}_{\lambda+(\omega_1-\omega_2),\mu_1\omega_1}+\dim\mathrm{Ker}(\lambda-\theta,(\mu_1-1)\omega_1)\\&+(1-\delta_{\mu_1,\lambda_1})\dim V(\lambda-\omega_1-\mu_1\omega_1+\mu_1\omega_2)\end{aligned} \tag{6.8}$$

将不等式（6.8）右侧记为 $R_{\lambda_1>\mu_1}$，在 $\lambda_1>\mu_1$的情况下，我们有:

$R_{\lambda_1>\mu_1}=4$ 维数 $\mathcal{F}_{\lambda+\omega_2,\mu_1\omega_1}+4$ 维数$\mathcal{F}_{\lambda+(\omega_1-\omega_2)\ \mu_1\omega_1}+4$ 维数 $\mathcal{F}_{\lambda-\theta,(\mu_1-1)\omega_1}$+4 维数 $V((\lambda_1-\mu_1-1)\omega_1+($ $\lambda_2+\mu_1)\omega_2)$ $-4$ 维数 $\mathcal{F}_{(\lambda_1+\mu_2-2)\omega_1+(\lambda_2-\mu_2)\omega_2+\omega_1,(\mu_1-2)\omega_1}=(\mu_1+1)(\mu_1+2)[(\lambda_1+1)(\lambda_2+2)(\lambda_1+\lambda_2+3)($ $\mu_1+1)(\mu_1+2)+(\lambda_1+2)(\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2+2)]+\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)\mu_1(\mu_1+1)$ $+(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+\mu_1+1)(\lambda_1+\lambda_2+1)$ $2-(\lambda_1+1)\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+1)\mu_1(\mu_1-1)$

（利用命题6.1.(i)）

$=(\mu_1+1)(\mu_1+2)[3(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)-(\lambda_2+1)\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2+1)]+\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)\mu_1(\mu_1+1)+2$ $(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+\mu_1+1)(\lambda_1+\lambda_2+1)-(\lambda_1+1)\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+1)\mu_1(\mu_1+1-2)$

$$\begin{aligned}
R_{\lambda_1>\mu_1} = \;& 3(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)(\mu_1+1)(\mu_1+2)\\
&-(\mu_1+1)\mu_1\{(\lambda_2+1)(\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2+1)-\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_1+1)\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+1)\}\\
&+2(\lambda_1+\lambda_2+1)\{(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+\mu_1+1)+(\lambda_1+1)\lambda_2\mu_1-(\lambda_2+1)\lambda_1(\mu_1+1)\}\\
=\;& 3(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)(\mu_1+1)(\mu_1+2)-(\mu_1+1)\mu_1\{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2+1)+\lambda_1\lambda_2\}\\
&-2(\lambda_1+\lambda_2+1)\mu_1(\mu_1+1)\\
=\;& 3(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)(\mu_1+1)(\mu_1+2)-\mu_1(\mu_1+1)(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)\\
=\;& 2(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)(\mu_1+1)(\mu_1+3)=4\dim V(\lambda)\dim V(\mu_1\omega_1+\omega_2)
\end{aligned}$$

通过类似的计算，可以验证，对于 $\mu_1=\lambda_1$，式（6.8）的右端等于 $\dim\ V(\lambda)\dim\ V(\mu_1\omega_1+\omega_2)$。因此可得 $\dim\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu_1\omega_1+\omega_2}=\dim\ V(\lambda)\dim\ V(\mu_1\omega_1+\omega_2)$，且命题6.1(ii) 在此情形下成立。

根据归纳假设，假设命题6.1(ii) 对 $\mu_2\in\mathbb{N}$ 满足，其中 $\mu_2\le k$。根据集合 $S^{\lambda}{}_{\text{的定义}_j}{}^{\mu}$ (参见命题5.1)，可得：

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}^{\lambda,\mu} = \;& \mathbb{S}^{\lambda-\theta,\mu-\theta}\cup\{(\mu_1,b): b\in\mathbb{Z}_+, 0\le b\le\mu_2-1,\ \mu_2+\mu_1-b\le\lambda_1, b\le\lambda_2\}\\
&\cup\{(a,\mu_2-1): a\in\mathbb{Z}_+, 0\le a\le\mu_1-1, \mu_2+a-\mu_2+1\le\lambda_1,\ |\mu|-1-a\le\lambda_2\}
\end{aligned}\tag{6.9}$$

因此，利用命题5.1 并对 $\mu_2$ 应用归纳假设，可得：

$$\begin{aligned}
\sum_{(a_1,a_2)\in\mathbb{S}^{\lambda-\theta,\mu-\theta}}\dim V(\lambda+w_0\mu+a_2\alpha_1+a_1\alpha_2) &= \dim\mathrm{Ker}(\lambda-\theta,\mu-\theta)-\dim\mathcal{F}_{\lambda-\theta+(\mu_2-1)(\omega_1-\omega_2),(\mu_1-1)\omega_1}\\
&=\dim\mathcal{F}_{\lambda-\theta,\mu-\theta}-\dim\mathcal{F}_{\lambda-\theta+\omega_2,\mu-\theta-\omega_2}-\dim\mathcal{F}_{\lambda-\theta+(\mu_2-1)(\omega_1-\omega_2),(\mu_1-1)\omega_1}.
\end{aligned}\tag{6.10}$$

进一步令 $\lambda'=\lambda-\omega_1+\mu_1(\omega_2-\omega_1)$ 和 $\lambda''=\lambda-\theta+(\mu_2-1)(\omega_1-\omega_2)$，我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_{b=\max\{0,|\mu|-1-\lambda_2\}}^{\mu_2-1}\dim V(\lambda+w_0\mu+b\alpha_1+\mu_1\alpha_2) &= \sum_{b=\max\{0,|\mu|-1-\lambda_2\}}^{\mu_2-1}\dim V(\lambda'+w_0(\mu_2-1)\omega_2+b\alpha_1)\\
&=\dim\mathrm{Ker}(\lambda',(\mu_2-1)\omega_2)=\dim\mathcal{F}_{\lambda',(\mu_2-1)\omega_2}-\dim\mathcal{F}_{\lambda'+\omega_2,(\mu_2-2)\omega_2},
\end{aligned}\tag{6.11}$$

and

$$\begin{aligned}
\sum_{a=\max\{0,|\mu|-1-\lambda_2\}}^{\mu_1-1}\dim V(\lambda+w_0\mu+a\alpha_2+(\mu_2-1)\alpha_1) &= \sum_{a=\max\{0,|\mu|-1-\lambda_2\}}^{\mu_1-1}\dim V(\lambda''+w_0(\mu_1-1)\omega_1+a\alpha_2)\\
&=\dim\mathrm{Ker}(\lambda'',(\mu_1-1)\omega_1)=\dim\mathcal{F}_{\lambda'',(\mu_1-1)\omega_1}-\dim\mathcal{F}_{\lambda''+\omega_1,(\mu_1-2)\omega_1}.
\end{aligned}\tag{6.12}$$

利用（6.9）-（6.12），对于 $\mu_2 = k+1$，因此我们可以将不等式（6.6）改写如下　，

$$\begin{aligned}
4\dim \mathcal{F}_{\lambda,\mu} \leq\ & 4\Big(\dim \mathcal{F}_{\lambda+\omega_2,\mu_1\omega_1+k\omega_2} + \dim \mathcal{F}_{\lambda+(k+1)(\omega_1-\omega_2),\mu_1\omega_1} + \dim \mathcal{F}_{\lambda-\theta,(\mu_1-1)\omega_1+k\omega_2} \\
& - \dim \mathcal{F}_{\lambda-\theta+\omega_2,(\mu_1-1)\omega_1+(k-1)\omega_2} - \dim \mathcal{F}_{\lambda-\theta+k(\omega_1-\omega_2),(\mu_1-1)\omega_1} + \dim \mathcal{F}_{\lambda',k\omega_2} \\
& - \dim \mathcal{F}_{\lambda'+\omega_2,(k-1)\omega_2} + \dim \mathcal{F}_{\lambda'',(\mu_1-1)\omega_1} - \dim \mathcal{F}_{\lambda''+\omega_1,(\mu_1-2)\omega_1}\Big) \\
\leq\ & 4\Big(\dim \mathcal{F}_{\lambda+\omega_2,\mu_1\omega_1+k\omega_2} + \dim \mathcal{F}_{\lambda+(k+1)(\omega_1-\omega_2),\mu_1\omega_1} + \dim \mathcal{F}_{\lambda-\theta,(\mu_1-1)\omega_1+k\omega_2} + \dim \mathcal{F}_{\lambda',k\omega_2} \\
& - \dim \mathcal{F}_{\lambda-\omega_1,(\mu_1-1)\omega_1+(k-1)\omega_2} - \dim \mathcal{F}_{\lambda'+\omega_2,(k-1)\omega_2} - \dim \mathcal{F}_{(\lambda_1+k)\omega_1+(\lambda_2-k-1)\omega_2,(\mu_1-2)\omega_1}\Big)
\end{aligned} \tag{6.13}$$

其中 $\lambda'$ 和 $\lambda''$ 的定义如上。现在，利用归纳假设，我们得到：

$$\begin{aligned}
&4\text{维}\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu} \\
\leq\ & (\lambda_1+1)(\lambda_2+2)(|\lambda|+3)(\mu_1+1)(k+1)(\mu_1+k+2) \\
& +(\lambda_1+k+2)(\lambda_2-k)(|\lambda|+2)(\mu_1+1)(\mu_1+2)+\lambda_1\lambda_2(|\lambda|)\mu_1(k+1)(\mu_1+k+1) \\
& -\lambda_1(\lambda_2+1)(|\lambda|+1)\mu_1 k(\mu_1+k)+(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+\mu_1+1)(|\lambda|+1)(k+1)(k+2) \\
& -(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+\mu_1+2)(|\lambda|+2)(k)(k+1)-(\lambda_1+k+1)(\lambda_2-k)(|\lambda|+1)(\mu_1-1)\mu_1 \\
\leq\ & (\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(|\lambda|+2)(\mu_1+1)(k+1)(\mu_1+k+2) \\
& +(\lambda_1+1)(\lambda_2+2)(|\lambda|+3)(\mu_1+1)(\mu_1+2k+2)+(\lambda_2-\lambda_1-2k-1)(|\lambda|+2)(\mu_1+1)(\mu_1+2) \\
& +\lambda_1\lambda_2(|\lambda|)\mu_1(\mu_1+2k+1)-\lambda_1(\lambda_2+1)(|\lambda|+1)\mu_1(\mu_1+2k-1) \\
& +(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+\mu_1+1)(|\lambda|+1)(2k+2)-(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+\mu_1+2)(|\lambda|+2)2k \\
& -(\lambda_2-\lambda_1-2k)(|\lambda|+1)(\mu_1-1)\mu_1 \\
\leq\ & (\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(|\lambda|+2)(\mu_1+1)(k+1)(\mu_1+k+2) \\
& +(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(|\lambda|+2)(\mu_1+1)(\mu_1+2k+4)-2(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(|\lambda|+2)(\mu_1+1) \\
& +(\lambda_1+1)(\lambda_1+2\lambda_2+4)(\mu_1+1)(\mu_1+2k+2)+2\lambda_1\lambda_2(|\lambda|)\mu_1-\lambda_1\mu_1(\lambda_1+2\lambda_2+1)(\mu_1+2k-1) \\
& +2(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+\mu_1+1)(|\lambda|+1)-(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_1+\mu_1+2\lambda_2+3)2k \\
& +(|\lambda|+1)(\lambda_2-\lambda_1-2k)(4\mu_1+2)-2(\lambda_1+k+1)(\mu_1^2+3\mu_1+2) \\
\leq\ & (\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(|\lambda|+2)(\mu_1+1)(k+2)(\mu_1+k+3)-2(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(|\lambda|+2)(\mu_1+1) \\
& +(\lambda_1+1)(\lambda_1+2\lambda_2+4)(\mu_1+1)(\mu_1+2k+2)+2\lambda_1\lambda_2(|\lambda|)\mu_1-\lambda_1\mu_1(\lambda_1+2\lambda_2+1)(\mu_1+2k-1) \\
& +2(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+\mu_1+1)(|\lambda|+1)-(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_1+\mu_1+2\lambda_2+3)2k \\
& +(|\lambda|+1)(\lambda_2-\lambda_1-2k)(4\mu_1+2)-2(\lambda_1+k+1)(\mu_1^2+3\mu_1+2)
\end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}\text{Set } A = \quad & -2(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(|\lambda|+2)(\mu_1+1)+(\lambda_1+1)(\lambda_1+2\lambda_2+4)(\mu_1+1)(\mu_1+2k+2)\\ & +2\lambda_1\lambda_2(|\lambda|)\mu_1-\lambda_1\mu_1(\lambda_1+2\lambda_2+1)(\mu_1+2k-1)+2(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+\mu_1+1)(|\lambda|+1)\\ & -(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_1+\mu_1+2\lambda_2+3)2k+(\lambda_1+\lambda_2+1)(\lambda_2-\lambda_1-2k)(4\mu_1+2)\\ & -2(\lambda_1+k+1)(\mu_1^2+3\mu_1+2)\end{aligned}$$

于是，4 维$\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu_1\omega_1+(k+1)\omega_1} \leq (\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(|\lambda|+2)(\mu_1+1)(k+2)(\mu_1+k+3)\ + A$. 注意到，$A$ 中 $2k$ 的系数为:

$$\begin{aligned}& (\lambda_1+1)(\mu_1+1)(\lambda_1+2\lambda_2+4)-\lambda_1\mu_1(\lambda_1+2\lambda_2+1)-\lambda_1(\lambda_1+\mu_1+2\lambda_2+3)+\mu_1(\lambda_1+\mu_1+2\lambda_2+3)\\ & -(|\lambda|+1)(4\mu_1+2)-(\mu_1^2+3\mu_1+2)\\ = \quad & \lambda_1\mu_1(\lambda_1+2\lambda_2+4-\lambda_1-2\lambda_2-1-4)+(\lambda_1+\mu_1+1)(\lambda_1+2\lambda_2+4)-(\lambda_1^2-\mu_1^2)-(\lambda_1-\mu_1)(2\lambda_2+3)\\ & -2\lambda_1-2(\lambda_2+1)(2\mu_1+1)-(\mu_1^2+3\mu_1+2)\\ = \quad & -\lambda_1\mu_1+\lambda_1(\lambda_1+\mu_1+1+2\lambda_2+4-2\lambda_2-3-2-\lambda_1)+2\lambda_2+4+\mu_1(2\lambda_2+3+2\lambda_2+4-4\lambda_2-4-3)\\ & -2(\lambda_2+1)-2=0\end{aligned}$$

利用上述关系式，我们可知 $A$ 化简为:

$$\begin{aligned}A = \quad & -2(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(|\lambda|+2)(\mu_1+1)+(\lambda_1+1)(\lambda_1+2\lambda_2+4)(\mu_1+1)(\mu_1+2)\\ & +2\lambda_1\lambda_2(|\lambda|)\mu_1-\lambda_1\mu_1(\lambda_1+2\lambda_2+1)(\mu_1-1)+2(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+\mu_1+1)(|\lambda|+1)\\ & +(|\lambda|+1)(\lambda_2-\lambda_1)(4\mu_1+2)-2(\lambda_1+1)(\mu_1^2+3\mu_1+2)\\ = \quad & (\lambda_1+1)(\mu_1+1)[(\mu_1+2)(|\lambda|+2)+(\mu_1+2)\lambda_2-2(\lambda_2+1)(|\lambda|+2)]+2\lambda_1\lambda_2(|\lambda|)\mu_1\\ & -\lambda_1\mu_1(1+2\lambda_2+\lambda_1)(\mu_1-1)+2(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+\mu_1+1)(|\lambda|+1)+(|\lambda|+1)(\lambda_2-\lambda_1)(4\mu_1+2)\\ = \quad & (\lambda_1+1)(\mu_1+1)[(|\lambda|+2)(\mu_1-2\lambda_2)-\lambda_2(\mu_1+2)]+\lambda_1\mu_1[2\lambda_2(|\lambda|)-(1+2\lambda_2+\lambda_1)(\mu_1-1)]\\ & +2(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+\mu_1+1)(|\lambda|+1)+(|\lambda|+1)(\lambda_2-\lambda_1)(4\mu_1+2)\\ = \quad & \lambda_1\mu_1[\mu_1(|\lambda|)-2\lambda_2(|\lambda|)-4\lambda_2+\lambda_2\mu_1+2\lambda_2+2\lambda_2(|\lambda|)-\mu_1(\lambda_1+2\lambda_2)+2\lambda_2]+2\lambda_1\mu_1^2\\ & -\lambda_1\mu_1^2+\lambda_1^2\mu_1+\lambda_1\mu_1+(\lambda_1+\mu_1+1)[(\lambda_1+\lambda_2+2)(\mu_1-2\lambda_2)+\lambda_2(\mu_1+2)]\\ & +2(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+\mu_1+1)(|\lambda|+1)+(|\lambda|+1)(\lambda_2-\lambda_1)(4\mu_1+2)\\ = \quad & (\lambda_1+\mu_1+1)[(|\lambda|+2)(\mu_1-2\lambda_2)+\lambda_2(\mu_1+2)+\lambda_1\mu_1]\\ & +2(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+\mu_1+1)(|\lambda|+1)+(|\lambda|+1)(\lambda_2-\lambda_1)(4\mu_1+2)\\ = \quad & 2(|\lambda|+1)[(\lambda_1+\mu_1+1)(\mu_1-\lambda_2)+(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+\mu_1+1)+(\lambda_2-\lambda_1)(2\mu_1+1)]=0\end{aligned}$$

因此，4 $\dim \mathcal{F}_{\lambda,\mu_1\omega_1+(k+1)\omega_1} \leq (\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)(\mu_1+1)(k+2)(\mu_1+k+3)$，结合 (6.1) 可推出 $\dim \mathcal{F}_{\lambda,\mu_1\omega_1+(k+1)\omega_1} = \dim\ V(\lambda) \dim\ V(\mu_1\omega_1+(k+1)\omega_1)$。至此，当 $(\lambda,\mu)$ 是满足 $\mu_2 \neq 0$ 的第一类分拆时，命题得证。□

6.4. 命题 6.1(iii) 的证明。给定一个第二类分拆 $(\lambda,\mu)$，它属于 $\lambda+\mu$，若

$$\rho^\mu_\lambda = \mu_1\omega_1+\lambda_2\omega_2, \qquad \rho^\lambda_\mu = \lambda_1\omega_1+\mu_2\omega_2,$$

那么注意到 $\mathrm{t}\,(\rho^\lambda_\mu, \rho^\mu_\lambda) \in P^+(\lambda+\mu, 2)$ 是一个第一类分拆。利用命题 5.2，并令 g

$${}_\ell\mathbb{S}_{\lambda,\mu} = \bigcup_{k=0}^{|\rho^\mu_\lambda|} \{(a_1,a_2) : a_1 \in S^{(\ell,k)}_{\lambda,\mu}, a_2 = k-a_1\}$$

我们有，

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{F}_{\lambda,\mu} &= \dim \mathcal{F}_{\rho^\lambda_\mu,\rho^\mu_\lambda} + \dim \mathrm{Ker}(\lambda,\mu), \\ \dim \mathrm{Ker}(\lambda,\mu) &\leq \sum_{\ell=1}^{\mu_2-\lambda_2} \sum_{(a_1,a_2)\in{}_\ell\mathbb{S}_{\lambda,\mu}} \dim V(\rho^\lambda_\mu + w_o\rho^\mu_\lambda - \ell\theta + a_2\alpha_1 + a_1\alpha_2). \end{aligned} \tag{6.15}$$

现在，我们通过对 $\mu_2-\lambda_2$. 应用归纳法来证明该结果。对于 $\mu_2-\lambda_2=1$，我们有

$$\dim \mathrm{Ker}(\lambda,\mu) = \dim \mathcal{F}_{\lambda,\mu} - \dim \mathcal{F}_{\rho^\lambda_\mu,\rho^\mu_\lambda},$$

$$\text{and } \dim \mathrm{Ker}(\lambda,\mu) \leq \sum_{(a_1,a_2)\in{}_1\mathbb{S}_{\lambda,\mu}} \dim V(\rho^\lambda_\mu - \theta + w_0\rho^\mu_\lambda + a_2\alpha_1 + a_1\alpha_2).$$

若 $\lambda$、$\mu \in P^+$ 满足 $|\lambda| \geq |\mu|$ 和 $\mu_2 = \lambda_2+1$，显然有 $\lambda_1 > \mu_1$。由于 $\lambda_1-1 \geq \mu_1$，我们看到$(\lambda-\omega_1, \mu-\omega_2)$是 $\lambda+\mu-\theta$ 的第一类分拆。另一方面，我们有，

$${}_1\mathbb{S}_{\lambda,\mu_1\omega_1+(\lambda_2+1)\omega_2} = \left\{ (a_1,a_2) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0} : \begin{array}{l} 0 \leq a_2 \leq \lambda_2,\ 0 \leq a_1 \leq \mu_1, \\ \lambda_2-(\lambda_1-1) \leq a_2-a_1 \leq (\mu_2-1)-\mu_1 \end{array} \right\}$$

$$= \mathbb{S}^{\lambda-\omega_1,\mu-\omega_2} \cup \{(a_1,\lambda_2) \in \mathbb{Z}^2_{>0} : 0 \leq a_1 \leq \mu_1, \lambda_2-(\lambda_1-1) \leq \lambda_2-a_1 \leq \lambda_2-\mu_1\}$$

$$= \mathbb{S}^{\lambda-\omega_1,\mu-\omega_2} \cup \{(\mu_1,\lambda_2)\}$$

令 $\mu_2 = \lambda_2 + 1$ ，并利用命题6.1(i)-(ii)，我们得到，

$$\begin{aligned}
&\sum_{(a_1,a_2)\in {}_1\mathbb{S}_{\lambda,\mu}} \dim V(\rho_\mu^\lambda + w_0\rho_\lambda^\mu - \theta + a_2\alpha_1 + a_1\alpha_2)\\
&= \sum_{(a_1,a_2)\in \mathbb{S}^{\lambda-\omega_1,\mu-\omega_2}} \dim V(\lambda-\omega_1 + w_0(\mu-\omega_2) + a_2\alpha_1 + a_1\alpha_2) + \quad \dim V((\lambda_1-\mu_1+\lambda_2-1)\omega_1 + \mu_1\omega_2)\\
&= \quad \dim V((\lambda_1-\mu_1+\lambda_2-1)\omega_1 + \mu_1\omega_2) + \dim \mathrm{Ker}(\lambda-\omega_1, \mu-\omega_2).
\end{aligned}$$

注意，若 $\lambda_2 \geq 1$，则 $\dim \mathrm{Ker}(\lambda-\omega_1,\mu-\omega_2) = \begin{cases} \dim \mathcal{F}_{\lambda-\omega_1,\mu-\omega_2} - \dim \mathcal{F}_{\lambda-\omega_1+\omega_2,\mu-2\omega_2} - \dim \mathcal{F}_{\lambda-\omega_1+\lambda_2(\omega_1-\omega_2)\,\mu_1\omega_1}; & \text{若} \\ \end{cases}$

$\lambda_2 = 0.$，则 $\dim \mathcal{F}_{\lambda-\omega_1,\mu-\omega_2} - \dim \mathcal{F}_{\lambda-\omega_1+\omega_1,\mu-\omega_2-\omega_1}$。由命题 6.1(ii)，因此可由上文得出，当 $\lambda_2 \geq 1$ 且 $\mu_2 = \lambda_2 + 1$ 时，

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{F}_{\lambda,\mu} \leq\ & \dim V(\lambda_1\omega_1 + (\lambda_2+1)\omega_2).\dim V(\mu_1\omega_1+\lambda_2\omega_2) + \dim V((\lambda_1-1)\omega_1+\lambda_2\omega_2)\dim V(\mu_1\omega_1+\lambda_2\omega_2)\\
&- \dim V((\lambda_1-1)\omega_1 + (\lambda_2+1)\omega_2).\dim V(\mu_1\omega_1+(\lambda_2-1)\omega_2)\\
&- \dim V((\lambda_1+\lambda_2-1)\omega_1)\dim V(\mu_1\omega_1) + \dim V((\lambda_1+\lambda_2-\mu_1-1)\omega_1+\mu_1\omega_2)\\
\leq\ & \Big((\lambda_1+1)(\lambda_2+2)(|\lambda|+3) + \lambda_1(\lambda_2+1)(|\lambda|+1)\Big)(\mu_1+1)(\lambda_2+1)(|\rho_\lambda^\mu|+2)\\
&-\lambda_1(\lambda_2+2)(|\lambda|+2)(\mu_1+1)(\lambda_2)(|\rho_\lambda^\mu|+1)) + \Big(2(|\lambda|-\mu_1) - (|\lambda|)(\mu_1+2)\Big)(|\lambda|+1)(\mu_1+1)\\
\leq\ & \Big(3(\lambda_1+1)(\lambda_2+1) - (\lambda_1+2)\lambda_2\Big)(|\lambda|+2)(\mu_1+1)(\lambda_2+1)(|\rho_\lambda^\mu|+2)\\
&-(\lambda_1)(\lambda_2+2)(|\lambda|+2)(\mu_1+1)(\lambda_2)(|\rho_\lambda^\mu|+1)) - (|\lambda|+1)(|\lambda|+2)(\mu_1)(\mu_1+1)\\
&\qquad\qquad\qquad

结合（6.1），采用与命题6.1(ii)相同的论证可知，命题6.1(iii)在 $\mu_2=\lambda_2+1$ 且 $\lambda_2\geq 1$ 时成立。类似的计算表明，该结果在 $\lambda_2=0$ 且 $\mu_2=1$ 时也成立。现在，根据归纳假设，假设命题 6.1(iii) 对所有第二类的 $(\lambda,\mu)\in P^+(\lambda+\mu,2)$ 均成立，其中 $\mu_2-\lambda_2\leq k$。

考虑 $(\lambda,\mu)\in P^+(\lambda+\mu,2)$，使其为第二类且满足 $\mu_2-\lambda_2=k+1$。那么 $(\lambda-\omega_1,\mu-\omega_2)\in P^+(\lambda+\mu-\theta,2)$ 是满足 $\mu_2-1-\lambda_2=k$ 的第二类分拆。由于对于 $1<\ell<\mu_2-\lambda_2$,

$$\begin{aligned}{}_{\ell+1}\mathbb{S}_{\lambda,\mu} &= \left\{(a_1,a_2)\in\mathbb{Z}^2_{\geq 0}: 0\leq a_1\leq\mu_1,\ \ 0\leq a_2\leq\lambda_2, \mu_1-\mu_2+\ell+1\leq a_1-a_2\leq\lambda_1-\lambda_2-\ell-1\right\},\\ &= {}_{\ell}\mathbb{S}_{\lambda-\omega_1,\mu-\omega_2},\end{aligned}$$

应用归纳假设，我们看到对于所有 $\ell\leq k$,

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell=2}^{\mu_2-\lambda_2}\sum_{(a_1,a_2)\in{}_{\ell}\mathbb{S}_{\lambda,\mu}}\dim V(\rho^\lambda_\mu+w_0\rho^\mu_\lambda-(\ell+1)\theta+a_2\alpha_1+a_1\alpha_2)\\ =\ &\dim\,\mathrm{Ker}(\lambda-\omega_1,\mu-\omega_2)\ \ =\ \ \dim\,\mathcal{F}_{\lambda-\omega_1,\mu-\omega_2}-\dim\,\mathcal{F}_{\rho^\lambda_\mu-\theta,\rho^\mu_\lambda}.\end{aligned}\tag{6.16}$$

由于 $\lambda_1>\mu_1$ 和 $\mu_2-\lambda_2\geq 1$，我们有,

$${}_1\mathbb{S}_{\lambda,\mu}=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{Z}^2_{\geq 0}: 0\leq a_1\leq\mu_1,\ 0\leq a_2\leq\lambda_2,\ \lambda_2-(\lambda_1-1)\leq a_2-a_1\leq(\mu_2-1)-\mu_1\}$$

$${}_1\mathbb{S}_{\lambda,\mu}=\begin{cases}\mathbb{S}^{\rho^\lambda_\mu-\theta,\rho^\mu_\lambda}\cup\ \{(a_1,\lambda_2):\max\{0,\mu_1+\lambda_2-\mu_2+1\}\leq a_1\leq\min\{\mu_1,\lambda_1-1\}\}, & \text{if } \lambda_2\neq 0,\\ \mathbb{S}^{\rho^\lambda_\mu-\theta,\rho^\mu_\lambda}, & \text{if } \lambda_2=0.\end{cases}$$

此外，利用命题 5.1 和命题6.1(ii)，我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{(a_1,a_2)\in\mathbb{S}^{\rho^\lambda_\mu-\theta,\rho^\mu_\lambda}}\dim V(\rho^\lambda_\mu-\theta+w_0\rho^\mu_\lambda+a_2\alpha_1+a_1\alpha_2)=\dim\mathrm{Ker}(\rho^\lambda_\mu-\theta,\rho^\mu_\lambda)-(1-\delta_{\lambda_2,0})\dim\mathcal{F}_{\rho^\lambda_\mu-\theta+\lambda_2(\omega_1-\omega_2),\mu_1\omega_1}\\ =\ &\dim\mathcal{F}_{\rho^\lambda_\mu-\theta,\rho^\lambda_\mu}-\dim\mathcal{F}_{\rho^\lambda_\mu-\theta+\omega_2,\rho^\mu_\lambda-\omega_2}-(1-\delta_{\lambda_2,0})\dim\mathcal{F}_{\rho^\lambda_\mu-\theta+\lambda_2(\omega_1-\omega_2),\mu_1\omega_1}.\end{aligned}\tag{6.17}$$

特别地，当 $a_2=\lambda_2$时，利用命题 5.1（ii）和命题 6.1（i），（6.17）可化简为:

$$\begin{aligned}&\sum_{a_1=\max\{0,|\rho^\mu_\lambda|-\mu_2+1\}}^{\mu_1}\dim V(\rho^\lambda_\mu-\theta+\lambda_2(\omega_1-\omega_2)+w_0\mu_1\omega_1+a_1\alpha_2)=\dim\mathrm{Ker}(\rho^\lambda_\mu-\theta+\lambda_2(\omega_1-\omega_2),\mu_1\omega_1)\\ &=\dim\mathcal{F}_{\rho^\lambda_\mu-\theta+\lambda_2(\omega_1-\omega_2),\mu_1\omega_1}-\dim\mathcal{F}_{\rho^\lambda_\mu-\omega_2+\lambda_2(\omega_1-\omega_2),(\mu_1-1)\omega_1}.\end{aligned}\tag{6.18}$$

应用归纳假设，并将（6.16）–（6.18）代入（6.15），最终得到以下不等式：

$$\dim \mathcal{F}_{\lambda,\mu} \leq \begin{cases} \dim \mathcal{F}_{\rho^\lambda_\mu,\rho^\mu_\lambda} + \dim \mathcal{F}_{\lambda-\omega_1,\mu-\omega_2} - \dim \mathcal{F}_{\rho^\lambda_\mu-\omega_2,(\mu_1-1)\omega_1}, & \text{if } \lambda_2 = 0, \\ \dim \mathcal{F}_{\rho^\lambda_\mu,\rho^\mu_\lambda} + \dim \mathcal{F}_{\lambda-\omega_1,\mu-\omega_2} - \dim \mathcal{F}_{\rho^\lambda_\mu-\omega_1,(\lambda_2-1)\omega_2}, & \text{if } \mu_1 = 0, \\ \dim \mathcal{F}_{\rho^\lambda_\mu,\rho^\mu_\lambda} + \dim \mathcal{F}_{\lambda-\omega_1,\mu-\omega_2} - \dim \mathcal{F}_{\rho^\lambda_\mu-\omega_1,\rho^\mu_\lambda-\omega_2} - \dim \mathcal{F}_{\rho^\lambda_\mu-\lambda_2(\omega_2-\omega_1)-\omega_2,(\mu_1-1)\omega_1} & \text{if } \mu_1,\lambda_2 \neq 0. \end{cases} \tag{6.19}$$

由于当 $\lambda_2 = 0$ 和 $\mu_1 = 0$ 时的情形可由最后一个不等式得到，因此只需考虑 $\mu_1$、$\lambda_2 \neq 0$ 的情形。

利用命题 6.1(ii)，由 (6.19) 可得，当 $\mu_1$、$\lambda_2 \neq 0$ 和 $\mu_2 - \lambda_2 = k+1$ 时，有，$4\dim \mathcal{F}_{\lambda,\ \mu}$

$$\begin{aligned} &\leq 4\Big(\dim V(\lambda_1\omega_1 + (\lambda_2+k+1)\omega_2)\dim V(\mu_1\omega_1+\lambda_2\omega_2) + \dim V((\lambda_1-1)\omega_1+\lambda_2\omega_2)\dim V(\mu_1\omega_1+(\lambda_2+k)\omega_2) \\ &\quad - \dim V((\lambda_1-1)\omega_1+(\lambda_2+k+1)\omega_2)\dim V(\mu_1\omega_1+(\lambda_2-1)\omega_2) - \dim V(|\lambda|\omega_1+k\omega_2)\dim V((\mu_1-1)\omega_1)\Big) \\ &\leq (\lambda_1+1)(\lambda_2+k+2)(|\lambda|+k+3)(\mu_1+1)(\lambda_2+1)(|\rho^\mu_\lambda|+2) \\ &\quad + \lambda_1(\mu_1+1)\Big((\lambda_2+1)(|\lambda|+1)(\lambda_2+k+1)(|\rho^\mu_\lambda|+k+2) - (\lambda_2+k+2)(\lambda_1\lambda_2+k+2)\lambda_2(|\rho^\mu_\lambda|+1)\Big) \\ &\quad - (|\lambda|+1)(k+1)(|\lambda|+k+2)\mu_1(\mu_1+1) \\ &\leq (\lambda_1+1)(\mu_1+1)(\lambda_2+1)(|\rho^\mu_\lambda|+2)\Big((\lambda_2+k+1)(|\lambda|+k+2)+\lambda_1+2\lambda_2+2k+4\Big) \\ &\quad + \lambda_1(\lambda_2+1)(|\lambda|+1)(\mu_1+1)\Big((\lambda_2+k)(|\rho^\mu_\lambda|+k+1)+\mu_1+2\lambda_2+2k+2\Big) \\ &\quad - \lambda_1(\mu_1+1)\lambda_2(|\rho^\mu_\lambda|+1)\Big((\lambda_2+k+1)(|\lambda|+k+1)+\lambda_1+2\lambda_2+2k+3\Big) \\ &\quad - (|\lambda|+1)\mu_1(\mu_1+1)\Big(k(|\lambda|+k+1)+|\lambda|+2k+2\Big) \end{aligned} \tag{6.20}$$

根据归纳假设，当 $\mu_2 = \lambda_2 + k$ 时，

$\mathcal{F}_\lambda$ 的维数，$_{\mu-\omega_2}$ = $V(\lambda)$ 的维数 $V(\mu-\omega_2)$ = $V(\lambda+k\omega_2)$ 的维数 $V(\rho^\mu_\lambda)$ + $V(\lambda-\omega_1)$ 的维数 $V(\rho^\mu_\lambda+(k-1)\omega_2)$

$$- \dim V(\lambda-\omega_1+k\omega_2).\dim V(\rho^\mu_\lambda-\omega_2) - \dim V(|\lambda|\omega_1+(k-1)\omega_2)\dim V((\mu_1-1)\omega_1) \quad .$$

以及 2 维 $V(\mu)$ =2 维 $V(\mu-\omega_2)$ +$(\mu_1+1)(\mu_1+2\lambda_2+2k+4)$

因此，重新排列不等式（6.20）中的系数，我们得到：

$$\begin{aligned}
4\dim\mathcal{F}_{\lambda,\mu} \leq\ & 4\dim V(\lambda)\dim V(\mu-\omega_2)\\
& +(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\mu_1+1)\Big((|\lambda|+2)(\mu_1+2\lambda_2+2k+4)-(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+2k+2)\Big)\\
& -\lambda_1\lambda_2\Big((|\lambda|+1)(\mu_1+2\lambda_2+2k+3)-(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+2k+2)\Big)(\mu_1+1)\\
& +(|\lambda|+1)\Big(\lambda_1(\lambda_2+1)(\mu_1+2\lambda_2+2k+2)-\mu_1(|\lambda|+2k+2)\Big)(\mu_1+1)\\
\leq\ & 4\ \dim V(\lambda)\dim V(\mu)-\Big((\lambda_1+1)(\lambda_2+1)-\lambda_1\lambda_2\Big)(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+2k+2)(\mu_1+1)\\
& -\lambda_1\lambda_2(|\lambda|+1)(\mu_1+2\lambda_2+2k+3-\mu_1-2\lambda_2-2k-2)(\mu_1+1)\\
& +(|\lambda|+1)[\lambda_1(\mu_1+2\lambda_2+2k+2)-\mu_1(|\lambda|+2k+2)](\mu_1+1)\\
\leq\ & 4\ \dim V(\lambda)\dim V(\mu)-\Big((\lambda_1+1)(\lambda_2+1)-\lambda_1\lambda_2\Big)(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+2k+2)(\mu_1+1)\\
& -\lambda_1\lambda_2(|\lambda|+1)(\mu_1+2\lambda_2+2k+3-\mu_1-2\lambda_2-2k-2)(\mu_1+1)\\
& +(|\lambda|+1)\Big((\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2+2k+2)+\lambda_1\lambda_2\Big)(\mu_1+1)=4\ \dim V(\lambda)\dim V(\mu)
\end{aligned}$$

结合式（6.1），上述不等式表明，当 $\mu_2=\lambda_2+k+1$ 且$\lambda_2\geq 1$ 时，命题 6.1(iii) 成立，从而完成命题的证明。

6.5. 定理 **4.2** 的证明。 (i) 注意到，定理的 (i) 部分由命题 4.3、命题 5.1-命题5.2 以及命题 6.1 得出。 □

推论。对于任意一对不同的复数 $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$，存在一个 $\mathfrak{sl}_3[t]$-模同构，将 $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ 与融合积 $V(\lambda)^{z_1}*V(\mu)^{z_2}$对应起来。

证明。由引理 3.3，对于 $(\lambda,\mu)\in P^+(\lambda+\mu,2)$，融合积 $V(\lambda)^{z_1}*V(\mu)^{z_2}$ 是 $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ 的一个 $\mathfrak{sl}_3[t]$-商模；又由命题 6.1，$\dim\mathcal{F}_{\lambda,\mu}=\dim\ V(\lambda)\dim\ V(\mu)$。因此，利用注记 3.3，我们得出，对于任意一对不同的复数 $(z_1,z_2)$，$\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ 作为 $\mathfrak{sl}_3[t]$-模与 $V(\lambda)^{z_1}*V(\mu)^{z_2}$ 同构。□

6.6. 在本节中，我们通过一个例子说明，用于研究模$\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu}$的方法也可以推广到研究满足 $k>2$的 $\boldsymbol{\lambda}\in P^+(\lambda,k)$ 的 CV 模 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$。

考虑 $\lambda=(m+2)\omega_1$ 且 $\boldsymbol{\lambda}=(m\omega_1,\omega_1,\omega_2)$ 的情形。根据定义，$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}=V(\boldsymbol{\xi})$，其中 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_{\alpha_1},\xi_\theta,\xi_{\alpha_2})$，且 $\xi_{\alpha_1}=\xi_\theta=(m,1,1)$ 和 $\xi_{\alpha_2}=\emptyset.$。由于对任意互异的复数三元组

$(z_1, z_2, z_3)$，融合积 $V(m\omega_1)^{z_1} * V(\omega_1)^{z_2} * V(\omega_1)^{z_3}$ 是 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 的一个商模，

$$\dim \mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}} \geq \frac{9(m+1(m+2)}{2}.$$

另一方面，利用 CV 模的定义关系，很容易看出存在一个 $\mathfrak{sl}_3[t]$-模同态 $\phi : \mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}} \to \mathcal{F}_{m\omega_1, 2\omega_1}$，使得核 $\phi = \mathrm{U}(\mathfrak{g}[t])(x_1^- \otimes t^2)^{v}\boldsymbol{\lambda}\cdot$。由于 $x_\alpha^+.(x_1^- \otimes t^2)v_{\boldsymbol{\lambda}} = 0$，对所有 $\alpha^+ \in R^+$ 和 $x_{\alpha_1}^- \otimes t^3.v_{\boldsymbol{\lambda}} = 0$，核 $\phi$ 是 $\tau_2^* W_{loc}(m\omega_1 + \omega_2)$ 的商模。按照命题 4.5 进行类似的进一步计算可得 $(x_\theta^- \otimes t)(x_{\alpha_1}^- \otimes t^2)v_{\boldsymbol{\lambda}} \neq 0.$。因此，核 $\phi$ 是 $\mathcal{F}_{m\omega_1, \omega_2}$ 的商模。于是，

$$\dim \mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}} \leq \dim \mathcal{F}_{m\omega_1, 2\omega_2} + \dim \mathcal{F}_{m\omega_1, \omega_2} = \frac{6(m+1)(m+2)}{2} + \frac{3(m+1)(m+2)}{2} = \frac{9(m+1)(m+2)}{2}.$$

因此，我们得出 $\dim\ \mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}} = \dim\ V(m\omega_1)^{z_1} * V(\omega_1)^{z_2} * V(\omega_1)^{z_3}$，这意味着作为 $\mathfrak{sl}_3[t]$-模，$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 同构于 $V(m\omega_1)^{z_1} * V(\omega_1)^{z_2} * V(\omega_1)^{z_3}$。由于 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 由生成元与关系定义，我们的方法有助于证明上述例子中讨论的那类三元组满足 Feigin-Loktev 猜想。

## 7. Graded Character of Fusion product modules $\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu}$

**7.1.** 对于 $\lambda, \mu \in P^+$，CV-模 $\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu}$ 是一个 $\mathbb{Z}_+$-分次向量空间，并且对于每个 $s > 0$，子空间 $\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu}[s]$ 是一个有限维 $\mathfrak{g}$-模。因此，根据 Weyl 定理，$\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu}[s]$ 可以写成 $\tau_s^* V(\nu)$ 的直和，其中 $\nu \in P^+$。$\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu}$ 的分次特征是关于不定元 $\mathrm{q}$ 的多项式，其系数属于 $\mathbb{Z}[P]$，具体为

$$\mathrm{ch}_{gr}\mathcal{F}_{\lambda,\mu} = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \mathrm{ch}_{\mathfrak{g}}\mathcal{F}_{\lambda,\mu}[s]\, q^s = \sum_{(\nu,s)\in P^+\times\mathbb{Z}_+} \mathrm{ch}_{\mathfrak{g}}(\tau_s^* V(\nu))\, q^s.$$

定义 $[\mathcal{F}_{\lambda,\mu} : V(\nu)]_q$ 为关于不定元 $\mathrm{q}$ 的多项式，具体为，

$$[\mathcal{F}_{\lambda,\mu} : V(\nu)]_q = \sum_{p\geq 0} [\mathcal{F}_{\lambda,\mu} : \tau_p^*(V(\nu))]\, q^p,$$

其中，$[\mathcal{F}_{\lambda,\mu} :\ \tau_p^* V(\nu)]$ 是分次分量 $\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu}[p]$ 中 $V(\nu)$ 的重数。多项式 $[\mathcal{F}_{\lambda,\mu} :\ V(\nu)]_q$ 称为 $\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu}$ 中 $V(\nu)$ 的分次重数；在 $\mathrm{q} = 1$ 处，它给出 $\mathfrak{g}$-模 $V(\lambda)\otimes V(\mu)$ 中 $V(\nu)$ 的数值重数，该重数等于 Littlewood–Richardson

系数 $c_{\lambda,\ \mu}^{\nu}$。本节中，我们利用模 $\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu}$ 的分次特征，得到 $\mathbf{A_2}$ 型 Littlewood–Richardson系数的一种代数刻画。

定理。对于 $\lambda$、$\mu$、$\eta \in P^+$，设 $c_{\lambda,\ \mu}^{\eta}$ 为 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$-模 $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ 中 $V(\eta)$ 的重数。

i. 假设 $(\lambda, \mu)$ 是 $\lambda + \mu$ 的第一类分拆，且满足 $\mu = \mu_1\omega_1$。则

$$c_{\lambda,\mu}^{\eta} = \begin{cases} 1, & \text{if } \nu = \lambda + w_0\mu + j\theta + a_j\alpha_2 \text{ for } 0 \le j \le \mu_1, \max\{0, \mu_1 - j - \lambda_2\} \le a_j \le \mu_1 - j, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

ii. 假设 $(\lambda, \mu)$ 是 $\lambda + \mu$ 的第一类分拆，且对 $i = 1$、2 满足 $\mu_i > 0$。则

$$c_{\lambda,\mu}^{\eta} = \begin{cases} a + 1, & \text{if } \nu = \lambda + w_0\mu + (\ell + j)\theta + (\mu_2 - j)\alpha_1 + a\alpha_2, \text{ with } (j, \ell, a) \in A^{\lambda,\mu} \\ \min\{a, b\} + 1, & \text{if } \nu = \lambda + w_0\mu + j\theta + b\alpha_1 + a\alpha_2, \text{ with } (j, a, b) \in B^{\lambda,\mu} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中

$$A^{\lambda,\mu} = \{(j, \ell, a) \in \mathbb{Z}^3 \colon j = 0,\ 0 \le \ell \le \mu_1,\ \max\{0, |\mu| - \lambda_2 - \ell\} \le a \le \mu_1 - \ell\} \sqcup \{(j, \ell, a) \in \mathbb{Z}^3 \colon 1 \le j \le \mu_2,\ 0 \le \ell \le \mu_1,\ a = \mu_1 - \ell\} \sqcup \{(j, \ell, a) \in \mathbb{Z}^3 \colon 1 \le j \le \mu_2,\ 0 \le \ell \le \mu_1,\ \ell + 2j \le |\mu| - \lambda_2,\ a = |\mu| - \lambda_2 - (\ell + 2j)\}$$

$$B^{\lambda,\mu} = \{(j, a, b) \in \mathbb{Z}^3 \colon j = 0, 0 \le a \le \mu_1,\ 0 \le b \le \mu_2 - 1,\ \mu_2 - \lambda_1 \le b - a \le \lambda_2 - \mu_1\} \sqcup \{(j, a, b) \in \mathbb{Z}^3 \colon 1 \le j \le \mu_2 - 1,\ 0 \le a \le \mu_1,\ 0 \le b < \mu_2 - j, b - a = \lambda_2 - \mu_1 + j\} \sqcup \{(j, a, b) \in \mathbb{Z}^3 \colon 1 \le j \le \mu_2 - 1,\ 0 \le a \le \mu_1,\ 0 \le b < \mu_2 - j, b - a = \mu_2 - \lambda_1 - j\}.$$

iii. 假设 $(\lambda, \mu)$ 是 $\lambda + \mu$ 的第二类分拆。那么

$$c_{\lambda,\mu}^{\eta} = \begin{cases} \min\{a, b\} + 1, & \text{if } \nu = \rho_\mu^\lambda + w_0\rho_\lambda^\mu - \ell\theta + a\alpha_2 + b\alpha_1, (\ell, a, b) \in C_{\lambda,\mu} \\ \min\{b_1, b_2\} + 1, & \text{if } \nu = \lambda + w_0\mu + j\theta + b_1\alpha_2 + b_2\alpha_1, (j, b_1, b_2) \in B_{\lambda,\mu} \\ a + 1, & \text{if } \nu = \rho_\mu^\lambda + w_0\rho_\lambda^\mu + (\ell + j)\theta + (\lambda_2 - j)\alpha_1 + a\alpha_2, (j, \ell, a) \in A^{\rho_\mu^\lambda, \rho_\lambda^\mu} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{where } A^{\rho^\lambda_\mu,\rho^\mu_\lambda} &= \{(j,\ell,a)\in\mathbb{Z}^3 : j=0,\ 0\le\ell\le\mu_1,\ \max\{0,|\rho^\mu_\lambda|-\mu_2-\ell\}\le a\le\mu_1-\ell\}\\
&\sqcup\ \{(j,\ell,a)\in\mathbb{Z}^3 : 1\le j\le\lambda_2,\ 0\le\ell\le\mu_1,\ a=\mu_1-\ell\}\\
&\sqcup\ \{(j,\ell,a)\in\mathbb{Z}^3 : 1\le j\le\lambda_2,\ 0\le\ell\le\mu_1,\ \ell+2j\le|\rho^\mu_\lambda|-\mu_2,\ a=|\rho^\mu_\lambda|-\mu_2-(\ell+2j)\}\\
B_{\lambda,\mu} &= \{(r,a_1,a_2)\in\mathbb{Z}^3 : r=0, 0\le a\le\mu_1,\ 0\le b\le\lambda_2,\ \lambda_2-\lambda_1\le b-a\le\mu_2-\mu_1\}\\
&\sqcup\ \{(r,a_1,a_2)\in\mathbb{Z}^3 : 1\le r\le\mu_2-\lambda_2-1,\ 0\le a\le\mu_1, 0\le b\le\lambda_2,\ b-a=\mu_2-\lambda_1-r\}\\
&\sqcup\ \{(r,a_1,a_2)\in\mathbb{Z}^3 : 1\le j\le\mu_2-\lambda_2-1,\ 0\le a_1\le\mu_1,\ 0\le a_2<\lambda_2,\ a_2-a_1=\lambda_2-\mu_1+r\}\\
C_{\lambda,\mu} &= \{(\ell,a,b) : \ell=0, 0\le a\le\mu_1, 0\le b\le\lambda_2, \mu_2-\lambda_1\le a_2-a_1\le\lambda_2-\mu_1\}\\
&\sqcup\ \{(\ell,a,b) : 1\le\ell\le\mu_2-\lambda_2-1, 0\le a\le\mu_1, 0\le b\le\lambda_2, b-a=\mu_2-\lambda_1-\ell\}\\
&\sqcup\ \{(\ell,a,b) : 1\le\ell\le\mu_2-\lambda_2-1, 0\le a\le\mu_1, 0\le b\le\lambda_2, b-a=\lambda_2-\mu_1+\ell\}.
\end{aligned}$$

7.2. 证明　定理 **7.1**(i): 设 $(\lambda,\mu)\in P^+(\lambda+\mu,2)$ 是第一类分拆，并且 $\mu_2=0$ .

根据命题5.1(ii) 和命题 6.1(i)，我们有

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu_1\omega_1}=\mathcal{F}_{\lambda+\omega_1,(\mu_1-1)\omega_1}\oplus\operatorname{Ker}\phi(\lambda,\mu_1\omega_1),$$

$$\operatorname{Ker}\phi(\lambda,\mu_1\omega_1)\cong_{\mathfrak{sl}_3[t]}\bigoplus_{a=\max\{0,\mu_1-\lambda_2\}}^{\mu_1}\tau^*_{\mu_1}V(\lambda-a\omega_1-(\mu_1-2a)\omega_2)=\bigoplus_{a\in\max\{0,\mu_1-\lambda_2\}}^{\mu_1}\tau^*_{\mu_1}V(\lambda+w_0\mu+a\alpha_2)$$

此外，利用连续商的 $\mathfrak{sl}_3[t]$-模分解，$\mathcal{F}_{\lambda+j\omega_1,\ (\mu_1-j)\omega_1}, 1\le j\le\mu_1$，我们可以看出

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu}\cong_{\mathfrak{sl}_3[t]}\bigoplus_{j=0}^{\mu_1}\bigoplus_{a_j=\max\{0,\mu_1-j-\lambda_2\}}^{\mu_1-j}\tau^*_{\mu_1-j}V(\lambda+w_0\mu+j\theta+a_j\alpha_2).$$

因此，$\mathcal{F}_{\lambda,\ \mu_1\omega_1}$ 的分次特征如下:

$$\operatorname{ch}_{gr}\mathcal{F}_{\lambda,\mu_1\omega_1}=\sum_{j=0}^{\mu_1}\left(\sum_{a_j=\max\{0,\mu_1-j-\lambda_2\}}^{\mu_1-j}\operatorname{ch}_{\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})}\tau^*_{\mu_1-j}V(\lambda+w_0\mu+j\theta+a_j\alpha_2)\right)q^{\mu_1-j}.$$

由于 $\theta$和 $\alpha_2$是线性无关的根，对于整数对 $(j,a_j)$ 和 $(k,a_k)$ ,

$$\lambda+w_0\mu+j\theta+a_j\alpha_2=\lambda+w_0\mu+k\theta+a_k\alpha_2,$$

仅当 $j=k$ 和 $a_j=a_k$。因此，我们有

$$[\mathcal{F}_{\lambda,\mu}:V(\nu)]_q=\begin{cases}q^{\mu_1-j}, & \text{if } \nu=\lambda+w_0\mu+j\theta+a_j\alpha_2 \text{ with } 0\le j\le\mu_1, \max\{0,\mu_1-j-\lambda_2\}\le a_j\le\mu_1-j\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{7.1}$$

代入 $q=1$ 式（7.1）可得定理 7.1（i）。

7.3. 定理 **7.1** 的证明。 设 $(\lambda,\mu)\in P^+(\lambda+\mu,2)$ 是 $\lambda+\mu$ 的第一类分拆，满足 $\mu_1,\mu_2\neq 0$。那么，由命题 5.1(i) 和命题 6.1(ii) 可得：

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu}=\mathcal{F}_{\lambda+\omega_2,\mu-\omega_2}\oplus \operatorname{Ker}\phi(\lambda,\mu),$$

$$\operatorname{Ker}\phi(\lambda,\mu)\cong_{\mathfrak{sl}_3[t]}\tau_{\mu_2}^{*}\mathcal{F}_{\lambda+\mu_2(\omega_1-\omega_2),\mu_1\omega_1}\oplus\bigoplus_{(a_1,a_2)\in\mathbb{S}^{\lambda,\mu}}\tau_{|\mu|}^{*}V(\lambda+w_0\mu+a_2\alpha_1+a_1\alpha_2)$$

利用连续商 $\mathcal{F}_{\lambda+j\omega_2,\mu-j\omega_2}$, $1\le j\le\mu_2$ 的 $\mathfrak{sl}_3[t]$-模分解，可得：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\lambda,\mu)&=\bigoplus_{j=0}^{\mu_2-1}\operatorname{Ker}\phi(\lambda+j\omega_2,\mu-j\omega_2)\oplus\mathcal{F}_{\lambda+\mu_2\omega_2,\mu_1\omega_1}\\&\cong_{\mathfrak{sl}_3[t]}\bigoplus_{j=0}^{\mu_2-1}\tau_{\mu_2-j}^{*}\mathcal{F}_{\lambda+j\omega_2+(\mu_2-j)(\omega_1-\omega_2),\mu_1\omega_1}\oplus\mathcal{F}_{\lambda+\mu_2\omega_2,\mu_1\omega_1}\\&\quad\oplus\bigoplus_{j=0}^{\mu_2-1}\left(\bigoplus_{(a_j,b_j)\in\mathbb{S}^{\lambda+j\omega_2,\mu-j\omega_2}}\tau_{|\mu|-j}^{*}V(\lambda+w_0\mu+j\theta+b_j\alpha_1+a_j\alpha_2)\right)\end{aligned}$$

对于 $(\ell,j)\in\mathbb{Z}^2$，令 $M_\mu^\lambda(\ell,j)=\max\{0,|\mu|-\ell-\lambda_2-2j\}$. 利用 7.2 可得：

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}_{gr}\mathcal{F}_{\lambda,\mu}&=\sum_{j=0}^{\mu_2}\operatorname{ch}_{gr}\mathcal{F}_{\lambda+j\omega_2+(\mu_2-j)(\omega_1-\omega_2),\mu_1\omega_1}q^{\mu_2-j}\\&\quad+\sum_{j=0}^{\mu_2-1}\left(\sum_{(a_j,b_j)\in\mathbb{S}^{\lambda+j\omega_2,\mu-j\omega_2}}\operatorname{ch}_{\mathfrak{g}}\tau_{|\mu|-j}^{*}V(\lambda+w_0\mu+j\theta+b_j\alpha_1+a_j\alpha_2)\right)q^{|\mu|-j}\\&=\sum_{j=0}^{\mu_2}\left(\sum_{\ell=0}^{\mu_1}\left(\sum_{a_\ell^j=M_\mu^\lambda(\ell,j)}^{\mu_1-\ell}\operatorname{ch}_{\mathfrak{g}}\tau_{|\mu|-\ell-j}^{*}V(\lambda+w_0\mu+(\ell+j)\theta+(\mu_2-j)\alpha_1+a_\ell^j\alpha_2)\right)q^{|\mu|-\ell-j}\right)\\&\quad+\sum_{j=0}^{\mu_2-1}\left(\sum_{(a_j,b_j)\in\mathbb{S}^{\lambda+j\omega_2,\mu-j\omega_2}}\operatorname{ch}_{\mathfrak{g}}\tau_{|\mu|-j}^{*}V(\lambda+w_0\mu+j\theta+b_j\alpha_1+a_j\alpha_2)\right)q^{|\mu|-j}\end{aligned}$$

比较 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 在 $\mathfrak{g}$-不可约分量 $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ 的最高权中的系数，现在可以确定多项式 $[\mathcal{F}_{\lambda,\mu}:V(\nu)]_q$。

(i). 给定 $(a_1,a_2)\in\mathbb{S}^{\lambda,\mu}$，以及满足 $0\le j\le\mu_2$ and $0\le\ell\le\mu_1$ 的整数 $(\ell,j)$,

$$\lambda+w_0\mu+(\ell+j)\theta+(\mu_2-j)\alpha_1+a_\ell^j\alpha_2=\lambda+w_0\mu+a_2\alpha_1+a_1\alpha_2$$

仅当 $(a_1,a_2)=(j+\ell+a_\ell^j,\mu_2+\ell)$ 时。然而，根据 $\mathbb{S}^{\lambda,\ \mu}$, $a_2<\mu_2$ 的定义，这种情况不可能发生。

(ii). 对于 p 整数 $(j,\ell)$ 的组，使得 $0\le j\le \mu_2$ 且 $0\le \ell\le \mu_1$ 且 $(a_{j_1},a_{j_2})\in \mathbb{S}^{\lambda+j\omega_2,\ \mu-j\omega_2}$，

$$\lambda+w_0\mu+\ell\theta+\mu_2\alpha_1+a_\ell\alpha_2=\lambda+w_0\mu+j\theta+a_{j_2}\alpha_1+a_{j_1}\alpha_2$$

仅当 $(a_{j_1},a_{j_2})=(\ell-j+a_\ell,\mu_2+\ell-j)$ 时。但根据 $\mathbb{S}^{\lambda+j\omega_2,\mu-j\omega_2}$, $a_{j_2}<\mu_2-j$ 的定义，此情形不可能发生。

(iii). 给定整数三元组 $(j,\ell,a_\ell^j)$ 和 $(j+s,r,a_r^{j+s})$，其中 $0\le j\le j+s\le \mu_2$, $\ell,r\in[0,\mu_1]$ 且对于 $s\in\{\ell,r\}$ 和 $k\in\{j,j+s\}$，$\{0,|\mu|-k-\lambda_2-2s\}\le a_k^s\le \mu_1-k$ 的最大值，

$$\lambda+w_0\mu+(\ell+j)\theta+(\mu_2-j)\alpha_1+a_\ell^j\alpha_2=\lambda+w_0\mu+(r+j+s)\theta+(\mu_2-j-s)\alpha_1+a_r^{j+s}\alpha_2$$

仅当 $\ell=r$，且 $a_\ell^j=a_r^{j+s}+s=a_\ell^{j+s}+s$. 注意，如果 $a_\ell^j$ 是区间 $[|\mu|-\lambda_2-\ell-2j,\mu_1-\ell]$ 内的非负整数，那么除非 $a_\ell^j\in\{\mu_1-\ell,|\mu|-\lambda_2-\ell-2j\}$，$a_\ell^j+1$ 也位于区间 $[|\mu|-\lambda_2-\ell-2j,\mu_1-\ell]$ 内。因此，

$$[\mathcal{F}_{\lambda,\mu}:V(\lambda+w_0\mu+(\ell+j)\theta+(\mu_2-j)\alpha_1+a\alpha_2)]_q=\sum_{s=0}^{a}q^{|\mu|-\ell-s-j}\tag{7.2}$$

每当（$j$、$\ell$、$a$）是包含于集合 $A^{\lambda,\ \mu}$中的非负整数三元组时，其中集合在定理7.1 （ii）中定义。

（iv）给定整数三元组（$j$、$a_j$、$b_j$）和（$j+s$、$a_{j+s}$、$b_{j+s}$），满足 $0\le j\le j+s\le \mu_2-1$, $(a_j,\ b_j)\in\mathbb{S}^{\lambda+j\omega_2,\ \mu-j\omega_2}$ 以及 $(a_{j+s},\ b_{j+s})\in\mathbb{S}^{\lambda+(j+s)\omega_2,\ \mu-(j+s)\omega_2}$,

$$\lambda+w_0\mu+j\theta+b_j\alpha_1+a_j\alpha_2=\lambda+w_0\mu+(j+s)\theta+b_{j+s}\alpha_1+a_{j+s}\alpha_2$$

仅当 $(a_j,b_j)=(a_{j+s}+s,b_{j+s}+s)$。由集合 $\mathbb{S}^{\lambda+j\omega_2,\ \mu-j\omega_2}$ 的定义可知，若对某个 $0\le j\le \mu_2$, 有 $(a,b)\in\mathbb{S}^{\lambda+(j+1)\omega_2,\ \mu-(j+1)\omega_2}$，则 $(a+1,b+1)\in\mathbb{S}^{\lambda+j\omega_2,\ \mu-j\omega_2}$ 除非$b-a=\lambda_2+j-\mu_1$ 或 $b-a=\mu_2-\lambda_1-j$。因此，

$$[\mathcal{F}_{\lambda,\mu}:V(\lambda+w_0\mu+j\theta+b\alpha_1+a\alpha_2)]_q=\sum_{s=0}^{\min\{a,b\}}q^{|\mu|-s-j},\tag{7.3}$$

每当（$j$，$a$，$b$）是集合 $B^{\lambda,\ \mu}$中包含的非负整数三元组时，该集合在定理7.1 （ii）中定义。

将 $q=1$ 代入（7.2）和（7.3），并注意到在这种情况下

$$[\mathcal{F}_{\lambda,\mu}:V(\nu)]_{q=1}=0,\qquad \text{when } \nu\notin A^{\lambda,\mu}\cup B^{\lambda,\mu}$$

我们得到定理7.1(ii).

7.4. 定理 **7.1**(iii) 的证明。 设 $(\lambda,\mu)\in P^+(\lambda+\mu,2)$ 是一个第二类分拆。于是，由命题 5.2 和命题 6.1(iii) 可得：

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu}=\mathcal{F}_{\rho_\mu^\lambda,\rho_\lambda^\mu}\oplus \operatorname{Ker}\phi(\lambda,\mu),$$

$$\operatorname{Ker}\phi(\lambda,\mu)\cong_{\mathfrak{sl}_3[t]}\bigoplus_{\ell=1}^{\mu_2-\lambda_2}\bigoplus_{(a,b)\in{}^{\ell}\mathbb{S}_{\lambda,\mu}}\tau^*_{\mu_1+\lambda_2+\ell}V(\lambda+w_0\mu+(\mu_2-\lambda_2-\ell)\theta+b\alpha_1+a\alpha_2),$$

其中 $\rho_\mu^\lambda=\lambda_1\omega_1+\mu_2\omega_2$，且 $\rho_\lambda^\mu=\mu_1\omega_1+\lambda_2\omega_2$。在这种情况下，由于 $(\rho_\mu^\lambda,\rho_\lambda^\mu)$ 是 $\lambda+\mu$ 的第一类分拆，利用 7.3，可得：

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}_q\mathcal{F}_{\lambda,\mu}=&\sum_{\ell=1}^{\mu_2-\lambda_2}q^{|\rho_\lambda^\mu|+\ell}\left(\sum_{(a,b)\in{}^{\ell}\mathbb{S}_{\lambda,\mu}}\operatorname{ch}_{\mathfrak{g}}\tau^*_{\mu_1+\lambda_2+\ell}V(\rho_\mu^\lambda+w_0\rho_\lambda^\mu-\ell\theta+b\alpha_2+a\alpha_1)\right)\\&+\sum_{j=0}^{\lambda_2}\left(\sum_{\ell=0}^{\mu_1}\left(\sum_{a_\ell^j=L^{\lambda,\mu}(\ell,j)}^{\mu_1-\ell}\operatorname{ch}_{\mathfrak{g}}\tau^*_{\mu_1+\lambda_2-\ell-j}V(\rho_\mu^\lambda+w_0\rho_\lambda^\mu+(\ell+j)\theta+(\lambda_2-j)\alpha_1+a_\ell^j\alpha_2)\right)\right)q^{|\rho_\lambda^\mu|-\ell-j}\\&+\sum_{j=0}^{\lambda_2-1}\left(\sum_{(a,b)\in\mathbb{S}^{\rho_\mu^\lambda+j\omega_2,\rho_\lambda^\mu-j\omega_2}}\operatorname{ch}_{\mathfrak{g}}\tau^*_{\mu_1+\lambda_2-j}V(\rho_\mu^\lambda+w_0\rho_\lambda^\mu+j\theta+b\alpha_1+a\alpha_2)\right)q^{|\rho_\lambda^\mu|-j}\end{aligned}$$

其中，对于$(\ell,j)\in\mathbb{Z}^2$, $L^{\lambda,\mu}(\ell,j)=M_{\rho_\lambda^\mu}^{\rho_\mu^\lambda}(\ell,j)=\max\{0,|\rho_\lambda^\mu|-\mu_2-\ell-2j\}$。现在，通过比较$\mathcal{F}_\lambda$的 $\mathfrak{g}$-不可约分量的最高权中 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 的系数，我们确定多项式 $[\mathcal{F}_{\lambda,\mu};\ V(\nu)]_q$。首先我们注意到，给定一个正整数 $\ell\in[1,\mu_2-\lambda_2]$，存在一个整数 $r\in[0,\mu_2-\lambda_2-1]$ 使得 $\ell=\mu_2-\lambda_2-r$。因此，根据集合${}^{\ell}\mathbb{S}_\lambda$的定义（参见命题5.2、命题 6.1(iii)），如果$(a_1,a_2)\in{}^{\ell}\mathbb{S}_{\lambda,\mu}$ for $\ell=\mu_2-\lambda_2-r$，那么 $a_1,a_2$ 是整数，且 $0\le a_1\le\mu_1$, $0\le a_2\le\lambda_2$ 和 $\mu_2-\lambda_1-r\le a_2-a_1\le\lambda_2-\mu_1+r$。因此，

$${}^{\mu_2-\lambda_2-r-1}\mathbb{S}_{\lambda,\mu}={}^{\mu_2-\lambda_2-r}\mathbb{S}_{\lambda,\mu}\cup\left\{(a_1,a_2)\in\mathbb{Z}^2:\begin{array}{l}0\le a_1\le\mu_1,\ 0\le a_1\le\lambda_2,\\ a_2-a_1\in\{\mu_2-\lambda_1-r-1,\lambda_2-\mu_1+r+1\}\end{array}\right\}.\qquad(7.4)$$

(i). 给定整数三元组$(r, a_1, a_2)$，其中 $1 \leq r \leq \mu_2 - \lambda_2$，$(a_1, a_2) \in {}_r\mathbb{S}_{\lambda,\mu}$ 以及满足$0 \leq \ell \leq \mu_1$的$(\ell, j, a_\ell^j)$，，$0 \leq j \leq \lambda_2$，$a_\ell^j \in [|\rho_\lambda^\mu| - \lambda_2 - \ell - 2j, \mu_1 - \ell] \cap \mathbb{Z}_+$,

$$\rho_\mu^\lambda + w_0\rho_\lambda^\mu - r\theta + a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 = \rho_\mu^\lambda + w_0\rho_\lambda^\mu + (\ell + j)\theta + (\lambda_2 - j)\alpha_1 + a_\ell^j\alpha_2$$

仅当 $(a_1, a_2) = (a_\ell^j + j + r + \ell, \lambda_2 + \ell + r)$. 这不可能发生，因为 $a_2 \leq \lambda_2$ 且 $r \leq 1$。因此由 (7.2) 可得，对于 $\nu \in A^{\rho_\mu^\lambda, \rho_\lambda^\mu}$，

$$[\mathcal{F}_{\lambda,\mu} : V(\rho_\mu^\lambda + w_0\rho_\lambda^\mu + (\ell + j)\theta + (\lambda_2 - j)\alpha_1 + a\alpha_2)]_q = \sum_{s=0}^{a} q^{|\rho_\lambda^\mu| - \ell - s - j} \tag{7.5}$$

(ii) 给定整数三元组 $(\mu_2 - \lambda_2 - \ell, a_1, a_2)$ 和 $(\mu_2 - \lambda_2 - \ell - s, b_1, b_2)$，其中 $0 \leq \ell \leq \ell + s \leq \mu_2 - \lambda_2 - 1$，$(a_1, a_2) \in {}_{\mu_2 - \lambda_2 - \ell}\mathbb{S}_{\lambda,\mu}$ 以及 $(b_1, b_2) \in {}_{\mu_2 - \lambda_2 - \ell - s}\mathbb{S}_{\lambda,\mu}$,

$$\rho_\mu^\lambda + w_0\rho_\lambda^\mu - (\mu_2 - \lambda_2 - \ell)\theta + a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 = \rho_\mu^\lambda + w_0\rho_\lambda^\mu - (\mu_2 - \lambda_2 - \ell - s)\theta + b_1\alpha_2 + b_2\alpha_1$$

仅当 $(a_1, a_2) = (b_1 + s, b_2 + s)$。因此，结合 (7.4) 可知，由 $\bigcup_{\ell=1}^{\mu_2 - \lambda_2} {}_\ell\mathbb{S}_{\lambda,\mu}$ 中的元素参数化的 $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ 的不同不可约分量为 $V(\rho_\mu^\lambda + w_0\rho_\lambda^\mu - \ell\theta + a\alpha_2 + b\alpha_1)$。因此,

$$[\mathcal{F}_{\lambda,\mu} : V(\rho_\mu^\lambda + w_0\rho_\lambda^\mu - \ell\theta + a\alpha_2 + b\alpha_1)]_q = \sum_{s=0}^{\min\{a,b\}} q^{|\mu| - \ell - s} \tag{7.6}$$

其中，$(\ell, a, b)$ 是定理 ${}_{,\mu}$ 的定理 7.1(iii) 中定义的集合 $C_\lambda$ 内的一个非负整数三元组。(iii)。给定满足 $1 \leq \ell \leq \mu_2 - \lambda_2$ 的整数三元组 $(\ell, a_1, a_2)$，$(a_1, a_2) \in {}_\ell\mathbb{S}_{\lambda,\mu}$，以及满足 $0 \leq j \leq \lambda_2 - 1$ 的三元组 $(j, b_1, b_2)$，$(b_1, b_2) \in \mathbb{S}^{\rho_\mu^\lambda + j\omega_2, \rho_\lambda^\mu - j\omega_2}$,

$$\rho_\mu^\lambda + w_0\rho_\lambda^\mu - \ell\theta + a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 = \rho_\mu^\lambda + w_0\rho_\lambda^\mu + j\theta + b_2\alpha_1 + b_1\alpha_2$$

当且仅当 $(b_1, b_2) = (a_1 - \ell - j, a_2 - \ell - j)$，在此情形下 $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$。

我们断言，若 $(a_1, a_2) \in {}_\ell\mathbb{S}_{\lambda,\mu}$ 满足 $(a_1 - \ell - j, a_2 - \ell - j) \in \mathbb{S}^{\rho^\lambda + j\omega_2, \rho_\lambda^\mu - j\omega_2}$，其中$0 \leq j \leq \lambda_2 - 1$ 和 $1 \leq \ell \leq \mu_2 - \lambda_2$，则 $\lambda_2 - \lambda_1 \leq a_2 - a_1 \leq \mu_2 - \mu_1$，因此,

$$[\mathcal{F}_{\lambda,\mu} : V(\rho_\mu^\lambda + w_0\rho_\lambda^\mu - \ell\theta + a_2\alpha_1 + a_1\alpha_2)]_q = \sum_{s=0}^{\min\{a_1,a_2\}} q^{\mu_1 + \lambda_2 + \ell - s}. \tag{7.7}$$

根据定义,

$$\mathbb{S}^{\rho^\lambda+j\omega_2,\rho^\mu_\lambda-j\omega_2}=\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2_+ : 0\le a\le\mu_1, 0\le b\le\lambda_2-j, \lambda_2-\lambda_1-j\le b-a\le\mu_2-\mu_1+j\}.$$

假设与我们的论断相反，存在 $(a_1,a_2)\in {}_\ell\mathbb{S}_{\lambda,\mu}$，使得 $(a_1-\ell-j, a_2-\ell-j) \in\mathbb{S}^{\rho^\lambda+j\omega_2,\rho^\mu_\lambda-j\omega_2}$ 并且

$$a_2-a_1\in\{\mu_2-\mu_1+k,\ \lambda_2-\lambda_1-k : 1\le k\le j\}.$$

由 ${}_\ell\mathbb{S}_{\lambda,\mu}$ 的定义，对于 $(a_1,a_2)\in {}_\ell\mathbb{S}_{\lambda,\mu}$, $\mu_1-\mu_2+\ell\le a_1-a_2\le\lambda_1-\lambda_2-\ell$，可得

$$\text{if } a_2-a_1=\mu_2-\mu_1+k, \text{ then } \mu_1-\mu_2+\ell\le\mu_1-\mu_2-k,$$

这意味着 $\ell\le -k$。这与 $\ell,k$ 均为正整数这一事实矛盾。同理，若 $a_2-a_1=\lambda_2-\lambda_1-k$，则 $\lambda_1-\lambda_2+k\le\lambda_1-\lambda_2-\ell$，这意味着 $k\le-\ell$，与 $\ell$ 和 $k$ 均为正数这一事实矛盾。由此证明了我们的论断。

由于 $1\le\ell\le\mu_2-\lambda_2$，令 $\lambda=\mu_2-\lambda_2-r$ 其中 $0\le r<\mu_2-\lambda_2$，(7.7) 可写为

$$[\mathcal{F}_{\lambda,\mu} : V(\rho^\lambda_\mu+w_0\rho^\mu_\lambda-(\mu_2-\lambda_2-r)\theta+a_2\alpha_1+a_1\alpha_2)]_q=\sum_{s=0}^{\min\{a_1,a_2\}} q^{|\mu|-r-s}.$$

综上可得,

$$[\mathcal{F}_{\lambda,\mu} : V(\lambda+w_0\mu+r\theta+a_2\alpha_1+a_1\alpha_2)]_q=\sum_{s=0}^{\min\{a_1,a_2\}} q^{|\mu|-r-s} \quad \text{for } (r,b_1,b_2)\in B_{\lambda,\mu} \tag{7.8}$$

其中 $B_{\lambda,\ \mu}$ 定义见定理7.1(iii)。

将 $q=1$ 代入 (7.5)、(7.8)、(7.6，并注意到在此情形下

$$[\mathcal{F}_{\lambda,\mu} : V(\nu)]_{q=1}=0, \qquad \text{when } \nu\notin A^{\rho^\lambda_\mu,\rho^\mu_\lambda}\cup B_{\lambda,\mu}\cup C_{\lambda,\mu}$$

即可得到定理 7.1(iii)。定理 7.1的证明至此完成。

## 8. A proof of Saturated Tensor Product Theorem in type $A_2$ using Theorem 7.1

**8.1.** 给定 $n,k\in\mathbb{N}$，令 $p(n,r+1)$ 为所有具有 $r+1$ 个部分的 $n$ 分拆所构成的集合。对于一个分拆 $\mathbf{n}=(n_1\ge n_2\ge\cdots\ge n_{r+1})\in p(n,r+1)$，可以将其关联到一个由 $\lambda_{\mathbf{n}}=\sum(n_i-n_{i+1})\omega_i$ 给出的 $\mathfrak{sl}_r$ 的主导整权。已知，具有 $r+1$ 个部分的两个分拆 $\mathbf{n},\mathbf{n}'$ 对应

同一个 $\mathfrak{sl}_r$ 主导整权， $n_1 - n_1' = \cdots = n_{r+1} - n_{r+1}'$ 或者等价地
$r+1$ $r+1$ $r$如果 $\sum n_i = \sum n_i'$ 模 $r+1$. 反过来，可以将 $\lambda = \sum \lambda_i \omega_i \in P^+$ 一个分拆
$i=1$ $i=1$ $i=1$
$r$ $r$ $r\mathbf{p}_\lambda = (\sum \lambda_i \geq \sum \lambda_i \geq \cdots \geq \lambda_r)$ 关联到 $|\mathbf{p}_\lambda| = \sum j\lambda_j$。利用“蜂巢模型”，张量积的饱和$i=1$ $i=2$ $j=1$问题在 [12], 中得到了解决，可改述如下：

Knutson 和 Tao 的饱和定理。设 $\mathbf{n} \in p(n, k+1)$、$\mathbf{m} \in p(m, k+1)$，且 $\mathbf{r} \in p(n+m, k+1)$。那么 $c_{\lambda_\mathbf{n},\ \lambda_\mathbf{m}}^{\lambda_\mathbf{r}} \neq 0$ 当且仅当 $c_{N\lambda_\mathbf{n},\ N\lambda_\mathbf{m}}^{N\lambda_\mathbf{r}} \neq 0$ 对于某个 $N > 1$。

本节中，我们将说明，对 $c_{\lambda,\mu}^{\nu}$ 的刻画可用于证明 $r = 2$ 时的饱和定理。由定理 7.1 容易看出，若 $c_{\lambda,\mu}^{\nu} \neq 0$，则对所有 $N > 1$,$c_{N\lambda,N\mu}^{N\nu} \neq 0$ 都成立。本节中，我们针对 $r = 2$，逐一证明定理 8.1 的逆命题。以下是证明中用到的一个重要观察：若 $\lambda = \lambda_\mathbf{n}$, $\mu = \lambda_\mathbf{m}$ 和 $k+1$ $k+1\nu = \lambda_\mathbf{r}$ 满足 $\sum n_i + m_i = \sum r_i$，则 $|\mathbf{p}_\lambda| + |\mathbf{p}_\mu| \equiv |\mathbf{p}_\nu|$ 模 3。$i=1$ $i=1$

基于此，我们证明以下结果。

定理。给定一个由 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ 的三个主导整权 $(\lambda, \mu, \nu)$ 组成的三元组，且满足条件$|\mathbf{p}_\lambda| + |\mathbf{p}_\mu| \equiv |\mathbf{p}_\nu|$ 模 3，则 $c_{\lambda\ ,\mu}^{\mu} \neq 0$ 当且仅当 $c_{N\lambda,N\mu}^{N\nu} \neq 0$ 对某个 $N > 1$成立。

**8.1.1.** 定理 *8.1*的证明：情形 1。设 $(\lambda, \mu_1\omega_1) \in P^+(\lambda + \mu_1\omega_1, 2)$ 是一个第一类分拆，且 $\nu \in P^+$ 满足 $c_{N\lambda,N\mu_1\omega_1}^{N\nu} \neq 0$ 对某个 $N > 1$成立。那么由定理 7.1，存在一对非负整数 $(j, a_j)$ 满足 $0 \leq j \leq N\mu_1$, $\max\{0, N\mu_1 - j - N\lambda_2\} \leq a_j \leq N\mu_1 - j$使得

$$N\nu = N\lambda + w_0(N\mu) + j\theta + a_j\alpha_2$$

比较 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 的系数，我们得到：

$$N\nu_1 = N\lambda_1 + j - a_j, \quad N\nu_2 = N\lambda_2 - N\mu_1 + j + 2a_j, \tag{8.1}$$

这意味着：

$$j = \frac{N}{3}(2\nu_1 - 2\lambda_1 + \nu_2 - \lambda_2 + \mu_1), \quad a_j = \frac{N}{3}(\nu_1 - \lambda_1 - \mu_1 - \nu_2 + \lambda_2). \tag{8.2}$$

利用条件 $\mathbf{p}_{N\lambda} + \mathbf{p}_{N\mu} \equiv \mathbf{p}_{N\nu}$ 模 3，可知由于 $N(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \mu_1 - \nu_1 - 2\nu_2) \equiv 0$模 3，因此，对于某个 $r \in \mathbb{Z}$，有 $N(\lambda_1 + \mu_1 - \nu_1) = 2N(\nu_2 - \lambda_2) + 3r$。将这个值代入

$N$（$\lambda_1+\mu_1-\nu_1$）到（8.2）中，可知对于某个 $r\in\mathbb{Z}$，有 $a_j=-\frac{N}{3}(2\lambda_2-2\nu_2+3r-\nu_2+\lambda_2)$。因此，$N$整除 $a_j$，进而由（8.1）可知，$N$整除 $j$。存在 $a'_j$、$j'$，使得 $a_j=Na'_j$、$j=Nj'$。由于 $0\le Nj'\le N\mu_1$且 $Nj'-N\lambda_2\le Na'_j\le Nj'$，并且 $0\le j'\le\mu_1$和$j'-\lambda_2\le a'_j\le j'$，因此根据定理 7.1，$c^{\nu}_{\lambda,\ \mu}\neq 0$，这就证明了此情形下的饱和定理。

**8.1.2.** 定理 *8.1*的证明：情形2。设 $(\lambda,\mu)$ 是 $\lambda+\mu$ 的第一类分拆，其中 $\mu_i>0$对 $i=1$成立，2，且存在 $N>1$ 使得 $c^{N\nu}_{N\lambda,N\mu}\neq 0$。根据定理 7.1，可能出现两种情形：

i. $N\nu=N\lambda+w_0N\mu+(\ell+j)\theta+(\mu_2-j)\alpha_1+a\alpha_2$，其中 $(j,\ell,a)\in A^{N\lambda,\ N\mu}$

ii. $N\nu=N\lambda+w_0N\mu+j\theta+b\alpha_1+a\alpha_2$，其中 $(j,a,b)\in B^{N\lambda,\ N\mu}$

情形2 (i)。如果 $N\nu=N\lambda+w_0N\mu+(\ell+j)\theta+(\mu_2-j)\alpha_1+a\alpha_2=N\lambda+(N\mu_2+\ell-(a+j))\omega_1-(N|\mu|-\ell-2(a+j))\omega_2$,

比较基本权的系数，我们得到，

$$N\nu_1-N\lambda_1-N\mu_2=\ell-(a+j),\qquad N\nu_2-N\lambda_2+N|\mu|=\ell+2(a+j).\tag{8.3}$$

因此我们有

$$\ell=\frac{N}{3}(2\nu_1+\nu_2-2\lambda_1-\lambda_2-2\mu_2+|\mu|),\quad a+j=\frac{N}{3}(\nu_2-\nu_1+\lambda_1-\lambda_2+\mu_2+|\mu|).\tag{8.4}$$

使用 $|\mathfrak{p}_{N\lambda}|+|\mathfrak{p}_{N\mu}|\equiv|\mathfrak{p}_{N\nu}|$ 模 3，可见由于 $N(|\mu|+\mu_2+|\lambda|+\lambda_2-|\nu|-\nu_2)\equiv 0$ 模 3,

$$2\nu_1+\nu_2-2\lambda_1-\lambda_2-2\mu_2+|\mu|=3(|\nu|-|\lambda|-\mu_2)+|\mu|+\mu_2+|\lambda|+\lambda_2-|\nu|-\nu_2\equiv 0\mod 3,$$

由（8.4）可知 $N$整除 $\ell$，因此由（8.3），$N$整除 $a+j$.

对于 $j=0$，这意味着 $N$整除 $\ell$ 和 $a$，因此，运用与情形 1 相同的论证，可知该定理在此情形下成立。

对于 $j\neq 0$、$a\in\{N\mu_1-\ell,N|\mu|-N\lambda_2-\ell-2j\}\cap\mathbb{Z}_+$以及 $0\le\ell\le N\mu_1$。由于 $N$整除 $\ell$，我们看到，如果 $a=N\mu_1-\ell$，那么 $N$整除 $a$；又由于 $N$整除 $a+j$，因此在此情形下 $N$整除 $j$。另一方面，如果 $a=N|\mu|-N\lambda_2-\ell-2j$，利用 $N$整除 $\ell$和 $a+j$这一事实，我们看到 $N$整除 $N|\mu|-N\lambda_2-\ell-2j+j=N|\mu|-N\lambda_2-\ell-j$，这意味着在此情形下 $N$整除 $j$。现在使用与情形 1中相同的论证，我们看到该定理对 $j\neq 0$同样成立。

情形2（ii）。如果对于 $0 \leq j \leq N\mu_2 - 1$， $N\nu = N\lambda + w_0 N\mu + j\theta + b\alpha_1 + a\alpha_2 = (N\lambda_1 - N\mu_2 + j + 2b - a)\omega_1 + (N\lambda_2 - N\mu_1 + j - b + 2a)\omega_2$，则 $(a,\ b) \in \mathbb{S}_{ninv}(N\lambda + j\omega_2,\ N\mu - j\omega_2)$ $b - a \in \{N(\lambda_2 - \mu_1) + j,\ N(\mu_2 - \lambda_1) - j\}$；比较基本权的系数可得，

$$N\nu_1 - N\lambda_1 + N\mu_2 = j - a + 2b, \quad N\nu_2 - N\lambda_2 + N\mu_1 = j + 2a - b. \tag{8.5}$$

因此我们有

$$\begin{gathered} a + j = \tfrac{N}{3}(2\nu_2 + 2\mu_1 - 2\lambda_2 + \nu_1 - \lambda_1 + \mu_2), \quad b + j = \tfrac{N}{3}(\nu_2 + \mu_1 + 2\nu_1 - 2\lambda_1 + 2\mu_2 - \lambda_2), \\ \text{and} \qquad b - a = \tfrac{N}{3}(-\nu_2 - \mu_1 + \nu_1 - \lambda_1 + \mu_2 + \lambda_2). \end{gathered} \tag{8.6}$$

由于 $|\nu| + \nu_2 - |\lambda| - \lambda_2 - |\mu| - \mu_2 \equiv 0$ 模 3，

$$|\nu| + \nu_2 - |\lambda| - \lambda_2 - |\mu| - \mu_2 + 3(\mu_1 + \mu_2) = \nu_1 + 2\nu_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\mu_1 + \mu_2 \equiv 0 \mod 3.$$

由（8.6）可知， $N$ 整除 $a + j$。因此，利用（8.5），我们看到 $N$ 也整除 $b + j$。这意味着对于 $j = 0$， $N$ 同时整除 $a$ 和 $b$。因此，采用与情形 1 类似的论证，可知定理在此情形下成立。

当 $j \neq 0$、 $b - a \in \{N(\lambda_2 - \mu_1) + j$、 $N(\mu_2 - \lambda_1) - j\}$.

如果 $b - a = N(\lambda_2 - \mu_1) + j$，那么由（8.6）， $N(\lambda_2 - \mu_1) + j = \frac{N}{3}$（ $-\nu_2 - \mu_1 + \nu_1 - \lambda_1 + \mu_2 + \lambda_2)$，得到：

$$3j = N(\nu_1 - \nu_2 + 2\mu_1 + \mu_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2) = 3N(-\nu_2 + \mu_1 + \mu_2) + N(|\nu| + \nu_2 - |\mu| - \mu_2 - |\lambda| - \lambda_2).$$

利用条件 $|N\lambda| + N\lambda_2 + N|\mu| + N\mu_2 - N|\nu| - N\nu \equiv 3$，可得 $j \equiv 0$ 模 $N$，从而 $a \equiv 0$ 模 $N$ 以及 $b \equiv 0$ 模 $N$。

类似地，若 $b - a = N(\mu_2 - \lambda_1) - j$，则由（8.6）， $N(\mu_2 - \lambda_1) - j = \frac{N}{3}($ $-\nu_2 - \mu_1 + \nu_1 - \lambda_1 + \mu_2 + \lambda_2)$，从而推出

$$3j = N(2\mu_2 - 2\lambda_1 + \nu_2 - \nu_1 + \mu_1 - \lambda_2) = N(|\lambda| + \lambda_2 + |\mu| + \mu_2 - |\nu| - \nu_2 + 3(\lambda_1 + \lambda_2 - \nu_2)) \text{。}$$

利用条件 $|N\lambda| + N\lambda_2 + N|\mu| + N\mu_2 - N|\nu| - N\nu \equiv 3$，可知在此情形下也有$j \equiv 0$ 模 $N$，因此 $a \equiv 0$ 模 $N$ 且 $b \equiv 0$ 模 $N$。现在，采用情形 1 中类似的论证，可证明当 $(\lambda, \mu)$ 是满足 $\mu_i > 0$（对于 $i = 1,\ 2$）的第一类分拆时，定理也成立。

**8.1.3.** 定理 8.1的证明：情形3。设（$\lambda$, $\mu$）是 $\lambda+\mu$ 的第二类分拆，并且存在某个 $N>1$ 使得$c_{N\lambda,N\mu}^{N\nu}\neq 0$。根据定理 7.1，可能出现以下三种情形：

i. $N\nu=\rho_{N\mu}^{N\lambda}+w_0\rho_{N\lambda}^{N\mu}-\ell\theta+a\alpha_2+b\alpha_1$, $(\ell,a,b)\in C_{N\lambda,N\mu}$ii. $N\nu=N\lambda+w_0N\mu+j\theta+b_1\alpha_2+b_2\alpha_1$, $(j,b_1,b_2)\in B_{N\lambda,N\mu}$iii. $N\nu=\rho_{N\mu}^{N\lambda}+w_0\rho_{N\lambda}^{N\mu}+(\ell+j)\theta+(\lambda_2-j)\alpha_1+a\alpha_2$, $(j,\ell,a)\in A_{N\lambda,N\mu}$由于情形3(ii)和(iii)可由第8.1.2节推出，这里我们考虑情形3(i)。若 $N\nu=\rho_{N\mu}^{N\lambda}+w_0\rho_{N\lambda}^{N\mu}-\ell\theta+a\alpha_2+b\alpha_1$，对于$(\ell,a,b)\in C_{N\lambda,N\mu}$，则

$$N\nu=(N\lambda_1-N\lambda_2-\ell-a+2b)\omega_1+(N\mu_2-N\mu_1-\ell+2a-b)\omega_2.$$

比较基本权的系数可得,

$$N\nu_1=N\lambda_1-N\lambda_2-a+2b-\ell,\quad N\nu_2=N\mu_2-N\mu_1-b+2a-\ell.$$

因此我们有,

$$\begin{gathered}a-\ell=\tfrac{N}{3}(\nu_1+2\nu_2-\lambda_1+\lambda_2+2\mu_1-2\mu_2),\quad b-\ell=\tfrac{N}{3}(2\nu_1+\nu_2-2\lambda_1+2\lambda_2-\mu_2+\mu_1)\\ \text{and } b-a=\tfrac{N}{3}(\nu_1-\nu_2-\lambda_1+\lambda_2-\mu_1+\mu_2).\end{gathered}\tag{8.7}$$

利用 $|\mathrm{p}_{N\lambda}|+|\mathrm{p}_{N\mu}|\equiv|\mathrm{p}_{N\nu}|$ 模 3，可知由于 $N(|\mu|+\mu_2+|\lambda|+\lambda_2-|\nu|-\nu_2)\equiv 0$ 模 3，$2\nu_1+\nu_2-2\lambda_1+2\lambda_2-\mu_2+\mu_1=3(\nu_1+\nu_2-\lambda_1-\mu_2)-|\nu|-\nu_2+|\lambda|+\lambda_2+|\mu|+\mu_2\equiv 0$ 模 3，且 $\nu_1+2\nu_2-\lambda_1+\lambda_2+2\mu_1-2\mu_2=|\nu|+\nu_2-|\lambda|-\lambda_2-|\mu|-\mu_2+3(\mu_1+\lambda_2)\equiv 0$ 模 3。

因此，由（8.7）可知，$N$ 整除 $b-\ell$ 和 $a-\ell$。于是，当 $\ell=0$时，$N$ 整除$a$和 $b$；根据与情形 1 类似的论证可得，对于 $(0,\frac{a}{N},\frac{b}{N})\in C_{\lambda,\mu}$，有$\nu=\rho_\mu^\lambda+w_0\rho_\lambda^\mu+\frac{a}{N}\alpha_2+\frac{b}{N}\alpha_1$。因此，定理在此情形下成立。

When $\ell\neq 0$, $b-a\in\{N\mu_2-N\lambda_1-\ell, N\lambda_2-N\mu_1+\ell\}$.

若 $b-a=N\mu_2-N\lambda_1-\ell$，利用（8.7），可得

$$\ell=N\mu_2-N\lambda_1-\frac{N}{3}(\nu_1-\nu_2-\lambda_1+\lambda_2-\mu_1+\mu_2)=\frac{N}{3}(2\mu_2-2\lambda_1-\nu_1+\nu_2-\lambda_2+\mu_1).\tag{8.8}$$

由于 $2\mu_2-2\lambda_1-\nu_1+\nu_2-\lambda_2+\mu_1=|\mu|+\mu_2+|\lambda|+\lambda_2-|\nu|-\nu_2-3(\lambda_1+\lambda_2-\nu_2)\equiv 0$ 模 3，由（8.8）可知 $N$ 整除 $\ell$。因此，利用（8.7）可知 $N$ 整除 $a$ 且 $b$。取

$Na' = a$、 $Nb' = b$ 和 $N\ell' = \ell$，得到 $\nu = \rho_\mu^\lambda + w_0\rho_\lambda^\mu - \ell'\theta + a'\alpha_2 + b'\alpha_1$ 对于 $(\ell'、\ a'、\ b') \in C_{\lambda,\ \mu}$，这就证明了此情形下的定理。现在，可以对 $b - a = N\lambda_2 - N\mu_1 + \ell$ 使用类似的论证。至此，定理得证。□

利用定理7.1，根据定理8.1的证明可得以下结果。

推论。设 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ 的三个主导整权 $(\lambda, \mu, \nu)$ 满足条件 $|\mathfrak{p}_\lambda| + |\mathfrak{p}_\mu| \equiv |\mathfrak{p}_\nu|$ 模 3, $c_{N\lambda,\ N\mu}^{N\nu} = N(c_{\lambda,\ \mu}^{\nu} - 1) + 1$, 对所有 $N \in \mathbb{N}$.

## References

[1] Leon Barth 和 Deniz Kus。秩 2 融合积的分次分解。 *Kyoto J. Math.*，62(3):547–576，2022。[2] Vyjayanthi Chari。仿射李代数的可积表示。 *Invent. Math.*，85(2):317–335，1986。[3] Vyjayanthi Chari 和 Murray Kayla。流形代数的分次表示。，2018。[4] Vyjayanthi Chari 和 Sergei Loktev。 $\mathfrak{sl}_{r+1}$的流形代数的韦尔模、Demazure 模和融合模。 *Adv. Math.*，207(2):928–960，2006。[5] Vyjayanthi Chari 和 Andrew Pressley。经典与量子仿射代数的韦尔模。 *Represent. Theory*，5:191–223，2001。[6] Vyjayanthi Chari 和 R. Venkatesh。Demazure 模、融合积和 $Q$系统。 *Comm. Math. Phys.*，333(2):799–830，2015。[7] B. Feigin 和 S. Loktev。关于广义科斯塔多项式和量子维林德规则。载于 *Differential topology,infinite-dimensional Lie algebras, and applications*， *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*第194卷，第61–79页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1999。[8] G. Fourier 和 P. Littelmann。韦尔模、Demazure 模、KR模、晶体、融合积和极限构造。 *Adv. Math.*，211(2):566–593，2007。[9] Ghislain Fourier。流形代数的新齐次理想：滤过、融合积和皮埃里规则。 *Mosc.Math. J.*，15(1):49–72，181，2015。[10] Ghislain Fourier、Victor Martins 和 Adriano Moura。关于截断韦尔模。 *Comm. Algebra*，47(3):1125–1146，2019。[11] Howard Garland。环代数的算术理论。 *J. Algebra*，53(2):480–551，1978。[12] Allen Knutson 和 Terence Tao。$GL_n$(C)张量积的蜂巢模型。I. 饱和猜想的证明。 *J. Amer. Math. Soc.*，12(4):1055–1090，1999。[13] Deniz Kus 和 Peter Littelmann。融合积与环面代数。 *Pacific J. Math.*，278(2):427–445，2015。[14]Katsuyuki Naoi。非单连边类型的韦尔模、Demazure 模和有限晶体。 *Adv. Math.*，229(2):875–934，2012。

分次特征公式： $A_2$ 49Indian Institute of Science Education and Research、 Mohali、 Punjab、 India*Email address*型中的融合积和 LR系数： tanusree@iisermohali.ac.in

Indian Institute of Science Education and Research, Mohali, Punjab, India
*Email address*: shushmarani95@gmail.com, ph16067@iisermohali.ac.in.