arXiv:2303.03345v1 [math.NT] 6 Mar 2023

无平方差集的 Bloom–Maynard 界的最大扩展

NUNO ARALA

Abstract. 我们证明，若 $h \in \mathbb{Z}[x]$ 是一个次数为 k 的多项式，且对每个正整数 q，同余方程 $h(x) \equiv 0$（模 q）都有解，那么任意一个子集 $\{1, 2, \ldots, N\}$，只要其中任意两个不同元素之差都不具有 $h(n)$ 的形式（其中 n 为正整数），其密度至多为 $(\log N)^{-c \log\log\log N}$，其中常数 c 仅取决于 k。这一结果改进了 Rice 所得的文献中最佳界，并推广了 Bloom 和 Maynard 的一项近期结果。

Contents

1. 引言 1 2. 记号与约定 3 3. 辅助多项式 3 3.1. 多项式的构造 3 3.2. 筛选优良剩余类 4 4. 指数和估计 5 5. 密度增量 9 6. 加法能量界及证明结束 14 7. 致谢 18 参考文献 18

1. Introduction

以下问题由 Lov´ász 提出：如果 $A \subseteq \mathbb{N}$ 是一个集合，使得 A 中任意两个不同元素之差都不是平方数，那么 A 的上密度是否必为 0? 在此，按照惯例，我们将子集 $A \subseteq \mathbb{N}$ 的上密度定义为

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|A \cap \{1, \ldots, N\}|}{N}.$$

Furstenberg [3] 和 S´ark¨ozy [11]，分别独立地证明了答案是肯定的，从而解决了这一问题；前者采用了遍历理论，而后者使用了基于 Hardy–Littlewood圆法的傅里叶分析方法。近年来，人们开始关注通过为 $|A|$ 获得更好的界来加强这一结果，其中 $A \subseteq \{1, \ldots, N\}$ 是一个没有平方差的集合。例如，S´ark¨ozy 的原始论证直接表明，对于这样的 A,

$$\frac{|A|}{N} \ll \frac{(\log\log N)^{2/3}}{(\log N)^{1/3}}. \tag{1.1}$$

此后，这一结果得到了大幅改进。例如，Pintz、Steiger 和 Szemer´edi [8] 证明，在相同假设下,

$$\frac{|A|}{N} \ll (\log N)^{-c \log\log\log\log N} \tag{1.2}$$

其中 c 为某个绝对常数。最近，Bloom和Maynard [2] 提出了一个强有力的界，用于估计分母较小的有理数集合的加性能量，并据此将上述界改进为

$$\frac{|A|}{N} \ll (\log N)^{-c \log\log\log N} \tag{1.3}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：11B30，11P55。

其中 c 为某个绝对常数。这是迄今为止最好的界。

如果改变禁差集合，例如将其替换为某个多项式 $h \in \mathbb{Z}[x]$ 的集合 $h(\mathbb{N})$，那么会发生什么，这是一个很自然的问题。Lov´asz 的问题涉及 $h(x) = x^2$ 的情形。很快可以看出，Lov´asz 问题的答案一般不再是肯定的。例如，设我们取 $h(x) = x^2 + 1$。此时可以考虑 $3\mathbb{N}$ 的子集 $\mathbb{N}$，其上密度为 $1/3 > 0$；另一方面，其中任意两个元素之差都能被 3 整除，因此不可能具有 $x^2 + 1$ 的形式。

如上所见，上述多项式 h 未能对 Lov´asz 的推广问题给出肯定答案，是由于存在一个整数 q（即 3），使得对于任意整数 n， q 都不整除 $h(n)$。事实上，如果情况如此，那么 $q\mathbb{N}$ 就是 $\mathbb{N}$ 的一个具有正上密度的子集，并且其中任意两个元素之差都不是 $h(\mathbb{N})$ 中的元素。在文献中，不存在这样的 q 的多项式被称为 *intersective polynomials*。下面我们将形式化地给出定义。

定义1.1（交互多项式）。若多项式 $h \in \mathbb{Z}[x]$ 对任意正整数 q，同余方程

$$h(n) \equiv 0 \pmod{q}$$

有一个整数解。

从上述讨论可清楚看出，若要将 Furstenberg-Sark¨ozy 定理或其任何直接推论推广到多项式 h，就必须要求 h 是交互的。事实证明，这正是对 Lov´asz 问题给出肯定答案所需的唯一限制，Kamae 和 Mend`es France [5] 已证明这一点。对于一般的交互多项式 h，Lucier [6], 得到了与（1.1）同等质量的结果，Lyall 和 Magyar [7] 以及 Rice [10] 又对其进行了改进。Balog、Pelikan、Pintz 和 Szemer´edi [1] 证明了多项式 h（x）$= x^k$ 对应的（1.2）版本。Rice 最近的工作将这一结果推广到一般的交互多项式 h，证明了与（1.2）同等质量的结果。

本文的目标是将（1.3）推广到任意交互多项式。更确切地说，我们将证明以下结果：

定理 1.2。 *Let k be a positive integer. Then there exists a constant $c = c$（k） such that, for any intersective polynomial $h \in \mathbb{Z}[x]$ of degree k the following holds: for any positive integer N and,* （）*a, any subset $A \subseteq \{1, \dots, N\}$ such that the equation $a - b = h\ n$ does not have any solutions with $b \in A$, $a \neq b$ and $n \in \mathbb{N}$, we have*

$$\frac{|A|}{N} \ll_h (\log N)^{-c \log\log\log N}.$$

当试图将论证从h（n）$= n^2$ 情形推广到一般情形时，会遇到若干障碍。在Bloom和Maynard所采用的傅里叶分析论证中， [2], 对二次高斯和的估计发挥了作用，而该论证的关键在于此类和可以获得平方根抵消。更确切地说，如果 a 和 q 是互素正整数，则有

$$\sum_{s=0}^{q-1} e\left(\frac{as^2}{q}\right) \ll q^{1/2}.$$

然而，对于次数为 k 的一般多项式 h，该估计

$$\sum_{s=0}^{q-1} e\left(\frac{ah(s)}{q}\right) \ll q^{1-1/k}$$

是最优的。为绕过这一限制，我们改造 Rice 的一个论证，筛去可容许剩余类 s （mod q），使得在前述求和中仅对这些可容许剩余类求和时，修正后的求和满足平方根抵消。

另一个障碍来自 Bloom和Maynard 所采用的密度增量策略，其中等式（qn）$^2 = q^2n^2$ 发挥着重要作用。为解决这一问题，需要调整密度增量论证，使得所考虑的交互多项式 h 在密度增量策略的每一步都发生变化。当然，这要求我们得到的界关于 h表现出某种一致性。

2. Notation and conventions

令 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 为圆群，并令 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{T}$中的通常范数。对于满足最大公约数（a， q） $= 1$的 $1 \le a \le q$，令

$$\mathfrak{M}_{a,q}(N,K) = \left\{\gamma \in \mathbb{T} : \left\|\gamma - \frac{a}{q}\right\| \le \frac{K}{N}\right\}.$$

对于参数 Q 的一个取值，我们定义 *major arcs*

$$\mathfrak{M}(N,K,Q) = \bigcup_{\substack{(a,q)=1\\ q\le Q}} \mathfrak{M}_{a,q}(N,K)$$

以及 *minor arcs*

$$\mathfrak{m}(N,K,Q) = \mathbb{T} \setminus \mathfrak{M}_q(N,K,Q).$$

给定一个多项式 $h \in \mathbb{Z}[x]$，若整数集合 A 满足：对于 A 中任意 $a \ne b$，差 $a-b$ 均不属于 $h(\mathbb{N})$，则称该集合 h-*free*。我们用记号 $e(x)$ 表示 $e^{2\pi i x}$。带星号的求和符号 $\sum^*$ 表示对本原剩余类求和。

$\widehat{\ }$我们用记号 f 表示 f 的傅里叶变换；因此，若 $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ 是一个紧支撑的 $\widehat{\ }$ 函数，我们将其傅里叶变换 $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ 定义为

$$\widehat{f}(\gamma) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e(n\gamma).$$

两个函数 f、g（例如，它们的支撑集均为紧集）的卷积 $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ 定义为

$$(f*g)(n) = \sum_{a+b=n} f(a)g(b).$$

我们用记号 $\mathbf{1}_A$ 表示集合 $A \subseteq \mathbb{Z}$的示性函数，因此

$$\mathbf{1}_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \in A \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

鉴于我们希望证明的结果（定理 1.2），对于任意固定常数 c，给定一个密度为 σ的 h-自由子集 $A \subseteq \{1,\dots,N\}$，可以假设 $\sigma \ge (\log N)^{-c\log\log\log N}$，否则结论便成立。本文中均默认这一假设。例如，引理 4.6 的表述形式为：“那么，要么 $\sigma < (\log N)^{-\varepsilon\log\log\log N}$，要么（.....）”；但实际上，在应用引理 4.6 时，我们总是默认处于第二种情形。我们也可以（并且将会）假设 N大于任意固定常数。

字母 c 和 C 将用于表示任意正常数；我们通常会滥用记号，使它们在不同情况下表示不同的常数。希望这不会造成任何混淆。

3. The auxiliary polynomials

3.1. 多项式的构造。如引言中所述，多项式 x^2 的简单性使其特别适合通过多年来在算术组合学中广泛采用的密度增量策略来处理当前问题。若 $A \subseteq [N]$ 是一个不含平方差的集合，并且能够找到一个等差数列 $q[N'] + r$，使得 A 在其上的密度有所增加，那么进一步将该等差数列划分为模数为 q^2 的等差数列后，便可找到另一个等差数列，例如 $q^2[N^*] + s$，使得 A 在其上的密度也有所增加。定义

$$A^* = \{x \in [N^*] : q^2x + s \in A\}$$

可见， A^* 不含平方差；因为如果 $a \ne b$ 属于 A^* 和 $a - b = n^2$，那么 $q^2a + s$ 和$q^2b + s$ 属于 A 以及

$$(q^2a + s) - (q^2b + s) = q^2(a-b) = (qn)^2,$$

这 这与假设 A 没有平方差矛盾。因此，我们得到一个新的 s . et $A^* \subseteq [N^*]$，它没有平方差且密度更高。

对于更一般的交互多项式 h，给定一个无 h 的集合 $A \subseteq [N]$，如果我们找到一个等差数列，使得 A 以模数 q 的密度存在，那么就不能指望由此得到另一个密度更高的集合 $A' \subseteq [N']$，且该集合中没有属于 $h(\mathbb{N})$的非零差。我们能做的是使用 Lucier [6], 的一种构造，从而得到一个密度更高的集合 $A' \subseteq [N']$，且该集合中没有属于 $h_q(\mathbb{N})$的非零差，其中 $h_q \in \mathbb{Z}[x]$是某个多项式。下面我们将解释这种构造。我们要指出，

这些辅助多项式确实存在，而这正是论证中用到 h 的交错性的那一步。

固定一个次数为 k的交互多项式 h，不失一般性地假设其首项系数为正。h 是交互多项式这一条件，等价于对每个素数 p，h 都有一个零点 $z_p \in \mathbb{Z}_p$。令 m_p 为 z_p 作为 h的零点的重数。对每个正整数 d，定义 r_d 为满足 $-d < r_d \leq 0$ 且

$$r_d \equiv z_p \pmod{p^\alpha} \text{ whenever } p \text{ is a prime and } p^\alpha \mid d.$$

显然，根据中国剩余定理，r_d 存在且唯一。现在令 λ 为满足以下条件的唯一完全积性函数：对每个素数 p，$\lambda(p) = p^{m_p}$。根据定义可知，对于任意 d，$d \mid \lambda(d) \mid d^k$。现在可以定义辅助多项式了。

定义3.1（辅助多项式）。对于每个 $d \in \mathbb{N}$，定义

$$h_d(x) = \frac{h(r_d + dx)}{\lambda(d)}.$$

根据定义很容易验证，h_d 具有整数系数。根据定义也可立即得到 $\lambda(q)h_q(\mathbb{N}) \subseteq h(\mathbb{N})$，这说明这些辅助多项式可以替代上文提到的“$q^2$ 乘以一个平方仍为平方”这一性质。事实上，还有更强的结论：

命题 3.2。 *For any positive integers d, q,*

$$\lambda(q)h_{dq}(\mathbb{N}) \subseteq h_d(\mathbb{N}).$$

Proof. 由于按构造我们有 $r_{dq} \equiv r_d$（模 d），因此可写为 $r_{dq} = r_d + ds$，其中 $-q < s \leq 0$。对于正整数 n，于是有

$$\lambda(q)h_{dq}(n) = \lambda(q)\frac{h(r_{dq} + dqn)}{\lambda(dq)} = \frac{h(r_{dq} + dqn)}{\lambda(d)} = \frac{h(r_d + ds + dqn)}{\lambda(d)} = h_d(s + qn).$$

由于 $s + qn > 0$（当 $s > -q$ 时），结论成立。 □

We reg此处给出辅助多项式的一个直接但至关重要的解析性质。

命题 **3 3** *For any positive integer d denote by b_d and J_d the leading coefficient of h_d and 。。，，the sum of the absolute values of the coefficients of h_d respectively. Then $J_d \ll_h b_d$.*

Proof. 记 $h(x) = a_k x^k + \cdots + a_0$。由二项式展开可知，$h_d(x)$ 中 x^i 的系数为

$$\frac{1}{\lambda(d)} \sum_{j=i}^{k} a_j \binom{j}{i} r_d^{j-i} d^i. \tag{3.1}$$

特别地，由于 $|r_d| < d$，根据三角不等式可得

$$J_d \ll_h \frac{d^k}{\lambda(d)}.$$

但由 (3.1) 也可得 $b_d = a_d d^k/\lambda(d)$，结论由此得出。 □

3.2. 筛选优良剩余类。正如引言中所述，尝试将受 Bloom和Maynard 在 [2] 中所采用方法启发的思路付诸应用时，会遇到一个根本障碍：对于次数至少为 3 的多项式取值，在模 q 下的指数和并不具备平方根抵消。Rice [9] 找到了巧妙的方法来解决这一问题。他利用无平方因子模数总能实现平方根抵消这一事实（由中国剩余定理和 Weil 界可知），进而运用经典的“p-进驻相法”论证，并证明：若仅对某个较大的剩余类集合求和，且这些剩余类上的多项式导数具有适当的非消失性质，那么确实可以得到平方根抵消。下文将介绍 Rice 构造可容许剩余类的方法，我们将采用这一方法；在第 §4 节中，我们将给出指数和所需的平方根抵消界。

定义 3.4. 设 $g \in \mathbb{Z}[x]$ 和 $Y > 0$。对于每个素数 p，令 $\gamma(g;p)$ 为使导数 g' 在模 $p^{\gamma(g;p)}$ 下不恒等于零的最小正整数。

(i) 我们定义

$$W(g;Y)=\{n\in\mathbb{Z}:g'(n)\not\equiv 0 \pmod{p^{\gamma(g;p)}} \text{ for all } p\le Y\}.$$

(ii) 此外，给定一个正整数 q，定义

$$W_q(g;Y)=\{n\in\mathbb{Z}:g'(n)\not\equiv 0 \pmod{p^{\gamma(g;p)}} \text{ for all } p\le Y \text{ for which } p^{\gamma(g;p)}\mid q\}$$

直观而言，它仅捕捉可由 n （模 q）读出的限制。

(iii) 给定一个素数 p，令 $j(g;p)$ 表示 g' 模 $p^{\gamma(p)}$ 的根的个数。(iv) 若所考虑的多项式 g 属于其中一个 h_d，则分别将 $\gamma(g;p)$、$W(g;Y)$、$W_q(g;Y)$ 和 $j(g;p)$ 简记为 $\gamma_d(p)$、$W_d(Y)$、$W_d^q(Y)$ 和 $j_d(p)$。

若 $g(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k$，则定义

$$\operatorname{cont}(g)=\gcd(a_1,\dots,a_k).$$

在 [9], 第 2.5 节中，Rice 证明了辅助多项式 h_d 的两个关键性质，这些性质对于下一节中指数和估计的应用至关重要。一是 $\operatorname{cont}(h_d)$ 有绝对上界；因此，实际上，下一节指数和界中所有依赖于 $\operatorname{cont}(g)$ 的常数，对我们的目的而言都是绝对常数，前提是我们只使用多项式 h_d。另一性质是，对于使 h_d' 模 q 恒等于零的模数 q，它们构成的集合包含于一个与 d 无关的有限集。这意味着以下结论。

命题 3.5. *Let*

$$w_d(Y)=\prod_{p\le Y}\left(1-\frac{j_d(p)}{p^{\gamma_d(p)}}\right)$$

be the expected proportion of integers in $W_d(Y)$. Then we have

$$w_d(Y)\gg_h(\log Y)^{1-k}.$$

Proof. 根据我们先前的评注可推知，对于除有限多个之外的所有素数 p，我们都有 $\gamma_d(p)=1$ 对每个 d都成立。此外，h_d' 的次数为 $k-1$，因此模 p有至多 $k-1$ 个根。由此可得，因子 $1-j_d(p)/p^{\gamma_d(p)}$ 对于除有限多个之外的所有素数，至少为 $1-(k-1)/p$。因此，由于所有因子显然都非零，

$$w_d(Y)\gg_h\prod_{k\le p\le Y}\left(1-\frac{k-1}{p}\right)\gg(\log Y)^{1-k},$$

根据 Mertens 的经典结果。 □

事实上，Rice 通过标准的 Brun筛论证，在 [9], 中精确阐述了这一直觉：若 X 相对于 Y 足够大，则 $w_d(Y)$ 应接近于 $[1,X]$ 中属于 $W_d(Y)$ 的整数所占的比例。更准确地说，他证明了以下结论：

引理 3.6. *Let $g\in\mathbb{Z}[x]$ and $X,Y>0$ with $c\log X\ge\log Y\log\log Y$. Then,*

$$|[1,X]\cap W(g;Y)|=X\prod_{p\le Y}\left(1-\frac{j(g;p)}{p^{\gamma(g;p)}}\right)+O\left(Xe^{-c\frac{\log X}{\log Y}}\right),$$

where $c>0$ depends only on 度(g) and the collection of moduli for which g' vanishes identically.

Proof. 这是 [9],命题 2.4。 □

4. Exponential sum estimates

本节记录由一个次数为 k 的多项式 g 产生的指数和的一些估计，主要目标是证明某些指数和在适当的小弧上很小。我们首先回顾 Rice [9] 的一些结果，并将在此基础上展开。

引理 4.1。 *Suppose* $k \in \mathbb{N}$、 $g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k \in \mathbb{Z}[x]$、 *and let* $J = |a_0| + \cdots + |a_k|$. *If* X、 $Y > 0$、 a、 $q \in \mathbb{N}$、 $\alpha = a/q + \beta$、 *and* $c\log(X/q) \geq \log Y \log\log Y$、 *then*

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n\in W(g;Y)}}^{X} g'(n)e(g(n)\alpha) = \frac{1}{q} \prod_{\substack{p\leq Y \\ p^{\gamma(g;p)}\nmid q}} \left(1 - \frac{j(g;p)}{p^{\gamma(g;p)}}\right) \sum_{\substack{s=0 \\ s\in W^q(g;Y)}}^{q-1} e\left(\frac{ag(s)}{q}\right) \int_0^X g'(x)e(g(x)\beta)dx + O\left(kJX^k e^{-c\frac{\log\left(\frac{X}{q}\right)}{\log Y}}(1 + JX^k|\beta|)\right),$$

where $c = c(k, \mathrm{cont}(g)) > 0$.

Proof. 这是 [9]中的引理 4.1。 □

引理 4.2。 *If* $g \in \mathbb{Z}[x]$ *with* $\deg(g) = k \geq 2$, $a, q \in \mathbb{N}$ *with* 最大公约数$(a, q) = 1$, *and* $Y > 0$, *then*

$$\left| \sum_{\substack{s=0 \\ s\in W^q(g;Y)}}^{q-1} e\left(\frac{ag(s)}{q}\right) \right| \ll_k \gcd(\mathrm{cont}(g), q)^3 C^{\omega(q)} \begin{cases} q^{1/2} \text{ if } q \leq Y \\ q^{1-1/k} \text{ for all } q \end{cases},$$

where $C = C(k)$ *and* $\omega(q)$ *is the number of distinct prime factors of* q.

Proof. 这是 [9]中的引理 4.3。 □

引理 4.3 *Suppose* $k \in \mathbb{N}$ $g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k \in \mathbb{Z}[x]$ *with* $a_k > 0$. *Suppose further*..., (), , , , , 最大公约数(,), *that* X Y $Z \geq 2$ $YZ \leq X$ *and* a $q \in \mathbb{N}$ *with* a $q = 1$. *If* $|\alpha - a/q| < 1/q^2$ *then*

$$\left| \sum_{\substack{n=1 \\ n\in W(g;Y)}}^{X} e(g(n)\alpha) \right| \ll_k \mathrm{cont}(g)^6 (\log Y)^{ek} X \left(e^{-\frac{\log Z}{\log Y}} + \left(a_k \log^{k^2}(a_k q X) \left(q^{-1} + \frac{Z}{X} + \frac{qZ^k}{a_k X^k} \right) \right)^{2^{-k}} \right).$$

Proof. 这是 [9] 中的引理 4.5。 □

我们将利用这些结果证明以下关键估计。在下文中，令 $\rho = 1/2^{k+2}k^2$。

引理 4.4。 *Suppose* $N \gg_h 1$, *and let* $r > 0$ *be arbitrary. Let* d *be such that* $d \ll N^\rho$. *Set* $M = \left\lfloor (N/b_d)^{1/k} \right\rfloor$. *Then either* $\sigma \leq (\log N)^{-\log_{\log\log N}/4}$, *or there exists a constant* κ *(possibly depending on* r*) such that, setting* $Y = \sigma^{-(k+2)}$,

$$\left| \frac{1}{w_d(Y)N} \sum_{\substack{m=1 \\ n\in W_d(Y)}}^{M} h_d'(m)e\left(h_d(m)\gamma\right) \right| \leq r\sigma$$

whenever $\gamma \in \mathfrak{m}(N, \kappa/\sigma, \kappa/\sigma^{k+1})$.

Remark 4.5. 分母 $w_d(Y)N$ 是该指数和的平凡上界，因此这个引理说明了我们能在多大程度上改进平凡上界。

Proof. 令 S 为我们希望给出上界的表达式。在整个论证中，我们将 $w_d(Y)$简记为 w，并令 $Z = e^{(\log_{\log N})^3}$。由狄利克雷逼近定理可知，存在一个正整数 q，满足$1 \leq q \leq N/Z^{2k}$，以及一个整数 a，使得 $1 \leq a \leq q$ 与 q互素，且

$$\left|\gamma - \frac{a}{q}\right| < \frac{Z^{2k}}{qN}.$$

记 $\gamma = a/q + \beta$。我们将论证分成几种情况。

首先假设 $q \leq N^{1/2k}$ $J_d \ll b_d$ 3 3 $J_d M^d \ll$ 。回顾（命题 .）

N 4 1 3 5

以及因此，引理 . 连同命题 . 给出

$$S = \frac{w_q}{qN} \sum_{\substack{s=0 \\ s\in W_d^q(Y)}}^{q-1} e\left(\frac{ah_d(s)}{q}\right) \int_0^M h_d'(x)e(h_d(x)\beta)dx + O_h\left((\log Y)^{k-1} e^{-c\frac{\log(M/q)}{\log Y}} Z^{2k}\right),$$

其中

$$w_q = \prod_{\substack{p\le Y\\ p^{\gamma_d(p)}\mid q}} \left(1-\frac{j_d(p)}{p^{\gamma_d(p)}}\right)^{-1}.$$

由于 $q \le N^{1/2k}$，我们有 $\log(M/q) \asymp \log(N)$，因此

$$(\log Y)^{k-1} e^{-c\frac{\log(M/q)}{\log Y}} Z^{2k} \ll (\log(\sigma^{-1}))^{k-1} e^{-c\frac{\log(N)}{\log(\sigma^{-1})}} e^{2k(\log\log N)^3}$$

并且若 $\sigma^{-1} \le (\log N)^{\log\log_{\log} N/4}$，则对于任意 $t>0$，上述量为 $O(\sigma^t)$，特别地为 $o(\sigma)$。因此，我们可以专注于控制主项。为此，我们注意到

$$\left|\int_0^M h_d'(x)e(h_d(x)\beta)dx\right| = \left|\int_{h_d(0)}^{h_d(M)} e(y\beta)dy\right| \ll \min\{N, |\beta|^{-1}\},$$

只要 $h_d(0) \ll N$ 即可；但根据定义，$h_d(0) = h(r_d)/\lambda(d) \ll d^{k-1}$（回想一下，$|r_d| < d$），而我们假设 $d \ll N^\rho$，所以该条件显然成立。因此我们有

$$S \ll \frac{w_q}{qN} \sum_{\substack{s=0\\ s\in W_d^q(Y)}}^{q-1} e\left(\frac{ah_d(s)}{q}\right) \min\{N, |\beta|^{-1}\} + o_{h,N}(\sigma). \tag{4.1}$$

现在我们进一步分成两个子情形。

若 $q > \kappa/\sigma^{k+1}$，则由引理 4.2 以及观察到的 $w_q \ll_h 2^{\omega(q)}$ 可知，指数和的上界为 $C^{\omega(q)}q^{1-1/k}$，其中某个常数为 C，这意味着

$$\begin{aligned} S &= O\left(\frac{C^{\omega(q)}}{q^{1/k}}\right) + o_{h,N}(\sigma) \\ &= O\left(\frac{1}{q^{1/(k+1)}}\right) + o_{h,N}(\sigma) \end{aligned}$$

利用平凡上界 $C^{\omega(q)} \ll q^{1/k-1/(k+1)}$。现在使用 $q > \kappa/\sigma^{k+1}$，得到

$$S = O\left(\sigma/\kappa^{1/(k+1)}\right) + o_{h,N}(\sigma)$$

适当选取 κ，即可在此情形下得到期望结果。

若改为 $q \le \kappa/\sigma^{k+1}$ $\gamma \in \mathfrak{m}$ N κ/σ κ/σ^{k+1} $|\beta| \ge$，则 $\frac{\kappa}{\sigma N}$ $\{N, |\beta|^{-1}\}$ 假设 (, ,) 保证了 。这次对指数和使用平凡上界，并将 min 从上方用 $|\beta|^{-1}$ 估计，得到

$$S = O\left(\frac{|\beta|^{-1}}{N}\right) + o_{h,N}(\sigma) = O\left(\frac{\sigma}{\kappa}\right) + o_{h,N}(\sigma).$$

适当选取 κ 的值，即可在此情形下得到期望结果。

现在考虑 $q > N^{1/2k}$ 的情形。利用分部求和，可将其写为

$$S = \frac{1}{wN}\left(h_d'(M) \sum_{\substack{n=1\\ n\in W_d(Y)}}^{M} e(h_d(n)\gamma) - \int_1^M h_d''(t)\left(\sum_{\substack{1\le n\le t\\ n\in W_d(Y)}} e(h_d(n)\gamma)\right)dt\right).$$

假设

$$\frac{N}{Z^{2k}} > q > N^{1/2k}, \quad d < N^\rho, \quad \sigma > (\log N)^{-\log\log\log N/4},$$

再结合容易看出的 $b_d \ll d^k$，可知

$$(\log Y)^{ek} X\left(e^{-\frac{\log Z}{\log Y}} + \left(b_d \log^{k^2}(b_d qX)\left(q^{-1} + \frac{Z}{X} + \frac{qZ^k}{b_d X^k}\right)\right)^{2^{-k}}\right) \ll wM\sigma \tag{4.2}$$

对于任意满足 $\sigma M < X \le M$ 的 X。这一步论证说明了为何选择指数 ρ；选择它是为了使 $b_d q^{-2^{-k}}$ 被 N 的某个负幂所界定，即 $N^{k\rho-1/(k\cdot 2^{k+1})}$，从而带来幂次节省，而对数因子以及 σ^{-1} 的幂（它们比任何 N 的正幂都小）都无法与之抗衡。这也说明了为何在选择 Z 时取 3 的指数（事实上，任何大于 2 的指数都足够）；它使 $e^{\log Z/\log Y}$ 更大

超过 σ^{-1} 的任何幂。还要注意，如果 N 足够大，那么 $YZ \leq \sigma M$。将此应用于 $X = M$，结合引理 4.3，并注意到 $h_d'(t) \ll b_d t^{k-1}$，便立即得到

$$h_d'(M) \sum_{\substack{n=1 \\ n\in W_d(Y)}}^{M} e(h_d(n)\gamma) \ll b_d M^d w\sigma \asymp wN\sigma.$$

现在我们将其分解

$$\int_1^M h_d''(t) \left(\sum_{\substack{1\leq n\leq t \\ n\in W_d(Y)}} e(h_d(n)\gamma) \right) dt$$
$$= \int_1^{\sigma M} h_d''(t) \left(\sum_{\substack{1\leq n\leq t \\ n\in W_d(Y)}} e(h_d(n)\gamma) \right) dt + \int_{\sigma M}^M h_d''(t) \left(\sum_{\substack{1\leq n\leq t \\ n\in W_d(Y)}} e(h_d(n)\gamma) \right) dt.$$

对于第一个积分，我们注意到 $h_d''(t) \ll b_d M^{k-2}$ 对 $1 \leq t \leq \sigma M$ 成立，并用平凡方法将指数和界为 σM，从而得到

$$\int_1^{\sigma M} h_d''(t) \left(\sum_{\substack{1\leq n\leq t \\ n\in W_d(Y)}} e(h_d(n)\gamma) \right) dt \ll b_d M^d \sigma^2 \ll wN\sigma.$$

最后，我们利用 (4.2)、引理 4.3 和界 $h_d''(t) \ll b_d M^{k-2}$，得出

$$\int_{\sigma M}^M h_d''(t) \left(\sum_{\substack{1\leq n\leq t \\ n\in W_d(Y)}} e(h_d(n)\gamma) \right) dt \ll M \cdot b_d M^{k-2} \cdot wM\sigma \asymp wN\sigma.$$

综合起来，这些结果表明在此情形下 $S = O(\sigma)$，证明至此完成。 □

引理 **4 6** *There exists $\varepsilon = \varepsilon\ k\ > 0$ for which the following statement is true. Keep the notation . and assumptions of Lemma 4.4. Fix $q \leq \kappa/\sigma^{k+1}$ and some a with $1 \leq a \leq q$ and $a\ q\ = 1$. . ( ) 最大公约数 (,) Then either $\sigma < (\log\ N)^{-\varepsilon \log\log\log\ N}$, or the following hold:*

(i) For any $\gamma \in \mathfrak{M}_{a,q}(N, \kappa/\sigma)$,

$$\left| \frac{1}{wN} \sum_{\substack{m=1 \\ n\in W_d(Y)}}^{M} h_d'(m) e\left(h_d(m)\gamma\right) \right| \ll (\log N)^{1/4} q^{-1/2} \min\left\{1, (N|\beta|)^{-1}\right\}.$$

(ii) We have

$$\int_{\mathfrak{M}_{a,q}(N,\kappa/\sigma)} \left| \frac{1}{wN} \sum_{\substack{m=1 \\ n\in W_d(Y)}}^{M} h_d'(m) e\left(h_d(m)\gamma\right) \right|^2 d\gamma \ll \frac{(\log N)^{1/2}}{qN}.$$

Proof. 我们重新得到引理 4.4 证明的第一部分，即（4.1）。由于 $q \leq Y$，根据引理 4.2，我们可以将指数和界定为 $C^{\omega(q)} q^{1/2}$。利用界 $w_q \ll 2^{\omega(q)}$和 $\omega(q) \ll \log\ q/\log\log\ q$，我们得到

$$S = O\left(\frac{C^{\log q/\log\log q}}{q^{1/2}} \min\{1, (N|\beta|)^{-1}\} \right) + O_t(\sigma^t)$$

（注意，我们之前曾指出，对于任意 $t > 0$，误差项 $o(\sigma)$ 实际上是 $O(\sigma^t)$。）因此，误差项可以并入主项（回想一下，q 和 β 都有 σ^{-1} 的幂级上界），于是

$$S = O\left(\frac{C^{\log q/\log\log q}}{q^{1/2}} \min\{1, (N|\beta|)^{-1}\} \right).$$

现在我们选择 $\varepsilon > 0$，使得假设 $\sigma \geq (\log N)^{-\varepsilon \log_{\log\log N}}$ 意味着

$$C^{\log q/\log\log q} \ll (\log N)^{1/4} \quad \text{for any } q \leq \kappa/\sigma^{k+1}.$$

很容易验证，可以找到这样的 ε；事实上，由于 $\log q/\log\log q$ 是递增的，假设 $q \ll \sigma^{-(k+1)}$，便可推出

$$\begin{aligned}\frac{\log q}{\log\log q} &\ll \frac{(k+1)\log(\sigma^{-1})}{\log\log(\sigma^{-1})} + O(1)\\ &\leq \frac{(k+1)\varepsilon \log\log N \cdot \log\log\log N}{\log(\varepsilon) + \log\log\log N + \log\log\log\log N} + O(1) \leq \varepsilon \log\log N + O(1)\end{aligned}$$

若 N 足够大，则有，进而得到

$$C^{\log q/\log\log q} \ll C^{(k+1)\varepsilon \log\log N} = (\log N)^{(k+1)\varepsilon \log(C)}$$

因此，只需选择 ε，使得 $(k+1)\varepsilon \log(C) \leq 1/4$。事实上，这或许是整个论证最接近失效的环节；要使这一策略奏效，我们需要在本引理的估计中得到 $\log N$ 的一个小幂，而假设我们希望证明的结论不成立，恰好“刚好足以”得到这一结果。

那么，要么 $\sigma < (\log N)^{-\varepsilon \log_{\log\log\log N}}$，要么

$$S \ll (\log N)^{1/4} q^{-1/2} \min\{1, (N|\beta|)^{-1}\},$$

由此证明了 (i)。现在，(ii) 可直接通过逐点应用 (i) 得出。事实上，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{M}_{a,q}(N,\kappa/\sigma)} \left| \frac{1}{wN} \sum_{\substack{m=1 \\ n \in W_d(Y)}}^{M} h_d'(m) e\left(h_d(m)\gamma\right) \right|^2 d\gamma &\ll (\log N)^{1/2} q^{-1} \int_0^\infty (\min\{1, (N|\beta|)^{-1}\})^2 d\beta\\ &= (\log N)^{1/2} q^{-1} \left(\int_0^{1/N} 1 d\beta + \int_{1/N}^\infty (N|\beta|)^{-2} d\beta \right)\\ &= \frac{2(\log N)^{1/2}}{qN},\end{aligned}$$

这就得到了我们想要的结论 . □

5. The density increment

本节的目的有二。首先，我们证明 L^2 中所用的 [2], 密度增量引理的一个变体（引理 5.1），并使其适用于我们的设定。其次，我们证明（引理 5.2），若 $A \subseteq [N]$ 是密度为 σ 的 h_d-自由集合，那么 $\widehat{\mathbf{1}_A} - \sigma\widehat{\mathbf{1}_N}$ 在某些分母较小的有理数附近具有较大的 L^2 质量，并且在这些有理数处， A 的傅里叶系数较大。随后，我们在引理 5.3 中将这两者结合起来，证明在不存在良好密度增量的情况下，在引理 5.2 的结论中，每个分母对应的有理数相对较少。这将为应用 Bloom和Maynard 的加法能量界（ [2] 中的定理 2）铺平道路。

引理 5.1. *Let $A \subseteq [N]$ have density $\sigma = |A|/N$, and suppose that A is h_d-free. Let $\nu \in [0,1)$ and let K, $q \geq 1$ be such that $\nu\sigma N \gg K\lambda(q)$ and suppose that*

$$\sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}_{a,q}(N,K)} \left| \widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma) - \sigma\widehat{\mathbf{1}_{[N]}}(\gamma) \right|^2 d\gamma \geq \nu\sigma|A|.$$

Then there exists $N^* \gg \nu\sigma N/K\lambda(q)$ and a h_{qd}-free subset $A^* \subseteq [N^*]$, the density $\sigma^* = |A^*|/N^*$ of which satisfies

$$\sigma^* \geq \left(1 + \frac{\nu}{73}\right)\sigma.$$

Proof. 设

$$\mathcal{P} = \{q, 2q, \ldots, N'q\}$$

其中， N' 将在后续论证中根据我们找到的某些约束来选取。设 $\gamma \in \mathfrak{M}_{a,q}(N,K)$，并注意到，对于任意 $n' \in [N']$,

$$\left|1 - e(\gamma q n')\right| \ll \|\gamma q n'\| = \|\gamma q n' - a n'\| = \left\| q\left(\gamma - \frac{a}{q}\right) n' \right\| \leq \frac{qKN'}{N}.$$

上述结果意味着，若 $N' \ll N/qK$，则 $|1-e(\gamma qn')| < 1/2$，其中隐含常数充分小。假设这一点成立，则对于$\gamma \in \mathfrak{M}_{a,q}(N,K)$,

$$\left|N' - \widehat{\mathbf{1}_{\mathcal{P}}}(\gamma)\right| = \left|\sum_{n\in\mathcal{P}}(1-e(\gamma n))\right| \leq \frac{|\mathcal{P}|}{2} = \frac{N'}{2}, \text{ and therefore } \left|\widehat{\mathbf{1}_{\mathcal{P}}}(\gamma)\right| \geq \frac{N'}{2}.$$

令 $g = \mathbf{1}_A - \sigma\mathbf{1}_{[N]}$。由帕塞瓦尔定理以及 $\widehat{\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * g} = \widehat{\mathbf{1}_{\mathcal{P}}}\widehat{g}$ 这一事实,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * g\|_2^2 &= \int_{\mathbb{T}} \left|\widehat{\mathbf{1}_{\mathcal{P}}}(\gamma)\right|^2 |\widehat{g}(\gamma)|^2 \, d\gamma \\ &\geq \int_{\mathfrak{M}_q(N,K)} \left|\widehat{\mathbf{1}_{\mathcal{P}}}(\gamma)\right|^2 |\widehat{g}(\gamma)|^2 \, d\gamma \\ &\geq \frac{N'^2}{4}\int_{\mathfrak{M}_q(N,K)} |\widehat{g}(\gamma)|^2 \, d\gamma \geq \frac{\nu\sigma N'^2|A|}{4}.\end{aligned}$$

写作 $\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * g = \mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_A - \sigma\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{[N]}$ 并展开内积，我们得到

$$\|\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_A\|_2^2 \geq \frac{\nu\sigma N'^2|A|}{4} + 2\sigma\langle \mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{[N]}\rangle - \sigma^2 \left\|\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{[N]}\right\|_2^2. \tag{5.1}$$

现在　　注意到 $\langle \mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_A, \ \mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{[N]}\rangle$ 统计了满足以下方程的解 $(p,a,p',n) \in \mathcal{P}\times A\times\mathcal{P}\times[N]$
方程　　$p + a = p' + n$. 将方程改写为 $a = p' - p + n$，可知

$$\langle \mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{[N]}\rangle = \sum_{x\in A} \mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{-\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{[N]}(x).$$

由此可得

$$\begin{aligned}\left|\langle \mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{[N]}\rangle - |A|N'^2\right| &= \left|\sum_{x\in A}(\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{-\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{[N]}(x) - N'^2\mathbf{1}_{[N]}(x))\right| \\ &\leq \sum_{x\in\mathbb{Z}} \left|\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{-\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{[N]}(x) - N'^2\mathbf{1}_{[N]}(x)\right| \\ &\leq \sum_{x\in\mathbb{Z}} \left|\sum_{y\in\mathbb{Z}}(\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{-\mathcal{P}})(y)\mathbf{1}_{[N]}(x-y) - \sum_{y\in\mathbb{Z}}(\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{-\mathcal{P}})(y)\mathbf{1}_{[N]}(x)\right| \\ &\leq \sum_{y\in\mathbb{Z}}(\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{-\mathcal{P}})(y)\sum_{x\in\mathbb{Z}}\left|\mathbf{1}_{[N]}(x-y) - \mathbf{1}_{[N]}(x)\right| \\ &\ll \sum_{y\in\mathbb{Z}}(\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{-\mathcal{P}})(y)|y| \\ &\ll qN'\sum_{y\in\mathbb{Z}}(\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{-\mathcal{P}})(y) = qN'^3.\end{aligned}$$

由此可得 $\langle \mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{[N]}\rangle = |A|N'^2 + O(qN'^3)$。另一方面，由于 $\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{[N]}(x)$ 统计满足 $p + n = x$ 的解 $(p,n) \in \mathcal{P}\times[N]$ 的个数，因此它不超过 $|\mathcal{P}| = N'$，故有

$$\left\|\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{[N]}\right\|_2^2 \leq N' \left\|\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{[N]}\right\|_1 = N'^2N = \frac{|A|N'^2}{\sigma}.$$

将这些估计代入 (5.1)，得到

$$\|\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_A\|_2^2 \geq \sigma|A|N'^2 + \frac{\nu\sigma N'^2|A|}{4} + O(\sigma qN'^3).$$

若对于某个充分小的隐含常数取值， $N' \ll \nu\sigma N/q$ ，则可知项$O(\sigma qN'^3)$ 至多为 $\nu\sigma N'^2|A|/8$，因此

$$\|\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_A\|_2^2 \geq \left(1 + \frac{\nu}{73}\right)\sigma N'^2|A|.$$

现在注意到， $\|\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_A\|_2^2$统计满足 $p + a = p' + a'$ 的解 $(p,a,p',a') \in \mathcal{P}\times A\times\mathcal{P}\times A$。将方程改写为 $p - a' = p' - a$，可知 $\|\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_A\|_2^2 = \|\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{-A}\|_2^2$。因此我们得到

$$\|\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{-A}\|_1 \cdot \|\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{-A}\|_\infty \geq \|\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{-A}\|_2^2 \geq \left(1 + \frac{\nu}{73}\right)\sigma N'^2|A|.$$

另一方面，显然 $\|\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{-A}\|_1 = |\mathcal{P}| \times |A| = N'|A|$，因此我们得出

$$\|\mathbf{1}_{\mathcal{P}} * \mathbf{1}_{-A}\|_\infty \geq \left(1 + \frac{\nu}{73}\right)\sigma N'.$$

令 x 为使其达到最大值的一个整数，$|\mathcal{P} \cap A + x|$ 这恰好意味着 $\geq (1+\nu/73)\sigma N'$。

回顾一下，为了得到上述结论，我们在推导过程中发现对 N' 的约束是

$$N' \ll N/qK \qquad N' \ll \nu\sigma N/q \qquad N' \gg \nu\sigma N/qK$$

和。因此，显然我们可以找到满足该结论的。现在将 $[N']$ 按照模 $\lambda(q)$ 划分为剩余类。每个剩余类包含 q 个元素，根据抽屉原理，存在一个剩余类 C，其中 $|C| = N^*$，使得

$$|qC \cap (A + x)| \geq \left(1 + \frac{\nu}{73}\right)\sigma N^*.$$

令 $qC = \{\lambda(q)n + r : \text{对某个 } r \in \mathbb{Z}, \text{有 } 1 \leq n \leq N^*\}$，并令

$$A^* = \{n \in [N^*] : \lambda(q)n + r \in A + x\}.$$

注意到 $|A^*| = |qC \cap (A+x)|$。因此，只需证明 A^* 是 h_{dq}-自由的。假设并非如此，则存在 $a \neq b$ 属于 A^*，以及一个正整数 n，使得 $a - b = h_{dq}(n)$。于是 $\lambda(q)a + r - x$ 和 $\lambda(q)b + r - x$ 都属于 A，并且

$$(\lambda(q)a + r - x) - (\lambda(q)b + r - x) = \lambda(q)(a-b) = \lambda(q)h_{dq}(n) \in h_d(\mathbb{N}),$$

根据命题 3.2，这与 A 是 h_d-自由的假设矛盾。证毕 . □

引理 5.2. *Let $N \gg_h 1$, and suppose $A \subseteq [N]$ is h_d-free, where $d \leq N^\rho$, with $\sigma = |A|/N > (\log N)^{-\log\log\log N}$. Then there exist B, Q, with $\sigma^{O(1)} \ll B \ll \sigma^{-O(1)}$ and $1 \leq Q \ll \sigma^{-O(1)}$, and a set*

$$\Gamma \subseteq \{(a,q) : q \leq Q, 1 \leq a \leq q, \gcd(a,q) = 1\}$$

such that:

(i) There is a choice of frequencies $\gamma_{a,q} \in \mathfrak{M}_{a,q}(N, \kappa/\sigma)$ for each $(a,q) \in \Gamma$ for which

$$\sum_{(a,q)\in\Gamma} |\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma_{a,q})| \gg \frac{B|A|Q^{1/2}}{(\log N)^{1/4}(\log(1/\sigma))^2};$$

(ii) Setting $g = \mathbf{1}_A - \sigma\mathbf{1}_{[N]}$, we have, for each $(a,q) \in \Gamma$,

$$\int_{\mathfrak{M}_{a,q}(N,\kappa/\sigma)} |\widehat{g}(\gamma)|^2 d\gamma \gg \frac{\sigma|A|}{B^2}.$$

Proof. 设 $M = \left\lfloor (N/b_d)^{1/k} \right\rfloor$。对于 $\gamma \in \mathbb{T}$，定义

$$S(\gamma) = \frac{1}{wN} \sum_{\substack{m=1 \\ m \in W_d(Y)}}^{M} h'_d(m) e(h_d(m)\gamma).$$

由正交性，我们进一步观察到，

$$\int_{\mathbb{T}} \widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)\overline{\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)} S(\gamma) d\gamma = \frac{1}{wN} \sum_{\substack{1 \leq m \leq M \\ m \in W_d(Y) \\ a,b \in A \\ b-a = h_d(m)}} h'_d(m).$$

假设 A 是 h_d-自由的，这意味着只有满足 $h_d(m) = 0$（从而也满足 $a = b$）的项才会对上述求和作出贡献。注意， $h_d(m) = 0$ 根据 h_d 的定义意味着 $h(r_d + dm) = 0$；由于 h 只有有限个零点，我们必有 $r_d + dm \ll_h 1$；又由于根据假设 $|r_d| < d$，因此可得 $m \ll_h 1$。由于 $b_d \leq d^k < N^{k\rho}$，上述求和中的每一项 $h'_d(m)$ 的贡献至多为 $O_h(N^{k\rho})$，因此

$$\int_{\mathbb{T}} \widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)\overline{\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)} S(\gamma) d\gamma = \frac{1}{wN} \sum_{\substack{1 \leq m \leq M \\ m \in W_d(Y) \\ a,b \in A \\ b-a = h_d(m)}} h'_d(m) = O_h\left(\frac{1}{wN^{1-k\rho}}\right). \tag{5.2}$$

回顾一下， $g = \mathbf{1}_A - \sigma\mathbf{1}_{[N]}$。我们断言

$$\int_{\mathbb{T}} |\widehat{g}(\gamma)\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)S(\gamma)|d\gamma \gg \sigma|A|. \tag{5.3}$$

为说明这一点，我们根据 $|A\cap[N/2,N]| > |A|/2$ $|A\cap[1,N/2]| > |A|/2$ 的情况分成两种情形。假设前者成立，我们利用 (5.2) 推导出

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{T}} \widehat{g}(\gamma)\overline{\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)}S(\gamma)d\gamma &= \sigma\int_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_{[N]}(\gamma)\overline{\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)}S(\gamma)d\gamma - O\left(\frac{1}{wN^{1-k\rho}}\right)\\ &= \frac{\sigma}{wN}\sum_{\substack{m\in W_d(Y)\cap[1,M]\\ a\in[N],b\in A\\ a-b+h_d(m)=0}} h_d'(m) - O\left(\frac{1}{wN^{1-k\rho}}\right).\end{aligned}$$

现在我们估计上述求和中满足 $h_d'(m) < 0$ 的那些 m 值所作的贡献。回顾 h_d 的定义，可知

$$h_d'(m) = \frac{d}{\lambda(d)}h'(r_d + dm).$$

由于 $\lambda(d) \geq d$, $|r_d| < d$，且假设 h_d 的首项系数为正，条件 $h_d'(m) < 0$ 蕴含 $m \ll_h 1$，并且还蕴含 $|h_d'(m)| \ll_h 1$。因此，满足 $h_d'(m) < 0$ 的 m 值至多使上述求和减少 $O_h(|A|) = O_h(\sigma N)$，于是

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{T}} \widehat{g}(\gamma)\overline{\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)}S(\gamma)d\gamma &= \frac{\sigma}{wN}\sum_{\substack{m\in W_d(Y)\cap[1,M]\\ a\in[N],b\in A\\ a-b+h_d(m)=0\\ h_d'(m)>0}} h_d'(m) - O\left(\frac{\sigma^2}{w}\right) - O\left(\frac{1}{wN^{1-k\rho}}\right)\\ &= \frac{\sigma}{wN}\sum_{\substack{m\in W_d(Y)\cap[1,M]\\ a\in[N],b\in A\\ a-b+h_d(m)=0\\ h_d'(m)\geq 0}} h_d'(m) - O\left(\frac{\sigma^2}{w}\right).\end{aligned}$$

现在所有求和项均非负，并且显然，若 $M \ll m \ll M$ 且 $b \in A\cap[N/2,N]$，则对于某个隐含常数，$b - h_d(m) \in [N]$。这意味着至少有 $w\sigma|A|M$ 个求和项为正（这里用到了引理 3.6），且每一项的贡献为 $\gg b_d M^{k-1}$。因此，

$$-\int_{\mathbb{T}} \widehat{g}(\gamma)\overline{\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)}S(\gamma)d\gamma \gg \frac{1}{wN}\cdot w\sigma|A|M\cdot b_d M^{k-1} - O\left(\frac{\sigma^2}{w}\right) \gg \sigma|A|.$$

这就证明了 (5.3)，前提是 $|A\cap[N/2,N]| > |A|/2$。若 $|A\cap[1,N/2]| > |A|/2$，则以完全类似的方式可推得

$$-\int_{\mathbb{T}} \widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)\overline{\widehat{g}(\gamma)}S(\gamma)d\gamma \geq \frac{\sigma}{wN}\sum_{\substack{m\in W_d(Y)\cap[1,M]\\ a\in A,b\in[N]\\ a-b+h_d(m)=0\\ h_d'(m)\geq 0}} h_d'(m) - O\left(\frac{\sigma^2}{w}\right).$$

现在，若对于某个隐含常数的取值， $M \ll m \ll M$ 且 $a \in A\cap[1,N/2]$，则 $a + h_d(m) \in [N]$，并且如前所述，我们可推出

$$-\int_{\mathbb{T}} \widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)\overline{\widehat{g}(\gamma)}S(\gamma)d\gamma \gg \sigma|A|,$$

从而在这种情况下也证明了 (5.3)。

现在我们断言，存在一个常数 $\kappa > 0$，使得若只在主弧 $\mathfrak{M}(N,\kappa/\sigma,\kappa/\sigma^{k+1})$ 上积分，(5.3) 仍然成立；也就是说，存在这样的常数使得

$$\int_{\mathfrak{M}(N,\kappa/\sigma,\kappa/\sigma^{k+1})} |\widehat{g}(\gamma)\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)S(\gamma)|d\gamma \gg \sigma|A|. \tag{5.4}$$

为证明这一点，任取正实数 r，使得 $2r$ 小于 (5.3) 中隐含常数的大小。应用引理 4.4，得到 $\kappa > 0$，使得

$$|S(\gamma)| \le r\sigma \text{ whenever } \gamma \in \mathfrak{m}\left(N, \frac{\kappa}{\sigma}, \frac{\kappa}{\sigma^{k+1}}\right).$$

这意味着

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{m}(N,\kappa/\sigma,\kappa/\sigma^{k+1})} |\widehat{g}(\gamma)\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)S(\gamma)|d\gamma &\le r\sigma \int_{\mathbb{T}} |\widehat{g}(\gamma)\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)|d\gamma \\ &\le r\sigma\left(\int_{\mathbb{T}} |\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)|^2 d\gamma + \sigma\int_{\mathbb{T}} |\widehat{\mathbf{1}_{[N]}}(\gamma)\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)|d\gamma\right).\end{aligned}$$

由正交性可得

$$\int_{\mathbb{T}} |\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)|^2 d\gamma = |A|.$$

另一方面，由柯西–施瓦茨不等式和正交性可得，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}} |\widehat{\mathbf{1}_{[N]}}(\gamma)\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)|d\gamma \left(\int_{\mathbb{T}} |\widehat{\mathbf{1}_{[N]}}(\gamma)|^2 d\gamma\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{T}} |\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)|^2 d\gamma\right)^{1/2} \\ &\qquad = (|A|N)^{1/2} \le N.\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\int_{\mathfrak{m}(N,\kappa/\sigma,\kappa/\sigma^{k+1})} |\widehat{g}(\gamma)\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)S(\gamma)|d\gamma \le 2r\sigma|A|,$$

结合 (5.3)，并回顾 r 的选取，可得 (5.4)。

现在，(5.4) 可改写为

$$\sum_{q\le\kappa/\sigma^{k+1}} \sum_{1\le a\le q}{}^{*} \int_{\mathfrak{M}_{a,q}(N,\kappa/\sigma)} |\widehat{g}(\gamma)\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)S(\gamma)|d\gamma \gg \sigma|A|$$

由引理 4.6 的第二部分和柯西–施瓦茨不等式可知，

$$\sum_{q\le\kappa/\sigma^{k+1}} \sum_{1\le a\le q}{}^{*} \frac{1}{q^{1/2}} \left(\max_{\gamma\in\mathfrak{M}_{a,q}(N,\kappa/\sigma)} \widehat{\mathbf{1}_A(\gamma)}\right) \left(\int_{\mathfrak{M}_{a,q}(N,\kappa/\sigma)} |\widehat{g}(\gamma)|^2 d\gamma\right)^{1/2} \gg \frac{\sigma|A|N^{1/2}}{(\log N)^{1/4}}. \tag{5.5}$$

注意，对于满足以下条件的数对 (a,q)，

$$\int_{\mathfrak{M}_{a,q}(N,\kappa/\sigma)} |\widehat{g}(\gamma)|^2 d\gamma \le \frac{\sigma^{3k+5}N}{\log N}$$

其贡献至多为

$$\sum_{q\le\kappa/\sigma^{k+1}} q^{1/2}|A|\frac{\sigma^{(3k+5)/2}N^{1/2}}{(\log N)^{1/2}} \le \left(\frac{\kappa}{\sigma^{k+1}}\right)^{3/2}|A|\frac{\sigma^{(3k+5)/2}N^{1/2}}{(\log N)^{1/2}} \ll \frac{\sigma|A|N^{1/2}}{(\log N)^{1/2}}.$$

这里用到了平凡不等式 $\widehat{\mathbf{1}_A\ \gamma}(\,) \le |A|$。由此可知，(5.5) 的主要贡献来自集合中的数对 (a,q)，

$$\Omega = \left\{(a,q) : 1 \le q \le \kappa/\sigma^{k+1}, 1 \le a \le q, \gcd(a,q) = 1, \int_{\mathfrak{M}_{a,q}(N,\kappa/\sigma)} |\widehat{g}(\gamma)|^2 d\gamma > \frac{\sigma^{3k+5}N}{\log N}\right\},$$

换言之，

$$\sum_{(a,q)\in\Omega} \frac{1}{q^{1/2}} \left(\max_{\gamma\in\mathfrak{M}_{a,q}(N,\kappa/\sigma)} \widehat{\mathbf{1}_A(\gamma)}\right) \left(\int_{\mathfrak{M}_{a,q}(N,\kappa/\sigma)} |\widehat{g}(\gamma)|^2 d\gamma\right)^{1/2} \gg \frac{\sigma|A|N^{1/2}}{(\log N)^{1/4}}.$$

注意，对每个 $\gamma \in \mathbb{T}$，都有 $|\widehat{g}(\gamma)| \le 2N$，并且由于弧 $\mathfrak{M}_{a,q}(N,\kappa/\sigma)$ 的长度为 $O(1/\sigma)$，我们得到

$$\frac{\sigma^{(3k+5)/2}N^{1/2}}{(\log N)^{1/2}} < \left(\int_{\mathfrak{M}_{a,q}(N,\kappa/\sigma)} |\widehat{g}(\gamma)|^2 d\gamma\right)^{1/2} \ll \frac{N^{1/2}}{\sigma^{1/2}} \quad \text{for every } (a,q) \in \Omega.$$

由于 $\log N = O(1/\sigma)$，由前述不等式确定的范围可以覆盖为$O(\log(1/\sigma))$个形如 $[\sigma N^{1/2}/B, 2\sigma N^{1/2}/B]$ 的区间，其中某些 B 值满足 $\sigma^{O(1)} \ll B \ll \sigma^{-O(1)}$。类似地，区间 $[1, \kappa/\sigma^{k+1}]$ 可以覆盖为 $O(\log(1/\sigma))$ 个形如

$[Q, 2Q]$，其中 $Q \ll \sigma^{-O(1)}$。根据抽屉原理，可知存在一个子集 $\Gamma \subseteq \Omega$ 以及满足所述性质的 B、Q 值，使得如果 $(a,q) \in \Gamma$，那么 $Q \le q \le 2Q$ 并且

$$\sigma N^{1/2}/B \le \left(\int_{\mathfrak{M}_{a,q}(N,\kappa/\sigma)} |\widehat{g}(\gamma)|^2 d\gamma\right)^{1/2} \le 2\sigma N^{1/2}/B,$$

而且

$$\sum_{(a,q)\in\Gamma} \frac{1}{q^{1/2}} \left(\max_{\gamma\in\mathfrak{M}_{a,q}(N,\kappa/\sigma)} \widehat{\mathbf{1}_A(\gamma)}\right) \left(\int_{\mathfrak{M}_{a,q}(N,\kappa/\sigma)} |\widehat{g}(\gamma)|^2 d\gamma\right)^{1/2} \gg \frac{\sigma|A|N^{1/2}}{(\log N)^{1/4}(\log(1/\sigma))^2}.$$

将前两个不等式结合起来可推出

$$\frac{1}{Q^{1/2}} \sum_{(a,q)\in\Gamma} \left(\max_{\gamma\in\mathfrak{M}_{a,q}(N,\kappa/\sigma)} \widehat{\mathbf{1}_A(\gamma)}\right) \frac{\sigma N^{1/2}}{B} \gg \frac{\sigma|A|N^{1/2}}{(\log N)^{1/4}(\log(1/\sigma))^2},$$

这化简后即为期望结果。 □

我们现在将推导出：如果引理 5.1 的密度增量条件不成立，也就是说，集合 $\widehat{g}$ 中分母较小的有理数附近的 L^2 质量非常小，那么引理 5.2 中构造的集合 Γ 中，满足给定 q值的数对 (a,q) 很少。

引理 5.3. *Keep the assumptions of Lemma 5.2, and let $\nu \ge N^{-1/2}$. Then one of the followingholds:*

(i) There exists $N^* \gg \nu\sigma^{O(1)}N$, an integer $q \ll \sigma^{-O(1)}$ and a h_{qd}-free subset $A^* \subseteq [N^*]$ withdensity

$$\sigma^* \ge \left(1 + \frac{\nu}{73}\right)\sigma;$$

(ii) There exist B, Q and a set Γ as in the conclusion of Lemma 5.2 with the additional propertythat, for every $q \le Q$,

$$|\{a : (a,q) \in \Gamma\}| \ll \nu B^2.$$

Proof. 我们假设条件 (i) 不成立；注意，由于 $\lambda(q) \le q^d$，当 $q, K \ll \sigma^{-O(1)}$ 时，条件$\nu\sigma N \gg K\lambda(q)$ 自动成立，因此引理 5.1 表明，对于这样的 q 和 K，

$$\sum_{\substack{1\le a\le q\\(a,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}_{a,q}(N,K)} |\widehat{g}(\gamma)|^2 \, d\gamma < \nu\sigma|A|.$$

现在我们考虑引理 5.2 结论中的值 B 和 Q 以及集合 Γ，对于一个$q \le Q$ 的值，我们将不等式

$$\int_{\mathfrak{M}_{a,q}(N,\kappa/\sigma)} |\widehat{g}(\gamma)|^2 d\gamma \gg \frac{\sigma|A|}{B^2}$$

对所有满足 $(a,q) \in \Gamma$ 的 a 值求和。由此得到

$$|\{a : (a,q) \in \Gamma\}| \frac{\sigma|A|}{B^2} \ll \nu\sigma|A|,$$

化简后即为 (ii)。 □

6. Additive Energy bounds and end of the proof

我们引用 [2]，中的以下结果，它基本上说明：集合 A 的傅里叶系数较大的频率所构成的集合具有较高的加性能量。

引理 6.1. *Let $A \subseteq [N]$ be a set of density $\sigma = |A|/N$. Let set $S \subseteq \mathbb{T}$ be a finite set. Then, for every $m \ge 1$,*

$$\sum_{\gamma\in S} |\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)| \ll |A|\sigma^{-1/2m} E_{2m}(S; 1/2N)^{1/2m},$$

where we define

$$E_{2m}(S;\delta) = |\{(b_1,\dots,b_{2m}) \in S^{2m} : \|b_1 + \cdots + b_m - b_{m+1} - \cdots - b_{2m}\| \le \delta\}|.$$

Proof. 这就是（[2], 引理7），但为完整起见，我们给出证明。对于每个 γ ，令 ω_γ 为一个绝对值为1的复数，使得 $\omega_\gamma \widehat{\mathbf{1}_A\ \gamma}(\,) = |\widehat{\mathbf{1}_A\ \gamma}(\,)|$。根据H¨ölder不等式，

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in S}|\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma)| &= \sum_{\gamma in S}\omega_\gamma\sum_{a\in A}e(a\gamma)\\ &\leq |A|^{1-1/2m}\left(\sum_{a\in A}\left|\sum_{\gamma\in S}\omega_\gamma e(a\gamma)\right|^{2m}\right)^{1/2m}.\end{aligned}$$

现在考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 ψ $\psi(t) = \sin(\pi t)^2/(\pi t)^2$, ，其傅里叶变换 $\widehat{\psi}$ 满足

$$\widehat{\psi}(\xi) = \begin{cases}1-|\xi| & \text{if } |\xi|\leq 1\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

由于 ψ 非负，且当 $t\in[-1/2,1/2]$ 时 $\psi(t)\gg 1$ ，因此可得

$$\begin{aligned}\sum_{a\in A}\left|\sum_{\gamma\in S}\omega_\gamma e(a\gamma)\right|^{2m} &\ll \sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi\left(\frac{n}{2N}\right)\left|\sum_{\gamma\in S}\omega_\gamma e(a\gamma)\right|^{2m}\\ &\ll \sum_{(b_1,\ldots,b_{2m})\in S^{2m}}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi\left(\frac{n}{2N}\right)e\left(n(b_1+\cdots+b_m-b_{m+1}-\cdots-b_{2m})\right)\right|.\end{aligned}$$

现在我们对内层求和应用泊松求和公式（[4], 定理4.4）；结合 ψ 的支撑为 $[-1,1]$ 这一事实，可知上式为 $\widehat{\ }$

$$\begin{aligned}&\ll \sum_{(b_1,\ldots,b_{2m})\in S^{2m}}N\left|\sum_{h\in\mathbb{Z}}\widehat{\psi}\left(2N(b_1+\cdots+b_m-b_{m+1}-\cdots-b_{2m})\right)\right|\\ &\ll N|\{(b_1,\ldots,b_{2m})\in S^{2m}:\|b_1+\cdots+b_m-b_{m+1}-\cdots-b_{2m}\|\leq 1/2N\}|.\end{aligned}$$

将其代入我们对 H¨older 不等式的应用中，即完成证明。 □

如果大的傅里叶系数出现在分母不同的有理数处，那么引理 6.1 与 Bloom和Maynard 的以下加法能量界会产生一些冲突；根据引理 5.3，我们知道，在缺乏良好密度增量的情况下，确实会出现这种情形。

引理 6.2. *Let $Q\geq 4$ and $n\geq 2$. Let S be a set of length $1/8$ rational frequencies in $\mathbb{T}$ with denominator at most Q contained in an interval of length $1/8$ and assume that S contains at most n frequencies with denominator q for every $q\leq Q$. Then we have*

$$E_{2m}(S;0)\leq(\log Q)^{C^m}(Qn)^m$$

for some absolute constant C.

Proof. 设 S' 是实数轴上集合 S中各元素的代表元组成的集合，且包含于一个长度为 $1/8m$的区间内。数量 $E_{2m}(S;0)$ 统计满足下式的 $2m$元组 $(b_1,\ldots,b_{2m})$: $\in S'^{2m}$

$$b_1+\cdots+b_m-b_{m+1}-\cdots-b_{2m}\in\mathbb{Z}.$$

但上述表达式属于 $[-1/4,1/4]$，因此若它是整数，就必定等于 0。因此，由 [2]的定理 2 可得结论。□

现在我们可以陈述并证明下一个结果。该结果基本上决定了先前的加性能量界所能带来的密度增量的质量。从思路上看，它与 [2], 的引理8相似；不同之处源于我们对引理 5.2(i) 中的和所得到的界稍差（Bloom和Maynard设法避免了分母中出现 $\log N$ 的幂）。然而，以参数 ν衡量的密度增量质量虽略有下降，但最终界的质量并未因此受到影响。

引理 6.3. *Let $N\gg_h 1$, and suppose as usual that $d\leq N^\rho$. Then, for some absolute constant$c>0$, if we set*

$$\nu=\frac{1}{(\log N)^{1/2}}\exp\left(-c\frac{\log(1/\sigma)}{\log\log(1/\sigma)}\right),$$

then there exist $N^* \gg \sigma^{O(1)}N/(\log N)^{1/2}$, *an integer* $q \ll \sigma^{-O(1)}$ *and a* h_{qd}*-free subset* $A^* \subseteq [N^*]$ *with density*

$$\sigma^* \geq \left(1 + \frac{\nu}{73}\right)\sigma.$$

Proof. 令 $m \geq 2$ 为稍后选取的一个整数。我们应用引理 5.3；目标是证明，对于所给出的 ν 取值，情形 (i) 必定成立。假设它不成立；注意，由抽屉原理可知，存在一个子集 $\Gamma' \subseteq \Gamma$，使得频率 $\gamma_{a,\ q}$ 对于 $(a,q) \in \Gamma'$落在一个长度为 $1/8m$ 的区间内，并且

$$\sum_{(a,q)\in\Gamma} |\widehat{\mathbf{1}_A}(\gamma_{a,q})| \gg \frac{B|A|Q^{1/2}}{m(\log N)^{1/4}(\log(1/\sigma))^2}.$$

令 $S = \{\gamma_{a,q} : (a,q) \in \Gamma'\}$，并令 $T = \{a/q : (a,q) \in \Gamma\}$。由引理 6.1 可知

$$\frac{B|A|Q^{1/2}}{m(\log N)^{1/4}(\log(1/\sigma))^2} \ll |A|\sigma^{-1/2m}E_{2m}(S;1/2N)^{1/2m}.$$

假设 $(a_1,q_1)\ldots,(a_{2m},q_{2m})$ 满足

$$\|\gamma_{a_1,q_1} + \cdots + \gamma_{a_m,q_m} - \gamma_{a_{m+1},q_{m+1}} - \cdots - \gamma_{a_{2m},q_{2m}}\| \leq \frac{1}{2N}. \tag{6.1}$$

由于 $\gamma_{a,\ q}$ 与 a/q 的差至多为 $\kappa/\sigma N$，因此

$$\left\|\frac{a_1}{q_1} + \cdots + \frac{a_m}{q_m} - \frac{a_{m+1}}{q_{m+1}} - \cdots - \frac{a_{2m}}{q_{2m}}\right\| \leq \frac{1}{2N} + \frac{\kappa m}{\sigma N} \ll \frac{m}{\sigma N}.$$

另一方面，上述和若非零，其分母至多为 Q^{2m}。由于 $Q \ll \sigma^{-O(1)}$，因此可推出 $\sigma N \ll m\sigma^{-O(m)}$；但正如我们将看到的，最终选取的 m 将满足$m \ll \log\log(1/\sigma)$，因此这将与我们关于 N 和 σ 相对大小的既定假设相矛盾。由此可知，只要 (6.1) 成立，就有

$$\frac{a_1}{q_1} + \cdots + \frac{a_m}{q_m} - \frac{a_{m+1}}{q_{m+1}} - \cdots - \frac{a_{2m}}{q_{2m}} = 0.$$

因此 $E_{2m}(S;\ 1/2N) \leq E_{2m}(T;0)$，由此可得

$$\frac{B|A|Q^{1/2}}{m(\log N)^{1/4}(\log(1/\sigma))^2} \ll |A|\sigma^{-1/2m}E_{2m}(T;0)^{1/2m}.$$

现在我们应用引理 6.2 来界定加性能量。注意，根据引理 5.3 的结论，我们可以取 $n \ll \nu B^2$。由此可得

$$\frac{B|A|Q^{1/2}}{m(\log N)^{1/4}(\log(1/\sigma))^2} \ll |A|\sigma^{-1/2m}E_{2m}(T;0)^{1/2m}1 \leq |A|\sigma^{-1/2m}(\log Q)^{C^m/2m}\nu^{1/2}Q^{1/2}B,$$

现在——这正是我们需要在指数和中获得平方根抵消的关键原因！——我们可以约去两边的 Q 次幂（以及其他一些因子），从而得到

$$\nu \gg \frac{\sigma^{1/m}}{(\log N)^{1/2}m^2\log(1/\sigma)^4(\log Q)^{C^m/m}}.$$

回想一下 $Q \ll \sigma^{-O(1)}$，我们看到，如果 $c' > 0$ 足够小，那么令 $m = \lceil c'\log\log(1/\sigma)\rceil$，便可得到

$$\nu \gg \frac{1}{(\log N)^{1/2}}\exp\left(-O\left(\frac{\log(1/\sigma)}{\log\log(1/\sigma)}\right)\right).$$

这意味着，如果 c 足够小，引理 5.3 中的情形 (ii) 与给定的 ν 取值不相容，因此必须是情形 (i) 成立，而这正是我们想要的。□

We 现在应用迭代密度增量论证，推导出我们的主要结果——定理 1 .2.

Proof. 假设 $A \subseteq [N]$ 是 h-自由的，其密度为 $\sigma = |A|/N$。不妨设 $N \gg_h 1$。令

$$\nu = \frac{1}{(\log N)^{1/2}}\exp\left(-c\frac{\log(1/\sigma)}{\log\log(1/\sigma)}\right),$$

由引理 6.3 给出。迭代应用引理 6.3 t 次可得到：

- 一列正整数 N_0、N_1、.....、N_t，满足 $N_0 = N$ 且 $N_{i+1} \geq \sigma^{O_{(1)}}N_i/\ (\log\ N)^{\ 1/2}$；
- 一个正整数序列 $d_0,\ldots,d_t$，满足 $d_0 = 1$ 且 $d_{i+1} \leq \sigma^{-O_{(1)}}d_i$；

- 一个子集序列 $A_i \subseteq [N_i]$，满足 A_i 是 h_{d_i}-自由的，且密度为 σ_i，其中

$$\sigma_{i+1} \geq \left(1 + \frac{\nu}{73}\right)\sigma_i.$$

我们进行这一迭代，直到找到 t 使得 $N_t < N^{1/2}$。在此之前，引理 6.3 的条件始终成立；为便于阐述，我们将把验证技术条件 $d_t \leq N^{\rho}$ 在该情形下仍成立的工作留到证明末尾。

现在我们注意到

$$1 \geq \sigma_t \geq \left(1 + \frac{\nu}{73}\right)^t \sigma,$$

由此可得

$$t \leq \frac{\log(1/\sigma)}{\log(1+\nu/73)} \ll \nu^{-1}\log(1/\sigma). \tag{6.2}$$

另一方面，我们有

$$N^{1/2} > N_t \geq \frac{\sigma^{O(t)}}{(\log N)^{t/2}}N,$$

这意味着，约去 $N^{1/2}$ 并取对数后，

$$\log N \ll t\log(1/\sigma) + t\log\log N.$$

现在利用 (6.2) 给出的 t 的界，可得

$$\log N \ll \nu^{-1}\log(1/\sigma)^2 + \nu^{-1}\log(1/\sigma)\log\log N,$$

由此

$$\log N \ll \nu^{-1}\log(1/\sigma)^2 \text{ or } \log N \ll \nu^{-1}\log(1/\sigma)\log\log N. \tag{6.3}$$

如果前一种情况成立，那么展开 ν 的定义可得

$$(\log N)^{1/2} \ll \exp\left(c\frac{\log(1/\sigma)}{\log\log(1/\sigma)}\right)\log(1/\sigma)^2$$

并对两边取对数，得到

$$\log\log N \ll \frac{\log(1/\sigma)}{\log\log(1/\sigma)} + \log\log(1/\sigma) \ll \frac{\log(1/\sigma)}{\log\log(1/\sigma)}.$$

容易看出，上式蕴含 $\log(1/\sigma) \gg \log\log N \cdot \log\log\log N$，这正是期望结果的另一种表述。

如果另一方面 另一方面，若后者在 (6.3) 中成立，那么同样展开 ν 的定义可得

$$(\log N)^{1/2} \ll \exp\left(c\frac{\log(1/\sigma)}{\log\log(1/\sigma)}\right)\log(1/\sigma)\log\log N,$$

取对数可得

$$\log\log N \ll \frac{\log(1/\sigma)}{\log\log(1/\sigma)} + \log\log(1/\sigma) + \log\log\log N,$$

又由于 $\log\log\log N = o(\log\log N)$，因此可得

$$\log\log N \ll \frac{\log(1/\sigma)}{\log\log(1/\sigma)},$$

正如我们所见，这就推出了结论。

只需验证 $d_t \leq N^{\rho}$；为此，只需假设 $\sigma \geq (\log N)^{-\log\log\log N/4c}$，其中 c 是引理 6.3 陈述中的常数。在此假设下，显然有

$$\frac{\log(1/\sigma)}{\log\log(1/\sigma)} \leq \frac{1}{4c}\log\log N$$

（如果 N 足够大）。现在注意到 $d_t \leq \sigma^{-O(t)}$，并且

$$\begin{aligned} t &\leq (\log N)^{1/2} \exp\left(c\frac{\log(1/\sigma)}{\log\log(1/\sigma)}\right)\log(1/\sigma) \\ &\leq (\log N)^{1/2}\exp\left(\frac{1}{4}\log\log N\right)\log(1/\sigma) \\ &= (\log N)^{3/4}\log(1/\sigma) \\ &\ll (\log N)^{3/4}\log\log N\log\log\log N. \end{aligned}$$

这意味着

$$d_t \leq (\log N)^{O((\log N)^{3/4}\log\log N(\log\log\log N)^2)} = \exp(O((\log N)^{3/4}(\log\log N)^2(\log\log\log N)^2)),$$

并且当 N 足够大时，上述值小于 N^ρ □

7. Acknowledgements

作者获得了华威大学工程与自然科学研究委员会博士培训合作项目的资助。特别感谢 Sam Chow 将这个问题介绍给作者。

References

[1] A. Balog, J. Pelik´an, J. Pintz, E. Szemer´edi, *Difference sets without κ-th powers*, 《匈牙利数学学报》65 (2) 165-187 (1994) [2] T. Bloom 和 J. Maynard, *A new upper bound for sets with no square differences* **158** , 1777 1798 2022
《组合数学》- ( ) [3] H. Furstenberg,
Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progres- , 《数学分析杂志》- ( )
sions **71** 204 256 1977
[4] *Analytic Number Theory* **53** H. Iwaniec, E. Kowalski, , 学术报告出版物 T. Kamae,
[5] ` *van der Corput's difference theorem*
M. Mendes France, ,《以色列数学杂志》31 (3-4) 335-342 (1978) [6] J. Lucier, *Intersective sets given by a polynomial*, 《算术学报》123 (1) 57-95 (2006)[7] N. Lyall, `A. Magyar, *Polynomial configurations in difference sets*, 《数论杂志》129 439-450 (2009) [8] J. Pintz, W. L. Steiger, E. Szemer´edi, *On sets of natural numbers whose difference set contains no squares*, 《伦敦数学会杂志》37 219-231 (1988) [9] A. Rice, *A maximal extension of the best-known bounds for the Furstenberg-Sárközy Theorem*, 《算术学报》187 1-41 (2019)
[10] *Improvements and extensions of two theorems of Sárközy* 2012 A. Rice, , 博士论文,
[11] ´ ¨ *On difference sets of sequences of integers I* **31** 1 2 125 149 1978
佐治亚大学, A. Sarkozy, ,《匈牙利数学学报》(-) - ( )

Mathematics Institute、 Zeeman Building、 University of Warwick、 Coventry CV4 7AL
Email address: Nuno.Arala-Santos@warwick.ac.uk