arXiv:2303.03377v2 [math.AG] 3 Nov 2023

χ体积函数在阿代尔曲线上的可微性

ANTOINE SÉDILLOT

摘要。本文证明了阿代尔曲线上阿代尔线丛丰锥上的 χ-体积函数具有可微性。这一结果由 Witt Nyström 在 [Nys14] 中可微性结果的一个非阿基米德对应结果推得。作为应用，我们给出了 [CLT09] 中对数等分布结果在阿代尔曲线情形下的对应结果。

目录

1. 引言 1 2. 预备知识 6 3. 局部可微性 19 4. 阿代尔曲线上的可微性 29 5. 阿代尔曲线上的对数等分布 38 参考文献 41

1. 引言

1.1. 动机。 在代数几何中，一个基本问题是研究射影代数簇上线丛的分次线性级数。设 k 为域， X 为 k上的射影簇， L 为可逆的$\mathcal{O}_X$-模。对于所有 $n \in \mathbb{N}$，记

$$h^0(X, nL) := \dim_k(H^0(X, nL)).$$

在此背景下，([Laz04], 例 1.2.20) 给出了上界 $h^0(X, nL) = O(n^d)$，其中$d = \dim(X)$。在充足情形下，渐近黎曼–罗赫定理给出渐近估计

$$h^0(X, nL) = \frac{\deg_L(X)}{d!} n^d + O(n^{d-1}).$$

因此，自然会研究满足以下条件的可逆$\mathcal{O}_X$-模 L

$$\mathrm{vol}(L) := \limsup_{n \to +\infty} \frac{h^0(X, nL)}{n^d/d!} > 0.$$

这些线丛称为大。

Okounkov 体理论由 Okounkov 在 [Oko96] 中提出，随后由 Lazarsfeld 和 Mustată 在 [LM09] 中以及 Kaveh 和 Khovanskii 在 [KK12], 中各自系统地发展起来。该理论从凸几何的角度阐释了射影簇上一条线丛截面代数的性质

日期：2023年11月6日。

。设 L 是射影簇 X 上的一个大线丛，该簇的维数为 d。那么，可以在 $\mathbb{R}^d$中构造一个凸体，记作 $\Delta(L)$，它编码了关于 L的大量信息。 [LM09] 中的定理 A 给出了如下等式

$$\mathrm{vol}(L) = d!\,\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Delta(L)).$$

该体积函数在 X ([BFJ09], [LM09]) 的大锥上连续，甚至可微。在本文中，我们研究基域带有附加度量数据时该体积函数的变体。

在 Arakelov几何中，射影簇的对应物是算术射影簇，即一个在 Spec($\mathbb{Z}$) 上正则、射影且平坦的整概形 $\mathcal{X}$，其 dim(X) $=:$ $d+1$ 线丛的对应物是厄米线丛，即数据$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}\ \varphi)$，其中 $\mathcal{L}$ 是一个可逆的 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-模，而 φ 是 $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ 的复解析化上的一个光滑（厄米）度量。对于所有 $n \in \mathbb{N}$，对于所有 $s \in H^0(\mathcal{X}\ n\mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \subseteq H^0(\mathcal{X}_{\mathbb{C}}, n\mathcal{L}_{\mathbb{C}})$，令

$$\|s\|_{n\varphi} := \sup_{x \in \mathcal{X}_{\mathbb{C}}} |s|_{n\varphi}(x).$$

于是 $\|\cdot\|_{n\varphi}$是 $H^0(\mathcal{X}\ n\mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$上的范数，并且 $(H^0(\mathcal{X}\ n\mathcal{L})\ \|\cdot\|_{n\varphi})$ 是一个欧几里得格。若我们在 $H^0(\mathcal{X}\ n\mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$上固定一个哈尔测度 vol，则 $(H^0(\mathcal{X}\ n\mathcal{L})\ \|\cdot\|_{n\varphi})$ 的算术欧拉–庞加莱示性数为

$$\chi(H^0(\mathcal{X}, n\mathcal{L}), \|\cdot\|_{n\varphi}) := \ln \frac{\mathrm{vol}\{s \in H^0(\mathcal{X}, n\mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} : \|s\|_{n\varphi} \leq 1\}}{\mathrm{covol}(H^0(\mathcal{X}, n\mathcal{L}), \|\cdot\|_{n\varphi})}.$$

算术 Hilbert-Samuel 定理指出，若$\overline{\mathcal{L}}$ 相对丰沛，且 φ 是半正度量，则数列

$$\left(\frac{\chi(H^0(\mathcal{X}, n\mathcal{L}), \|\cdot\|_{n\varphi})}{n^{d+1}/(d+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

收敛到算术交乘积 $(\overline{\mathcal{L}}^{d+1})$，其定义见 [GS90]。一般而言，量

$$\widehat{\mathrm{vol}}_{\chi}(\overline{\mathcal{L}}) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\chi(H^0(\mathcal{X}, n\mathcal{L}), \|\cdot\|_{n\varphi})}{n^{d+1}/(d+1)!}$$

称为$\overline{\mathcal{L}}$的 χ-体积。在文献中， χ-体积也称为“截面容量”[Rum00]。它与$\overline{\mathcal{L}}$的算术体积相关，后者定义为

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathcal{L}}) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\widehat{h}^0(n\overline{\mathcal{L}})}{n^{d+1}/(d+1)!},$$

其中 $\widehat{h}^0(n\overline{\mathcal{L}}) := \ln \#\ \{s \in H^0(\mathcal{X}\ n\mathcal{L}) :\ \|s\|_{n\varphi} \leq 1\}$。Moriwaki 在 [Mor06] 中证明了算术体积的连续性，Ikoma 在 [Iko13]中证明了 χ-体积的连续性。借助 Yuan [Yua08], 的 Siu 不等式的算术版本，Chen 在 [Che11]中证明了 vol 的可微性。我们还提及， [Iko18]研究了算术体积的一种变体的可微性。众所周知，等分布问题是算术体积函数可微性的一个重要应用 [SUZ97], [Yua08], [CLT09]。

最近，Chen 和 Moriwaki 在 [CM19]中发展了任意可数域上的阿拉凯洛夫理论。设 K 为一个域。K 上的阿代尔结构是以下数据

((Ω，$\mathcal{A}$ ν) ϕ)，其中 (Ω，$\mathcal{A}$ ν) 是一个测度空间，而 $\phi=(|\cdot|_\omega)_{\omega\in\Omega}$ 是 K 上满足以下条件的一族绝对值

$$\forall a\in K^\times,\quad (\omega\in\Omega)\mapsto \ln|a|_\omega$$

是$\mathcal{A}$-可测且 ν-可积的。在这种情况下，我们称 S:=(K，(Ω、$\mathcal{A}$ ν) ϕ)为一条阿代尔曲线；若乘积公式

$$\forall a\in K^\times,\quad \int_\Omega \ln|a|_\omega\ \nu(\mathrm{d}\omega)=0$$

成立。在此背景下，向量丛的对应对象是S上的所谓阿代尔向量丛：它由数据 E:=(E，ξ)给出，其中 E是 K上的有限秩向量空间，而 $\xi=(\|\cdot\|_\omega)_{\omega\in\Omega}$是 K_ω-向量空间 $E_\omega:=E\otimes_K K_\omega$上的范数族，其中对于所有 $\omega\in\Omega$，K_ω 表示关于绝对值 $|\cdot|_\omega$对 K 进行完备化所得的完备化。此外，范数族 ξ 满足适当的可测性和支配性条件（参见§4.1.2）。在阿代尔曲线的框架下，算术欧拉–庞加莱示性数没有明显的对应物。后者的一个适当替代物是Arakelov度，定义为

$$\widehat{\deg}(\overline{E}):=-\int_\Omega \ln\|s_1\wedge\cdots\wedge s_r\|_{\omega,\det}\ \nu(\mathrm{d}\omega),$$

其中 (s_1，.....，s_r) 是 E 的任意一组基，并且对所有 $\omega\in\Omega$，$\|\cdot\|_{\omega,\ \det}$ 表示由 $\|\cdot\|_\omega$ 诱导的 det(E_ω) 上的行列式范数。

现在考虑高维情形，其中 π：$X\to$Spec(K) 是维数为 d 的射影K-概形。X 上的阿代尔线丛是指数据 $L:=(L,\ \varphi)$，其中 L 是可逆的 $\mathcal{O}_X$-模，而 $\varphi=(\varphi_\omega)_{\omega\in\Omega}$ 是在每个 $L_\omega:=L\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_{X_\omega}$ 上的一族（连续）度量，这里的度量是在 Berkovich空间的语境下理解的。此外，度量族 φ 满足额外的支配性和可测性条件（参见 §4.1.4）。在这种情况下，称 φ 是 L 的阿代尔度量族，并将 L 的阿代尔度量族集合记为$\mathcal{M}$(L)。如果 X 是几何约化的，那么

$$\pi_*(\overline{L}):=(H^0(X,nL),(\|\cdot\|_{\varphi_\omega})_{\omega\in\Omega})$$

是 S 上的阿代尔向量丛，其中，对于所有 $\omega\in$Ω，我们记

$$\|\cdot\|_{\varphi_\omega}:=\sup_{x\in X_\omega^{\mathrm{an}}}|\cdot|_{\varphi_\omega}(x).$$

χ-体积定义为 L

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}):=\limsup_{n\to+\infty}\frac{\widehat{\deg}(\pi_*(n\overline{L}))}{n^{d+1}/(d+1)!}.$$

我们假设 K 是完美的，或 X 是几何整的。在 L 是大的且截面 K-代数 $\bigoplus_{n\geq0}H^0$(X，nL) 是有限型的情况下，([CM22b] 定理-定义 3.2.1) 给出了该序列的收敛性

$$\left(\frac{\widehat{\deg}(\pi_*(n\overline{L}))}{n^{d+1}/(d+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

[CM21]发展出了一种算术交理论。它使得形如以下形式的表达式具有意义：

$$(\overline{L_0}\cdots\overline{L_d})_S,$$

其中，$\overline{L}_0$、……、L_d是 X上的所谓可积阿代尔线丛。算术 Hilbert-Samuel 定理（[CM22b] 定理 4.5.1）指出，若 $L=(L,\ \varphi)$是 X上的阿代尔线丛，且 L 充足并且 φ 半正（即对所有 $\omega\in\Omega$，φ_ω 都是半正的），则有等式

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L})=(\overline{L}^{d+1})_S.$$

我们引入函数 vol$_\chi$的可微性问题。更确切地说，我们用 $\mathrm{Pic}_A(X)$ 表示满足以下条件的阿代尔线丛 $L=(L,\ \varphi)$ 的集合：X 上的 L 是大且半丰沛的。于是，[CM22a] 中的命题 2.14 保证，对于所有满足 φ 为多重次调和函数（参见 §2.3.4）的 $L=(L,\ \varphi)\in\mathrm{Pic}_A(X)$，函数 vol$_\chi$ 沿着 $\mathcal{M}(\mathcal{O}_X)$ 的方向在 L处 Gâteaux 可微。也就是说，对于所有 $f\in\mathcal{M}(\mathcal{O}_X)$，函数

$$(t\in\mathbb{R})\mapsto\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}(tf))$$

在 0 处可微，其中 $L(f):=\overline{L}+(\mathcal{O}_X,f)$。这一可微性结果是借助“局部—整体原理”得出的。该结果的局部对应版本分别是阿基米德情形下的（[BB08], 定理 B）和非阿基米德情形下的（[BGM21], 定理 1.2）。我们还提及奠基性著作 [BGGJ$^+$20] 中的定理 B，它给出了基域为离散赋值域时的非阿基米德情形。

1.2. 结果。 本文通过允许 Gâteaux 可微性中的方向任意，扩展了先前的可微性结果：粗略地说，我们允许该方向所对应的底层线丛不同于 $\mathcal{O}_X$。为此，我们需要得到这类结果的局部版本。设 $(k,|\cdot|)$ 为一个完备赋值域，X 为一个假设正规且几何整的射影k-概形。对于 X 上任意大且半丰沛的线丛 L，若赋予其两个连续度量 φ,ψ，则可定义相对 χ- 体积 vol$_\chi(L,\varphi,\psi)$（参见定义 2.30）。当 $k=\mathbb{C}$ 取通常绝对值时，Witt Nyström [Nys14] 得到了相对 χ-体积的（连续）可微性性质（参见同上文献的定理 1.5）。本文的第一个原创结果是一个非阿基米德类比。证明基本上是将 [Nys14] 的结果改写到我们的框架中。

[Nys14] 的定理 1.5 的证明利用了 Monge-Ampère 能量和 Okounkov 体对相对 χ-体积的一种解释。更确切地说，在 $\Delta(L)$ 上，可以构造凹函数 $G_\varphi,G_\psi\colon\Delta(L)\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 使得

$$\mathrm{vol}_\chi(L,\varphi,\psi)=(d+1)!\int_{\Delta(L)}(G_\varphi-G_\psi)\,\mathrm{d}\lambda,\tag{1}$$

其中 $d=\dim(X)$，且 λ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的勒贝格测度（参见 §2.4.2）。我们还假设 L 充足，且度量 φ, ψ 是多重次调和函数（参见定义 2.12）。在 [BE21], 中，Boucksom 和 Eriksson 证明了等式

$$\mathrm{vol}_\chi(L,\varphi,\psi)=(d+1)\mathcal{E}(\varphi,\psi),\tag{2}$$

其中

$$\mathcal{E}(\varphi,\psi):=\frac{1}{d+1}\sum_{i=0}^{d}\int_{X^{\mathrm{an}}}(\varphi-\psi)(\mathrm{d}\mathrm{d}^c\varphi)^{\wedge i}(\mathrm{d}\mathrm{d}^c\psi)^{\wedge d-i}$$

表示与度量 φ,ψ 相关的 Monge-Ampère 能量（参见同上，定理 A）。当 k为非阿基米德时，形如 $(\mathrm{d}\mathrm{d}^c\varphi)^{\wedge i}(\mathrm{d}\mathrm{d}^c\psi)^{\wedge d-i}$ 的表达式（其中 $i=0,\dots,d$），

按照 Chambert-Loir 和 Ducros 在 [CLD12] 中开创的理论来理解（该理论是在一般 Berkovich 空间的框架下提出的），并由 Gubler 和 Künnemann 在 [GK17] 中进一步发展（针对代数簇的解析化情形）。更一般地，对于任意完备赋值域 k，只要 L 是半丰沛且大的，等式 (2) 仍成立（参见：非阿基米德情形下的 [BGM21]，定理 4.6，以及阿基米德情形下的 [BB08]，定理 A）。这些结果使我们能够证明以下结论（更一般的表述见定理 3.11）。

定理 1.1. 设 k 是一个完备赋值域，X 是一个射影、几何整且正规的 k-概形，L 是一个充足可逆 O_X-模，且 φ、ψ 是 L 上的两个连续拟次调和度量。那么对于任意赋予两个连续度量 Φ、Ψ 的可逆 O_X-模 M，极限

$$\lim_{\mathbb{Q}\ni t\to 0}\frac{\mathrm{vol}_\chi(L+tM,\varphi+t\Phi,\psi+t\Psi)-\mathrm{vol}_\chi(L,\varphi,\psi)}{t}$$

存在。

度量 φ,ψ 的正性条件可以在所谓的“包络连续性”性质下放宽；该性质已知在多种应用情形中成立（参见 §2.3.5）。

现在我们转向阿代尔曲线上的可微性问题。固定一个真阿代尔曲线 $S=(K,(\Omega,\mathcal{A},\nu),\phi)$，其中 K 是一个可数域，并固定一个射影、几何整且正规的 k-概形 X。对于任意充足可逆 $\mathcal{O}_X$- 模 L，以及任意 $\varphi,\psi\in\mathcal{M}(L)$，[CM22a] 的命题 2.14 给出了等式

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(L,\varphi,\psi):=\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(L,\varphi)-\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(L,\psi)=\int_\Omega \mathrm{vol}_\chi(L_\omega,\varphi_\omega,\psi_\omega)\nu(\mathrm{d}\omega).$$

这一“局部-整体原理”，或者说这一事实的更强版本（命题 4.4），使我们能够证明本文的主要结果（更一般的表述参见定理 4.5）。

定理 1.2. 设 $S=(K,(\Omega,\mathcal{A},\nu),\phi)$ 是一个真阿代尔曲线，其底域 K 是完美可数域。设 X 是一个射影、几何整且正规的 k-概形。设 $L=(L,\varphi)$ 是 X上的相对丰沛阿代尔线丛，即 L 是一个充足的可逆 O_X-模，且 φ是 L上的多重次调和阿代尔度量族。设 $M=(M,\Phi)$ 是 X 上的任意阿代尔线丛。那么

$$\lim_{\mathbb{Q}\ni t\to 0}\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}+t\overline{M})-\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L})}{t}=(d+1)\left(\overline{L}^d\cdot\overline{M}\right)_S.$$

作为应用，我们得到以下对数等分布结果，它是阿代尔曲线框架下 [CLT09] 的定理 1.2 的对应结果。设 $L=(L,\varphi)$ 是 X上的一个相对丰沛阿代尔线丛。设 $(x_n)_{n\geq 0}$ 是 X 中的一列闭点，并假设它是泛的 且小的 （定义见 §5.2）。对于任意 $\omega\in\Omega$ 和任意 $n\in\mathbb{N}$，令 $\delta_{L,x_n,\omega}$ 表示有限集 $\{x_n\}_\omega^{\mathrm{an}}$上的概率计数测度。我们还将 $\delta_{L,X,\omega}$ 记为概率测度 $(1/\mathrm{vol}(L))(\mathrm{dd}^c\varphi)^{\wedge d}$。

定理 1.3. 我们假设 M 有一个非零整体截面 s。记作 $D:=$除子(s)。(1)我们有

$$h_{\overline{L}}(D)\geq h_{\overline{L}}(X).$$

(2)我们进一步假设 $h_L(D) = h_L(X)$。于是我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega\left(\int_{X_\omega^{\mathrm{an}}}(-\ln|s|_{\Phi_\omega})\delta_{\overline{L},x_n,\omega}\right)\nu(\mathrm{d}\omega)=\int_\Omega\left(\int_{X_\omega^{\mathrm{an}}}(-\ln|s|_{\Phi_\omega})\delta_{\overline{L},X,\omega}\right)\nu(\mathrm{d}\omega).$$

内容。本文分为三部分。在 §2 中，我们回顾非阿基米德多复势理论和 Okounkov 体的一些事实。在 §3 中，我们证明定理 1.1；在 §4 中，我们给出定理 1.2 的证明。

致谢。作者谨向 Huayi Chen 致谢，感谢他提出这一课题，并在本文撰写过程中给予支持。我们还要感谢 Mathieu Daylies 和 Nuno Hultberg 提出的宝贵意见。

约定与记号。对于任意子群 $\Gamma\subset\mathbb{R}_{>0}$，我们记作 $\sqrt{\Gamma}:=\{r^{1/n}:\ r\in\Gamma,\ \ n\in\mathbb{N}\}$。

W我们将线丛与可逆模视为同一对象，并对它们使用加法记号 n.
若 X 是一个整概形，我们用 $k(X)$ 表示其有理函数域。

设 $S=(K,\ (\Omega,\ \mathcal{A}\ \nu),\ (|\cdot|_\omega)_{\omega\in\Omega})$ 是一条阿代尔曲线。对于任意 $\omega\in\Omega$，我们记 K_ω 为关于绝对值 $|\cdot|_\omega$ 的 K 的完备化。若存在一个 ν-可积函数 $C:\Omega\to\mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 $|f|\leq C$ ν-几乎处处成立，则称函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 为ν受控的 。

2. 预备知识

2.1. **网**。设 X 是一个拓扑空间。设 $(A,\ \preceq)$ 是一个有向集（即 $(A,\ \preceq)$ 是一个有序集，满足 $x,\ y\in A$, 存在 $z\in A$ 使得 $x\preceq z$ et $y\preceq z$）。 X 中的一个网 是任意一个族 $x=(x_\alpha)_{\alpha\in A}\in X^A$。称网 $x=(x_\alpha)_{\alpha\in A}$

(1) 若存在 $l\in X$，使得对于 X 中 l 的任意开邻域 U，都存在 $\alpha_0\in A$，使得对所有 $\alpha\geq\alpha_0$ 均有 $x_\alpha\in U$，则称其在 X 中收敛；(2) 若 $X=\mathbb{R}$，且对于任意 $\alpha,\ \beta\in A$，只要 $\alpha\leq\beta$，不等式 $x_\alpha\leq x_\beta$（分别为 $x_\beta\leq x_\alpha$）成立，则称其递增（分别为递减）。

2.2. **上半连续包络**。 在本段中，我们固定一个拓扑空间 X。函数 $f:\ X\to\mathbb{R}\cup\{-\infty,\ +\infty\}$ 称为上半连续函数，分别简称为下半连续函数、上半连续函数（ usc ），分别简称为下半连续函数（lsc），如果对任意 $\alpha\in\mathbb{R}$，集合 $\{x\in X:\ f(x)\geq\alpha\}$，分别为$\{x\in X:\ f(x)\leq\alpha\}$，是闭集。记 USC($X$)、LSC($X$) 分别为 X 上的上半连续函数类和下半连续函数类。

引理 2.1 ([Bou71], 第 IV 章 §6 命题 2 以及定理 3 和 4)。 (1) USC(X) 和LSC(X) *are latti*

类。*(2)* 对于 *USC(X)* 中的任意族 $(f_i)_{i\in I}$，以及 *LSC(X)* 中的任意族，函数 $f:(x\in X)\mapsto$*inf*$\{f_i(x):i\in I\}$ 是上半连续的；函数 $f:(x\in X)\mapsto$ *sup*$\{f_i(x):\ i\in I\}$ 是下半连续的。*(3)* 如果 X 是紧豪斯多夫空间，则任意 $f\in$*USC(X)* 都上有界并取得最大值。同样地，$f\in$*LSC(X)* 都下有界并取得最小值。

如果 $f:\ X\to\mathbb{R}\cup\{-\infty,\ +\infty\}$ 是任意函数，则其上半连续包络（简称上半连续包络）定义为

$$\forall x\in X,\quad f^\star=\inf\{g:g\in\mathrm{USC}(X)\text{ et }g\geq f\}\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}.$$

由引理 2.1 (1)， $f^\star\in$ 上半连续(X)。

引理 2.2. 设 $f\colon X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，并假设 f 在$U:=\{x\in X\colon f(x)<+\infty\}$上局部上有界。那么 $f^\star$ 在 U上取实值，特别是 $f^\star \not\equiv +\infty$。

证明。 设 $x\in U$，存在一个开邻域 $x\in V\subset U$ 和一个常数 $C\in\mathbb{R}$，使得 $f_{|V}\leq C$。根据 $f^\star$ 的定义，我们有 $f^\star(x)\leq \sup_V f\leq C$。□

2.3. **Berkovich 空间上的多复势理论**。 在本段中，我们固定一个完备赋值域 $(k,|\cdot|)$。

2.3.1. *Berkovich* 意义下的解析化。 设 X 是一个 k-概形。其*Berkovich* 意义下的解析化记为 X^{an}，定义如下：一个点 $x\in X^{\mathrm{an}}$ 是数据 $(p,|\cdot|_x)$，其中 $p\in X$，且 $|\cdot|_x$ 是 $\kappa(x)$ 上一个延拓了 k 上绝对值的绝对值。 X^{an} 可以赋予 Zariski 拓扑：即 X^{an} 上使第一投影 $j\colon X^{\mathrm{an}}\to X$ 连续的最粗拓扑。 X^{an} 上还存在一个更细的拓扑，称为 Berkovich 拓扑：它是关于由 $j\colon X^{\mathrm{an}}\to X$ 及以下映射定义的族所诱导的初始拓扑

$$|f|_\cdot : \left|\begin{array}{ccc} U^{\mathrm{an}} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0},\\ x & \longmapsto & |f|_x,\end{array}\right.$$

其中 U_{an}具有形式 $U_{\mathrm{an}}:=j^{-1}(U)$，其中 U是 X的一个扎里斯基开子集，且 $f\in\mathcal{O}_X(U)$。赋予此拓扑后， X^{an} 是一个局部紧拓扑空间。存在 GAGA 类型的结果：也就是说， X 是分离的（分别地，真的）当且仅当 X^{an} 是豪斯多夫的（分别地，紧豪斯多夫的）。如果 X 是有限型概形，则可以在 X^{an} 上赋予一个解析函数层。

现在假设 k 是非阿基米德的，记其赋值环为 $\mathfrak{o}_k$，记 $\mathfrak{m}_k\subset\mathfrak{o}_k$为极大理想，记 k 为剩余域。设 X 为一个整的射影 k-概形。我们将任意一个整的射影 $\mathfrak{o}_k$-概形$\mathcal{X}$ 称为 X 的模型，其泛纤维为 X。如果 L 是一个可逆$\mathcal{O}_X$-模，则称 $(\mathcal{X},\mathcal{L})$ 是 (X,L) 的一个模型，如果$\mathcal{X}$是 X的模型，并且$\mathcal{L}$ 在 X 上的限制为 L。若模型$\mathcal{X}$ 满足 X，则称其为相干的（分别地，平坦的）；如果 $\mathcal{X}\to\mathrm{Spec}(\mathfrak{o}_k)$是有限表示的（分别地，平坦的）。设$\mathcal{X}$ 是 X的一个模型，适当性的赋值判别准则给出一个约化 态射，该态射是反连续的（即，开集的逆像是闭集）

$$\mathrm{red}_{\mathcal{X}} : X^{\mathrm{an}}\to\mathcal{X}_s.$$

若存在一个 $x\in X^{\mathrm{an}}$ 的模型 $\mathcal{X}$，使得 $\mathrm{red}_{\mathcal{X}}(x)$ 是特殊纤维 $\mathcal{X}_s$ 的一般点，则称点 $x\in X^{\mathrm{an}}$ 为除子型点或希洛夫点。我们用 X^{div} 表示 X^{an} 的除子型点集合。注意，在平凡赋值情形下， $X^{\mathrm{div}}=\{x_{\mathrm{triv}}\}$，其中 x_{triv} 是 $k(X)$ 上平凡绝对值所对应的点。

$\widetilde{\ }$对于任意 $x\in X^{\mathrm{an}}$，完备剩余域 $\widehat{\kappa}(x)$ 都是非阿基米德的，并令 $\widehat{\kappa}(x)$ 为其剩余域。令

$$s(x):=\mathrm{tr.deg}(\widetilde{\widehat{\kappa}(x)}/\widetilde{k}),\quad t(x):=\dim_{\mathbb{Q}}(\sqrt{|\widehat{\kappa}(x)^\times|_x}/\sqrt{|k^\times|}),\quad d(x):=s(x)+t(x).$$

Abhyankar 不等式给出 $d(x)\leq\dim(X)$。如果$d(x)=\dim(X)$，则称点 x 为拟单项式 点，并用 X^{qm} 表示 X中的拟单项式点集合。我们有包含关系 $X^{\mathrm{div}}\subset X^{\mathrm{qm}}$，且 X^{qm} 在 X^{an} ([Poi13], 命题 4.7) 中稠密。

2.3.2. 度量。 在本段中，我们固定一个 k-概形 X。

Let L 是 X上的线丛。 L 上的一个度量 是一个族 $\varphi := (|\cdot|_\varphi(x))_{x\in X^{\mathrm{an}}}$，其中

$$\forall x \in X^{\mathrm{an}}, \quad |\cdot|_\varphi(x) : L(x) := L \otimes_{\mathcal{O}_X} \widehat{\kappa}(x) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

是 $\widehat{\kappa}(x)$-向量空间 $L(x)$上的一个范数。如果对所有 $U \subset X$开集以及所有 $s \in H^0(U, L)$，映射 $|s|_\varphi \colon U^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 关于 Berkovich 拓扑都是连续的，则称度量 φ 为连续 。

我们采用以下记号表示线丛上的度量。

(i) 若 L 是 X上的线丛，我们用 $C^0(L)$表示 L上的连续度量类。(ii) 若 L, M分别是 X上的两个线丛，并分别赋予度量 φ, ψ，则由下式定义的族$\varphi + \psi := (|\cdot|_{\varphi+\psi}(x))_{x\in X^{\mathrm{an}}}$

$$\forall x \in X^{\mathrm{an}}, \quad |\cdot|_{\varphi+\psi}(x) = |\cdot|_\varphi(x) \otimes |\cdot|_\psi(x),$$

是 $L + M$上的一个度量。同样，考虑相应的对偶范数族，族 $-\varphi$ 定义了 $-L$上的一个度量。若$(\varphi, \psi) \in C^0(L) \times C^0(M)$，则 $\varphi \in C^0(L)$；反之， $\varphi + \psi \in C^0(L + M)$，则 $-\varphi \in C^0(-L)$。

(iii) 设 φ 是 $\mathcal{O}_X$ 上的一个度量。我们将 φ 视为函数 $-\ln |1|_\varphi \colon X^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R}$.

因此，对于线丛 L 上的任意两个度量 φ, ψ， $\varphi - \psi$ 被视为 X^{an} 上的函数。若 φ 是线丛 L 上的度量，则称其为 下有界、上有界 或 有界，如果存在 L 上的连续度量 ψ，使得 $\varphi - \psi$ 分别下有界、上有界或有界。注意，若 X 是真且 φ 下有界（或上有界），则对所有 $\psi' \in C^0$（L），函数 $\varphi - \psi'$ 下有界（或上有界）。

线丛 L 上的一个奇异度量是形如 $\varphi = \phi + f$ 的度量，其中 $\phi \in C^0$（L）且 $f \colon X^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$。也就是说，对于 L 的任意局部截面 s，我们有

$$|s|_\varphi(x) := |s|_\phi(x) e^{-f(x)} \in [0, +\infty].$$

大多数情况下，我们考虑 $f \colon X^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 的情形。在这种情况下，对于某个$x \in X^{\mathrm{an}}$，" 范数" $|\cdot|_\varphi(x) \equiv +\infty$。

在这种设定下，奇异度量 φ 称为上半连续，或下半连续，如果 f 也是如此。当 X^{an} 是紧豪斯多夫空间时，上半连续（upper semicontinuous，简称 usc）的奇异度量上有界（参见引理 2.1）。若 φ 是线丛 L上的奇异度量，则对所有整数 $m \geq 1$，我们在 mL上有一个奇异度量 $m\varphi$。若 φ, ψ 分别是线丛 L, M上的奇异度量，且不达到 $+\infty$, $\varphi + \psi$，则定义了 $L + M$上的一个奇异度量。因此，奇异度量的概念对 X 上的任意 $\mathbb{Q}$-线丛都有意义，先前引入的度量的所有性质也同样如此。

例 2.3. 我们假设线丛 L 有一个非零整体截面 $s \in H^0(X, L)$。我们定义 L 上的奇异度量 ψ_s 如下:

$$\psi_s := \varphi + \ln |s|_\varphi,$$

其中， φ 是 L上的任意连续度量。对于任意 $\varphi \in C^0(L)$，函数 $\ln |s|_\varphi : X^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 恰好在 $\mathrm{div}(s) = \{x \in X : s(x) = 0\}$上取得 $-\infty$。注意，在开集 $\{s \neq 0\} \subset X$上， ψ_s 定义了一个连续度量。此外， ψ_s 的定义不依赖于连续度量 φ的选取。

定义 2.4. 设 φ 是 X上一个线丛 L 的度量。若存在一个整数 $m \geq 1$、一族 mL $(s_i)_{i\in I}$的整体截面（其中 I 为有限集，且这些截面没有公共零点，因此我们假设 mL 是整体生成的），以及一族$(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$，使得

$$\varphi = \begin{cases} \frac{1}{2m}\ln\sum_{i\in I} e^{2\psi_{s_i}+2\lambda_i} & \text{if } k \text{ is Archimedean} \\ \frac{1}{m}\max_{i\in I}\{\psi_{s_i}+\lambda_i\} & \text{if } k \text{ is non}-\text{Archimedean.} \end{cases}$$

对于任意加法子群 $\Gamma \subset \mathbb{R}$，我们将 $\mathrm{FS}_\Gamma(L)$ 记为如下所述、满足 $\lambda_i \in \Gamma$ 对所有 $i \in I$ 的 Fubini-Study 度量 φ 在 L 上构成的集合。$\mathrm{FS}^{\{0\}}(L)$ 中的度量称为纯的。我们记 $\mathrm{FS}(L) := \mathrm{FS}_{\mathbb{R}}(L)$。注意，对于线丛 L，$\mathrm{FS}(L) \neq \varnothing$ 意味着 L 是半丰沛的，也就是说，存在一个整数 $m \geq 1$，使得 mL 是整体生成的。

定义 2.5。设 L 是一个可逆的$\mathcal{O}_X$-模。称 L 上的度量 φ 为DFS，若存在两个可逆的$\mathcal{O}_X$-模 L_1, L_2 和 $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{FS}(L_1) \times \mathrm{FS}(L_2)$，使得$L = L_1 - L_2$ 且 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$。$L$ 上 DFS 度量的集合记为 $\mathrm{DFS}(L)$。

注记 2.6. 若 L 是一个可逆 $\mathcal{O}_X$-模，则 $\mathrm{DFS}(L)$ 是复几何框架下光滑度量的类比。此外，([BE21], 命题 5.4) 表明，DFS 和 Fubini-Study 度量在拉回、求和及取最大值运算下保持不变（在 k非阿基米德情形下）。

定理 2.7 ([BE21], 定理 5.18)。对于任意可逆 $\mathcal{O}_X$-模 L，$\mathrm{DFS}(L)$ 在 $C^0(L)$ 中稠密（一致收敛意义下）。

在 k 阿基米德情形下，富比尼–施图迪度量是光滑的。在非阿基米德情形下，它们与模型度量密切相关（参见 [CM19], §2.3）。

定理 2.8 ([BE21],定理 5.14)。我们假设 k 是非阿基米德的。设 φ 是 X 上一个 $\mathbb{Q}$-线丛 L 的连续度量。则以下条件等价：

(i) φ是纯的富比尼–施图迪度量；(ii) φ 是由半丰沛的 $\mathbb{Q}$-模型 L 所诱导的模型度量。

在研究多重次调和包络时（参见 §2.3.5），我们将用到以下不等式。

定理 2.9 ([BJ18], 定理 2.21). 假设 k 是非阿基米德的。设 L 是一个可逆 $\mathcal{O}_X$-模，$\varphi \in \mathrm{DFS}(L)$，且 x_1、$x_2 \in X^{\mathrm{qm}}$。那么存在一个常数$C = C(L, x_1, x_2, \varphi) > 0$，使得

$$\forall \psi \in \mathrm{FS}(L), \quad |(\psi-\varphi)(x_1) - (\psi-\varphi)(x_2)| \leq C.$$

设 φ 是线丛 L 上一个上有界的奇异度量。令

$$\forall s \in H^0(X, L), \quad \|s\|_\varphi := \sup_{x\in X^{\mathrm{an}}} |s|_\varphi(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

它在 $H^0(X, L)$ 上定义了一个半范数。若 X 是整的且 φ 不恒为零，则 $\|\cdot\|_\varphi$ 是 $H^0(X, L)$ 上的一个范数。

引理 2.10。我们假设 X 是约化的。设 φ 是可逆 $\mathcal{O}_X$-模 M 上的奇异度量，记作 $\varphi = \phi + f$，其中 $\phi \in C^0(M)$且 $f\colon X^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是一个

连续函数，使得 $f \not\equiv +\infty$。令 $R > 0$，记 $\varphi_R := \text{最小值}\{\phi + R, \varphi\}$，即对于 M 的任意局部截面 u，我们有

$$|u|_{\varphi_R}(x) = |u|_\phi(x) \max\{e^{-R}, e^{-f(x)}\}.$$

(1) $\varphi_R \in C^0(M)$。(2) 设 L 是另一个可逆 O_X-模，且 $\psi \in C^0(L)$。那么对所有充分大的 $R > 0$，我们有

$$\|\cdot\|_{\psi+\varphi_R} = \|\cdot\|_{\psi+\varphi}.$$

证明。第一个结论由 f 的连续性推出。对于所有 $u \in H^0(X, L+M) \setminus \{0\}$，对于所有 $R > 0$，对于所有 $x \in X^{\mathrm{an}}$，我们有

$$|u|_{\psi+\varphi}(x) = |u|_{\psi+\phi}(x) e^{-f(x)},$$
$$|u|_{\psi+\varphi_R}(x) = |u|_{\psi+\phi}(x) \max\{e^{-R}, e^{-f(x)}\}.$$

我们定义 $\alpha : (x \in X^{\mathrm{an}}) \mapsto |u|_{\psi+\phi}(x)$，$\beta : (x \in X^{\mathrm{an}}) \mapsto e^{-f(x)}$，并且对于任意整数 $n \geq 0$，$\beta_n := \max\{\beta, e^{-n}\}$。这些是 X^{an} 上的连续实函数。注意到

$$\forall n \geq 0, \quad \max_{x \in X^{\mathrm{an}}} \alpha(x) \cdot \beta_n(x) = \|u\|_{\psi+\varphi_n} \geq \max_{x \in X^{\mathrm{an}}} \alpha(x) \cdot \beta(x) = \|u\|_{\psi+\varphi} > 0. \tag{3}$$

对于任意整数 $n \geq 0$，取 $x_n \in X^{\mathrm{an}}$ 使得 $\alpha(x_n)\beta_n(x_n) = \|u\|_{\psi+\varphi_n}$。那么序列 $(\beta(x_n))_{n\geq 0}$ 下有界于某个正实数。事实上，假设存在一个子列 $(\beta(x_{n_k}))_{k\geq 0}$ 收敛到 0。由于 f 在 X^{an} 上连续且非负，我们有

$$\forall k \geq 0, \quad 0 \leq \|u\|_{\psi+\varphi_{n_k}} \leq \max_{x \in X^{\mathrm{an}}} f(x) \max\{e^{-n}, g(x_{n_k})\}.$$

此后，$\lim_{k\to+\infty} \|u\|_{\psi+\varphi_{n_k}} = 0$，这与 (3) 矛盾。

取 $m > 0$，使得对所有 $n \geq 0$ 都有 $m \leq \beta(x_n)$。取 n 为满足 $e^{-n} \leq \beta(x_n)$ 的整数，则有

$$\|u\|_{\psi+\varphi_n} = \alpha(x_n) \max\{e^{-n}, \beta(x_n)\} = \alpha(x_n)\beta(x_n) \leq \|u\|_{\psi+\varphi} \leq \|u\|_{\psi+\varphi_n}.$$

对于所有 $R \geq n$，都有 $\|u\|_{\psi+\varphi} \leq \|u\|_{\psi+\varphi_R} \leq \|u\|_{\psi+\varphi_n} \leq \|u\|_{\psi+\varphi}$，故结论得证。 □

注记 2.11。我们将在 $M = -A$ 为丰沛线丛 A 的对偶且 $\varphi = -\psi_s$ 为例 2.3 中定义的奇异度量的对偶的情形下使用引理 2.10，其中 $s \in H^0(X, A)$。

2.3.3. 格林函数。在本文中，与其使用 ($\mathbb{Q}$-)线丛，不如在 $\mathbb{R}$-除子的框架下进行研究更为方便。固定一个在 Spec(k) 上的整概形 X，并令 $\mathbb{K}$ 为$\mathbb{Z}$、 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$。$\mathrm{Div}_{\mathbb{K}}(X) := \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$ 表示 X 上 $\mathbb{K}$-Cartier 除子的 $\mathbb{K}$- 模。回忆一下，对于所有 $D \in \mathrm{Div}_{\mathbb{K}}(X)$ 以及所有 $x \in X$，存在 x 的一个开邻域 U 和一个截面 $f \in (\mathrm{M}_X^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K})(U)$，使得 D 由 f 在 U 上定义。在这种情况下，f 称为 D 在 x 中的局部方程。此外，存在一个单射 $\mathbb{K}$-线性态射 $\mathrm{div}_{\mathbb{K}} : K(X)^\times \to \mathrm{Div}_{\mathbb{K}}(X)$，其像记为 $\mathrm{PDIV}_{\mathbb{K}}(X)$。若 $D \in \mathrm{Div}_{\mathbb{K}}(X)$，则其 $\mathbb{K}$-整体截面的集合记为 $H^0_{\mathbb{K}}(D)$（例如参见 [CM19, 定义 2.4.12]）。滥用记号，我们令 $H^0(D) := H^0_{\mathbb{Z}}(D)$。

回忆一下，存在一个同构

$$\mathcal{O}_X(\cdot) : \mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}(X)/\,\mathrm{PDIV}_{\mathbb{Z}}(X) \to \mathrm{Pic}(X),$$

它对所有 $D \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}(X)$ 都诱导出一个同构 $H^0(D) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$。

对于 Cartier 除子，连续度量的对应概念称为格林函数。我们先给出一个预备定义。令 $C^0_{\mathrm{gen}}(X)$ 表示非空扎里斯基开子集上的连续函数模去等价关系所得的集合

$$f \sim g \Leftrightarrow f \text{ and } g \text{ coincide on a non-empty Zariski open subset.}$$

令 $D \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}(X)$，$D$ 的格林函数是一个类 $g \in C^0_{\mathrm{gen}}(X)$，满足：对于 D 在非空扎里斯基开子集 U 上的任意局部方程 f，$g + \ln|f| \in C^0_{\mathrm{gen}}(X)$ 可延拓为 U^{an} 上的连续函数，即 $g + \ln|f|$ 属于典范同态 $C^0(U^{\mathrm{an}}) \to C^0_{\mathrm{gen}}(X^{\mathrm{an}})$ 的像。满足 $D \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}(X)$ 且 $\widehat{g}$ 是 D 的格林函数的所有有序对 (D, g) 构成的集合记为 $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{Z}}(X)$。令 D 为 X 上的 Cartier 除子，则 D 的格林函数与 $\mathcal{O}_X(D)$ 上的连续度量之间存在对应关系：若 $\widehat{(D, g)} \in \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{Z}}(X)$，且若 f 是非空扎里斯基开子集 $U \subset X$ 上的局部方程 D，则 $e^{-(g+\ln|f|)}$ 可延拓为 U^{an} 上的连续函数，从而在 $\mathcal{O}_X(D)|_U$ 上定义一个连续度量。将这些局部度量粘合起来，得到 $\mathcal{O}_X(D)$ 上的连续度量，记为 φ_g。反过来，若 φ 是 $\mathcal{O}_X(D)$ 上的连续度量，且 s_D 是由 $1 \in K(X)^\times$ 定义的 $\mathcal{O}_X(D)$ 的有理截面，则 $-\ln|s_D|_\varphi$ 在 $C^0_{\mathrm{gen}}(X)$ 中的类给出 D 的一个格林函数。若 $f \in H^0(D)$，则 $|f|e^{-g} \in C^0_{\mathrm{gen}}(X^{\mathrm{an}})$ 可延拓为 X^{an} 上的连续函数，记为 $|f|_g$。令

$$\|f\|_g := \max_{x \in X^{\mathrm{an}}} |f|_g(x).$$

注意，在同构 $H^0(D) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ 下，范数 $\|\cdot\|_g$ 与范数 $\|\cdot\|_{\varphi_g}$ 一致。

设 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$，我们用 $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{K}}(X)$ 表示商空间 $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{Z}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$，即将其除以由形如 $\lambda(D, g) - (\lambda D, \lambda g)$ 的元素张成的向量子空间，其中 $\lambda \in \mathbb{K}$ 且 $(D, g) \in \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{Z}}(X)$。设 $(D, g) \in \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{K}}(X)$，对所有 $f \in H^0_{\mathbb{K}}(D)$，$|f|e^{-g}$ 都延拓为定义在 X^{an} 上的连续函数，我们将其最大值记为 $\|f\|_g$。

2.3.4. **多重次调和度量。** 在本段中，我们固定一个定义在 $\mathrm{Spec}(k)$ 上的射影概形 X。

定义 2.12。设 L 是定义在 X 上的半丰沛 $\mathbb{Q}$-线丛，且 φ 是 L 上的一个（可能奇异的）度量。若 $\varphi \not\equiv -\infty$ 且 φ 是 L 上一列富比尼–施图迪度量的网的递减极限，则称 φ 为多重次调和（简称拟次调和）度量。L 上拟次调和度量构成的类记为 $\mathrm{PSH}(L)$。

注 2.13. (1) 当 k 是阿基米德时，这个拟次调和度量的定义等价于通常对 $\mathrm{Spec}(k)$ 上射影概形上的半丰沛 $\mathbb{Q}$-线丛上的拟次调和度量所采用的定义（[BE21], 定理 7.1）。(2) 如果 L 是一个可逆的 $\mathcal{O}_X$-模，那么类 $\mathrm{PSH}(L) \cap C^0(L)$ 与按（[CM19],§2.3）定义的半正 连续度量类相同。

引理 2.14 ([BE21], 引理 7.3)**.** 设 L 是 X 上的一个半丰沛 $\mathbb{Q}$-线丛。那么存在一个在 $\mathrm{Spec}(k)$ 上的射影概形 Y、一个在 $\mathrm{Spec}(k)$ 上的满射态射 $f\colon X \to Y$，满足 $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$，以及 Y 上的一个充足 $\mathbb{Q}$-线丛 A，使得 $L = f^*A$。此外，f 和 (Y, A) 在同构意义下唯一，并且 拟次调和$(L) \cong$ 拟次调和(A)。

命题 2.15 ([BJ21], 命题 5.6 et [BE21], 推论 7.5)**.** 采用定义 *2.12* 中的相同记号，我们有如下结论：

(i) 若 $\varphi \in$ *PSH(L)*，则对所有 $c \in \mathbb{R}$，$\varphi + c \in$ *PSH(L)*；*(ii)* 若 $L' \in$ *Pic(X)*$_{\mathbb{Q}}$ 是半丰沛的，且 $\varphi' \in$ *PSH(L′)*，则 $\varphi + \varphi' \in$ *PSH(L* $+ L'$*)*；*(iii) PSH(L)* 在有限最大值运算下保持不变；*(iv)* 若 $(\varphi_i)_i$ 是一个递减的拟次调和度量网，且 $\varphi := \lim_i \varphi_i \not\equiv -\infty$，则 $\varphi \in$ *PSH(L)*；*(v) PSH(L)* 在一致收敛拓扑下是闭的。*(vi)* 对所有 $t \in \mathbb{Q}_{>0}$，*PSH(tL)* $= t$ *PSH(L)*。

例 2.16 ([BJ21], 命题 5.8)。设 L 是 X 上的一个半丰沛 $\mathbb{Q}$线丛，且A 是一个有限集。固定一个整数 $m \geq 1$，令 $((s_\alpha, \lambda_\alpha))_{\alpha \in A}$ 为一个族，使得对所有$\alpha \in A$，$s_\alpha \in H^0(X, mL)$ 和 $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$。那么该（可能是奇异的）度量

$$\varphi := \frac{1}{m} \max_{\alpha \in A} (\ln |s_\alpha| + \lambda_\alpha)$$

属于拟次调和(L)。注意，φ 连续当且仅当 s_α 没有公共零点。

为仿照复情形，获得拟次调和度量的光滑逼近结果很有帮助（当 k 为非阿基米德时，参见光滑 情形的 [CLD12]）。

定义 2.17。若奇异度量 φ 可以表示为 L上光滑半正度量网的递减极限，则称其为可亚调和正则化 的 $\mathbb{Q}$-线丛 L 上的度量。

定理 2.18 ([BE21], 定理 7.14)。设 $\varphi \in$ 拟次调和(L)，其中 L 是半丰沛的 $\mathbb{Q}$-线丛。则 φ可亚调和正则化。

定理 2.18 使我们能够更深入地研究所谓的多极 集，即包含在某个拟次调和度量的奇异集中的集合。从现在起，我们假设 k 是非阿基米德的。

命题 2.19。设 L 是一个可逆 O_X-模，且 $\varphi \in$ 拟次调和(L)。那么，对所有$x \in X^{\mathrm{qm}}$，都有 $|\cdot|_\varphi (x) \not\equiv +\infty$。

证明。写作 $\varphi = \lim_{i \in I} \varphi_i$，其中 $(\varphi_i)_{i \in I} \in$ FS(L)^I 是一个递减网。固定一个参考度量 $\psi \in$ DFS(L)。令 $x \in X^{\mathrm{qm}}$，由全局 Izumi 不等式（定理 2.9）可知，存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$(\varphi_i - \varphi_j)(x) = |(\varphi_i - \varphi_j)(x)| = |(\varphi_i - \psi)(x) - (\varphi_j - \psi)(x)| \leq C,$$

对所有 $i, j \in I$ 且满足 $i \leq j$。因此 $(\varphi_i - \varphi)(x) \leq C$ 且 $|\cdot|_\varphi(x) \not\equiv +\infty$。 □

定义 2.20。设 L 是一个可逆的 $\mathcal{O}_X$-模，满足 PSH(L) $\neq \varnothing$（特别地，L 是半丰沛的）。设 $\varphi_0 \in$ DFS(L)为一个参考度量。设 $E \subset X^{\mathrm{an}}$ 是任意子集，其*Alexander-Taylor* 容量 定义为

$$T_{L,\varphi_0}(E) := \sup_{\varphi \in \mathrm{PSH}(L)} \left(\sup_{X^{\mathrm{an}}} (\varphi - \varphi_0) - \sup_E (\varphi - \varphi_0) \right).$$

注 2.21。(1) 定义 2.20 是 [BT82],[AT84] 中所定义容量的非阿基米德类比。

(2) 使用定义 2.20 中的相同记号，命题 2.15（i）推出等式

$$T_{L,\varphi_0}(E) = -\sup_{\varphi\in \mathrm{PSH}_0(L)} \sup_E(\varphi-\varphi_0) \in [0,+\infty],$$

其中 $\mathrm{PSH}_0(L) := \{\varphi \in \text{拟次调和 } \mathrm{PSH}(L) : \sup_{X^{\mathrm{an}}}(\varphi-\varphi_0) = 0\}$。

（3）事先，Alexander-Taylor 容量的构造取决于参考度量的选择。下面我们只关注其有限性。由于两个连续度量之差是有界函数，因此，这种有限性实际上与参考度量的选择无关。

引理 2.22。 设 L 是一个可逆 O_X-模，使得 拟次调和 $\mathrm{PSH}(L) \neq \varnothing$ （特别地，L 是半丰沛的）。令 $\varphi_0 \in \mathrm{DFS}(L)$ 为一个参考度量。对于所有 $x \in X^{\mathrm{qm}}$，有$T_{L,\varphi_0}(x) := T_{L,\varphi_0}(\{x\}) < +\infty$。

证明。 令 $x \in X^{\mathrm{qm}}$，假设 $T_{L,\varphi_0}(x) = +\infty$。根据注 2.21，对于任意整数 $m \geq 1$，存在一个度量 $\varphi_m \in$ 拟次调和 $\mathrm{PSH}(L)$，使得 $\sup_{X^{\mathrm{an}}}(\varphi_m-\varphi_0) = 0$ 且 $(\varphi_m-\varphi_0)(x) \leq -2^m$。对于所有 $m \in \mathbb{N}_{>0}$，定义

$$\psi_m := \sum_{i=1}^{m} 2^{-i}\varphi_i + 2^{-m}\cdot 0.$$

由 $\mathrm{PSH}(L)$ 的凸性， $\psi_m \in \mathrm{PSH}(L)$。$(\psi_m)_{m\geq 1}$ 因此是 $\mathrm{PSH}(L)$ 中的一个递减序列，满足 $\sup_{X^{\mathrm{an}}}(\psi_m-\varphi_0) = 0$ 且 $(\psi_m-\varphi_0)(x) \leq -m$ 对 $m \in \mathbb{N}_{>0}$成立。于是，命题 2.15 (iv) 表明 $\psi := \lim_{m\to+\infty}\psi_m \in \mathrm{PSH}(L)$，并满足 $(\psi-\varphi_0)(x) = -\infty$，这与命题 2.19 矛盾。□

2.3.5. 包络。 在本段中，我们固定一个 Spec(k 上的射影概形 X).

定义 2.23。 设 φ 是半丰沛线丛 L 上的有界度量。其*psh* 包络记为 $P(\varphi)$，定义如下:

$$P(\varphi) := \sup\{\phi : \phi \in \mathrm{PSH}(L) \text{ and } \phi \leq \varphi\}.$$

其正则 *psh* 包络记为 $Q(\varphi)$，定义如下:

$$Q(\varphi) := \sup\{\phi : \phi \in \mathrm{PSH}(L)\cap C^0(L) \text{ and } \phi \leq \varphi\}.$$

命题 2.24 ([BGM21], 命题 6.3)。 设 φ、φ_1、φ_2 是线丛 L上的有界度量。则

(i) $P(\varphi) \leq \varphi$，等号成立当且仅当 φ 连续且拟次调和；*(ii)* 对所有 $m \in \mathbb{N}$， $P(m\varphi) = mP(\varphi)$；*(iii)* 若 $\varphi_1 \leq \varphi_2$，则 $P(\varphi_1) \leq P(\varphi_2)$；*(iv)* 若 $c \in \mathbb{R}$，则 $P(\varphi + c) = P(\varphi) + c$；*(v)* $d(P(\varphi_1)\ P(\varphi_2)) \leq d(\varphi_1,\varphi_2)$。

沿用定义 2.23 中的记号，我们有 $Q(\varphi) \leq P(\varphi) \leq \varphi$ 且 $Q(\varphi) = P(\varphi_\star)$（[BE21], 命题 7.25）。

定义 2.25。 设 L ba 是一个半丰沛的 $\mathbb{Q}$-线丛。我们称对 L 成立包络的连续性，如果对所有 $\varphi \in C^0(L)$， $P(\varphi) = Q(\varphi)$ 都连续。

引理 2.26。 [BE21], 引理 *7.29*）对于半丰沛 $\mathbb{Q}$-线丛 L，包络的连续性等价于以下命题: 对于 L 上任意一致上有界的拟次调和度量族（φ_α）$_\alpha$，（$\sup_\alpha \varphi$）$^\star \in$ 拟次调和（L）。

猜想 2.27。对于正规射影簇上任意半丰沛 $\mathbb{Q}$-线丛，包络连续性成立，其中该簇定义在Spec（k）上。

当 k 为阿基米德域时，猜想 2.27 已知成立；此外，在以下情形下也成立： X 光滑，L 充足，且 k 为等特征零、平凡赋值或离散赋值的非阿基米德域（参见 [BE21]）。

本文将使用可能无界的度量的包络。我们基本上复现了 [BJ21] 中针对任意完备赋值域的论证。

定义 2.28。设 L 是一个可逆的 $\mathcal{O}_X$-模， $\phi \in C^0(L)$ 和 $f\colon X^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$。$\varphi := \phi + f$ 的拟次调和包络定义为

$$P(\varphi) := \sup\{\psi : \psi \in \mathrm{PSH}(L) \text{ and } \psi \leq \varphi\}.$$

当包络连续性成立时，有界度量的拟次调和包络实际上是拟次调和度量。我们证明了奇异度量的一个类似结果。

命题 2.29。假设 k 是非阿基米德的。设 L 是一个充足的可逆 O_X-模， $\phi_0 \in C^0(L)$ 且 $f\colon X^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$。以下陈述等价：

(i) 设 $(\varphi_i)_{i\in I} \in$ 拟次调和$(L)^I$ 上有界，则 $(\sup_{i\in I}\varphi_i)^\star \in PSH(L)$；*(ii)* 设 $\varphi := \phi_0 + f$，则要么 $P(\varphi) \equiv -\infty$, $P(\varphi)^\star \in$ 拟次调和 (L)，要么 $P(\varphi)^\star \equiv +\infty$；*(iii)* 对所有 $\phi \in C^0(L)$， $P(\phi) \in C^0(L)$。

证明。我们重述（[BJ21], 引理 5.17）的论证。首先假设（i）成立。记 $\mathcal{F} := \{\psi \in$ 拟次调和$(L) : \psi \leq \varphi\}$。若 $\mathcal{F} = \varnothing$，则 $P(\varphi) \equiv -\infty$。现在，若 $\mathcal{F} \neq \varnothing$，且 $\mathcal{F}$上有界，则（i）蕴含 $P(\varphi)^\star \in$ 拟次调和(L)。反之，对于所有$x \in X^{\mathrm{qm}}$，引理 2.22 给出 $T_{L,\varphi_0}(x) < +\infty$ （其中 $\varphi_0 \in \mathrm{DFS}(L)$ 是任意的参考度量）。于是，我们有

$$\sup_{X^{\mathrm{an}}}(\sup\{\psi : \psi \in \mathcal{F}\} - \varphi_0) = +\infty,$$

以及不等式

$$\forall \psi \in \mathcal{F}, \quad (P(\varphi) - \varphi_0)(x) \geq \sup_{X^{\mathrm{an}}}(\psi - \varphi_0) - T_{L,\varphi_0}(x)$$

推出 $(P(\varphi) - \varphi_0)(x) = +\infty$。由 X^{qm} 在 X^{an} 中稠密可得 $P(\varphi)^\star \equiv +\infty$。

现在假设 (ii) 成立。令 $\phi \in C^0(L)$。那么 $P(\phi)^\star \in \mathrm{PSH}(L)$ 是 $P(\phi)$ 定义中的一个候选函数，因此 $P(\phi)^\star \leq P(\phi)$，从而 $P(\phi)^\star = P(\phi)$。特别地， $P(\phi)$ 是上半连续的。由于 ϕ 连续（因而下半连续），我们得到 $Q(\phi) = P(\phi_\star) = P(\phi)$。此外，由于它是连续函数族的上确界， $Q(\phi)$ 是下半连续的。因此 $P(\phi)$ 是连续的。

最后，引理 2.26 给出 $(iii) \Rightarrow (i)$。 □

2.3.6. 体积与 *Monge-Ampère* 能量。本段中，我们固定一个定义在 $\mathrm{Spec}(k)$ 上的几何整投影概形 X。

定义 2.30。设 φ， ψ 是线丛 L 上的两个有界度量。φ 相对于 ψ 的相对 χ体积定义为

$$\mathrm{vol}_\chi(L,\varphi,\psi) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{(d+1)!}{n^{d+1}} \cdot \ln \frac{\|\cdot\|_{n\psi,\det}}{\|\cdot\|_{n\varphi,\det}}.$$

[CM15] 的定理 4.5 表明，上述上极限实际上是一个极限。

注 2.31. 文献中还可以找到其他相对 χ-体积的归一化方式。例如，在 [BGM21], 中，使用定义 2.30 中的相同记号，将相对体积定义为

$$\mathrm{vol}(L,\varphi,\psi) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{d!}{n^{d+1}} \cdot \ln \frac{\|\cdot\|_{n\psi,\det}}{\|\cdot\|_{n\varphi,\det}} = \frac{1}{d+1}\,\mathrm{vol}_\chi(L,\varphi,\psi).$$

命题 2.32 ([BGM21],命题 6.4)。 设 φ 是线丛 L 上的有界度量。

(1) *We have the equality* $\|\cdot\|_\varphi = \|\cdot\|_{P(\varphi)} = \|\cdot\|_{Q(\varphi)}$ *of seminorms.*
(2) *For any bounded metric* ψ *on* L*, we have* $\mathrm{vol}_\chi(L,\varphi,\psi) = \mathrm{vol}_\chi(L,P(\varphi),P(\psi))$.

设 $(L_1,\ \varphi_1)$ ……，$(L_d,\ \varphi_d)$ 是赋度量的可逆 $\mathcal{O}_X$-模，使得对于所有 $i=1,\ \ldots\ldots,\ d,\ \varphi_i \in \mathrm{PSH}(L_i)\cap C^0(L_i)$。Bedford-Taylor 理论（复情形）及其非阿基米德对应理论（[CLD12, GK17]）允许定义 X^{an} 上的概率拉东测度，称为 $(L_1,\ \varphi_1)$ ……，$(L_d,\ \varphi_d)$ 的***Monge-Ampère*** 测度，定义为

$$\mathrm{MA}(\varphi_1,\ldots,\varphi_d) := \frac{1}{(L_1\cdots L_d)}\cdot \mathrm{dd}^c\varphi_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{dd}^c\varphi_d.$$

当对于所有 $i=1,\ \ldots\ldots,\ d$，$(L_i,\ \varphi_i) = (L,\ \varphi)$ 时，我们记 $\mathrm{MA}(\varphi) := \mathrm{MA}(\varphi_1,\ \ldots\ldots,\ \varphi_d)$。历史上，非阿基米德 Monge-Ampère 测度由 Chambert-Loir 在 [CL06] 中引入。

注记 2.33。 上述构造可推广到度量被假设为*dpsh*的情形，即拟次调和度量之差（[BE21], §8.1）。

定义 2.34。 设 $\varphi,\ \psi$ 是线丛 L上的两个连续拟次调和度量。相对于 ψ 的 φ 的蒙日-安培能量定义为

$$\mathcal{E}(\varphi,\psi) := \frac{1}{d+1}\int_{X^{\mathrm{an}}} (\varphi-\psi)\,\mathrm{MA}_d(\varphi,\psi),$$

其中

$$\mathrm{MA}_d(\varphi,\psi) := \sum_{j=0}^{d} (\mathrm{dd}^c\varphi)^{\wedge j}\wedge(\mathrm{dd}^c\psi)^{\wedge(d-j)}.$$

若 $\varphi,\ \psi$ 是线丛 L 上的两个连续度量，并且对于 L包络连续性成立，则记

$$\mathcal{E}\circ P(\varphi,\psi) := \mathcal{E}(P(\varphi),P(\psi)).$$

定理 2.35 （[BGM21], 推论 6.5）。 设 L 是一个半丰沛线丛，设 φ、ψ 是 L上的两个连续度量，并假设 P（φ） P（ψ）是连续的。那么

$$\mathrm{vol}_\chi(L,\varphi,\psi) = (d+1)\mathcal{E}\circ P(\varphi,\psi).$$

在本文中，我们讨论相对 χ-体积的一个可微性性质。后者与所谓的正交性性质有关。若 L 是一个半丰沛可逆$\mathcal{O}_X$-模，我们称

(a) 若测度 $(\mathrm{dd}^c P(\varphi))^{\wedge d}$ 支持在$\{\varphi = P(\varphi)\}$上，则 φ 满足正交性性质；

(b) 若对于任意 $f \in C^0(X^{\mathrm{an}})$，我们都有下式成立，则$\mathcal{E} \circ P$在 φ 中是可微的

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathcal{E} \circ P(\varphi + tf, \varphi_0) = \int_{X^{\mathrm{an}}} f(\mathrm{dd}^c P(\varphi))^{\wedge d},$$

其中， $\varphi_0 \in$DFS(L) 是任意的参考度量。

命题 2.36。 以下陈述是等价的：

(i) 对于所有度量 $\varphi \in C^0(L)$，$E \circ P$ 在 φ 上可微；(ii) 对于所有度量 $\varphi \in C^0(L) \cap$拟次调和(L)，$E \circ P$ 在 φ 上可微；(iii) 对于任意 $\varphi \in C^0(L)$，正交性性质成立。

证明。 当 L 是充足时，这是 ([BGM20], 引理 3.5)。论证可推广到半丰沛情形（[BGM21],备注 6.8）。□

定理 2.37 ([BGM21], 定理 6。7, [BJ21], 推论 8.6)。 设 $\varphi \in C^0(L)$ 满足条件$P(\varphi) \in C^0(L)$，则对于 φ，正交性性质成立，并且 $E \circ P$ 在 φ 上可微。

2.4. **Okounkov 体与斜率**。

2.4.1. 线丛情形。 在本段中，我们固定一个完备赋值域 $(k, |\cdot|)$，并将复数域k 记为由 k 上的有限维向量空间所组成的类，这些空间配备了两个范数；当 k为非阿基米德时，假设这两个范数均为超度量。设 $V = (V, \|\cdot\|_\varphi, \|\cdot\|_\psi)$ 是复数域k中的一个元素，其次数 定义为

$$\widehat{\deg}(\overline{V}) := -\ln \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_\varphi + \ln \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_\psi,$$

其中 $(s_1, ..., s_k)$ 是 V的任意一组基。由乘积公式可知，这个次数定义良好

$$-\ln |a| + \ln |a| = 0, \forall a \in k^\times.$$

V 的斜率 定义为

$$\widehat{\mu}(\overline{V}) := \frac{\widehat{\deg}(\overline{V})}{\dim_k(V)}.$$

我们考虑 Okounkov 体的抽象框架如下。固定一个分次半群 $\Gamma \subset \mathbb{N}^{d+1} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^d \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}^d$。对于所有 $n \in \mathbb{N}$， Γ 的次数为n 的齐次分量是 $\Gamma_n := \{\alpha \in \mathbb{N}^d : (n, \alpha) \in \Gamma\}$。假设 Γ 满足以下条件（更多细节参见 [LM09]§2.1）：

(a) $\Gamma_0 = \{0\}$；(b) 存在一个有限集 $B \subset \{1\} \times \mathbb{N}^d$，使得 Γ 包含于由 B 生成的 $\mathbb{N}^d$ 的子幺半群中；(c) Γ 作为群生成 $\mathbb{Z}^{d+1}$ 。

我们将由 Γ 和 Δ 生成的闭凸锥记为 $\Sigma(\Gamma) \subset \mathbb{R}^{d+1}\}$: $= \Sigma(\Gamma) \cap \Big(\{1\} \times \mathbb{R}^d\Big)$ 是它的底面：这是 Γ 的 ***Okounkov*** 体 。 $\Delta(\Gamma)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个凸体，并且有如下等式

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|\Gamma_n|}{n^d} = \mathrm{vol}(\Delta(\Gamma)).$$

此外，我们考虑一个超可加函数 ϕ： $\Gamma \to \mathbb{R}$，即对于所有 $\gamma, \gamma' \in \Gamma$， $\phi(\gamma + \gamma') \geq \phi(\gamma) + \phi(\gamma')$。

引理 2.38 ([CM15], 引理 4.1)。假设 $\phi(0)=0$。

(1) 对于任意实数 t，集合 $\Gamma_\phi^t := \{(n,\alpha) \in \Gamma : \phi(n,\alpha) \geq nt\}$ 是 Γ 的子半群。(2) 设 t 是满足以下条件的实数

$$t < \lim_{n\to+\infty} \sup_{\alpha\in\Gamma_n} \frac{\phi(n,\alpha)}{n}.$$

那么 Γ_ϕ^t 满足上述条件 (a) $-(c)$ 。

定理 2.39 ([CM15], 定理 4.3). 我们使用与上文相同的记号。假设

$$\theta := \lim_{n\to+\infty} \sup_{\alpha\in\Gamma_n} \frac{\phi(n,\alpha)}{n} < +\infty.$$

对于所有 $n \geq 1$，记 $Z_n := \phi(n,\cdot)$ 为 Γ_n 上的均匀分布随机变量。这列随机变量 $(Z_n/n)_{n\geq 1}$ 依分布收敛于随机变量 Z，其概率律由下式定义

$$\mathbb{P}(Z \geq t) = \frac{\mathrm{vol}(\Delta(\Gamma_\Phi^t))}{\mathrm{vol}(\Delta(\Gamma))}, \quad \forall t \neq \theta.$$

此外，存在一个凹函数 $G_\phi : \Delta(\Gamma) \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$，其在$\Delta(\Gamma)^\circ$上取有限值，使得

$$Z = (G_\phi)_*\lambda,$$

其中 λ 表示 $\Delta(\Gamma)$上的归一化勒贝格测度。具体而言，对于任意有界连续函数 h，我们有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{h(\phi(n,\alpha)/n)}{|\Gamma_n|} = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Delta(\Gamma))} \int_{\Delta(\Gamma)^\circ} G_\phi(x)\mathrm{d}x.$$

现在，我们引入一些记号，以便在几何背景下应用上述结果。设 X是 $\mathrm{Spec}(k)$ 上维数为 $d \geq 1$ 的整射影概形， L 是 X上的线丛。假设存在一个正则有理点 $p \in X(k)$。于是，Cohen$\widehat{\ }$结构定理给出一个环同构 $\mathcal{O}_{X,p} \cong k[\![z_1,...,z_d]\!]$。若 $V_\bullet \subset V_\bullet(L)$是 L的分次线性级数，则在 p的邻域内将 L 平凡化后， $V_\bullet$ 可视为$\mathcal{O}_{X,p}[T]$的一个分次子代数。我们还在 $\mathbb{N}^d$上固定一个单项式序。由此得到 V_n 的一个$\mathbb{N}^d$-滤子，并将其分次齐次分量记为 $(\mathrm{gr}^{(n,\alpha)}(V_\bullet))_{\alpha\in\mathbb{N}^d}$ 。于是， $\mathbb{N}^{d+1}$-分次代数 $\mathrm{gr}(V_\bullet)$可视为 $k[z_1,...,z_d,T]$的一个分次子代数。我们定义分次半群

$$\Gamma(V_\bullet) := \{(n,\alpha) \in \mathbb{N}^{d+1} : \mathrm{gr}^{(n,\alpha)}(V_\bullet) \neq (0)\}.$$

现在我们加入解析数据。采用上文相同的记号，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，令 φ_n, ψ_n 为 V_n 上的范数，并假设当 k 为非阿基米德时，这些范数是超度量的。我们假设族 $(\varphi_n)_{n\geq 0}$,$(\psi_n)_{n\geq 0}$ 是次乘法的。对于所有 $(n,\alpha) \in \Gamma(V_\bullet)$， φ_n 和 ψ_n 在 $\mathrm{gr}^{(n,\alpha)}(V_\bullet)$ 上诱导出范数，分别记为 φ_n^α 和 ψ_n^α。对这些范数按指标 α 取正交直和，得到 $\mathrm{gr}(V_n)$ 上的范数 $\widehat{\varphi_n}, \widehat{\psi_n} : = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma_n} \mathrm{gr}^{(n,\alpha)}(V_\bullet)$。

对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们考虑 $\mathbf{gr}(V_n)$ 上按如下方式定义的辅助范数 η_n。对于所有$\alpha \in \Gamma(V_n)$，我们用 $s_{(n,\alpha)}$ 表示 (n,α) 在 $\mathbf{gr}(V_n)$ 中的典范像。于是有

$$\mathrm{gr}(V_n) = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma(V_n)} k s_{(n,\alpha)}.$$

η_n 定义为 $\mathbf{gr}(V_n)$ 上满足以下条件的唯一范数：$(s_{(n,\alpha)})_{\alpha\in\Gamma(V_n)}$ 是 $\mathbf{gr}(V_n)$ 的标准正交基。函数

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} \Gamma(V_\bullet) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (n,\alpha) & \longmapsto & \widehat{\deg}(\mathrm{gr}^{(n,\alpha)}(V_\bullet), \varphi_n^\alpha, \eta_n^\alpha), \end{array} \right.$$

随后是超可加的。若进一步

$$\exists C > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \quad \inf_{\alpha\in\Gamma(V_n)} \ln \|s_{(n,\alpha)}\|_{\widehat{\varphi}_n} \geq -Cn,$$

则先前的渐近结果推出存在一个凹函数 G_ϕ，称为凹变换，它取决于 $(\eta_n)_{n\geq 0}$，定义为

$$\forall x \in \Delta(\Gamma(V_\bullet)), \quad G_\phi(x) = \sup\{t \in \mathbb{R} : x \in \Delta(\Gamma(V_\bullet)_\phi^t)\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

注 2.40。使用上述相同的记号，凹变换G_ϕ 的定义仅取决于范数族 $\varphi := (\varphi_n)_{n\geq 0}$。将其记为 G_φ。然而，G_φ 的构造取决于正则有理点 $p \in X(k)$的选择以及 $\mathbb{N}^d$上的单项式序。

定理 2.41 ([CM15], 推论 4.6。设 X 是定义在$\mathrm{Spec}(k)$上的维数为 d的整射影概形，L 是 X 上赋予两个连续度量 φ、ψ的线丛。设 $V_\bullet$是 L 的分次线性级数，使得 *Okounkov* 半群 $\Gamma(V_\bullet)$ 满足

(a) $\Gamma(V_0) = \{0\}$;(b) 存在有限集 $B \subset \{1\} \times \mathbb{N}^d$，使得 $\Gamma(V_\bullet)$ 包含于由 B 生成的 $\mathbb{N}^{d+1}$ 子幺半群中。(c) $\Gamma(V_\bullet)$ 作为群生成 $\mathbb{Z}^{d+1}$。

则序列 $(\widehat{\mu}(V_n, \|\cdot\|_{n\varphi}, \|\cdot\|_{n\psi})/n)_{n\geq 1}$ 在 $\mathbb{R}$ 中收敛。此外，如果 L 是大，则记

$$\mathrm{vol}_\chi(L,\varphi,\psi) := (d+1)\,\mathrm{vol}(L) \lim_{n\to+\infty} \frac{\widehat{\mu}(H^0(X,nL), n\varphi, n\psi))}{n} = -\lim_{n\to+\infty} \frac{(d+1)!}{n^{d+1}} \ln \frac{\|\cdot\|_{n\varphi,\det}}{\|\cdot\|_{n\psi,\det}}.$$

注 2.42. 如果 L 是大，[LM09] 的引理 2.2 保证定理 2.41 的假设得到满足。

2.4.2. 凹变换与相对 χ-体积（$\mathbb{R}$-除子）。在本段中，我们回顾 $\mathbb{R}$-除子的 Okounkov 体的构造，以及赋予格林函数的 $\mathbb{R}$-除子的凹变换的构造。我们采用 [LM09，Bal22]。

令 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$。设 X 是 $\mathrm{Spec}(k)$ 上维数为 d 的整射影正规概形，并假设存在一个正则有理点 $p \in X(k)$。我们在 $\mathbb{N}^d$上固定一个单项式序。令 $D \in \mathrm{Div}(X)_\mathbb{K}$为一个大 $\mathbb{K}$-除子。对所有 $f \in H^0_\mathbb{K}(D)$，令 $f_1^{a_1} \cdots f_l^{a_l}$为 $\mathrm{div}(f) + D$ 在 p中的一个局部方程，其中 $f_1, \ldots, f_l \in \mathcal{O}_{X,p} \setminus \{0\}$ 和 $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}_{>0}$。令

$v(f) := a_1 v(f_1) + \cdots + a_l v(f_l) \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$，它与 $\mathrm{div}(f) + D$ 在 p中的局部方程选择无关。现在我们定义

$$\Delta(D) := \overline{\left\{ \frac{v(f)}{n} : n \geq 1, \quad f \in H^0_{\mathbb{R}}(D) \right\}} \subset \mathbb{R}^d.$$

它是一个凸体 $\mathbb{R}^d$，称为 D的 ***Okounkov*** 体。

D的一个格林函数记为 g。代数 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0_{\mathbb{K}}(X, nD)$是 $k[\![z_1, ..., z_d]\!]$的一个子有限型分次子代数。回顾（参见 §2.3.3），对于所有整数 $n \geq 0$，g在 $H^0_{\mathbb{K}}(X, nD)$上定义了一个范数 ξ_{ng}。注意，当 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$时，这个范数与相应的连续度量φ_g 在 $\mathbb{Q}$-线丛 $\mathcal{O}_X(D)$上定义的上确界范数一致。若 h 是 D的另一个格林函数，则对 Chen 和 Maclean 结果的推广可推出以下序列收敛

$$\frac{\widehat{\deg}(H^0_{\mathbb{K}}(X, nD), \xi_{ng}, \xi_{nh})}{n^{d+1}/(d+1)!}, \quad n \geq 1, \quad H^0_{\mathbb{K}}(X, nD) \neq (0).$$

其极限记为 $\mathrm{vol}_\chi(D, g, h)$。此外，我们有凹变换 $G_{(D,g)}, G_{(D,h)}$:$\Delta(D) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$，其在 $\Delta(D)^\circ$ 中取实值。于是有等式

$$\mathrm{vol}_\chi(D, g, h) = (d+1)! \int_{\Delta(D)} G_{(D,g)} - G_{(D,h)} \mathrm{d}\lambda,$$

其中 λ $\Delta(D)$ 上的勒贝格测度。

注释 2.43。设 L 是一个可逆$\mathcal{O}_X$ -模，且 s 是 L的一个非零有理截面。为简便起见，我们用 L 表示 $N^1_{\mathbb{R}}(X)$ 中的类 $\mathrm{div}(s)$。这个类与 s的选取无关。此外，若 $\varphi \in C^0(L)$，则有等式 $G_{(\mathrm{div}(s),g_\varphi)} = G_{(L,\varphi)}$，其中$\Delta(L)$。我们将不加赘述地使用形如 $\Delta(L + tA)$ 和 $G_{(L+tA,\varphi+t\Phi)}$的表达式，其中A 是一个可逆$\mathcal{O}_X$-模，$\Phi \in C^0(A)$，且 $t \in \mathbb{R}$。

注释 2.44。假设 D 是 X 上的一个充足 $\mathbb{R}$-除子，并配备了格林函数g。那么凹变换 $G_{(D,g)}$ 在 $\Delta(D)$ 上有限（参见 [BC11], §1.3）。

3. 局部可微性

本节中，我们固定一个无限完备赋值域（k，$|\cdot|$）以及一个维数为 d、定义在 $\mathrm{Spec}(k)$ 上的几何整正规射影概形 X。我们假设 k 上的包络函数连续性猜想（猜想 2.27）成立。

3.1. 奇异度量与奥库科夫体的切片。我们研究一个特殊情形。设 A 是 X 上的一个充足线丛，并假设存在一个非零整体截面 $s \in H^0(X, A)$。例 2.3 给出 A 上的一个奇异度量 ψ_s。回忆一下，若 ϕ_0 是 A 上的参考连续度量，则 $\psi_s = \phi_0 + \ln |s|_{\phi_0}$。于是，$-\psi_s$ 是 $-A$ 上的一个奇异度量，可以写成 $-\psi_s = -\phi_0 - \ln |s|_{\phi_0}$，其中 $-\phi_0 \in C^0(-A)$ 且 $-\ln |s|_{\phi_0}$: $X^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，它是连续的且不恒等于 $+\infty$。对于所有 $R > 0$，我们记

$$-\psi_{s,R} := \min\{-\phi + R, -\psi_s\}.$$

设 L 是 X 上的半丰沛大线丛，并令 $\varphi \in C^0(L)$。令 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $nL - A$ est 为大。于是由引理 2.10 可知，对所有 $R > 0$, $n\varphi - \psi_{s,\ R} \in C^0(nL - A)$，且对所有

$R>0$ 充分大时，等式

$$\|\cdot\|_{n\varphi-\psi_{s,R}}=\|\cdot\|_{n\varphi_0-\psi_s}. \tag{4}$$

由于 X 是几何整的，可以假设存在一个正则有理点 $x\in X(k)$。我们在 $\mathbb{N}^d$ 上固定一个单项式序（例如字典序）。于是，由 §2.4 的结果可得一个凸体 $\Delta(nL-A)\subset\mathbb{R}^d$，并且对所有 $R>0$，都有一个凹变换 $G_{n\varphi-\psi_{s,\,R}}\colon\ \Delta(nL-A)\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$（在 $\Delta(nL-A)^\circ$ 中取实值）。此外，对所有 $R>0$，$G_{n\varphi-\psi_{s,\,R}}$ 的构造仅取决于 $\|\cdot\|_{n\varphi-\psi_{s,\,R}}$，$p$ 和该单项式序。

引理 3.1。存在 $R_0>0$，使得对所有 $R\geq R_0$，凹变换 $G_{n\varphi-\psi_{s,\,R}}$ 与 R 无关，记作 $G_{n\varphi-\psi_s}$。

证明。这直接由上述讨论和等式（4）得出。 □

命题 3.2。假设 $nL-A$ 是半丰沛的。令 $\psi\in C^0(nL-A)$。那么存在 $R_0>0$，使得对所有 $R\geq R_0$，我们都有

$$\mathcal{E}\circ P(n\varphi-\psi_s,\psi):=\mathcal{E}\circ P(n\varphi-\psi_{s,R},\psi)=d!\int_{\Delta(nL-A)^\circ}G_{n\varphi-\psi_{s,R}}(x)-G_\psi(x)\lambda(\mathrm{d}x),$$

其中 λ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的勒贝格测度。

证明。对所有 $R>0$，由于 $P(n\varphi-\psi_{s,\,R})$ 是连续的（回忆一下，我们假设包络的连续性成立），因此有

$$\mathcal{E}\circ P(n\varphi-\psi_{s,R},\psi)=\frac{1}{d+1}\,\mathrm{vol}_\chi(nL-A,n\varphi-\psi_{s,R},\psi)=d!\int_{\Delta(nL-A)^\circ}G_{n\varphi-\psi_{s,R}}(x)-G_\psi(x)\lambda(\mathrm{d}x),$$

其中，第一个等式由定理 2.35 得出，第二个等式由定理 2.41 得出。由引理 3.1 可得结论。□

回忆一下，

(1) L 是 X 上的半丰沛且大的线丛，且 $\varphi,\psi\in C^0(L)$；(2) A 是 X上的充足线丛，$s\in H^0(X,A)$、$\phi\in C^0(A)$，且 $\psi_s=\phi+\ln|s|_\phi$ 是 A上的奇异度量；

令 $u\in C^0(X^{\mathrm{an}})$，记

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}_{\geq 0}\\ t&\longmapsto&\mathrm{vol}_\chi(L,\varphi+tu,\psi).\end{array}\right.$$

f 是凹且连续可微的（参见定理 2.37），并且我们有

$$\forall t\geq 0,\quad f'(t)=(d+1)\int_{X^{\mathrm{an}}}u(\mathrm{d}\mathrm{d}^cP(\varphi+tu))^{\wedge d}. \tag{5}$$

按照 [Nys14],，我们将推广（5），考虑 $u=\phi-\psi_s=-\ln|s|_\phi$的情形。对于$R>0$，回忆 $u_R:=\phi-\psi_{s,R}=\min\{u,R\}$ 是 X^{an}上的连续函数。

引理 3.3. 令 $t\geq 0$。则存在 $R_0>0$，使得对所有 $R\geq R_0$，我们有$P(\varphi+tu_R)=P(\varphi+tu)^\star$。

证明。对于所有 $R>0,\varphi+tu_R\leq\varphi+tu$，可推出 $P(\varphi+tu_R)\leq P(\varphi+tu)\leq P(\varphi+tu)^\star$。我们来证明存在 $R_0>0$，使得对于所有 $R\geq R_0,P(\varphi+tu_R)\geq P(\varphi+tu)^\star$。由于$\varphi+tu$ 在开集 $X^{\mathrm{an}}\smallsetminus\{s=0\}^{\mathrm{an}}$上连续，因此在该开集上局部有界。因此 $P(\varphi+tu)^*\not\equiv+\infty$。此外，当 $P(\varphi+tu_1)\in C^0(L)$ 时，$P(\varphi+tu)^\star\not\equiv-\infty$ 是

定义 $P(\varphi+tu)$ 中的一个候选项。命题 2.29 得出 $P(\varphi+tu)^\star \in$ 拟次调和(L)。特别地， $P(\varphi+tu)^\star \in$ 拟次调和(L) 是上半连续的，因此上有界。由此存在$R_1>0$ ，使得

$$P(\varphi+tu)^\star \le \varphi+tR_1.$$

根据 $P(\varphi+tu)^\star$ 的定义，我们有 $P(\varphi+tu)^\star \le (\varphi+tu)^\star=\varphi+tu$。因此，存在$R_0>0$ 使得

$$P(\varphi+tu)^\star \le \varphi+tu_{R_0}.$$

但 $P(\varphi+tu)^\star$ 是 $P(\varphi+tu_{R_0})$ 定义中的一个候选项，因此 $P(\varphi+tu_{R_0}) \ge P(\varphi+tu)^\star$。对于所有 $R\ge R_0$，我们有 $P(\varphi+tu)^\star \le P(\varphi+tu_{R_0}) \le P(\varphi+tu_R) \le P(\varphi+tu)^\star$，故结论得证。□

引理 3.3 使我们能够对所有 $t\ge 0$ 定义一个 Monge-Ampère 测度 $(\mathrm{dd}^c P(\varphi+tu))^{\wedge d}$:=$(\mathrm{dd}^c P(\varphi+tu_R))^{\wedge d}$，其中所有 $R>0$ 都充分大。

令 $n>0$、 $L':=L+\frac{1}{n}A$ 和 $nL'-A=nL$ 为半丰沛且大的。引理 3.1 和命题 3.2 给出了一个凹变换 $G_{n\varphi+(\phi-\psi_s)}$ 以及等式

$$\mathcal{E}\circ P(n\varphi+(\phi-\psi_s),n\psi):=\mathcal{E}\circ P(n\varphi+(\phi-\psi_{s,R}),n\psi)=d!\int_{\Delta(nL)^\circ} G_{n\varphi+(\phi-\psi_s)}(x)-G_{n\psi}(x)\lambda(\mathrm{d}x),$$

对所有充分大的 $R>0$ 均成立。

命题 3.4。对于所有 $t\in\mathbb{R}_{\ge 0}$，令 $f(t):=$体积$_\chi(L、\varphi+tu、\psi)=(d+1)\mathcal{E}\circ P(\varphi+tu、\psi)$。则 f 是连续可微函数，并且有

$$\forall t\ge 0,\quad f'(t)=(d+1)\int_{X^{\mathrm{an}}} u(\mathrm{dd}^c P(\varphi+tu))^{\wedge d}.$$

证明。令 $t\in\mathbb{R}_{\ge 0}$和 $k\in\mathbb{N}$，记 $f_k(t):=$体积$_\chi(L、\varphi+tu_k、\psi)$。$(f_k)_{k\ge 0}$ 是由凹函数构成的单调且连续可微函数序列，逐点收敛于 f。定理 2.37 意味着，对于所有 $k\ge 0$和所有 $t\ge 0$，我们有

$$f_k'(t)=(d+1)\int_{X^{\mathrm{an}}} u_k(\mathrm{dd}^c P(\varphi+tu_k))^{\wedge d}.$$

引理 3.5. 设 $t\ge 0$。设 $(t_j)_{j\ge 0}$ 是一个单调的非负实数列，其极限为 t。则度量序列 $(P(\varphi+t_j u))_{j\ge 0}$ 一致收敛于 $P(\varphi+tu)$。

证明. 对所有 $j\ge 0$，设 $\psi_j:=P(\varphi+t_j u)\in$ 拟次调和$(L)\cap C^0(L)$，且 $\psi:=P(\varphi+tu)$。我们首先假设序列 $(t_j)_{j\ge 0}$ 是递减的。于是 $(\psi_j)_{j\ge 0}$ 是定义在 L 上的递减拟次调和度量序列，且下有界于 $\psi\not\equiv-\infty$。因此 $P(\varphi+tu)\le\rho:=\lim_{j\to+\infty}\psi_j\in$拟次调和$(L)$。对所有 $j\ge 0$， $\psi_j\le\varphi+t_j u$。因此 $\rho\le\varphi+tu$，且 $\rho\le P(\varphi+tu)$。于是 $\rho=P(\varphi+tu)$。

现在我们考虑 $(t_j)_{j\ge 0}$ 递增的情形。记 $\rho:=\lim_{j\to+\infty}\psi_j$。于是$\rho\le\psi=P(\varphi+tu)$。令 $\epsilon>0$和 $\Psi\in\mathrm{PSH}(L)\cap C^0(L)$ 满足 $\Psi\le\varphi+tu$。对所有 $j\ge 0$，$\psi_j-\Psi$ 均为下半连续。因此，对所有 $x\in X^{\mathrm{an}}$，存在 $j_0\ge 0$，使得 $\{\Psi<\psi_j+\epsilon\}$ 是 x 的一个开邻域，对所有 $j\ge j_0$均如此。由 X^{an}的紧致性，存在 $j_0\ge 0$，使得对所有 $j\ge j_0$， $\Psi\le\psi_j+\epsilon$。因此 $P(\varphi+tu)\le\rho+\epsilon$且 $P(\varphi+tu)=\rho$。

在这两种情况下，随着 $\rho\in C^0(L)$，Dini 引理推出 $(\psi_j)_{j\ge 0}$ 一致收敛到ψ。□

[BE21] 的引理 3.5 和定理 8.12 推出该映射的连续性

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geq 0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (d+1)\int_{X^{\mathrm{an}}} u(\mathrm{d}\mathrm{d}^c P(\varphi+tu))^{\wedge d}. \end{array} \right.$$

那么，$(f_k')_{k\geq 0}$ 是一个实值递减函数列，逐点收敛到连续函数 g。由 Dini 引理，$(f_k')_{k\geq 0}$ 在紧集上一致收敛到 g。因此，$(f_k)_{k\geq 0}$ 在紧集上一致收敛到连续函数 f，故该函数连续可微，导数为 g。□

推论 3.6. 我们使用与命题 *3.4* 相同的记号。那么函数

$$f_\varphi : (t \in \mathbb{R}_{\geq 0}) \mapsto (d+1)! \int_{\Delta(L)} G_{\varphi+tu}(x)\lambda(\mathrm{d}x),$$

是连续可微的，并且对任意 $t \geq 0$，有

$$f_\varphi'(t) = (d+1)\int_{X^{\mathrm{an}}} u(\mathrm{d}\mathrm{d}^c P(\varphi+tu))^{\wedge d}.$$

证明。 这是命题 3.4 与等式结合所得的推论

$$f(t) = f_\varphi(t) - \int_{\Delta(L)} G_\psi(x)\lambda(\mathrm{d}x).$$

□

为了得到相对 χ-体积的可微性，我们将利用 Okounkov 体切片上凹变换的性质。由于 X 是几何整的，可以假设存在一个正则有理点 $p \in X(k)$。在 p中，我们设定一组坐标$(z_1, \ldots, z_d)$，使得 $z_1 = 0$是 p中一个 Cartier 除子E 的局部方程，该除子的底层子概形假设为整且正规。我们固定一个大类 $\xi \in N^1(X)_{\mathbb{R}}$，其增广基 locus 记为 $B_+(\xi)$，并假设$E \not\subseteq B_+(\xi)$，。记

$$\Delta(\xi)_t := \Delta(\xi) \cap (t \times \mathbb{R}^{d-1}),$$
$$\Delta(\xi)_{\geq t} := \Delta(\xi) \cap ([t, +\infty[\times \mathbb{R}^{d-1}).$$

令 $e \in N^1(X)_{\mathbb{R}}$为 E的类，并设 $\mu(\xi; e) := \sup\{s > 0 : \xi - s\cdot e \in 大(X)\}.E \not\subseteq B_+(\xi)$ 蕴含 $\Delta(\xi)_0 \neq \varnothing$ （参见 $\xi_{|E} \in 大(E)$）。

定理 3.7 ([LM09], 定理 4.26)**.** 沿用上文的记号，对于所有 $0 \leq t \leq \mu(\xi; e)$，我们有

$$\Delta_{\geq t}(\xi) = \Delta(\xi - t\cdot e) + t\cdot e_1,$$

其中 $(e_1, \ldots, e_d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$的典范基。此外，

$$\Delta(\xi)_t = \Delta_{X|E}(\xi - t\cdot e),$$

其中 $\Delta_{X|E}(\xi - t\cdot e)$ 是 E 上代表该类$(\xi - t\cdot e)_{|E}$ 的大 $\mathbb{R}$-除子的 *Okounkov* 体（*Okounkov* 体是相对于点 $p \in E^{\mathrm{reg}}$构造的）。

我们进一步假设， E 是 Cartier 除子 div(s) 的一个不可约分支，其中 $s \in H^0(X, A)$ 是充足可逆 $\mathcal{O}_X$-模 A 的一个整体截面，使得 $s = z_1$在 p 中局部成立。令 $t \geq 0$ 和 $\Phi \in C^0(A)$ 为一个参考度量。我们将在 $\Delta(L + tA)_{\geq t}$ 上比较凹变换 $G_{(L+tA,\varphi+t\Phi)}$ et $G_{(L,\varphi+t(\Phi-\psi_s))}$。

命题 3.8。 使用上述相同的记号，对于所有 $(a、\ \alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}\cap\Delta(L+tA)_{\geq t}$，我们有

$$G_{(L+tA,\varphi+t\Phi)}(a,\alpha) = G_{(L,\varphi+t(\Phi-\psi_s))}(a-t,\alpha). \tag{6}$$

证明。 首先注意，对所有 $(a,\alpha) \in \Delta(L+tA)_{\geq t}$，定理 3.7 给出 $(a-t,\alpha) \in \Delta(L)$。

设 u 是 L 的一个非零有理截面，记 $D:=\mathrm{div}(u)$，并令 g_φ 为格林函数–ln $|u|_{\varphi\circ}$ 那么对所有 $f \in H^0(D)$， $f\cdot 1 \in H^0_{\mathbb{R}}(D+tE)$，且对所有 $x \in X^{\mathrm{an}}$，我们有

$$|f\cdot 1|_{g_\varphi+tg_\Phi}(x) = |f|_{g_\varphi}(x)\cdot|1|_{tg_\Phi}(x) = |f|_{g\varphi+tg_{\Phi-\psi_s}}(x). \tag{7}$$

因此，对所有 $n \geq 1$，单射态射 $\iota_n:\ H^0(nD) \to H^0_{\mathbb{R}}(nD+ntE)$ 在其像上诱导一个等距映射，其中 $H^0(nD)$（分别地， $H^0_{\mathbb{R}}(nD+ntE)$）赋有范数$\|\cdot\|_{ng_\varphi+ntg_{\Phi-\psi_s}}$（分别地， $\|\cdot\|_{g_{n\varphi+ntg_\Phi}}$）。明确地说，我们有

$$\iota_n(H^0(nD)) = \{f\in H^0_{\mathbb{R}}(nD+ntE):\quad v(f)\geq(nt,0,...,0)\}.$$

因此，二者等价

$$\forall f\in H^0(nD),\quad f\in \mathrm{gr}^{(n,v(f))}(V_\bullet(D)) \Leftrightarrow \iota(f)\in \mathrm{gr}^{(n,v(f)+nte_1)}(V_\bullet(D+tE)))$$

因此， ι_n 在赋予由 $\|\cdot\|_{ng_\varphi+ntg_{\Phi-\psi_s}}$诱导的子商范数 $\|\cdot\|_{(n,(na,n\alpha)),D}$后，在 $\mathbf{gr}^{(n,(na,n\alpha))}(V_\bullet(D))$ 与赋予由 $\|\cdot\|_{g_{n\varphi+ntg_\Phi}}$ 诱导的子商范数 $\|\cdot\|_{(n,(n(a+t),n\alpha)),D+tE}$ 后，在 $\mathbf{gr}^{(n,(n(a+t),n\alpha))}(V_\bullet(D+tE))$ 之间诱导一个等距映射。此外，ι_n 还在赋予典范范数$\|\cdot\|_{\eta^{(n,(na,n\alpha))}}$（在 §2.4 中引入）后，在 $\mathbf{gr}^{(n,(na,n\alpha))}(V_\bullet(D))$ 与赋予典范范数 $\|\cdot\|_{\eta^{(n,(n(a+t),n\alpha))}}$后，在 $\mathbf{gr}^{(n,(n(a+t),n\alpha))}(V_\bullet(D+tE))$ 之间诱导一个等距映射。

最后，等式

$$\begin{aligned}&\widehat{\deg}(\mathrm{gr}^{(n,(na,n\alpha))}(V_\bullet(D)),\|\cdot\|_{(n,(na,n\alpha)),D},\|\cdot\|_{\eta^{(n,(na,n\alpha))}})\\ =&\widehat{\deg}(\mathrm{gr}^{(n,(n(a+t),n\alpha))}(V_\bullet(D+tE))),\|\cdot\|_{(n,(n(a+t),n\alpha)),D+tE},\|\cdot\|_{\eta^{(n,(n(a+t),n\alpha))}}),\end{aligned}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ and $(a,\alpha)\in\mathbb{N}^d$均成立。由凹变换的定义即可得到 (6)。□

我们沿用上文的记号。根据定理 3.7，我们有 $\Delta(L)_0 = \Delta_{X|E}(L)$。注意到 $E\nsubseteq B_+(L)$ 蕴含 $L_{|E}$ 既是半丰沛的又是大的。此外，我们有一个单射态射

$$\iota:((0,\alpha)\in\Delta(L)_0)\mapsto\alpha\in\Delta(L_{|E}).$$

若 $\varphi\in C^0(L)$，则 $P(\varphi)\in$ 拟次调和$(L)\cap C^0(L)$，因此 $P(\varphi)|^E\in$ 拟次调和$(L_{|E})\cap C^0(L_{|E})$。我们还有凹变换 $G_{(L_{|E},P(\varphi)|^E)}:\ \Delta(L_{|E})\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 以及 $G_{(L,\varphi)}:\ \Delta(L)\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$。后者由以下命题联系起来。

命题 3.9。 我们使用上述相同的记号，并假设 L 是充足的。我们有等式

$$G_{(L,\varphi)}(0,\alpha) = G_{(L_{|E},P(\varphi)_{|E})}(\alpha),$$

对于所有$(0、\ \alpha)\in\Delta(L)_0$。特别地， $G_{(L,\varphi)}$ 在 $\Delta(L_{|E})$中 $\Delta(L)$的相对内部内取实值。

证明。滥用记号，我们记 $G_1 := G_{(L,\varphi)}$和$G_2 = G_{(L_{|E},P(\varphi)_{|E})} \circ \iota$。根据 $P(\varphi)$的定义，有 $P(\varphi)_{|E} \leq \varphi_{|E}$。对于所有$(n,\ (0,n\alpha)) \in \Gamma(L)$，我们将由分次线性级数 $\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} H^0(X,mL)$的Okounkov过滤给出的$(n,\ (0,\alpha))$-分次分量记为$\mathrm{gr}^{(n,(0,n\alpha))}$，分别地，将由 $\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} H^0(E,\ mL_{|E})$给出的$(n,\alpha)$-分次分量记为$\mathrm{gr}^{(n,\alpha)}$。对于所有$(n,\ (0,n\alpha)) \in \Gamma(L)$，我们将由 φ诱导的 $\mathrm{gr}^{(n,(0,n\alpha))}$ 上的子商范数记为 $\varphi^{(n,(0,n\alpha))}$，分别地，将由 $P(\varphi)_{|E}$诱导的$\mathrm{gr}^{(n,\alpha)}$ 上的子商范数记为 $P(\varphi)_{|E}^{(n,n\alpha)}$。最后，对于所有$(n,\ (0,n\alpha)) \in \Gamma(L)$，我们将$\mathrm{gr}^{(n,(0,n\alpha))}$上的典范范数记为 $\eta^{(n,(0,n\alpha))}$，分别地，将$\mathrm{gr}^{(n,\alpha)}$上的典范范数记为 $\eta^{(n,n\alpha)}$。

对于任意整数 $n \geq 1$，我们有不等式 $\|\cdot\|_{nP(\varphi)_{|E}} \leq \|\cdot\|_{nP(\varphi)} = \|\cdot\|_{n\varphi}$。此外，对于所有 $(n,\ (0,\ n\alpha)) \in \Gamma(L)$，$\iota$ 在 $(\mathrm{gr}^{(n,(0,n\alpha))},\ \|\cdot\|_{\eta^{(n,(0,n\alpha))}})$ 与其在 $(\mathrm{gr}^{(n,\alpha)},\ \|\cdot\|_{\eta^{(n,n\alpha)}})$ 中的像之间诱导一个等距映射。因此，我们得到不等式

$$\widehat{\deg}(\mathrm{gr}^{(n,(0,n\alpha))}, \|\cdot\|_{\varphi^{(n,(0,n\alpha))}}, \|\cdot\|_{\eta^{(n,(0,n\alpha))}}) \leq \widehat{\deg}(\mathrm{gr}^{(n,n\alpha)}, \|\cdot\|_{P(\varphi)_{|E}^{(n,n\alpha)}}, \|\cdot\|_{\eta^{(n,n\alpha)}}),$$

对于所有 $(n,\ (0,\ n\alpha)) \in \Gamma(L)$。因此 $G_1 \leq G_2$。

为证明反向不等式，我们使用以下延拓性质（[Fan22, 定理 1.1 和 4.1]）。设 $\epsilon > 0$ 和 $n \geq 1$。那么对于所有 $\widetilde{t} \in H^0(E,\ nL_{|E})$，存在一个整数$m_0 \geq 0$，使得对于所有 $m \geq m_0$，都存在 $t_m \in H^0(X,\ nmL)$，使得

$$(t_m)_{|E} = \widetilde{t}^m \text{ and } \|t_m\|_{nm\varphi} = \|t_m\|_{nmP(\varphi)} \leq e^{m\epsilon}\|\widetilde{t}^m\|_{nmP(\varphi)_{|E}}. \tag{8}$$

令 $t \in H^0(X,\ nL)$，并假设 $v(t)$ 的形式为 $(0,\ \alpha) \in \mathbb{N}^d$。记 $\widetilde{t} := t_{|E} \in H^0(X|E,\ nL)$，则有 $v(t)/n \in \Delta(L)_0$ 以及 $v(\widetilde{t})/n \in \Delta(L_{|E})$。令 $u \in \mathbb{R}$ 使得

$$nu \leq \widehat{\deg}(\mathrm{gr}^{(n,v(\widetilde{t}))}, P(\varphi)_{|E}^{(n,v(\widetilde{t}))}, \eta^{(n,v(\widetilde{t}))}).$$

令 $m \gg 0$ 和 $t_m \in H^0(X,\ nmL)$ 满足等式 (8) 中的两个等式均成立。则

$$\begin{aligned} m\widehat{\deg}(\mathrm{gr}^{(n,v(\widetilde{t}))}, P(\varphi)_{|E}^{(n,v(\widetilde{t}))}, \eta^{(n,v(\widetilde{t}))}) &\leq \widehat{\deg}(\mathrm{gr}^{(nm,mv(\widetilde{t}))}, P(\varphi)_{|E}^{(nm,mv(\widetilde{t}))}, \eta^{(nm,mv(\widetilde{t}))}) \\ &= -\ln\|\widetilde{t}^m\|_{P(\varphi_{|E})^{(nm,mv(\widetilde{t}))}} + \ln\|\widetilde{t}^m\|_{\eta^{(nm,mv(\widetilde{t}))}} \\ &\leq -\ln\|t_m\|_{\varphi^{nm,v(t_m)}} + \ln\|t_m\|_{\eta^{(nm,v(t_m))}} + m\epsilon \\ &= \widehat{\deg}(\mathrm{gr}^{(nm,v(t_m))}, \varphi^{(nm,v(t_m))}, \eta^{(nm,v(t_m))}) + m\epsilon. \end{aligned}$$

因此 $nm(u - \epsilon/n) \leq \widehat{\deg}(\mathrm{gr}^{(nm,v(t_m))}\ \varphi^{(nm,v(t_m))}\ \eta^{(nm,v(t_m))})$。此外，等式 $v(f_m) = (0,\ mv(\widetilde{t}))$ 意味着

$$\iota\left(\frac{v(t)}{n}\right) = \iota\left(\frac{v(t_m)}{nm}\right) = \frac{v(\widetilde{t})}{n} \Rightarrow \frac{v(t)}{n} = \frac{v(t_m)}{nm}.$$

因此最后

$$u - \frac{\epsilon}{m} \leq G_1\left(\frac{v(t)}{n}\right) \Rightarrow G_2\left(\frac{v(t)}{n}\right) \leq G_1\left(\frac{v(t)}{n}\right) + \frac{\epsilon}{n}.$$

注意，ϵ 与 t无关，因此我们有

$$\forall x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \frac{1}{n}(0, v(H^0(X|E, nL))), \quad G_2(x) \leq G_1(x).$$

由稠密性可得不等式 $G_2 \leq G_1$ 在 $\Delta(L)_0$ 上成立。 □

推论 3.10. 采用命题 *3.9* 中的相同记号，对所有 $\varphi, \psi \in C^0(L)$，有

$$\mathrm{vol}_\chi(L_{|E}, P(\varphi)_{|E}, P(\psi)_{|E}) = d! \int_{\Delta(L)_0} \left(G_{(L,\varphi)} - G_{(L,\psi)}\right)(0,\alpha)\mathrm{d}\alpha.$$

证明。我们首先证明，在当前情形下，有 $\iota(\Delta(L)_0) = \Delta(L_{|E})$。对所有 $n \geq 1$，以及所有 $\widetilde{t} \in H^0(E, nL_{|E})$，都有 $v(\widetilde{t})/n \in \Delta(L_{|E})$，并且存在 $m \geq 1$ 和 $t \in H^0(X, nmL)$ 使得 $t_{|E} = \widetilde{t}^m$。于是 $v(t)/nm \in H^0(X, nmL) \cap \Delta(L)_0$ 并且

$$\bigcup_{n\geq 1} \frac{1}{n} v(H^0(E, L_{|E})) \subset \iota\left(\bigcup_{n\geq 1} \frac{1}{n} H^0(X, nmL) \cap \Delta(L)_0\right).$$

因此，由于 ι 是闭集且连续，$\iota(\Delta(L)_0) = \Delta(L_{|E})$。

接下来，根据定理 2.41 和命题 3.9 后面的讨论，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_\chi(L_{|E}, P(\varphi)_{|E}, P(\psi)_{|E}) &= d! \int_{\Delta(L_{|E})} \left(G_{(L_{|E}, P(\varphi)_{|E})} - G_{L_{|E}, P(\psi)_{|E}}\right)(\alpha)\mathrm{d}\alpha \\
&= d! \int_{\iota(\Delta(L)_0)} \left(G_{(L_{|E}, P(\varphi)_{|E})} - G_{L_{|E}, P(\psi)_{|E}}\right)(\alpha)\mathrm{d}\alpha \\
&= d! \int_{\Delta(L)_0} \left(G_{(L,\varphi)} - G_{(L,\psi)}\right)(0,\alpha)\mathrm{d}\alpha.
\end{aligned}$$

□

3.2. **局部可微性的证明**。我们首先引入一些记号。设 $m \geq 1$为一个整数。

(i) 设 $L = L_0$ 为赋予连续度量 $\varphi = \varphi_0 \in C^0(L)$ 的丰沛线丛。(ii) 对任意 $i = 1, \ldots, m$，设 L_i 为 X 上赋予连续度量$\varphi_i \in C^0(L)$ 的线丛。

对所有 $i = 0, \ldots, m$，设 s_i 为 L_i 的非零有理截面，$D_i := \mathrm{div}(s_i)$ 为其对应的 Cartier 除子，g_i 为 D_i 上与度量 φ_i 相关联的格林函数。记作$D := D_0$ 以及 $g := g_0$。滥用记号，对于所有 $a \in \mathbb{R}^m$，记作 $L_a = (L_a, \varphi_a)$

$$\overline{(}L_a) := (L_a, \varphi_a) := \left(D + \sum_{i=1}^m a_i D_i, g + \sum_{i=1}^m a_i g_i\right).$$

我们还记 {style id='1'>L}:=(L, L_1, ..., L_m) 以及 $O_{\mathbf{L}} := \{a \in \mathbb{R}^m : L_a \text{为充足}\}$。我们将研究函数

$$f^{\mathbf{L}} : \left| \begin{array}{ccc} O_{\mathbf{L}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & (d+1)! \int_{\Delta(L_a)} G_{\varphi_a}(x)\lambda(\mathrm{d}x) \end{array} \right.$$

定理 3.11。函数 $f^{\mathbf{L}}$ 在 $O_{\mathbf{L}}$上连续可微。

证明。只需证明 $f^{\mathbf{L}}$ 在 $0 \in O_{\mathbf{L}}$处具有连续可微性。只需证明 $f^{\mathbf{L}}$ 在 0 处存在连续偏导数，并由对称性证明其在 0 处沿第一坐标方向存在连续偏导数。记 $\underline{A} = (A, \Phi) := (L_1, \varphi_1)$。令

$$U := \{t \in \mathbb{R} : te_1 \in O_{\mathbf{L}}\},$$

它是 $\mathbb{R}$的一个开子集。

我们对 $d = \dim(X)$进行归纳法。首先考虑 $d = 0$的情形。于是对于所有$t \in U$，我们有

$$f^{\mathbf{L}}(te_1) = f^{\mathbf{L}}(0) + t(d+1)! \int_{\Delta(A)} G_\Phi(x)\lambda(\mathrm{d}x).$$

因此，$f^{\mathbf{L}}$ 在 0 处存在偏导数，并且

$$\frac{\partial f^{\mathbf{L}}}{\partial x_1}(a) = (d+1)! \int_{\Delta(A)} G_\Phi(x)\lambda(\mathrm{d}x),$$

其关于（L，φ）连续变化。

现在假设 $d = \dim(X) \geq 1$。我们先进行约化。

引理 3.12。只需在以下情形下证明定理 *3.11*：

(i) A 是非常 ***ample***；(ii) 存在一个正则有理点 $p \in X(k)$；(iii) 存在一个非零整体截面 $s \in H^0(X, A)$、$\mathrm{div}(s)$ 的一个不可约分支 E以及 p 中 X 的一个坐标系 $(z_1, \ldots, z_d)$，使得 E 是一个有效 *Cartier* 除子，其底层子概形是 X 的几何整正规子概形，满足 $E \not\subseteq B_+(L)$，并且 z_1 是 p中 E 的一个局部方程。

证明。我们首先证明可以假设 A是非常 ample。记 $(A, \Phi) = (A_1, \Phi_1) - (A_2, \Phi_2)$，其中 A_1、A_2 都是非常 ample。令 $\mathbf{L}_A := (A_1, A_2, L_2, \ldots, L_m)$。对于所有 $t \in U$，$(t, -t) \in O_{\mathbf{L}_A}$和 $(t \in U) \mapsto f^{\mathbf{L}}(te_1)$ 在 0 处连续可微，当且仅当 $(t \in U) \mapsto f^{\mathbf{L}_A}(t, -t, 0, \ldots, 0)$ 如此。

由齐次性可知，我们可以假设 A 非常 ample。若 $\dim(X) = 1$，根据 Bertini 定理（[Fle99],推论 3.4.14），集合

$$\{s \in H^0(X, A) : \mathrm{div}(s) \text{ is geometrically reduced and normal}\},$$

是一个稠密 Zariski 开集。由于 X 是几何整的，我们可以假设存在$s \in H^0(X, A)$以及 $\mathrm{div}(s)$ 的一个不可约分支 E，使得 $E = \{p\}$，其中 $p \in X(k)$ 是一个正则有理点。由于 p 是正则的，E 是 X上的 Cartier 除子。此外，E 是几何整且正规的，并且 $B_+(L) = \varnothing$，因为 L 是充足的。

同样，在 $d = \dim(X) \geq 2$ 的情形下，Bertini 定理（[Jou83], 定理 6.3 和[Fle99], 推论 3.4.14）意味着集合

$$\{s \in H^0(X, A) : \mathrm{div}(s) \text{ is geometrically integral and normal}\},$$

是一个稠密 Zariski 开集。由于 $B_+(L) \subsetneq X$ 是一个真闭子概形，存在$s \in H^0(X, A)$，使得 $E := \mathrm{div}(s)$ 是 X的几何整正规子概形，并满足 $E \not\subseteq B_+(L)$。还可以假设存在一个正则有理点$p \in E(k) \cap E^{\mathrm{reg}}$，它属于 $X(k) \cap X^{\mathrm{reg}}$。

在这两种情况下，由于 p 既是 X 的正则点，也是 E的正则点，因此存在 p 中 X 的一个坐标系 $(z_1, \ldots, z_d)$，使得 z_1 是 p中 E的一个局部方程。□

从现在起，我们沿用引理 3.12 中的记号和假设。下文中的 Okounkov 体均是相对于由 $\mathbb{N}^d$ 上的字典序以及由引理 3.12 中所选坐标 (iii) 所确定的同构 $\widehat{\mathcal{O}_{X,p}} \cong k[\![z_1, ..., z_d]\!]$ 所诱导的滤子构造的。此外，我们可以假设 $\mathbf{L} = (L, A)$

我们首先证明 $f^{\mathbf{L}}$ 的右可微性。对于任意 $0 \leq t \in U$，有

$$\begin{aligned} f^{\mathbf{L}}(t) &= (d+1)! \int_{\Delta(L+tA)} G_{(L+tA,\varphi+t\Phi)}(p)\mathrm{d}p \\ &= (d+1)! \int_0^t \int_{\Delta(L+tA)_r} G_{(L+tA,\varphi+t\Phi)}(r,\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}r \\ &+(d+1)! \int_{\Delta(L+tA)_{\geq t}} G_{(L+tA,\varphi+t\Phi)}(p)\mathrm{d}p \\ &= (d+1)! \int_0^t \int_{\Delta(L+tA)_r} G_{(L+tA,\varphi+t\Phi)}(r,\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}r \\ &+(d+1)! \int_{\Delta(L)} G_{(L,\varphi+t(\Phi-\psi_s))}(q)\mathrm{d}q, \end{aligned} \tag{9}$$

其中我们使用了

$$\Delta(L+tA) = \bigcup_{0\leq r<t} \Delta(L+tA)_r \cup \Delta(L+tA)_{\geq t}$$

第一个等式，以及命题 3.8 得到了第二个等式。

W我们首先考虑公式 (9) 右端的第一项。对于所有 $r,\ t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足 $r \leq t$ 的情形，有t

$$f(r,t) = (d+1)! \int_{\Delta(L+tA)_r} G_{(L+tA,\varphi+t\Phi)}(\alpha)\mathrm{d}\alpha.$$

假设 $r < t$。则 $L+(t-r)A$ 是充足的，结合定理 3.7、命题 3.8 和命题 3.9 可得

$$\begin{aligned} f(r,t) &= (d+1)! \int_{\Delta(L+(t-r)A)_0} G_{(L+(t-r)A,\varphi+t\Phi-r\psi_s)}(0,\alpha)\mathrm{d}\alpha \\ &= (d+1)! \int_{\Delta(L_{|E}+(t-r)A_{|E})} G_{\left(L_{|E}+(t-r)A_{|E},P(\varphi+t\Phi-r\psi_s)_{|E}\right)}(\alpha)\mathrm{d}\alpha. \end{aligned}$$

By i归纳假设，f 是定义在$\{(r,\ t) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^2$ 上的连续函数：$r \leq t\}$。令

$$F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geq 0} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ t & \longmapsto & \int_0^t f(r,t)\mathrm{d}r. \end{array} \right.$$

Then

$$\left| \frac{F(t)-F(0)}{t} - f(0,0) \right| = \left| \int_0^t \frac{f(r,t)-f(0,0)}{t}\mathrm{d}r \right| \leq \sup_{0\leq r\leq t} |f(r,t)-f(0,0)| \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

因此，F 在 0 处右可微，且我们有

$$F'(0) = f(0,0) = (d+1)! \int_{\Delta(L_{|E})} G_{(L_{|E},P(\varphi)_{|E})}(\alpha)\mathrm{d}\alpha. \tag{10}$$

现在我们研究式 (9) 右端的第二项。对于任意 $t\in U\smallsetminus\{0\}$，令

$$A(t):=\frac{(d+1)!}{t}\int_{\Delta(L)}\Big(G_{(L,\varphi+t(\Phi-\psi_s))}-G_{(L,\varphi)}\Big)\,(q)\mathrm{d}q.$$

于是命题 3.2 给出

$$\forall t\in U\smallsetminus\{0\},\quad A(t)=\frac{1}{t}\,\mathrm{vol}_\chi(L,\varphi+t(\Phi-\psi_s),\varphi).$$

现在，命题 3.4 蕴含

$$\lim_{t\to 0^+}A(t)=(d+1)\int_{X^{\mathrm{an}}}(\Phi-\psi_s)(\mathrm{d}\mathrm{d}^cP(\varphi))^{\wedge d}. \tag{11}$$

结合 (10) 和 (11)，我们得到 $f^{\mathbf{L}}$ 在 0 处右可微，且

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\frac{f^{\mathbf{L}}(t)-f^{\mathbf{L}}(0)}{t}&=(d+1)!\int_{\Delta(L_{|E})}G_{(L_{|E},P(\varphi)_{|E})}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\\&\quad+(d+1)\int_{X^{\mathrm{an}}}(\Phi-\psi_s)(\mathrm{d}\mathrm{d}^cP(\varphi))^{\wedge d}.\end{aligned} \tag{12}$$

最后，对于任何满足定理 3.11 条件的族 $\mathbf{F}$，函数 $f^{\mathbf{F}}$ 在任意方向上都在 0 处有右导数。

现在我们考虑 $f^{\mathbf{L}}$ 的左可微性。由齐次性，不妨设 $L-A$ 是充足的。令 $t\in U$ 使得 $-1<-t<0$。令 $\mathbf{L}':=(L,L-A)$。由等式可得

$$L-tA=(1-t)\left(L+\frac{t}{1-t}(L-A)\right),$$

我们得到

$$f^{\mathbf{L}}(-te_1)=(1-t)^{d+1}f^{\mathbf{L}'}\left(\frac{t}{1-t}\right). \tag{13}$$

那么，将上述得到的右可微性结果与右微分的线性性结合起来，可得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\frac{f^{\mathbf{L}}(-te_1)-f(0)}{-t}&=(d+1)f^{\mathbf{L}}(0)-\lim_{t\to 0^+}\frac{f^{\mathbf{L}'}(t)-f(0)}{t}\\&=(d+1)f^{\mathbf{L}}(0)-\lim_{t\to 0^+}\frac{f^{(\overline{L},\overline{L})}(t)-f(0)}{t}+\lim_{t\to 0^+}\frac{f^{(\overline{L},\overline{A})}(t)-f(0)}{t}\\&=\lim_{t\to 0^+}\frac{f^{\mathbf{L}}(t)-f(0)}{t}.\end{aligned}$$

因此，$f^{\mathbf{L}}$ 在 0 处左右可微，且导数相等。由此我们得到定理 3.11 的一般可微性结果。

为了完成定理 3.11 的证明，只需证明 $g:=\frac{\partial f^{\mathbf{L}}}{\partial x_1}$ 在 0 处连续。我们使用与上文相同的记号：即 $\mathbf{L}=(L,A)$ 和 $U=\{t\in\mathbb{R}:\,L+tA$ 充足$\}$。对任意 $t\in U$，记 $(L_t,\varphi_t):=(L+tA,\varphi+t\Phi)$。由微分的线性性，不妨假设 A 满足引理 3.12 的条件。回想

$$(f^{\mathbf{L}})'(0)=(d+1)!\int_{\Delta(L_{|E})}G_{(L_{|E},P(\varphi)_{|E})}(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

$$-(d+1)\int_{X^{\mathrm{an}}}\ln|s|_\Phi(\mathrm{dd}^c P(\varphi))^{\wedge d}. \tag{14}$$

根据归纳假设，(14) 的右端第一项关于 (L,φ) 连续变化。现在，证明的最后一步由以下引理给出。

引理 3.13. 映射

$$(t\in U)\mapsto\int_{X^{\mathrm{an}}}\ln|s|_\Phi(\mathrm{dd}^c P(\varphi_t))^{\wedge d}$$

是连续的。

证明。只需证明在 0 处的连续性。对于所有 $t\geq 0$，令 $\widetilde{\varphi}_t := P(\varphi+t\Phi)-tP(\Phi)\in C^0(L)$。对于所有 $0\leq s\leq t$, $P(\varphi+s\Phi)+(t-s)P(\Phi)$ 是拟次调和的 $(L+tA)$ 以及 $P(\varphi+s\Phi)+(t-s)P(\Phi)\leq\varphi+t\Phi$，因此 $\widetilde{\varphi}_s\leq\widetilde{\varphi}_t$。记 $\widetilde{\varphi}:=\lim_{t\to 0^+}\widetilde{\varphi}_t$，它是 L 上的有界拟半正定度量（参见注 2.33）L。对于所有 $t\geq 0$，$P(\varphi+t\Phi)$ 是拟次调和的 $(L+tA)$ 意味着流 $\mathrm{dd}^c\widetilde{\varphi}_t+t\mathrm{dd}^c P(\Phi)$ 和 $\mathrm{dd}^c\widetilde{\varphi}$ 的正性，因此 $\widetilde{\varphi}\in$ 拟次调和(L)。

设 $(t_n)_{n\geq 0}\in(O_{\mathbf{L}}\cap\mathbb{R}_{>0})^{\mathbb{N}}$ 是一个极限为 0 的实数递减数列。则 $(P(\widetilde{\varphi}_{t_n}))_{n\geq 0}$ 是 $\mathrm{PSH}(L)$ 中的递减数列，且下有界于 $P(\varphi)$，因此收敛到 $P(\widetilde{\varphi})\in\mathrm{PSH}(L)$（参见命题 2.15 (iv) 及算子P的连续性）。此外，$P(\varphi)\leq P(\widetilde{\varphi})\leq\varphi$ 推出 $P(\widetilde{\varphi})=P(\varphi)$。注意，Monge–Ampère 算子的性质（参见 [BE21],§8.1）推出弱收敛

$$\mathrm{MA}(P(\widetilde{\varphi}_{t_n}))\rightharpoonup_{n\to+\infty}\mathrm{MA}(P(\varphi)).$$

由于 $\widetilde{\varphi}\in\mathrm{PSH}(L)$，我们得到 $\widetilde{\varphi}=P(\widetilde{\varphi})=P(\varphi)$。

对所有 $n\geq 0$，记 $P(\varphi+t_n\Phi)=\widetilde{\varphi}_{t_n}+t_nP(\Phi)$，我们在 X^{an} 上有如下形式的正拉东测度等式

$$\mathrm{MA}(P(\varphi+t_n\Phi))=\mathrm{MA}(\widetilde{\varphi}_{t_n})+O(t_n).$$

因此，$\mathrm{MA}(P(\varphi+t_n\Phi))\rightharpoonup_{n\to+\infty}\mathrm{MA}(P(\varphi))$ 弱收敛，从而完成了该引理的证明。□

□

推论 3.14. 设 L, M 是 X 上的线丛，其中 L 是充足的。设 $\varphi,\psi\in C^0(L)$ 以及$\Phi,\Psi\in C^0(L)$。则极限

$$\lim_{\mathbb{Q}\ni t\to 0}\frac{\mathrm{vol}_\chi(L+tM,\varphi+t\Phi,\psi+t\Psi)-\mathrm{vol}_\chi(L,\varphi,\psi)}{t}$$

存在。假设 M 满足引理 *3.12* 的条件。则极限等于

$$(d+1)\,\mathrm{vol}_\chi(L_{|E},P(\varphi_{|E}),P(\psi_{|E}))-(d+1)\int_{X^{\mathrm{an}}}\ln|s|_\Phi(\mathrm{dd}^c P(\varphi))^{\wedge d}.$$

证明。 这是定理 3.11 与 §2.4.2 的结果相结合所得到的推论。 □

4. Differentiability over an adelic curve

4.1. 阿代尔曲线。 我们首先回顾阿代尔曲线理论中的若干事实。相关参考文献为[CM19、CM21、CM22b、CM22a]。

4.1.1. 域上的阿代尔结构。阿代尔曲线是如下数据 $S=(K,(\Omega,\mathcal{A},\nu),(|\cdot|_\omega)_{\omega\in\Omega})$，其中 K 是一个域，$(\Omega,\mathcal{A},\nu)$ 是一个测度空间，而 $(|\cdot|_\omega)_{\omega\in\Omega}$ 是 K 上的一族绝对值，满足以下条件：

$$\forall a\in K^\times,\quad (\omega\in\Omega)\mapsto \ln|a|_\omega$$

是 $\mathcal{A}$-可测的且 ν-可积。若阿代尔曲线 S 满足乘积公式，则称其为真的

$$\forall a\in K^\times,\quad \int_\Omega \ln|a|_\omega\nu(\mathrm{d}\omega)=0$$

。以下固定一个真阿代尔曲线 $S=(K,(\Omega,\mathcal{A},\nu),(|\cdot|_\omega)_{\omega\in\Omega})$。进一步假设 K 是完美的，并且 K 是可数的，或者 σ-代数 $\mathcal{A}$ 是离散的。记 Ω_{ar}和 Ω_{um}分别为满足 $\omega\in\Omega$ 且 $|\cdot|_\omega$ 为阿基米德的和非阿基米德的 $\omega\in$ 的集合。

4.1.2. 定义在 S上的阿代尔向量丛。设 V是 K上的一个有限维向量空间。对所有$\omega\in\Omega$，令 $V_\omega:=V\otimes_K K_\omega$。$V$上的一个范数族是一个族 $\xi=(\|\cdot\|_\omega)_{\omega\in\Omega}$，使得对所有$\omega\in\Omega$，$\|\cdot\|_\omega$是 V_ω上的一个范数（若 $\omega\in\Omega_{\mathrm{um}}$，则假定其为超度量）。设 $\mathbf{e}:=(e_i)_{i=1}^r$是 V的一组基，记 $\xi_{\mathbf{e}}=(\|\cdot\|_{\mathbf{e},\omega})_{\omega\in\Omega}$为 V上由下式定义的范数族

$$\forall\omega\in\Omega,\quad \forall(\lambda_1,...,\lambda_r)\in K_\omega,\quad \|\lambda_1e_1+\cdots\lambda_re_r\|_{\mathbf{e},\omega}:=\begin{cases}\max_{i=1,\dots,r}|\lambda_i|_\omega, & \text{si }\omega\in\Omega_{\mathrm{um}},\\ |\lambda_1|_\omega+\cdots+|\lambda_r|_\omega, & \text{si }\omega\in\Omega_{\mathrm{ar}}.\end{cases}$$

在 S 上的阿代尔向量丛是指数据 $V=(\overline{V},\xi)$，其中 V 是定义在 K 上的有限维向量空间，而 $\xi=(\|\cdot\|_\omega)_{\omega\in\Omega}$ 是 V 上满足以下条件的范数族：

(i) ξ 是强受控的，即存在 V 的一组基$\mathbf{e}=(e_i)_{i=1}^r$，使得局部距离

$$\omega\in\Omega\mapsto d_\omega(\xi,\xi_{\mathbf{e}}):=\sup_{x\in V\smallsetminus\{0\}}\left|\ln\frac{\|x\|_\omega}{\|x\|_{\mathbf{e},\omega}}\right|$$

是 ν-受控的；

(ii) ξ 是可测的，即对所有 $s\in V$, $\omega\in\Omega$，$\mapsto\|s\|_\omega$ 都是$\mathcal{A}$-可测的。

4.1.3. 阿拉克洛夫度、正度、斜率。设 $V=(V,\xi)$ 是 S 上的阿代尔向量丛，其阿拉克洛夫度定义为

$$\widehat{\deg}(\overline{V}):=-\int_\Omega\ln\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{\omega,\det}\nu(\mathrm{d}\omega),$$

其中 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 V 的任意一组基，$\|\cdot\|_{\omega,\det}$ 表示 $\det(V)$ 上按如下方式定义的行列式范数：

$$\forall\eta\in\det(V),\quad \|\eta\|_{\omega,\det}=\inf_{\eta=s_1\wedge\cdots\wedge s_r}\|s_1\|_\omega\cdots\|s_r\|_\omega.$$

从本质上说，Arakelov度是欧几里得格的欧拉-庞加莱示性数的类似物。

V的正度定义为

$$\widehat{\deg}_+(\overline{V}):=\sup_{W\subset V}\widehat{\deg}(\overline{W})\geq 0.$$

它是经典阿拉凯洛夫理论中“小截面”数量的对应概念（[CM19, §4.6]）。

若 $V \neq\{0\}$，我们将其斜率 定义为

$$\widehat{\mu}(\overline{V}) := \frac{\widehat{\deg}(\overline{V})}{\dim(V)},$$

及其最大斜率，分别是最小斜率，由

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{V}) := \sup_{W\subset V} \widehat{\mu}(\overline{W}), \quad \text{resp. } \widehat{\mu}_{\min}(\overline{V}) := \inf_{V\twoheadrightarrow W\neq\{0\}} \widehat{\mu}(\overline{W}),$$

w这里， W 遍历 V 的向量子空间集，分别是非零商空间集 .

4.1.4. 射影概形上的阿代尔线丛。在本段中，我们固定一个射影概形 $\pi:\ X \to \mathrm{Spec}(K)$，它定义在 Spec($K$) 上。对于所有 $\omega \in \Omega$，我们记 $X_\omega := X \otimes_K K_\omega$，并用 X_ω^{an}表示 X_ω在 Berkovich 意义下的解析化。

设 E 是一个有限局部自由 O_X-模。 E 上的度量族是 $E_\omega := E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathsf{O}^{X_\omega}$ 上连续度量构成的族 $\varphi = (\varphi_\omega)_{\omega\in\Omega}$。从现在起，我们固定一个可逆 O_X-模L 以及其上的度量族 $\varphi = (\varphi_\omega)_{\omega\in\Omega}$。那么，$-L$ 上有一个度量族 $-\varphi := (-\varphi_\omega)_{\omega\in\Omega}$。若 $f: Y \to X$ 是射影概形之间一个定义在 Spec(K) 上的态射，则 f^*L 上有一个度量族 $f^*\varphi := (f_\omega^*\varphi_\omega)_{\omega\in\Omega}$。若可逆 O_X-模 M 上有一个度量族 $\psi = (\psi_\omega)_{\omega\in\Omega}$，则 $L + M$ 上有一个度量族 $\varphi + \psi := (\varphi_\omega + \psi_\omega)_{\omega\in\Omega}$。此外，若对于所有 $\omega \in \Omega$， $\varphi_\omega \in\in \mathrm{PSH}(L_\omega)$（参见定义 2.12），则称度量族 φ 为多重次调和（简称 psh）。

我们给出一个度量族的例子。设 V 是 K 上的有限维向量空间，并且 $\xi = (\|\cdot\|_\omega)_{\omega\in\Omega}$ 是 V 上的范数族。假设存在一个射影态射 $f:\ X \to \mathbb{P}(V)$ over Spec(K)，则 $(f\circ\pi)^*\xi$ 是 $(f\circ\pi)^*E$ 上的度量族，通过商空间在 $L := f^*\mathcal{O}_V(1)$ 上诱导出一个度量族，称为由 $V \Subset (V, \xi)$ 诱导的商度量族。

如果存在两个可逆的$\mathcal{O}_X$-模 L_1, L_2，并分别赋予商度量 φ_1, φ_2，使得 $L = L_1 - L_2$ 和 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$，则称度量族 φ 为受控的。

如果满足以下条件，则称度量族 φ 为可测的:

(i) 对任意闭点 $P \in X$， P^*L 上诱导的范数族 $P^\varphi\varphi$ 是可测的；(ii) 设 $\omega \in \Omega$，使得 $|\cdot|_\omega$ 是平凡的。那么，对于 $(K, |\cdot|_\omega)$ 的任意一个有理指数、超越次数为 1 的赋值扩张 $(L_\omega, |\cdot|_{L,\omega})$，以及任意 K-态射P: Spec(L_ω) $\to X$，范数族 $P^*\varphi$ 是可测的（更多细节请参见 [CM19], §6.1）。

¯$L = (L, \varphi)$ 是 X 上的阿代尔线丛，当且仅当 φ 既可测又受控。我们用 M(L) 表示 L 上阿代尔度量的集合，也就是可测且受控的度量族。假设 X 几何约化，且 L 是 X 上的阿代尔线丛。对于所有 $\omega \in \Omega$，令 $(f_\omega(L))_\omega = H^0(X, L) \otimes_K K_\omega$ 配备上确界范数，记作$\|\cdot\|_{\varphi_\omega}$。我们用 $f_*(\varphi)$ 表示 $H^0(X, L)$ 上相应的范数族。若 φ 受控，则 $f_*(\varphi)$ 强受控（[CM19]，定理 6.1.13）。若 K 可数且 φ 可测，则 $f_*(\varphi)$ 可测（[CM19], 定理 6.1.32）。

4.1.5. 阿代尔*Cartier*除子。 在本段中，我们固定一个定义在 Spec(K) 上的几何整正规射影概形 $\pi:\ X \to$Spec(K)。

设 D 是 X 上的 Cartier 除子。 D 的格林函数族 是指一个族 $g = (g_\omega)_{\omega\in\Omega}$，满足对于所有 $\omega \in \Omega$，g_ω 都是 D_ω 的格林函数。由 §2.3.3 可知，对于所有 $\omega \in \Omega$， g_ω 诱导出一个连续度量 $\mathcal{O}_{X_\omega}(D_\omega) := \mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_\omega}$，记作 φ_{g_ω}。一对 (D, g) 称为

$\widehat{}$阿代尔Cartier除子，如果度量族 $\varphi = (\varphi_{g_\omega})_{\omega\in\Omega}$ 是阿代尔的。令 $\mathrm{Div}(X)$ 表示阿代尔Cartier除子构成的阿贝尔群。我们用 $\widehat{C}^0(X)$ 表示 0 的格林函数族 g 的集合，其中 $(0,g)$ 是一个阿代尔 Cartier 除子。它具有 $\mathbb{R}$ 上的向量空间结构。

$\widehat{}$**定义 4.1** ([CM19, 定义 6.2.9])。令 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$。令 $\mathrm{Div}_{\mathbb{K}}(X)$ 表示$\widehat{}$上的 $\mathbb{K}$ 向量空间，该空间定义为 $\mathrm{Div}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{K}$ 除以由以下形式的元素张成的向量子空间所得的商空间

$$(0,g_1)\otimes\lambda_1+\cdots(0,g_n)\otimes\lambda_n-(0,\lambda_1g_1+\cdots\lambda_ng_n),$$

其中 g_1，……、$g_n\in\widehat{C}^0(X)$ 以及 λ_1，……、$\lambda_n\in\mathbb{K}$。$\widehat{}\mathrm{Div}_{\mathbb{K}}(X)$ 的元素称为 $\mathbb{K}$-*Cartier*$\widehat{}$阿代尔除子，其定义在 X 上。若 $D\in\mathrm{Div}_{\mathbb{K}}(X)$，则有一个高度函数 $h_D\colon X(\bar{K})\to\overline{\mathbb{R}}$。

例 4.2 ([CM19], 例 2.9.11)。令 $s\in K(X)^\times$。那么，对于所有 $\omega\in\Omega$，$-\ln|s|_\omega$ 都是 $\mathrm{div}(s)$ 的格林函数。此外，相应的格林函数族是可测且受控的。因此

$$(s\in K(X)^\times)\mapsto(\mathrm{div}(s),(-\ln|s|_\omega)_{\omega\in\Omega})\in\widehat{\mathrm{Div}}(X)$$

这是一个群同态，其像是主阿代尔*Cartier*除子的集合。该$\widehat{}$同态诱导出一个 $\mathbb{K}$-线性映射 $K(X)^\times\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{K}\to\mathrm{Div}_{\mathbb{K}}(X)$，其像是主 $\mathbb{K}$-*Cartier* 阿代尔除子的集合。

设 $(D,g)\in\widehat{}\mathrm{Div}_{\mathbb{K}}(X)$，并设 $s\in H^0_{\mathbb{K}}(X,D)$。对于所有 $\omega\in\Omega$，记

$$\|s\|_{g_\omega}:=\sup_{x\in X^{\mathrm{an}}_\omega}\{(|s|_\omega\exp(-g_\omega))(x)\}.$$

于是记 $\xi_g:=(\|\cdot\|_{g_\omega})_{\omega\in\Omega}$ 为 $H^0_{\mathbb{K}}(X,D)$ 上相应的范数族（若 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$，则假设 X 是正规的，从而 $H^0_{\mathbb{K}}(X,D)$ 是 $k(X)$ 的向量子空间）。[CM19] 中的定理 6.2.18 进而保证 $\pi_*(D,g):=(H^0_{\mathbb{K}}(X,D),\xi_g)$ 是 S 上的阿代尔向量丛

4.1.6. 算术交乘积。设 X 是 $\mathrm{Spec}(K)$ 上维数为 $d\geq1$ 的射影概形。若阿代尔线丛 $L=(L,\varphi)$ 位于 X 上，且可写为 $(L,\varphi)=(A_1,\varphi_1)-(A_2,\varphi_2)$，其中 A_1,A_2 充足，φ_1,φ_2 拟次调和，则称其为 dpsh。对于 $i=0,...,d$，设$L_i=(L_i,\varphi_i)$ 是 X 上的 dpsh 阿代尔线丛。于是，算术交乘积 $(L_0\cdot L_1\cdots L_d)_S$ 在 [CM21] 中定义。此算术交乘积关于 L_i是多线性的。

4.1.7. χ-体积，算术希尔伯特–塞缪尔公式。令 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$。在本段中，我们固定一个维数为 $d\pi$ 的几何整正规射影概形：在 $\mathrm{Spec}(K)$ 上的 $X\to\mathrm{Spec}(K)$，以及其上的一个阿代尔 $\mathbb{K}$-Cartier 除子 $D=(D,\ g)$。χ-体积定义为 D 的上极限

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{D})=\limsup_{n\to+\infty}\frac{\widehat{\deg}(\pi_*(n\overline{D}))}{n^{d+1}(d+1)!}.$$

如果 $\mathbb{K}=\mathbb{Z}$ 和 $D=L$ 是半丰沛且大的，则（[CM22b] 定理—定义 3.1.2）给出序列的$\widehat{\ }$收敛性（收敛至 $\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L})$）

$$\left(\frac{\widehat{\deg}(\pi_*(n\overline{L}))}{n^{d+1}(d+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}.$$

阿代尔线丛 L 相对丰沛,$\overline{\ }$如果 L 是充足的且 φ 是拟次调和的。在这种情况下，([CM22b] 定理 4.5.1)给出了等式

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L})=(\overline{L}^{d+1})_S. \tag{15}$$

这一等式可以推广到仅假设 L 为半丰沛的情形（[Luo23],定理 3.7）。

在 [Luo23], 中，Luo 证明了以下关于 χ-体积的连续性结果。

定理 4.3 ([Luo23], 定理 4.5)。 设 $D_1=(D_1,g_1)$ ...$\overline{\ }$, $D_r=(D_r,g_r)$ 是 $\overline{\mathbb{Q}}$-$\widehat{\ }$上的阿代尔 X *Cartier* 除子，其中，对于任意 $i=1$，...，r, D_i 是半丰沛的。则函数 $\mathrm{vol}_\chi(\cdot)$在以下集合上连续

$$C_{\mathbb{R}}(\overline{D}_1,...,\overline{D}_r):=\left\{\lambda_1\overline{D}_1+\cdots+\lambda_r\overline{D}_r:\lambda_1,...,\lambda_r\in\mathbb{R}_{\geq 0}\right\}.$$

4.2. **算术 χ-体积的补充内容**。 在本段中，我们固定一个真阿代尔曲线 $S=(K,\ (\Omega,\ \mathcal{A}\ \nu),\ (|\cdot|_\omega)_{\omega\in\Omega})$，其中 K 是一个完美可数域，且 X 是 $\mathrm{Spec}(K)$上的一个维数为 d 的几何整正规射影概形。

设 L 是一个可逆的 $\mathcal{O}_X$-模。对于所有 $\omega\in\Omega$，回忆一下， K_ω 表示相对于 $|\cdot|_\omega$, $X_\omega:=X\otimes_K K_\omega$ 和 $L_\omega:=L\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_{X_\omega}$ 对 K 的完备化。注意，对于所有 $\omega\in\Omega$， X_ω 都是 $\mathrm{Spec}(K_\omega)$ 上维数为 d 的几何整正规射影概形。我们固定 $\mathbb{N}^d$ 上的一个单项式序 $\leq$。假设存在一个正则有理点 $p\in X(K)$。

对于任意整数 $n\geq 0$，令 $V_n:=H^0(X,\ L^{\otimes n})$。回忆一下，在 §2.4 中，我们已经在 V_n 上定义了一个 $\mathbb{N}^d$-滤子，并将其分次齐次分量记为 $(\mathrm{gr}^\alpha(V_n))_{\alpha\in\mathbb{N}^d}$。此外，前述分解中的非零齐次分量由某个有限半群 $\Gamma(V_n)$ 索引。最后，令 $\mathrm{gr}(V_n):=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma\ (V_n)}\mathrm{gr}^\alpha(V_n)$。

我们进一步假设 $\varphi\in\mathcal{M}(L)$ 是 L 上的阿代尔度量族。对于任意整数 $n\geq 0$，该度量族在 V_n 上诱导出一个可测有界范数族，记为 $\xi_{n\varphi}$。对于任意 $\alpha\in\Gamma(V_n)$，在 $\mathrm{gr}^\alpha(V_n)$ 上诱导的子商范数族会在 $\mathrm{gr}^\alpha(V_n)$ 上产生一个可测有界范数族，记为 $\xi^\alpha_{n\varphi}$。最后，对所有阿代尔向量丛 $(\mathrm{gr}^\alpha(V_n)\ \xi^\alpha_{n\varphi})$ 取正交直和，对于 α，我们得到一个记为 $\widehat{\ }\mathrm{gr}(V_n)$ 的阿代尔向量丛：$=(\mathrm{gr}(\overline{V_n})\ \xi_{n\varphi}=(\|\cdot\|_{\widehat{n\varphi}_\omega})_{\omega\in\Omega})$。此外，根据 ([CM19], 命题 4.3.10 和 4.3.13)，我们有以下估计。

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |\ \widehat{\deg}(V_n,\xi_{n\varphi})-\widehat{\deg}(\mathrm{gr}(V_n),\widehat{\xi}_{n\varphi})\ |\leq\frac{1}{2}\dim_K(V_n)\ln\dim_K(V_n)\nu(\Omega_{\mathrm{ar}}). \tag{16}$$

回顾一下，对于任意整数 $n\geq 0$,$\overline{\ \mathrm{gr}(V_n)}$ 都有一个典范基 $(s_{(n,\alpha)})_{\alpha\in\Gamma(V_n)}$。令 $\omega\in\Omega$。回顾 §2.4 中，已在 Okounkov 体 $\Delta(L_\omega)$ 上定义了一个凹变换 G_{φ_ω}。此外，我们有

$$\widehat{\deg}(\mathrm{gr}(V_n))=-\int_\Omega\ln\|\bigwedge_{\alpha\in\Gamma(V_n)}s_{(n,\alpha)}\|_{\widehat{n\varphi}_\omega,\det}\nu(\mathrm{d}\omega)$$

$$= \int_\Omega \widehat{\deg}_\omega(\mathrm{gr}(V_n)_\omega, \widehat{n\varphi}_\omega, \eta_{n,\omega})\nu(\mathrm{d}\omega),$$

其中，对于任意 $\omega \in \Omega$，$\eta_{n,\omega}$ 表示 $\mathrm{gr}(V_n)_\omega$ 上的单项式范数，而 $\deg_\omega$ 表示 §2.4 中引入的局部次数（详情请参阅该段）。

此外，对于任意 $\omega \in \Omega$，([CM15], 注 4.4) 得出等式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\widehat{\deg}_\omega(\mathrm{gr}(V_n)_\omega, \widehat{n\varphi}_\omega, \eta_{n,\omega})}{n^{d+1}/(d+1)!} = \int_{\Delta(L_\omega)} G_{\varphi_\omega}(x)\lambda(\mathrm{d}x).$$

最后，控制收敛定理蕴含上述等式左边的 ν-可积性，而估计式 (16) 则完成以下命题的证明；该命题可视为我们当前背景下命题 2.13 的类比。 [CM22a]

命题 4.4. 采用上述记号，我们有等式

$$\widehat{\mathrm{vol}}(L,\varphi) = \int_\Omega \int_{\Delta(L_\omega)} G_{\varphi_\omega}(x)\lambda(\mathrm{d}x)\nu(\mathrm{d}\omega). \tag{17}$$

最后，设 $\overline{L} = (L,\varphi)$ 是 X 上的一个阿代尔线丛，并假设 L 是半丰沛的。那么，对于任意 $\omega \in \Omega$，$\mathrm{PSH}(L_\omega)$ 非空。我们用 $P(\varphi)$ 表示度量族 $(P(\varphi_\omega))_{\omega\in\Omega}$。一般而言，无法确定 $P(L) := (L, P(\varphi))$ 是否是 X 上的阿代尔线丛。尽管如此，命题 2.32 (1) 给出

$$\forall s \in H^0(X,L), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \|s\|_{\varphi_\omega} = \|s\|_{P(\varphi_\omega)}.$$

因此，量

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(P(\overline{L})) := \widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L})$$

是良定义的。

4.3. **定理 1.2 的证明**。 在本段中，我们固定一个真阿代尔曲线 $S = (K, (\Omega, \mathcal{A}, \nu), (|\cdot|_\omega)_{\omega\in\Omega})$，其中 K 是一个完美可数域，并且是一个定义在 $\mathrm{Spec}(K)$ 上的维数为 d 的几何整正规射影概形 X。我们假设，对于所有 $\omega \in \Omega$，包络的连续性（猜想 2.27）在 K_ω 上成立。

我们首先引入一些记号。设 L 是一个可逆 $\mathcal{O}_X$-模。对于所有 $\omega \in \Omega$，回顾一下，K_ω 表示关于 $\phi(\omega)$ 的 K 的完备化，$X_\omega := X \otimes_K K_\omega$ 以及 $L_\omega := L \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_\omega}$。注意，对于所有 $\omega \in \Omega$，X_ω 是一个定义在 $\mathrm{Spec}(K_\omega)$ 上的维数为 d 的几何整正规射影概形。

设 $m \geq 1$ 为一个整数。对于所有 $i = 0, \ldots, m$，令 $\overline{L_i} := (L_i, \varphi_i)$，其中

(i) L_i 是 X 上的线丛，且 $L := L_0$ 是充足的；(ii) $\varphi_i \in \mathcal{M}(L_i)$ 是一个阿代尔度量族，且 $\varphi := \varphi_0$ 是一个 psh 度量族。

对于所有 $i = 0, \ldots, m$，令 s_i 为 L_i 的一个非零有理截面，$D_i := \mathrm{div}(s_i)$ 为其对应的 Cartier 除子，并令 g_i 为与 φ_i 相关联的格林函数族。滥用记号，对于所有 $a \in \mathbb{R}^m$，记 $L_a := (L_a, \varphi_a)$，其中

$$L_a := D_0 + \sum_{i=1}^m a_i D_i, \quad \varphi_a := g_0 + \sum_{i=1}^m a_i g_i.$$

令 $\mathbf{L}=(\overline{L},\ \overline{L_1},\ \ldots\ldots,\ L_m)$，且 $O_{\mathbf{L}}:=\{a\in\mathbb{R}^m:\ L_a$ 是充足的$\}$。我们将研究函数

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi^{\mathbf{L}}:\left|\begin{array}{ccc} O & \longrightarrow & \mathbb{R},\\ a & \longmapsto & \widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L_a}).\end{array}\right.$$

定理 4.5. 对于上述任意一族 $\mathbf{L}$，函数 $\widehat{\mathrm{vol}}_\chi^{\mathbf{L}}$ 在 $O_{\mathbf{L}}$上连续可微。

证明. 与定理 3.11 的证明相同，只需证明 $\mathrm{vol}_\chi^{\mathbf{L}}$ 沿方向 e_1 在 0 处存在连续偏导数。设 $A:=L_1=(A,\Phi)$，并且

$$U:=\{t\in\mathbb{R}:te_1\in O_{\mathbf{L}}\},$$

它是 $\mathbb{R}$ 的一个开子集。

引理 4.6. 只需在以下情形下证明定理 *4.5*：

(i) A是非常 ***ample***；(ii) 存在一个正则有理点 $p\in X(K)$；(iii) 存在一个非零整体截面 $s\in H^0(X,A)$、E（s的一个不可约分支）以及 p 中 X 的一个坐标系 $(z_1,\ldots,z_d)$，使得 E 是一个有效 ***Cartier*** 除子，其底层子概形是 X 的几何整正规子概形，满足 $E\nsubseteq B_+(L)$，且 z_1 是 E 在 p 中的局部方程。

证明。注意到，引理 3.12 的证明纯粹具有代数几何性质。因此，我们可以对其作相应修改后重现该证明。□

从现在起，我们采用引理 4.6 的相同记号和假设，并假设$\mathbf{L}=(L,\ A)$。对于任意 $\omega\in\Omega$，令 $E_\omega:=E\otimes_{\mathrm{Spec}(K)}\mathrm{Spec}(K_\omega)$，$s_\omega:=\pi_\omega^*s$ 以及 $p_\omega:=\pi_\omega^*p$，其中$\pi_\omega:\ X_\omega\to X$。注意到 A_ω，s_ω，E_ω和 p_ω 满足引理 3.12 的条件（i）-（iii）。令$\mathbf{L}_\omega:=(L_{1,\ \omega},\ \ldots\ldots,\ L_{m,\ \omega})$，并令

$$\forall t\in U,\quad f^{\mathbf{L}_\omega}(t)=(d+1)\int_{\Delta(L_\omega+tA_\omega)}G_{\varphi_\omega+t\Phi_\omega}(x)\mathrm{d}x.$$

由定理 3.11 的证明，如果令，则有等式

$$\begin{aligned}(f^{\mathbf{L}_\omega})'(0)&=(d+1)!\int_{\Delta(L_{|E_\omega})}G_{(L_{|E_\omega},P(\varphi_\omega)_{|E_\omega})}(\alpha)\mathrm{d}\alpha-(d+1)\int_{X_\omega^{\mathrm{an}}}\ln|s|_{\Phi_\omega}(\mathrm{d}\mathrm{d}^cP(\varphi_\omega))^{\wedge d}\\&=(d+1)!\int_{\Delta(L_{|E_\omega})}G_{(L_{|E_\omega},\varphi_{\omega|E_\omega})}(\alpha)\mathrm{d}\alpha-(d+1)\int_{X_\omega^{\mathrm{an}}}\ln|s|_{\Phi_\omega}(\mathrm{d}\mathrm{d}^c\varphi_\omega)^{\wedge d},\end{aligned}$$

因为 $\varphi_\omega=P(\varphi_\omega)$。

令 $t\in U$。于是，引理 3.12 的条件 (i)-(iii) 由 s_ω，p_ω在 $L_t=L+tA$处满足。因此我们得到

$$\begin{aligned}(f^{\mathbf{L}_\omega})'(t)=(d+1)!\int_{\Delta(L_{|E_\omega}+tA_{|E_\omega})}&G_{(L_{|E_\omega}+tA_{|E_\omega},P(\varphi_\omega+t\Phi_\omega)_{|E_\omega})}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\\&-(d+1)\int_{X_\omega^{\mathrm{an}}}\ln|s_\omega|_{\Phi_\omega}(\mathrm{d}\mathrm{d}^cP(\varphi_\omega+t\Phi_\omega))^{\wedge d}.\end{aligned}\tag{18}$$

固定 $t_0 \in U$，令 $(t_n)_{n\geq 1} \in [0,t_0]^{\mathbb{N}}$ 为一个极限为 0 的递减序列。对于所有 $n \geq 1$，对于所有 $\omega \in \Omega$，记

$$A_n(\omega) := \frac{f^{\mathbf{L}_\omega}(t_n) - f^{\mathbf{L}_\omega}(0)}{t_n}.$$

定理 3.11 给出了序列 $(A_n)_{n\geq 1}$ 到函数的逐点收敛 n

$$A : (\omega \in \Omega) \mapsto (f^{\mathbf{L}_\omega})'(0).$$

对于所有 $n \geq 1$，对于所有 $\omega \in \Omega$，中值定理给出

$$|A_n(\omega)| \leq \sup_{t\in[0,t_0]} (f^{\mathbf{L}_\omega})'(t).$$

现在陈述基本的控制结果。

引理 4.7。该函数

$$B : (\omega \in \Omega) \mapsto \sup_{t\in[0,t_0]} (f^{\mathbf{L}_\omega})'(t)$$

是 ν-可积的。

证明。令 $t \in [0,t_0]$ 和 $\omega \in \Omega$。沿用上文的记号，令

$$B_{1,t}(\omega) := \int_{\Delta(L_{|E_\omega}+tA_{|E_\omega})} G_{(L_{|E_\omega}+tA_{|E_\omega}),P(\varphi_\omega+t\Phi_\omega)_{|E_\omega})}(\alpha)\mathrm{d}\alpha,$$
$$B_{2,t}(\omega) := \int_{X_\omega^{\mathrm{an}}} \ln|s_\omega|_{\Phi_\omega}(\mathrm{d}\mathrm{d}^c P(\varphi_\omega + t\Phi_\omega))^{\wedge d}..$$

等式 (18) 得出

$$\forall t \in [0,t_0], \quad \left|(f^{\mathbf{L}_\omega})'(t)\right| \leq \frac{1}{(d+1)!}|B_{1,t}(\omega)| + \frac{1}{d+1}|B_{2,t}(\omega)|.$$

因此，只需证明对于所有 $i = 1,2$，函数

$$B_i : (\omega \in \Omega) \mapsto \sup_{t\in[0,t_0]} |B_{i,t}(\omega)|,$$

是 ν-可积的。

我们首先考虑 B_1。令 $t \in [0,t_0]$ 和 $\omega \in \Omega$。由齐次性，不妨假设$L-A$是充足且有效的。然后，注释 2.44 给出了凹变换$G_{(L_\omega+tA_\omega,\varphi_\omega+t\Phi_\omega)}$、$G_{(tL_\omega-tA_\omega,t\varphi_\omega-t\Phi_\omega)}$、$G_{(L_\omega,\varphi_\omega)}$ 和 $G_{(tA_\omega,t\Phi_\omega)}$的有限性。此外，关于$A$ 的假设允许使用（[Wil22],定理 1.2），从而得到以下等式

$$(1+t)\Delta(L_\omega) = \Delta(L_\omega + tA_\omega) + t\Delta(L_\omega - A_\omega) \quad \text{and} \quad \Delta(L_\omega + tA_\omega) = \Delta(L_\omega) + t\Delta(A_\omega). \tag{19}$$

现在，([CM19], 注记 6.3.22) 推出

$$\begin{aligned}
&\forall (x,y) \in \Delta(L_\omega + tA_\omega) \times \Delta(tL_\omega - tA_\omega),\\
&G_{(L_\omega+tA_\omega,\varphi_\omega+t\Phi_\omega)}(x) + G_{(tL_\omega-tA_\omega,t\varphi_\omega-t\Phi_\omega)}(y) \leq G_{((1+t)L_\omega,(1+t)\varphi_\omega)}(x+y),\\
&\forall (\alpha,\beta) \in \Delta(L_\omega) \times \Delta(tA_\omega),\\
&G_{(L_\omega,\varphi_\omega)}(\alpha) + G_{(tA_\omega,t\Phi_\omega)}(\beta) \leq G_{(L_\omega+tA_\omega,\varphi_\omega+t\Phi_\omega)}(\alpha+\beta).
\end{aligned}$$

将这些不等式与 (19) 和命题 3.8 结合起来，我们得到不等式

$$A_{1,t}(\omega) := \int_{\Delta(L_{|E_\omega})} G_{(L_{|E_\omega},P(\varphi_\omega)_{|E_\omega})}(\alpha)\mathrm{d}\alpha + t\int_{\Delta(A_{|E_\omega})} G_{(A_{|E_\omega},P(\Phi_\omega)_{|E_\omega})}(\beta)\mathrm{d}\beta \leq B_{1,t}(\omega)$$

$$\leq (1+t)\int_{\Delta(L_{|E_\omega})} G_{(L_{|E_\omega},P(\varphi_\omega)_{|E_\omega})}(\alpha)\mathrm{d}\alpha - t\int_{\Delta(L_{|E_\omega}-A_{|E_\omega})} G_{(L_{|E_\omega}-A_{|E_\omega},P(\varphi_\omega-\Phi_\omega)_{|E_\omega})}(\beta)\mathrm{d}\beta =: A_{2,t}(\omega).$$

现由命题 4.4 可知，$(\omega\in\Omega)\ \sup_{t\in[0,t_0]}|A_{1,\,t}(\omega)|$ 和 $(\omega\in\Omega)\ \sup_{t\in[0,t_0]}|A_{2,\,t}(\omega)|$均为 ν-可积的。因此，B_1 是 ν-可积的。

W现证明 B_2 的可积性。对所有 $t\in[0,t_0]$ 及所有 $\omega\in\Omega$，都有

$$|B_{2,t}(\omega)| \leq |\ln\|s\|_{\Psi_\omega}|\,\mathrm{vol}(L_\omega+tA_\omega) = |\ln\|s\|_{\Psi_\omega}|\,\mathrm{vol}(L+tA) \leq C|\ln\|s\|_{\Psi_\omega}|,$$

其中，$C>0$ 是一个与 ω 无关的常数，由映射 $(t\in[0,t_0])\mapsto \mathrm{vol}(L+tA)$ 的连续性给出。由于 $\Psi\in\mathcal{M}(A)$，函数 $(\omega\in\Omega)\mapsto\ln\|s\|_{\Psi_\omega}$ 是 ν-可积的（[CM19],命题 6.2.12）。因此，B_2 是 ν-可积的。□

结合引理 4.7、命题 4.4 和控制收敛定理，我们得到等式

$$\frac{\partial\widehat{\mathrm{vol}}_\chi^{\mathbf{L}}}{\partial x_1}(0) := \lim_{n\to+\infty}\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi^{\mathbf{L}}(t_ne_1)-\widehat{\mathrm{vol}}_\chi^{\mathbf{L}}(0)}{t_n} = \int_\Omega \frac{f^{\mathbf{L}_\omega}(t_n)-f^{\mathbf{L}_\omega}(0)}{t_n}\nu(\mathrm{d}\omega) = \int_\Omega (f^{\mathbf{L}_\omega})'(0)\nu(\mathrm{d}\omega).$$

上述等式表明，$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi^{\mathbf{L}}$ 沿方向 e_1 右可微。要证明左可微性，可将所有 $\omega\in\Omega$ 对应的 (13) 与引理 4.7 的控制结果结合起来。

最终，函数 $\widehat{\mathrm{vol}}_\chi^{\mathbf{L}}$ 沿任意$\frown$$a\in O_{\mathbf{L}}$ 中的第一坐标方向都存在偏导数。函数 $\frac{\partial\mathrm{vol}_\chi}{\partial x_1}$ 在 $O_{\mathbf{L}}$ 上连续（例如，可结合引理 4.7 和控制收敛定理来证明）。因此，$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi^{\mathbf{L}}$ 在 $O_{\mathbf{L}}$ 上连续可微。□

推论 4.8. 设 $L=(L,\overline{\varphi})$ 是 X 上的相对充足线丛。设 $M=(M,\Phi)$ 是 X 上任意一个阿代尔线丛。则有

$$\lim_{t\to0}\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}+t\overline{M})-\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L})}{t} = (d+1)\left(\overline{L}^d\cdot\overline{M}\right)_S. \tag{20}$$

证明。采用定理 4.5 证明中的相同记号和假设，并进一步假设 φ 是一个拟次调和度量族。于是我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\widehat{\mathrm{vol}}_\chi^{\mathbf{L}}}{\partial x_1}(0) &= (d+1)!\int_\Omega\left(\int_{\Delta(L_{|E_\omega})} G_{(L_{|E_\omega},\varphi_{\omega|E_\omega})}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)\nu(\mathrm{d}\omega) - (d+1)\int_\Omega\left(\int_{X_\omega^{\mathrm{an}}}\ln|s_\omega|_{\Phi_\omega}(\mathrm{d}\mathrm{d}^c\varphi_\omega)^{\wedge d}\right)\nu(\mathrm{d}\omega)\\
&= (d+1)\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(L_{|E},\varphi_{|E}) - (d+1)\int_\Omega\left(\int_{X_\omega^{\mathrm{an}}}\ln|s_\omega|_{\Phi_\omega}(\mathrm{d}\mathrm{d}^c\varphi_\omega)^{\wedge d}\right)\nu(\mathrm{d}\omega)\\
&= (d+1)\left((L_{|E},\varphi_{|E})^d\right)_S - (d+1)\int_\Omega\left(\int_{X_\omega^{\mathrm{an}}}\ln|s_\omega|_{\Phi_\omega}(\mathrm{d}\mathrm{d}^c\varphi_\omega)^{\wedge d}\right)\nu(\mathrm{d}\omega)\\
&= (d+1)\left((L,\varphi)^d\cdot(A,\Phi)\right)_S,
\end{aligned}$$

其中：第一个等式由命题 4.4 得出，第二个等式由 Hilbert-Samuel公式给出（参见 $(L_{|E}, \varphi_{|E})$ 是相对丰沛的），而第一个等式则由 S 上算术交乘积的定义给出。利用算术交乘积的多重线性性，我们得到所需的显式公式。□

5. 阿代尔曲线上的对数等分布

第 4 节所研究的可微性使我们能够证明一个对数等分布结果。我们在阿代尔曲线的框架下推广了 [CLT09] 中得到的结果。

在本段中，我们固定一个真阿代尔曲线 $S = (K, (\Omega, \mathcal{A}, \nu), (|\cdot|_\omega)_{\omega\in\Omega})$，其中 K 是一个完美可数域，而 X 是定义在 $\mathrm{Spec}(K)$ 上的维数为 d 的几何整正规射影概形。

5.1. 关于最大渐近斜率的补充。 设 (D, g) 是 X 上的一个阿代尔 $\mathbb{R}$-Cartier 除子。回顾一下，(D, g) 的渐近最大斜率 记为 $\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(D, g)$，其定义为

$$\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(D, g) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\widehat{\mu}_{\max}(H^0_{\mathbb{R}}(X, nD), \xi_{ng})}{n}.$$

引理 5.1。 设 (D_1, g_1) 和 (D_2, g_2) 是 E 上的阿代尔 $\mathbb{R}$-*Cartier* 除子，并且 $H^0_{\mathbb{R}}(X, D_1)$ 和 $H^0_{\mathbb{R}}(X, D_2)$ 均非零。那么我们有不等式

$$\widehat{\mu}_{\max}((H^0_{\mathbb{R}}(X, D_1)\,\xi_{g_1}) \otimes (H^0_{\mathbb{R}}(X, D_2)\,\xi_{g_2})) \geq \widehat{\mu}_{\max}((H^0_{\mathbb{R}}(X, D_1)\,\xi_{g_1})) + \widehat{\mu}_{\max}((H^0_{\mathbb{R}}(X, D_2)\,\xi_{g_2})) - \frac{3}{2}\nu(\Omega_{\mathrm{ar}}) \ln\left(\text{维数}_K\left(H^0_{\mathbb{R}}(X, D_1)\right)\cdot\text{维数}_K\left(H^0_{\mathbb{R}}(X, D_2)\right)\right).$$

证明。 证明思路与（[CM22a], 命题 8.2.1）相同。 □

命题 5.2。 假设 D 是大除子。

(1) 则数列 $(\widehat{\mu}_{\max}(H^0_{\mathbb{R}}(X, nD)\ \xi_{ng})/n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 收敛到 $\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(D, g)$。（*2*）则 $\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(D, g)$ 等于 $\sup_{x\in\Delta(D)^\circ} G_{(D,g)}(x)$。（*3*）令 $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。则 $\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(aD, ag) = a\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(D, g)$。（*4*）设 (D', g') 是 X 上的另一个 *adelic* $\mathbb{R}$-*Cartier* 除子，且 D' 是大除子。则有以下不等式：

$$\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(D + D', g + g') \geq \widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(D, g) + \widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(D', g').$$

证明。 (1) 是引理 5.1 的推论，证明过程与 ([CM22a], 推论 8.2.2) 中的证明相同。
(2) 正是 ([CM19],引理 6.4.17) 的陈述。
(3) 由 (2) 结合凹变换的齐次性得出。
最后，(4) 由引理 5.1 得出，证明过程与 ([CM22a], 命题 8.3.2) 中的证明相似。
□

5.2. 闭点的对数等分布。 设 $L = (L, \varphi)$ 是 X 上的相对丰沛阿代尔线丛。设 $(x_n)_{n\geq 0}$ 是 X 的一列闭点。我们进一步假设

(i) $(x_n)_{n\geq 0}$ 是泛的，即对于任意闭子概形 $Z \subsetneq X$，集合$\{n \in \mathbb{N} : \ x_n \in Z\}$是有限的；
(ii) $(x_n)_{n\geq 0}$ 是小的，即规范化高度序列$(h_L(x_n))_{n\geq 0}$ 收敛于 $h_L(X)$。

对于任意 $\omega \in \Omega$以及任意 $n \in \mathbb{N}$，令$\delta_{L,x_n,\omega}$ 表示有限集$\{x_n\}_\omega^{\mathrm{an}}$上的概率计数测度。我们还将 $\delta_{L,X,\omega}$ 记为概率测度$(1/\mathrm{vol}(L))(\mathrm{dd}^c\varphi)^{\wedge d}$。最后，令 $M = (M, \Phi)$为 X上的任意阿代尔线丛。回忆一下，算术交乘积$(\overline{L}^d \cdot \overline{M})_S$ 是良定义的。

本节的目标是证明定理 1.3。

定理 5.3。 我们假设 M 具有一个非零整体截面 s。记作 $D := \mathrm{除子}(s)$。

(1)我们有

$$h_{\overline{L}}(D) \geq h_{\overline{L}}(X).$$

(2)我们进一步假设 $h_L(D) = h_L(X)$。于是我们有

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \left(\int_{X_\omega^{\mathrm{an}}} (-\ln|s|_{\Phi_\omega}) \delta_{\overline{L},x_n,\omega} \right) \nu(\mathrm{d}\omega) = \int_\Omega \left(\int_{X_\omega^{\mathrm{an}}} (-\ln|s|_{\Phi_\omega}) \delta_{\overline{L},X,\omega} \right) \nu(\mathrm{d}\omega). \tag{21}$$

我们先回顾以下事实。

引理 5.4. 设(L, φ) 是 X 上的一个阿代尔线丛，且 L 是伪有效的。那么，对于任意闭点 $x \in X(K)$，我们有

$$\widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{L}_{|x}) = \widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}_{|x}) = (\overline{L}_{|x})_S.$$

下面的极限结果是阿代尔曲线上（[CLT09], 引理 6.1）的类似结论。

命题 5.5. 采用上述记号，我们有

$$\lim_{n\to+\infty} h_{\overline{M}}(x_n) = \frac{\left(\overline{L}^d \cdot \overline{M}\right)_S}{\mathrm{vol}(L)} - \frac{d\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L})(L^{d-1}\cdot M)}{(d+1)\,\mathrm{vol}(L)^2} = \frac{\left(\overline{L}^d \cdot \overline{M}\right)_S}{\mathrm{vol}(L)} - \frac{dh_{\overline{L}}(X)(L^{d-1}\cdot M)}{\mathrm{vol}(L)}.$$

证明. 设 $n \geq 0$ 是一个整数。我们定义一个映射

$$\psi_n : \left| \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}_{|x_n} + t\overline{M}_{|x_n}), \end{array} \right.$$

其中， U 是 $\mathbb{R}$ 中包含 0 的一个开凸邻域，使得对于任意 $t \in U$， $L + tM$ 都是充足的。于是，命题 5.2 (3) 表明，对于任意 $n \geq 0$， ψ_n 是凹函数。

我们现在定义

$$\forall t \in U, \quad \Psi(t) := \liminf_{n\to+\infty} \psi_n(t).$$

由上述引理可知， Ψ 是一个凹函数。根据L 的Hilbert-Samuel公式，并且由于序列 $(x_n)_{n\geq 0}$ 是小的，我们得到

$$\Psi(0) = \liminf_{n\to+\infty} \left(\overline{L}_{|x_n}\right)_S = \liminf_{n\to+\infty} h_{\overline{L}}(x_n) = h_{\overline{L}}(X) = \frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L})}{(d+1)\deg_L(X)}.$$

现在，由 [CM22a] 中的命题 8.10.1可得

$$\forall t \in U, \quad \Psi(t) = \liminf_{n\to+\infty} \widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{L}_{|x_n} + t\overline{M}_{|x_n}) \geq \widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{L} + t\overline{M}) \geq \frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L} + t\overline{M})}{(d+1)\,\mathrm{vol}(L+tM)}.$$

对于任意 $t \in U$，令

$$f(t) = \frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L} + t\overline{M})}{(d+1)\,\mathrm{vol}(L+tM)}.$$

那么推论 4.8 表明， f 和 Ψ_n 在 O中均可微，并且我们有

$$f'(0) = \frac{\left(\overline{L}^d \cdot \overline{M}\right)_S}{\mathrm{vol}(L)} - \frac{d\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L})(L^{d-1}\cdot M)}{(d+1)\,\mathrm{vol}(L)^2},$$
$$\forall n \geq 0, \quad \Psi_n'(0) = h_{\overline{M}}(x_n).$$

因此（[BB08], 引理 7.6）保证

$$\lim_{n\to+\infty} h_{\overline{M}}(x_n) = \frac{\left(\overline{L}^d \cdot \overline{M}\right)_S}{\mathrm{vol}(L)} - \frac{d\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L})(L^{d-1}\cdot M)}{(d+1)\,\mathrm{vol}(L)^2}.$$

□

命题 5.6. 设 $\Omega' \in \mathcal{A}$。假设 M 有一个整体截面 s，它构成了 M 在 X上的正则亚纯截面。则有

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{X^{\mathrm{an}}_{\Omega'}} (-\ln|s|_\Phi(x))\delta_{\overline{L},x_n,\Omega'}(\mathrm{d}x) \geq \int_{X^{\mathrm{an}}_{\Omega'}} (-\ln|s|_\Phi(x))\delta_{\overline{L},X,\Omega'}(\mathrm{d}x).$$

此外，

$$\liminf_{n\to+\infty} h_{\overline{M}}(x_n) \geq \int_{X^{\mathrm{an}}_{\Omega}} (-\ln|s|_\Phi(x))\delta_{\overline{L},X,\Omega}(\mathrm{d}x).$$

证明。 我们改写（[CLT09], 引理 6.2）的证明。设 $R \in \mathbb{R}$。则（[CM22a], 推论 8.11.4）给出

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega'} \left(\int_{X^{\mathrm{an}}_\omega} \min(R, -\ln|s|_{\Phi_\omega})\delta_{\overline{L},x_n,\omega} \right) \nu(\mathrm{d}\omega) = \int_{\Omega'} \left(\int_{X^{\mathrm{an}}_\omega} \min(R, -\ln|s|_{\Phi_\omega})\delta_{\overline{L},X,\omega} \right) \nu(\mathrm{d}\omega).$$

因此，对任意 $R \in \mathbb{R}$，不等式

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{\Omega'} \left(\int_{X^{\mathrm{an}}_\omega} -\ln|s|_{\Phi_\omega}\delta_{\overline{L},x_n,\omega} \right) \nu(\mathrm{d}\omega) \geq \int_{\Omega'} \left(\int_{X^{\mathrm{an}}_\omega} \min(R, -\ln|s|_{\Phi_\omega})\delta_{\overline{L},X,\omega} \right) \nu(\mathrm{d}\omega)$$

成立。由于 $(\omega \in \Omega) \mapsto \int_{X^{\mathrm{an}}_\omega} -\ln|s|_{\Phi_\omega}\delta_{\overline{L},X,\omega}$ 是 ν-可积的，应用控制收敛定理并令 $R \to +\infty$ 取极限，即得第一个断言。

第二个断言由第一个断言取 $\Omega' = \Omega$，并结合以下事实得到：对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$h_{\overline{M}}(x_n) = \int_\Omega \left(\int_{X^{\mathrm{an}}_\omega} -\ln|s|_{\Phi_\omega}\delta_{\overline{L},x_n,\omega} \right) \nu(\mathrm{d}\omega).$$

□

下文中，对于任意 $\Omega' \in \mathcal{A}$，我们记

$$\epsilon_{\Omega'} := \liminf_{n\to+\infty} \int_{\Omega'} \left(\int_{X^{\mathrm{an}}_\omega} -\ln|s|_{\Phi_\omega}\delta_{\overline{L},x_n,\omega} \right) \nu(\mathrm{d}\omega) - \int_{\Omega'} \left(\int_{X^{\mathrm{an}}_\omega} -\ln|s|_{\Phi_\omega}\delta_{\overline{L},X,\omega} \right) \nu(\mathrm{d}\omega).$$

注意，命题 5.6 可改写为：对于任意 $\Omega' \in \mathcal{A}$，$\epsilon_{\Omega'} \geq 0$。现在我们可以给出定理 5.3 的证明了。

证明。

引理 5.7. 为证明定理 *5.3*，我们可以假设 $h_L(X) = 0$。

证明。对于任意 $C \in \mathbb{R}$，令 $\varphi + C$ 为定义在 L 上的度量族，定义如下：对于任意 $\omega \in \Omega$，$(\varphi + C)_\omega$ 在 $\omega \in \Omega_{\mathrm{um}}$ 时为 φ_ω，在 $\omega \in \Omega_{\mathrm{ar}}$ 时为 $\varphi_\omega + C$。我们记 $L(C) := (L, \overline{\varphi + C})$。令 $C := -h_L(X)/\nu(\Omega_{\mathrm{ar}})$。直接计算可得

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad & \int_\Omega \left(\int_{X_\omega^{\mathrm{an}}} -\ln |s|_{\Phi_\omega} \delta_{\overline{L(C)}, x_n, \omega} \right) \nu(\mathrm{d}\omega) - \int_\Omega \left(\int_{X_\omega^{\mathrm{an}}} -\ln |s|_{\Phi_\omega} \delta_{\overline{L(C)}, X, \omega} \right) \nu(\mathrm{d}\omega) \\ & = \int_\Omega \left(\int_{X_\omega^{\mathrm{an}}} -\ln |s|_{\Phi_\omega} \delta_{\overline{L}, x_n, \omega} \right) \nu(\mathrm{d}\omega) - \int_\Omega \left(\int_{X_\omega^{\mathrm{an}}} -\ln |s|_{\Phi_\omega} \delta_{\overline{L}, X, \omega} \right) \nu(\mathrm{d}\omega).\end{aligned}$$

此外，

$$h_{\overline{L(C)}}(X) = \frac{(\overline{L}(C)^{d+1})_S}{(d+1)\deg_L(X)} = \frac{(\overline{L}^{d+1})_S}{(d+1)\deg_L(X)} + \frac{(\overline{\mathcal{O}_X}(C) \cdot \overline{L}^d)_S}{\deg_L(X)} = h_{\overline{L}}(X) + C\nu(\Omega_{\mathrm{ar}}) = 0.$$

因此引理得证。 □

我们假设 $h_L(X) = 0$。令 $D = \mathrm{除子}(s)$，根据算术交乘积的定义，我们有

$$\begin{aligned}\frac{(\overline{L}_{|D}^d)_S}{\deg_L(X)} &= \frac{(\overline{L}^d \cdot \overline{M})_S}{\deg_L(X)} - \int_\Omega \left(\int_{X_\omega^{\mathrm{an}}} -\ln |s|_{\Phi_\omega} \delta_{\overline{L}, X, \omega} \right) \nu(\mathrm{d}\omega) \\ &= \lim_{n \to +\infty} h_{\overline{M}}(x_n) - \int_\Omega \left(\int_{X_\omega^{\mathrm{an}}} -\ln |s|_{\Phi_\omega} \delta_{\overline{L}, X, \omega} \right) \nu(\mathrm{d}\omega) \\ &\geq \epsilon_\Omega,\end{aligned}$$

其中，第二个等式用到了命题 5.5，最后一个不等式用到了命题 5.6。我们推得 $h_L(D) \geq 0 = h_L(X)$。在 $h_L(D) = h_L(X) = 0$ 情形下，我们得到 $\epsilon_\Omega = 0$。 □

参考文献

[AT84] Herbert J. Alexander 和 B.A. Taylor。《?n 中两个容量的比较》。*Mathematische Zeitschrift*，186：407–417，1984。[Bal22] François Ballaÿ。《算术奥村体与阿代尔Cartier除子的正性》，2022。[BB08] Robert J. Berman 和 Sébastien Boucksom。《全纯截面球的增长与平衡能量》。*Inventiones mathematicae*，181：337–394，2008。[BC11] Sébastien Boucksom 和 Huayi Chen。《滤过线性系的 Okounkov 体》。*Compositio Mathematica*，147(4)：1205–1229，2011年5月。[BE21] Sébastien Boucksom 和 Dennis Eriksson。《范数空间、上同调行列式与非阿基米德几何中的 Fekete点》。*Advances in Mathematics*，378：107501，2021年2月。[BFJ09] Sébastien Boucksom、Charles Favre 和 Mattias Jonsson。《除子体积的可微性与 Teissier 的一个问题》。*Journal of algebraic geometry*，18(2)：279–308，2009。[BGGJ+20] José Ignacio Burgos Gil、Walter Gubler、Philipp Jell、Klaus Künnemann、Florent Martin 和 Robert Lazarsfeld。《非阿基米德体积的可微性与非阿基米德 Monge-Ampère 方程》（附 Robert Lazarsfeld 的附录），2020。[BGM20] Sébastien Boucksom、Walter Gubler 和 Florent Martin。《任意非阿基米德域上的相对体积的可微性》，2020。[BGM21] Sébastien Boucksom、Walter Gubler 和 Florent Martin。《赋度量的 nef 线丛的非阿基米德体积》。*Épijournal de Géométrie Algébrique*，第5卷，2021年10月。[BJ18] Sébastien Boucksom 和 Mattias Jonsson。《平凡赋值域上的簇的线丛上的奇异半正度量》。工作论文或预印本，2018年2月。

[BJ21] Sébastien Boucksom 和 Mattias Jonsson。《平凡赋值域上的全局多重势理论》。工作论文或预印本，2021年11月。[Bou71] Nicolas Bourbaki。《一般拓扑学》。Springer-Verlag Berlin Heidelberg，1971年。[BT82] Eric Bedford 和 B. A. Taylor。《多重次调和函数的新容量》。Acta Mathematica，149(1)，1982年。[Che11] Huayi Chen。《算术体积函数的可微性》。Journal of the London Mathematical Society，84(2)：365–384，2011年。[CL06] Antoine Chambert-Loir。《Berkovich 空间上的测度与等分布》。2006(595)：215–235，2006年。[CLD12] Antoine Chambert-Loir 和 Antoine Ducros。《Berkovich 空间上的实微分形式与流》，2012年。[CLT09] Antoine Chambert-Loir 和 Amaury Thuillier。《Mahler 测度与对数等分布》。Annales de l'institut Fourier，59(3)：977–1014，2009年。[CM15] Huayi Chen 和 Catriona Maclean。《平衡能量对数谱的分布》。manuscripta mathematica，146(3-4)：365–394，2015年。英文版为《平衡能量对数谱的分布》。[CM19] Huayi Chen 和 Atushi Moriwaki。《阿代尔曲线上的 Arakelov几何》，《数学讲义》第2258卷。Springer新加坡，2019年。[CM21] Huayi Chen 和 Atsushi Moriwaki。《阿代尔曲线上的算术交理论》，2021年。[CM22a] Huayi Chen 和 Atsushi Moriwaki。《阿代尔曲线上的等分布定理》，2022年。[CM22b] Huayi Chen 和 Atsushi Moriwaki。《阿代尔曲线上的 Hilbert-Samuel公式与正性》，2022年。[Fan22] Yanbo Fang。《非阿基米德几何中的赋度量的充足线丛》。Annales de l'Institut Fourier，2022年。[Fle99] Hubert Flenner。《连接与交》/ H. Flenner、L. O'Carroll、W. Vogel。《数学中的 Springer 专著》。Springer，柏林，1999年。[GK17] Walter Gubler 和 Klaus Künnemann。《非阿基米德 Arakelov几何的热带方法》。The Algebra and Number Theory，11(1)：77–180，2017年1月。[GS90] Henri Gillet 和 Christophe Soulé。《算术交理论》。Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Scientifiques，72(1)，1990年。[Iko13] Hideaki Ikoma。《算术簇上逐次极小值的有界性》。Journal of algebraic geometry，22(2)：249–302，2013年。[Iko18] Hideaki Ikoma。《沿基条件的算术体积函数的可微性》，2018年。[Jou83] Jean-Pierre Jouanolou。《Bertini 定理及其应用》/ Jean-Pierre Jouanolou。《数学进展》。Birkhäuser，波士顿，1983年。[KK12] Kiumars Kaveh 和 A. G. Khovanskii。《Newton-Okounkov体、整点半群、分次代数与交理论》。《数学年刊》，176(2)，2012年。[Laz04] Robert Lazarsfeld。《代数几何中的正性 I》。2004年。[LM09] Robert Lazarsfeld 和 Mustată Mircea。《与线性系相关的凸体》。《高等师范学院科学年刊》，第4辑，42(5)：783–835，2009年。[Luo23] Wenbin Luo。《阿代尔曲线上的 χ-体积的连续延拓与双有理不变性》，2023年。[Mor06] Atsushi Moriwaki。《算术簇上体积的连续性》。Journal of Algebraic Geometry，18：407–457，2006年。[Nys14] David Witt Nyström。《将线丛上的度量变换为 Okounkov 体上的度量》。Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure，47(6)：1111–1161，2014年。[Oko96] Andrei Okounkov。《关于重数的 Brunn-Minkowski不等式》。Inventiones Mathematicae，125(3)，1996年。[Poi13] Jérôme Poineau。《Berkovich 空间是天使空间》。Bulletin de la Société Mathématique de France，141(2)：267–297，2013年。[Rum00] Robert S. Rumely。《截面容量的存在性》/ Robert Rumely、Chi Fong Lau、Robert Varley。《美国数学会回忆录》。美国数学会，普罗维登斯（R.I.），2000年。

[SUZ97] L Szpiro、E Ullmo 和 S Zhang . 小点的均匀分布 . *Inventiones mathematicae* , 127(2):337–，1997. [Wil22] Robert Wilms. 关于 Newton-Okounkov 体的可加性，2022. [Yua08] Xinyi Yuan. 算术簇上的大线丛. *Invent. Math.*，(173):603–649，2008.

巴黎西岱大学、索邦大学、法国国家科学研究中心、朱西厄-巴黎左岸数学研究所，法国巴黎 F-75013电子邮件地址： antoine.sedillot@imj-prg.fr