arXiv:2303.03401v1 [cs.CE] 6 Mar 2023

数据驱动修正节点分析电路求解器

Armin Galetzka*、Dimitrios Loukrezis*†、Herbert De Gersem*†
*加速器科学与电磁场研究所，达姆施塔特工业大学，德国
†计算工程，达姆施塔特工业大学，德国达姆施塔特

摘要—**本文介绍了一种新颖的数据驱动修正节点分析（MNA）电路求解器。该求解器能够处理包含仅有测量数据可用的元件的电路问题。数据驱动 MNA 求解器不使用硬编码的现象学模型表示，而是对电路问题进行重新表述，使得解通过最小化满足基尔霍夫定律的电路状态与测量数据中状态之间的距离来求得。这样便消除了对模型表示的必然需求，从而避免引入相关的建模误差和不确定性。本文将所提出的求解器应用于线性和非线性 RC 电路以及半波整流器。**

索引词—**电路仿真、数据驱动计算、无模型求解器、修正节点分析**

I. 引言

电路设备的仿真在设计与优化过程中发挥着关键作用。要解决电路问题，需要两类方程。一方面是基于第一性原理推导并被视为已精确知晓的基尔霍夫定律 [21]。另一方面是用于描述实际元件行为的模型，这些模型是经典电路求解器不可或缺的组成部分。这些模型大多基于经验获得，因此会引入源于建模过程的误差和认识论（模型形式）不确定性 [28]。这些模型通常通过数据拟合技术获得，例如基于物理启发的方法 [26, 20] 或复杂的机器学习回归方法 [15, 7, 19], 等。

如今，数据的可获得性持续提高。对于许多电路元件而言，行为数据的数量前所未有地庞大，为新型数据驱动建模与仿真方法创造了机遇。在这一背景下，数据驱动计算近年来逐渐兴起并发展成为一个独立的研究领域。无模型数据驱动方法最早在 [16, 17] 中针对弹性相关问题提出。此后，所谓的数据驱动计算框架也被扩展到多个问题类别 [4, 18, 3, 11], ，其中包括作者在磁场仿真领域的研究贡献 [8, 9, 10]。

上述所有工作的一个共同点是，数据驱动计算框架摒弃了以往不可避免地需要模型表示（例如本构（材料）定律）的做法。取而代之的是，引入双重最小化问题以求得解。其中，所求解必须同时满足第一性原理方程，并尽可能接近给定的测量数据。这样一来，仿真工作流程便大幅简化，因为可以直接利用现有测量数据求解当前问题，而无需投入精力开发模型表示；即使这些模型表示被认为足够恰当，它们仍然是经验性的，并且并不精确。相反，采用数据驱动计算框架可以完全绕过建模过程及其相关误差和不确定性。

本文将数据驱动计算扩展至电路求解器领域。具体而言，本文提出了一种新颖的数据驱动修正节点分析（MNA） [14] 求解器，能够解决仅有部分电路元件数据可用的电路问题。其中，假设部分电路元件已精确已知，而其余元件仅有测量数据可用。随后，按照数据驱动计算框架的思路重新表述 MNA，使双重最小化求解器能够求得符合基尔霍夫定律、同时尽可能接近测量值的状态。三个数值实验验证了该数据驱动 MNA 方法，该方法能够恢复使用标准修正节点分析求解器获得的参考解。不出所料，随着可用测量数据数量的增加，数据驱动 MNA 求解器的解会变得越来越准确。

需要注意的是，本文提出的数据驱动MNA求解器与文献中其他同样被称为“数据驱动”的方法截然不同 [1, 2, 5, 6, 12, 13, 22, 23, 29]。具体而言，数据驱动MNA求解器并不依赖机器学习回归来计算电路元件模型，再将这些模型用于标准电路仿真工具。相反，本文提出的数据驱动MNA求解方法将测量数据直接纳入求解器，完全跳过元件建模步骤。

本文其余部分的结构如下：第二节介绍修正节点分析框架中的数据驱动计算公式，并推导数据驱动MNA电路求解器。第三节给出并讨论若干数值研究，分别针对线性 RC 电路、含电压相关电容器的非线性 RC 电路以及非线性半波整流器。第四节讨论数据驱动MNA求解器的计算成本。最后，本文在第五节总结研究结果。

稿件收到日期：xxxx 年十二月 x 日；修订日期：xxxx 年八月 xx 日。通讯作者：A.Galetzka（电子邮箱：galetzka@temf.tu-darmstadt.de）。

II. 方法论

本文考虑包含无源元件（即电阻器（G）、电容器（C）和电感器（L））、电压源（V）以及电流源（I）的电路。设 $\mathbf{A}_X \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n_X}$ 表示任意电路的约化关联矩阵，其中 n 表示节点数，$X \in \{\mathrm{G}、\mathrm{C}、\mathrm{L}、\mathrm{V}、\mathrm{I}\}$。随后，利用修正节点分析，基尔霍夫定律可表述为

$$\mathbf{A}_\mathrm{G}\mathbf{i}_\mathrm{G}(t) + \mathbf{A}_\mathrm{C}\dot{\mathbf{q}}_\mathrm{C}(t) + \mathbf{A}_\mathrm{L}\mathbf{i}_\mathrm{L}(t) + \mathbf{A}_\mathrm{V}\mathbf{i}_\mathrm{V}(t) = \mathbf{A}_\mathrm{I}\mathbf{i}_\mathrm{src}(t), \tag{1a}$$

$$\mathbf{A}_\mathrm{G}^\top\mathbf{\Phi}(t) - \mathbf{v}_\mathrm{G}(t) = 0, \tag{1b}$$

$$\mathbf{A}_\mathrm{C}^\top\mathbf{\Phi}(t) - \mathbf{v}_\mathrm{C}(t) = 0, \tag{1c}$$

$$\mathbf{A}_\mathrm{L}^\top\mathbf{\Phi}(t) - \dot{\mathbf{\Psi}}_\mathrm{L}(t) = 0, \tag{1d}$$

$$\mathbf{A}_\mathrm{V}^\top\mathbf{\Phi}(t) - \mathbf{v}_\mathrm{src}(t) = 0. \tag{1e}$$

这里，$\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{n-1}$ 表示节点与接地节点之间的电势差，而 $\mathbf{i}_\mathrm{G} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{G}}$，$\mathbf{i}_\mathrm{L} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{L}}$，$\mathbf{i}_\mathrm{V} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{V}}$，$\mathbf{i}_\mathrm{src} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{src}}$ 分别表示含有电阻器、电感器、电压源和电流源的支路中的电流。电荷和磁通量的变化分别表示为 $\dot{\mathbf{q}}_\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{C}}$和$\mathbf{\Psi}_\mathrm{L} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{L}}$。

应用时间离散化方案（例如后向欧拉法）后，式 (1) 的时间离散形式为

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}_\mathrm{G}\mathbf{i}_\mathrm{G}^{n+1} + h^{-1}\mathbf{A}_\mathrm{C}\mathbf{q}_\mathrm{C}^{n+1} \\ &\quad + \mathbf{A}_\mathrm{L}\mathbf{i}_\mathrm{L}^{n+1} + \mathbf{A}_\mathrm{V}\mathbf{i}_\mathrm{V}^{n+1} = \mathbf{A}_\mathrm{I}\mathbf{i}_\mathrm{src}^{n+1} + h^{-1}\mathbf{A}_\mathrm{C}\mathbf{q}_\mathrm{C}^{n},\end{aligned} \tag{2a}$$

$$\mathbf{A}_\mathrm{G}^\top\mathbf{\Phi}^{n+1} - \mathbf{v}_\mathrm{G}^{n+1} = 0, \tag{2b}$$

$$\mathbf{A}_\mathrm{C}^\top\mathbf{\Phi}^{n+1} - \mathbf{v}_\mathrm{C}^{n+1} = 0, \tag{2c}$$

$$\mathbf{A}_\mathrm{L}^\top\mathbf{\Phi}^{n+1} - h^{-1}\mathbf{\Psi}_\mathrm{L}^{n+1} = h^{-1}\mathbf{\Psi}_\mathrm{L}^{n}, \tag{2d}$$

$$\mathbf{A}_\mathrm{V}^\top\mathbf{\Phi}^{n+1} - \mathbf{v}_\mathrm{src}^{n+1} = 0, \tag{2e}$$

其中，h 表示时间步，$f^{n+1} = f(t+h)$ 和 $f^n = f(t)$ 分别表示。为简化记法，以下省略上标 $^{n+1}$。所有符合基尔霍夫定律的状态构成集合 $\mathcal{K} = \{\boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\zeta} = (\mathbf{\Phi}, \mathbf{i}_\mathrm{G}, \mathbf{q}_\mathrm{C}, \mathbf{\Psi}, \mathbf{i}_\mathrm{L}, \mathbf{i}_\mathrm{V}) \in \mathcal{Z} : (2)\}$，其中 $\mathcal{Z}$表示所有可能状态的集合。对于传统电路求解器，需要电路元件模型来求解式 (2)。模型的响应可归入集合 $\mathcal{D}$，定义如下：

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{D}} = &\left\{\bigtimes_e \{i = G_e(v)v\}\right\} \times \left\{\bigtimes_e \{q = C_e(v)v\}\right\} \\ &\times \left\{\bigtimes_e \{\Psi = L_e(i)i\}\right\},\end{aligned} \tag{3}$$

其中，e 指的是包含所考虑元件的支路。传统解随后由下式确定：

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathcal{K} \cap \tilde{\mathcal{D}}. \tag{4}$$

采用数据驱动MNA求解器时，无需模型表示，因为其中部分或全部电路元件的信息仅通过测量数据获取。每个元件的测量数据收集在以下集合中

$$\mathcal{D}_{\mathrm{G},e} = \left\{\left(v_\mathrm{G}^\dagger, i_\mathrm{G}^\dagger\right)_n\right\}_{n=1}^{N_{\mathrm{G},e}}, \tag{5a}$$

$$\mathcal{D}_{\mathrm{C},e} = \left\{\left(v_\mathrm{C}^\dagger, q_\mathrm{C}^\dagger\right)_n\right\}_{n=1}^{N_{\mathrm{C},e}}, \tag{5b}$$

$$\mathcal{D}_{\mathrm{L},e} = \left\{\left(\Psi_\mathrm{L}^\dagger, i_\mathrm{L}^\dagger\right)_n\right\}_{n=1}^{N_{\mathrm{L},e}}. \tag{5c}$$

它们定义了全局测量集

$$\mathcal{D} = \{\bigtimes_e \mathcal{D}_{X,e}\}_{X=\{\mathrm{G,C,L}\}}, \tag{6}$$

其中，$\mathcal{D}$的基数，即所用测量数据点的总数，由 $N = \sum_e N_{\mathrm{G},e} + \sum_e N_{\mathrm{C},e} + \sum_e N_{\mathrm{L},e}$给出。然而，由于可用的测量数据点数量有限，寻找类似于 (4) 的解会得到 $\boldsymbol{\zeta} = \mathcal{K} \cap \mathcal{D} = \emptyset$。因此，数据驱动框架放宽了条件 (4)：它接受一个解，使符合基尔霍夫定律的状态与属于测量集的状态$\mathcal{D}$之间的距离最小。我们将每个元件处的距离函数定义为

$$f_{\mathrm{G},e}\left((v_\mathrm{G}, i_\mathrm{G}), \mathcal{D}_{\mathrm{G},e}\right) = \min_{(v_\mathrm{G}^\dagger, i_\mathrm{G}^\dagger) \in \mathcal{D}_{\mathrm{G},e}} \left\|(v_\mathrm{G}, i_\mathrm{G}) - (v_\mathrm{G}^\dagger, i_\mathrm{G}^\dagger)\right\|_{\tilde{G}}^2, \tag{7a}$$

$$f_{\mathrm{C},e}\left((v_\mathrm{C}, q_\mathrm{C}), \mathcal{D}_{\mathrm{C},e}\right) = \min_{(v_\mathrm{C}^\dagger, q_\mathrm{C}^\dagger) \in \mathcal{D}_{\mathrm{C},e}} \left\|(v_\mathrm{C}, q_\mathrm{C}) - (v_\mathrm{C}^\dagger, q_\mathrm{C}^\dagger)\right\|_{\tilde{C}}^2, \tag{7b}$$

$$f_{\mathrm{L},e}\left((\Psi_\mathrm{L}, i_\mathrm{L}), \mathcal{D}_{\mathrm{L},e}\right) = \min_{(\Psi_\mathrm{L}^\dagger, i_\mathrm{L}^\dagger) \in \mathcal{D}_{\mathrm{L},e}} \left\|(\Psi_\mathrm{L}, i_\mathrm{L}) - (\Psi_\mathrm{L}^\dagger, i_\mathrm{L}^\dagger)\right\|_{\tilde{L}}^2, \tag{7c}$$

采用加权欧几里得距离

$$\|\cdot,\cdot\|_{\tilde{\mathbf{X}}}^2 = \mathbf{(pq)} \sum_{i=1}^M 1/2\tilde{X}_i{}^{-1}p_i^2 + 1/2\tilde{X}_i q_i^2, \quad \tilde{\cdot} \in \mathbb{R}^M$$

(), 其中 $\mathbf{pqX}$。注意，$\tilde{\cdot}$权重因子 G, C, L 仅用于计算，并不代表元件的底层模型 [16, 9]。目前，我们仅要求常数满足$\tilde{\cdot}$有界条件，即 $0 < X < \infty$。全局距离函数定义为

$$F(\boldsymbol{\zeta}, \mathcal{D}) = F_\mathrm{G}\left(\mathbf{v}_\mathrm{G}, \mathbf{i}_\mathrm{G}\right) + F_\mathrm{C}(\mathbf{v}_\mathrm{C}, \mathbf{q}_\mathrm{C}) + F_\mathrm{L}(\mathbf{i}_\mathrm{L}, \mathbf{\Psi}_\mathrm{L}), \tag{8}$$

其中，逐元件距离函数对所有元件求和，即 $F_\mathrm{X} = \sum_e f_{X,e}$对 $X \in \{\mathrm{G}, \mathrm{C}, \mathrm{L}\}$。对于给定状态 $\boldsymbol{\zeta}$，距离函数 (8) 返回该状态与可用测量数据之间的最小距离。为获得满足基尔霍夫定律的解，只需在最小化 (8) 时加入约束 (2)，从而得到约束最小化问题

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{\zeta}} F(\boldsymbol{\zeta}, \mathcal{D}) \\ &\text{subject to } (2),\end{aligned} \tag{9}$$

这称为数据驱动表述。数据驱动最小化问题 (9) 本质上是一个双重最小化问题，可表述为

$$\boldsymbol{\zeta} = \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{\zeta}^\circ \in \mathcal{K}} \left\{\min_{\boldsymbol{\zeta}^\times \in \mathcal{D}} \left\{\left\|\boldsymbol{\zeta}^\circ - \boldsymbol{\zeta}^\times\right\|_{\tilde{G},\tilde{C},\tilde{L}}^2\right\}\right\}, \tag{10}$$

其中 $\|\boldsymbol{\zeta}\|_{\tilde{G}\,\tilde{C}\,\tilde{L}}^2 = \|\mathbf{v}_\mathrm{G}\,\mathbf{i}_\mathrm{G}\|_{\tilde{G}}^2 + \|\mathbf{v}_\mathrm{C}\,\mathbf{q}_\mathrm{C}\|_{\tilde{C}}^2 + \|\mathbf{\Psi}_\mathrm{L}\,\mathbf{i}_\mathrm{L}\|_{\tilde{L}}^2$。

为求解（10），我们将双重最小化问题拆分为以下两个独立的最小化问题：

1) 投影到电路状态上： 给定状态 $\boldsymbol{\zeta}^{\times} \in \mathcal{D}$，通过求解可找到一个与基尔霍夫定律相容且最接近测量状态的新状态 $\boldsymbol{\zeta}^{\circ} \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}^{\circ} = \underset{\boldsymbol{\zeta}^{\circ} \in \mathcal{K}}{\operatorname{argmin}} \left\| \boldsymbol{\zeta}^{\circ} - \boldsymbol{\zeta}^{\times} \right\|_{\tilde{G},\tilde{C},\tilde{L}}^{2}, \\ \text{subject to (2).} \end{aligned} \tag{11}$$

通过拉格朗日乘子求解约束最小化问题，并以势替换未知电压，可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left\| \left(\mathbf{A}_{\mathrm{G}}^{\top} \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{i}_{\mathrm{G}} \right) - \left(\mathbf{v}_{\mathrm{G}}^{\times}, \mathbf{i}_{\mathrm{G}}^{\times} \right) \right\|_{\tilde{G}}^{2} + \\ & \left\| \left(\mathbf{A}_{\mathrm{C}}^{\top} \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{q}_{\mathrm{C}} \right) - \left(\mathbf{v}_{\mathrm{C}}^{\times}, \mathbf{q}_{\mathrm{C}}^{\times} \right) \right\|_{\tilde{C}}^{2} + \\ & \left\| \left(\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{L}}, \mathbf{i}_{\mathrm{L}} \right) - \left(\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{L}}^{\times}, \mathbf{i}_{\mathrm{L}}^{\times} \right) \right\|_{\tilde{L}}^{2} - \\ & \boldsymbol{\eta}^{\top} \left(\mathbf{A}_{\mathrm{G}} \mathbf{i}_{\mathrm{G}} + \mathbf{A}_{\mathrm{C}} \frac{\mathbf{q}_{\mathrm{C}} - \mathbf{q}_{\mathrm{C}}^{n}}{h} \right) - \\ & \boldsymbol{\eta}^{\top} \left(\mathbf{A}_{\mathrm{L}} \mathbf{i}_{\mathrm{L}} + \mathbf{A}_{\mathrm{V}} \mathbf{i}_{\mathrm{V}} + \mathbf{A}_{\mathrm{I}} \mathbf{i}_{\mathrm{src}} \right) - \\ & \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{L}}^{\top} \left(\mathbf{A}_{\mathrm{L}}^{\top} \boldsymbol{\Phi} - \frac{\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{L}} - \boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{L}}^{n}}{h} \right) - \\ & \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{V}}^{\top} \left(\mathbf{A}_{\mathrm{V}}^{\top} \boldsymbol{\Phi} - \mathbf{v}_{\mathrm{src}} \right). \end{aligned} \tag{12}$$

对 (12) 关于$\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{i}_{\mathrm{G}}, \mathbf{q}_{\mathrm{C}}, \boldsymbol{\Psi}, \mathbf{i}_{\mathrm{L}}, \mathbf{i}_{\mathrm{V}}$ 求最小值，可对未知数求导，从而得到如下形式的线性系统$\mathbf{M}\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{b}$。系统矩阵$\mathbf{M}$ 为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathrm{G}} \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{A}_{\mathrm{G}}^{\top} & & & & & & & & \\ + \mathbf{A}_{\mathrm{C}} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{\mathrm{C}}^{\top} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{A}_{\mathrm{L}} & -\mathbf{A}_{\mathrm{V}} \\ 0 & \tilde{\mathbf{R}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{A}_{\mathrm{G}}^{\top} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{K}} & 0 & 0 & 0 & -h^{-1} \mathbf{A}_{\mathrm{C}}^{\top} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{L}} & 0 & 0 & -\mathbf{A}_{\mathrm{L}}^{\top} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{M}} & 0 & 0 & h^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{A}_{\mathrm{V}}^{\top} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{\mathrm{G}} & h^{-1} \mathbf{A}_{\mathrm{C}} & \mathbf{A}_{\mathrm{L}} & 0 & \mathbf{A}_{\mathrm{V}} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{\mathrm{L}}^{\top} & 0 & 0 & 0 & -h^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{\mathrm{V}}^{\top} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

右端项为

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathrm{G}} \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{v}_{\mathrm{G}}^{\times} + \mathbf{A}_{\mathrm{C}} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{v}_{\mathrm{C}}^{\times} \\ \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{i}_{\mathrm{G}}^{\times} \\ \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{q}_{\mathrm{C}}^{\times} \\ \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{i}_{\mathrm{L}}^{\times} \\ \tilde{\mathbf{M}} \boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{L}}^{\times} \\ 0 \\ h^{-1} \mathbf{A}_{\mathrm{C}} \mathbf{q}_{\mathrm{C}}^{n} - \mathbf{A}_{\mathrm{I}} \mathbf{i}_{\mathrm{src}} \\ -h^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{L}}^{n} \\ \mathbf{v}_{\mathrm{src}} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

因此，通过下式可得到最接近给定状态$\boldsymbol{\zeta}^{\times} \in \mathcal{D}$ 的状态 $\boldsymbol{\zeta}^{\circ} \in \mathcal{K}$

$$\boldsymbol{\zeta}^{\circ} = \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\zeta}^{\times}), \tag{15}$$

其中， $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$ 表示状态$\boldsymbol{\zeta}^{\times} \in \mathcal{D}$ 到 $\mathcal{K}$的最近点投影。

2) 投影到测量状态： 给定状态 $\boldsymbol{\zeta}^{\circ} \in \mathcal{K}$，通过求解可找到测量集合中的新状态 $\boldsymbol{\zeta}^{\times} \in \mathcal{D}$，使其与 $\boldsymbol{\zeta}^{\circ}$ 的距离最近

$$\boldsymbol{\zeta}^{\times} = \underset{\boldsymbol{\zeta}^{\times} \in \mathcal{D}}{\operatorname{argmin}} \left\| \boldsymbol{\zeta}^{\circ} - \boldsymbol{\zeta}^{\times} \right\|_{\tilde{G},\tilde{C},\tilde{L}}^{2}. \tag{16}$$

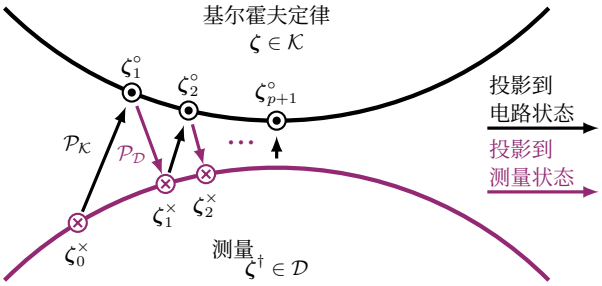

图 1. 不动点迭代示意图。

问题 (16) 本质上是一个最近邻问题，可以通过暴力搜索或 kd树方法等方式求解 [27]。请注意，对每个元素都要独立求解最小化问题 (16)。引入算子 $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$，表示将状态 $\boldsymbol{\zeta}^{\circ} \in \mathcal{K}$ 投影到 $\mathcal{D}$的最近点投影，则可通过以下方式得到新状态 $\boldsymbol{\zeta}^{\times} \in \mathcal{D}$

$$\boldsymbol{\zeta}^{\times} = \mathcal{P}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\zeta}^{\circ}). \tag{17}$$

因此，对于求解器的每次迭代，都必须求解两个最小化问题 (11) 和 (16)。根据初始值，迭代方案可定义为

$$\boldsymbol{\zeta}_{p+1}^{\circ} = \left(\mathcal{P}_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{P}_{\mathcal{D}} \right) (\boldsymbol{\zeta}_{p}^{\circ}), \tag{18}$$

分别

$$\boldsymbol{\zeta}_{p+1}^{\times} = \left(\mathcal{P}_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{P}_{\mathcal{M}} \right) (\boldsymbol{\zeta}_{p}^{\times}), \tag{19}$$

这可视为不动点迭代，如图 1 所示。该最小化过程持续进行，直到 $\boldsymbol{\zeta}_{p}^{\circ}$和 $\boldsymbol{\zeta}_{p}^{\times}$在连续两次迭代后均不再变化，或达到所需精度。第$p$ 次迭代的精度可通过能量失配$\epsilon_{\mathrm{em},\ p}$来衡量，其定义为

$$\epsilon_{\mathrm{em},p}^{2} = \left\| \boldsymbol{\zeta}_{p}^{\circ} - \boldsymbol{\zeta}_{p}^{\times} \right\|_{\tilde{G},\tilde{C},\tilde{L}}^{2}, \tag{20}$$

本质上，这是两个状态之间的加权距离。如果连续两次迭代之间能量失配 (20) 的变化低于用户设定的容差，则认为已收敛。数据驱动求解器收敛后，我们继续进行下一个时间步。最近一次的数据驱动求解结果将作为新时间步的初始值。

通常，电路中的大多数元件都是已知的，并且已有相应的模型表示。在这种情况下，作者在 [8] 中提出了多种将精确已知模型与数据驱动计算相结合的方法。我们考虑侵入性最小的方法，即现在针对已知模型表示执行最小化（16）。此外，式（13）和（14）中的权重因子根据已知模型系数选取。作者还表明，对于具有强非线性响应的元件，如果可用的测量集数据稀少或分布不均，恒定的权重因子会阻碍收敛

数据驱动求解器的速度 [9]。因此，我们采用 [9] 中提出的方法，选择当前状态相对于测量集中周围状态的局部切线作为权重因子。

III. 数值实验

下文中，我们考虑不同的电路配置。为验证数据驱动求解器，我们生成基数逐渐增加的人工测量数据，并针对每组数据求解电路。在每个时间步 t_k，$k = 1, \ldots\ldots, K$，以及特定元件 $X \in \{\mathrm{G}, \mathrm{C}, \mathrm{L}\}$处，我们计算相对于解析参考解的能量失配；例如，该参考解可通过采用“真实”电路元件的传统 MNA 求解器获得。能量失配误差定义为

$$\epsilon^2_{\mathrm{EM},\tilde{X}}(t) = \left\| (p_{\mathrm{ref}}, q_{\mathrm{ref}}) - (p, q) \right\|^2_{\tilde{X}} \Big|_t . \tag{21}$$

此外，我们将整个时间区间内的均方根（RMS）误差定义为

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mathrm{RMS},\tilde{X}} &= \left(\frac{\int_{t_0}^{T} \epsilon^2_{\mathrm{EM},\tilde{X}}(t)\,\mathrm{d}t}{\int_{t_0}^{T} (\|(p_{\mathrm{ref}}, q_{\mathrm{ref}})\|^2_{\tilde{X}}\,\mathrm{d}t} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \left(\frac{\sum_{k=0}^{K} \epsilon^2_{\mathrm{EM},\tilde{X}}(t_k)}{\sum_{k=0}^{K} (\|(p_{\mathrm{ref}}, q_{\mathrm{ref}})\|^2_{\tilde{X}})|_{t_k}} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{22}$$

式 (21) 和 (22) 中的权重因子对应于参考解所使用的实际模型参数。

A. 线性 RC 电路

首先，我们考虑一个由 R 和 C 串联组成的 RC 电路。该电路由恒定电压源激励。此外，为了使用解析解作为参考值，我们只考虑线性元件。我们采用基于后向欧拉格式和梯形法则的数据驱动求解器，其中假设电阻器和电容器未知，且这些元件仅有测量数据可用。此外，还计算了不同时间步长值（即不同时间步数）下的解。

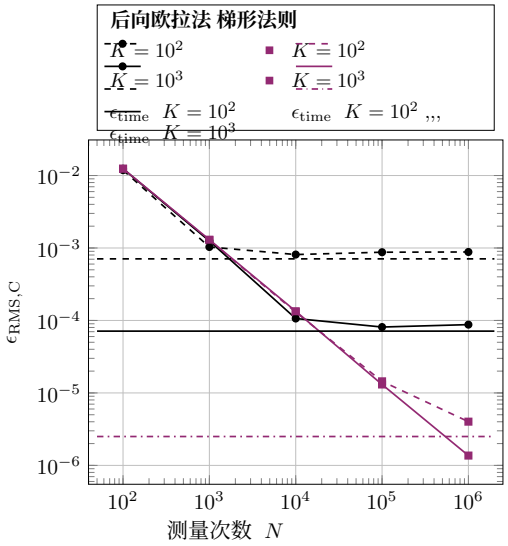

图 2。线性 RC 电路：电容器 C 处的均方根误差随测量次数的变化。水平线表示传统 MNA 电路求解器的时间离散误差。

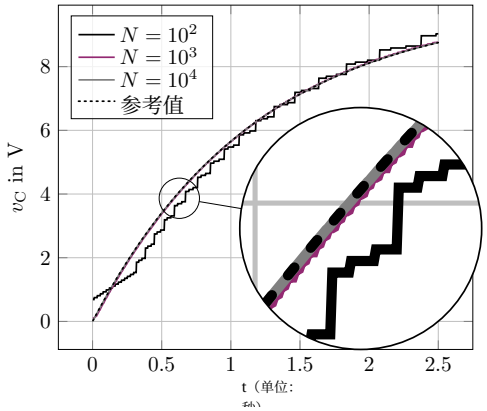

图 3。线性 RC 电路：电容器处的电压 v_{C} 随时间的变化。图中展示了解析参考解，以及随着测量数据点数量增加而得到的数据驱动解。

图 2 展示了使用后向欧拉法和梯形法则求得的解在不同时间步数下的均方根误差。此外，还展示了传统 MNA 求解器的均方根误差。结果表明，使用的测量数据越多，数据驱动解的精度越高。然而，对于某些测量数据用量与时间步数的组合，收敛会停滞。为分析这一现象，我们考虑状态 $(p,\ q)$ 相对于参考解的总体误差。误差定义为

$$\begin{aligned} \epsilon &= \left\| (p_{\mathrm{ref}}, q_{\mathrm{ref}}) - (p, q) \right\|^2_{\tilde{X}} \\ &= \left\| (p_{\mathrm{ref}} - p_{\mathrm{trad}}, q_{\mathrm{ref}} - q_{\mathrm{trad}}) - (p - p_{\mathrm{trad}}, q - q_{\mathrm{trad}}) \right\|^2_{\tilde{X}} \\ &\le \underbrace{\left\| (p_{\mathrm{ref}}, q_{\mathrm{ref}}) - (p_{\mathrm{trad}}, q_{\mathrm{trad}}) \right\|^2_{\tilde{X}}}_{\epsilon_{\mathrm{time}}} \\ &\quad + \underbrace{\left\| (p, q) - (p_{\mathrm{trad}}, q_{\mathrm{trad}}) \right\|^2_{\tilde{X}}}_{\epsilon_{\mathrm{data}}}, \end{aligned} \tag{23}$$

其中，$(p_{\mathrm{trad}},\ q_{\mathrm{trad}})$ 是使用传统 MNA 求解器计算得到的状态。因此，总误差可以分解为源于时间离散方案的误差，以及归因于有限测量数据的误差。这种分解可以在图 2 中清楚地观察到。该图展示了若干情形：扩展测量集并不会提高准确性。在这些情形下，时间离散误差 ϵ_{time} 占主导地位，数据驱动求解器的准确性会停滞在传统求解器的准确度水平。因此，为避免不必要的计算成本，时间离散方案和所采用的测量数据点数量最好相互匹配地进行选择。在时间离散误差 ϵ_{time} 可以忽略的情况下，例如采用 $K = 1000$ 和梯形法则时，数据驱动求解器相对于所采用测量数据表现出线性收敛速度。

接下来，我们关注由有限的测量

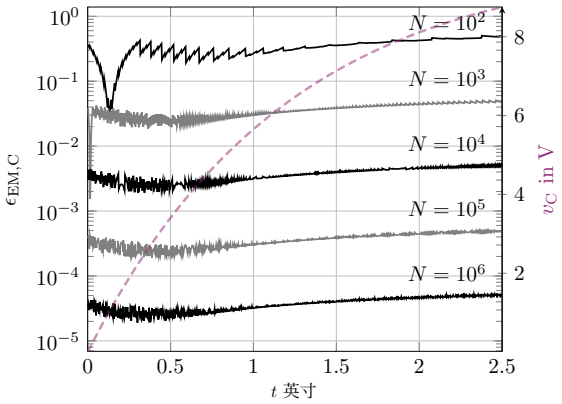

图4. 线性 RC 电路：电容器 C 的能量失配随时间的变化。图中展示了测量数据 $\{10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6\}$ 数量逐渐增加时的误差。虚线表示电压。

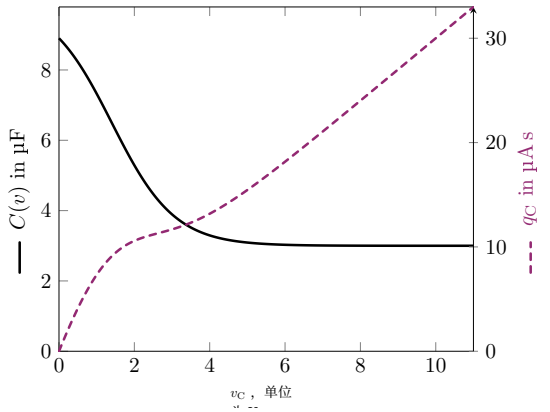

图 5. 非线性 RC 电路：电压相关电容器 $C(v_{\mathrm{C}})$ 及电荷 $q_C(v_{\mathrm{C}})$ 随施加电压 v_{C} 的变化。

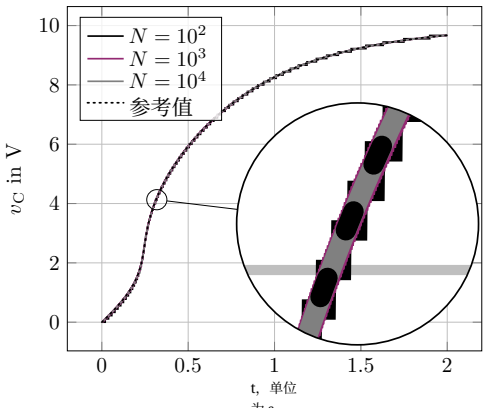

图6. 非线性 RC 电路：电容器上的电压 v_{C} 随时间变化。图中显示了解析参考解，以及测量数据 $N \in \{10^2, 10^3, 10^4\}$数量逐渐增加时的数据驱动解。

数据导致的误差。因此，使用梯形法则和 $K = 1000$ 个时间步对电路进行仿真。图 3 展示了参考解 v_{C}，以及测量集规模逐渐增大时得到的数据驱动解。我们已经可以定性地观察到，如果测量集不够大，例如对于 $N = 10^2$，数据驱动求解器的解能够捕捉电路的行为，但与解析解相比仍存在较大误差。此外，图中还显示，由于数据是离散的，解并不连续，并且在某些时间步会出现跳变。更具体地说，由于数据有限，求解器可能会在连续的时间步中选取相同的测量状态。然而，随着可用数据增多，这些不连续性会有所减小。图 4 展示了测量集基数逐渐增大时，能量失配相对于参考解随时间的变化。图中清楚地表明，测量数据点越多，解的精度越高。

B. 非线性 *RC* 电路

我们重新考察该 RC 电路，但这次考虑一个电压相关电容器 $C(v_C(t))$。图5展示了电容器的响应，以及电荷随施加电压的变化。这种非线性响应是多层陶瓷电容器的典型特性：其电容会在中等电压下迅速下降，随后趋于近乎恒定的值 [25, 30]。

数据驱动求解器将电阻器视为已知元件。相反，对于电压相关电容器，我们只有测量数据。为了验证数据驱动求解器所得的结果，我们生成了基数逐渐增加的测量数据集。参考求解器和数据驱动求解器均采用梯形法则进行时间离散化。图6展示了电容器电压随时间的变化。与线性情况类似，当测量数据点数量不足时，数据驱动解在时间步之间会出现较大跳变。随着测量次数增加，数据驱动解变得越来越平滑，最终与传统的修正节点分析解完全一致。

解。这一点也可以从图8所示的结果中明显看出

关于均方根误差随时间的变化，以及测量数据点数量增加时的情况。与线性RC电路类似，观察到收敛速度随测量点数量呈线性变化。图7展示了能量失配随时间的变化，以及测量集基数逐渐增大时的情况。同样，图中清楚地表明，解的精度随着测量数据点数量的增加而提高。我们还观察到，在强非线性区域内，时间上的误差略大，也就是分别在 $t < 0.5$s 和 $v_{\mathrm{C}} < 4$V 时。

C. 半波整流器

下一个测试案例考虑了图9所示的经典半波整流电路。电路元件为 $R_{\mathrm{C}} = 1\mathrm{k}\Omega$, $R_{\mathrm{D}} = 10\mathrm{m}\Omega$, $C = 100\,\mu\mathrm{F}$ 和 $v_{\mathrm{src}} = 5\mathrm{V}\,\sin(\omega t)$，其中 $\omega = 2\pi f$ 和 $f = 100\mathrm{Hz}$。二极管采用肖克利二极管模型 [26],建模，因此

$$i(t) = i_{\mathrm{s}} \left(\mathrm{e}^{\frac{v_{\mathrm{D}}(t)}{n v_{\mathrm{T}}}} - 1 \right), \tag{24}$$

其中，v_{D} 是二极管两端的电压，$i_{\mathrm{s}} = 2.52\mathrm{nA}$ 是饱和电流，$v_{\mathrm{T}} = 25.85\mathrm{mV}$ 是热电压，此处对应 $T = 300\mathrm{K}$，而 $n = 1.752$ 是理想因子。

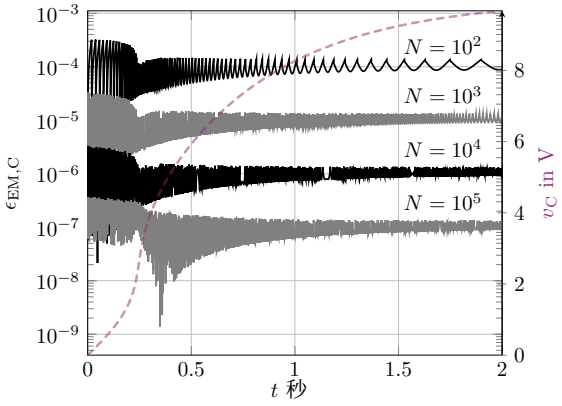

图7. 非线性 RC 电路：电容器 C 上的能量失配随时间的变化。图中显示了测量数据数量不断增加时的误差 $\{10^2, 10^3, 10^4, 10^5\}$ v_{C} 。虚线表示电压。

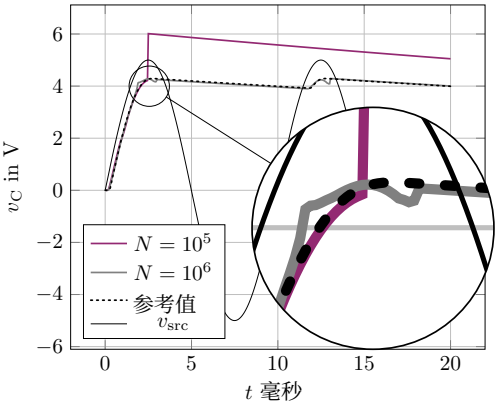

图 10. 半波整流器：电容器上的电压 v_{C} 随时间的变化。图中展示了使用 NGSPICE 得到的参考解，以及测量数据数量逐渐增加时的数据驱动求解器结果 $N \in \{10^5, 10^6\}$。

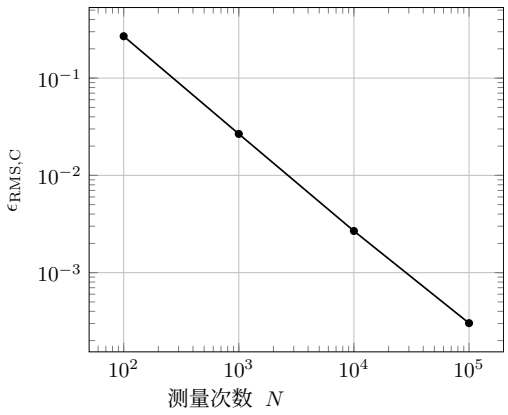

图8. 非线性 RC 电路：电容器 C 上的均方根误差随测量次数的变化。

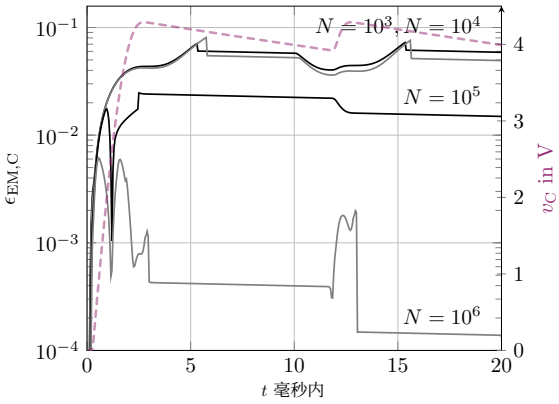

图 11. 半波整流器：电容器 C 上的能量失配随时间的变化。图中展示了测量数据数量逐渐增加时的误差 $\{10^3, 10^4, 10^5, 10^6\}$ v_{C} 。虚线表示输出电压 。

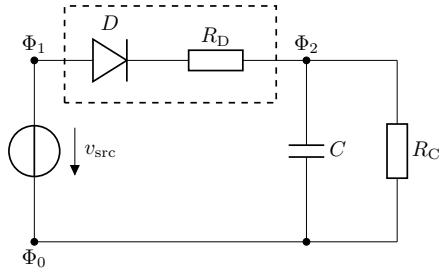

图9. 半波整流电路。

我们假设电阻器和电容器是已知元件，而二极管仅通过测量数据来表征。寄生电阻 R_{D} 是 NGSPICE 仿真 [24] 中电路模型的一部分。因此，测量数据是由包含寄生电阻 R_{D}的二极管模型生成的。我们将数据驱动解与通过 NGSPICE 获得的参考解进行比较。对于参考解和数据驱动解，均使用 $K = 400$ 个时间步。数据驱动求解器基于梯形法则。图 10 展示了半波整流器的输出电压 v_{C}。图中清楚地表明，使用的测量数据越多，数据驱动解就越准确。

然而，我们也观察到，要获得足够准确的解，需要相当大量的测量数据。图 11 展示了能量失配随时间的变化，图 12 展示了电容器处的均方根误差，也体现了这一现象。二极管的开关行为可以解释收敛速度降低的原因。也就是说，在二极管电流几乎保持恒定的工作区间，距离最小化的数据驱动求解器会遇到问题，即对于 $v_{\mathrm{D}} \ll v_{\mathrm{fv}}$，其中 v_{fv} 是正向阈值电压。

IV. 计算成本

下文简要讨论数据驱动MNA求解器的计算成本。关于数据驱动求解器计算复杂度的更详细讨论，请参阅 [9, 10]。

在每次数据驱动迭代中，我们都必须求解一个规模为 $2n-2+n_{\mathrm{G}}+n_{\mathrm{C}}+3n_{\mathrm{L}}+2n_{\mathrm{V}}$ 的线性系统。数据驱动迭代的次数与所使用的测量数据数量密切相关。此外，非线性元件响应越强，也需要越多的数据驱动迭代。

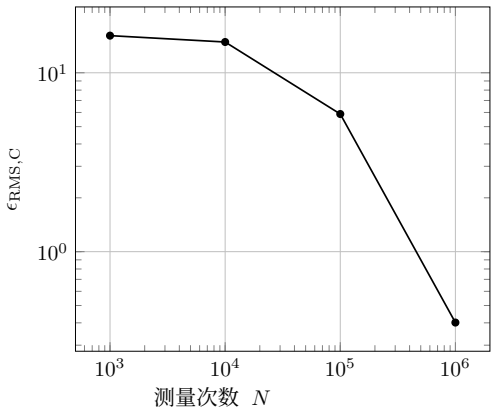

图12. 半波整流器：电容器 C 上的均方根误差随测量次数的变化。

对于线性 RC 电路，每个时间步的数据驱动迭代次数从 5 次（对应 $N = 10^2$）到 45 次（对应 $N = 10^6$）不等。对于非线性 RC 电路，迭代次数取决于 $(u_{\mathrm{C}}, q_{\mathrm{C}})$ 相空间中的当前工作点。在关系几乎呈线性的区域，数据驱动迭代次数与线性 RC 电路的相近。如果工作点位于强非线性区域，迭代次数则从 20 次（对应 $N = 10^2$）到 140 次（对应 $N = 10^6$）不等。相比之下，传统求解器必须在每个时间步求解非线性问题；对于非线性 RC 电路，平均需要迭代 12 次。

因此，当前实现的数据驱动MNA求解器仍需要多达十倍的仿真时间。这是无需为电路元件建立模型所付出的代价。预计数据处理方面的进展将进一步缩小传统MNA求解器与数据驱动MNA求解器之间的差距。

最后需要指出的是，前述关于传统MNA求解器和数据驱动MNA求解器计算成本的讨论，仅考虑了线性系统规模、系统求解次数和求解器迭代次数方面的计算复杂度。也就是说，这一讨论不包括通常为传统MNA求解器识别并构建模型表示所需的工作。虽然这种元件建模工作的成本难以评估，但必须强调，采用数据驱动求解器时，建模步骤完全可以省去。

V. 结论

本文提出了一种数据驱动的 MNA 电路求解器，它基于基尔霍夫定律和元件的测量数据，而非传统元件模型。该求解器首先应用于线性 RC 电路。对不同近似误差的研究得出结论：为避免不必要的计算成本，现有测量数据应与时间积分方法采用的时间步相匹配。该求解器还应用于含电压相关电容器的非线性 RC 电路，以及采用数据驱动二极管的半波整流器。在前一种情况下，求解器相对于测量数据点数量呈现线性收敛速度。后一种情况下则未观察到这种收敛速度，因为二极管模型的开关行为，尤其是阈值电压之前的工作区间，会妨碍求解器收敛，并要求使用相对较大的数据集。

数值结果表明，本研究开发的数据驱动MNA求解器是标准MNA电路仿真的一种可行替代方案，尤其适用于元件模型表示未知、但有测量数据可用的情况。鉴于已发现数据驱动MNA求解器在处理具有开关行为的电路时存在局限，例如第 III-C 节所示的半波整流器单元，未来研究应着重深入探究这些特定情况。未来研究的其他主题包括采用含噪测量数据进行数据驱动电路仿真，以及处理无法通过经典二端口网络模型描述的元件。

致谢

本研究得到德国研究基金会（DFG）研究培训小组 2128“用于能量回收直线加速器的加速器科学与技术”的资助。

参考文献

[1] K. Aadithya、P. Kuberry、B. Paskaleva、P. Bochev、K. Leeson、A. Mar、T. Mei 和 E. Keiter。《用于电路设计与分析的数据驱动紧凑模型》。载于：第一届数学与科学机器学习会议论文集。J. Lu 和 R. Ward 编。第 107 卷。机器学习研究会议录。PMLR，2020 年，第 555–569 页。[2] M. V. Andrejevi´c 和 V. B. Litovski。《使用人工神经网络进行电子电路建模》。载于：自动控制杂志 13.1（2003 年），第 31–37 页。[3] X. Bai、J. Yang、W. Yan、Q. Huang、S. Belouettar 和 H. Hu。《薄复合结构失稳分析的数据驱动方法》。载于：《计算机与结构》273（2022 年）。DOI：https://doi.org/10.1016/j.compstruc. 2022.106898。[4] P. Carrara、L. De Lorenzis、L. Stainier 和 M. Ortiz。《数据驱动断裂力学》。载于：《计算力学与工程方法》372（2020 年），第 113390 页。ISSN：0045-7825。DOI：https://doi.org/10. 1016/j.cma.2020.113390。[5] X. Chen、G.-F. Wang、W. Zhou、Q.-L. Zhang 和 J.-F. Xu。《神经网络在集成电路建模中的应用》。载于：《神经网络进展——*ISNN 2006*：第三届神经网络国际研讨会，中国成都，*2006* 年 *5* 月 *28* 日至 *6* 月 *1* 日，论文集，第三部分 *3*》。Springer，2006 年，第 1304–1312 页。[6] Z. Chen、M. Raginsky 和 E. Rosenbaum。《兼容 Verilog-A 的循环神经网络瞬态电路仿真模型》。载于：*2017* 年 *IEEE* 第 *26* 届电子封装与系统电气性能会议（*EPEPS*）。IEEE，2017 年，第 1–3 页。

[7] T. Ciri´c、R. Dhuri、Z. Marinkovi´c、O. Proni´c-Ran˘ci´c、V. Markovi´c 和 L. Vietzorreck。《电容式射频微机电系统开关的基于神经网络的集总元件模型》。载于：*Frequenz*72.11-12（2018 年），第 539–546 页。[8] H. De Gersem、A. Galetzka、I. G. Ion、D. Loukrezis 和 U. R¨omer。《采用数据驱动材料建模的磁场仿真》。载于：*IEEE* 磁学汇刊56.8（2020 年），第 1–6 页。ISSN：1941-0069。DOI：10.1109/TMAG.2020.3002092。[9] A. Galetzka、D. Loukrezis 和 H. De Gersem。《强非线性材料响应的数据驱动求解器》。载于：《国际工程数值方法杂志》122.6（2021 年），第 1538–1562 页。DOI：https: // doi.org/10.1002/nme.6589。[10] A. Galetzka、D. Loukrezis 和 H. De Gersem。《使用真实测量数据的三维数据驱动静磁场计算》。载于：*COMPEL*——电气与电子工程计算与数学国际期刊（2021 年）。DOI：https://doi.org/10.1108/COMPEL-06-2021-0219。[11] P.-W. Gerbaud、D. N´eron 和 P. Ladev`eze。《涉及隐状态变量的数据驱动弹性-（黏）塑性》。载于：《计算力学与工程方法》402（2022 年），第 115394 页。DOI：https: // doi.org/10.1016/j.cma.2022.115394。[12] D. Gorissen、L. De Tommasi、K. Crombecq 和 T. Dhaene。《利用神经网络和主动学习对低噪声放大器进行序列建模》。载于：《神经计算与应用》18（2009 年），第 485–494 页。[13] H. B. Hammouda、M. Mhiri、Z. Gafsi 和 K. Besbes。《用于 SPICE 仿真器的半导体器件神经网络模型》。载于：《美国应用科学杂志》5.4（2008 年），第 385–391 页。[14] C.-W. Ho、A. Ruehli 和 P. Brennan。《用于网络分析的改进节点法》。载于：《*IEEE* 电路与系统汇刊》22.6（1975 年），第 504–509 页。DOI：10.1109/TCS.1975.1084079。[15] H. Kabir、L. Zhang、M. Yu、P. H. Aaen、J. Wood 和 Q.-J. Zhang。《微波器件的智能建模》。载于：*IEEE*《微波杂志》11.3（2010 年），第 105–118 页。DOI：10.1109/MMM.2010.936079。[16] T. Kirchdoerfer 和 M. Ortiz。《数据驱动计算力学》。载于：《计算力学与工程方法》304（2016 年），第 81–101 页。ISSN：0045-7825。DOI：https://doi.org/10.1016/j.cma. 2016.02.001。[17] T. Kirchdoerfer 和 M. Ortiz。《采用含噪材料数据集的数据驱动计算》。载于：《计算力学与工程方法》326（2017 年），第 622–641 页。ISSN：0045-7825。DOI：https://doi.org/ 10.1016/j.cma.2017.07.039。[18] T. Kirchdoerfer 和 M. Ortiz。《动力学中的数据驱动计算》。载于：《国际工程数值方法杂志》113.11（2018 年），第 1697–1710 页。[19] D. K. Klein、R. Ortigosa、J. Mart´ınez-Frutos 和 O. Weeger。《采用物理增强神经网络的有限电弹性》。载于：《计算力学与工程方法》400（2022 年），第115501页。ISSN：0045-7825。DOI：https://doi.org/10. 1016/j.cma.2022.115501.[20] N. M. Kriplani、S. Bowyer、J. Huckaby 和 M. B. Steer。《电路仿真器中 Esaki 隧道二极管的建模》。载于：*Activeand PassiveElectronic Components*2011（2011）。ISSN：0882-7516。DOI：10 . 1155 / 2011 / 830182.[21] S. Kurz、H. De Gersem、A. Galetzka、A. Klaedtke、M. Liebsch、D. Loukrezis、S. Russenschuck 和 M. Schmidt。《混合建模：迈向工程科学计算的下一阶段》。载于：*JournalofMathematics in Industry* 12.1（2022），第8页。ISSN：2190- 5983。DOI：10.1186/s13362-022-00123-0。[22] M. Li、O. ˙Irsoy、C. Cardie 和 H. G. Xing。《用于高效器件紧凑建模的物理启发神经网络》。载于：*IEEE Journalon Exploratory Solid-StateComputational Devicesand Circuits* 2（2016），第44–49页。[23] V. B. Litovski、˘Z. Mr˘carica 和 T. Ili´c。《基于人工神经网络的非线性磁路仿真》。载于：*Simulation Practice andTheory*5.6（1997），第553–570页。[24] P. Nenzi 和 H. Vogt。*Ngspice* 用户手册第*23*版。2011。[25] S. Scheier 和 S. Frei。《多层陶瓷电容器 ESD 行为的表征与建模》。载于：*2013 International Symposiumon ElectromagneticCompatibility*。2013，第1028–1033页。[26] W. Shockley。《半导体中 p-n 结和 p-n 结晶体管理论》。载于：*The BellSystem TechnicalJournal* 28.3（1949），第435–489页。DOI：10.1002/j.1538-7305.1949.tb03645.x.[27] K. Taunk、S. De、S. Verma 和 A. Swetapadma。《用于学习与分类的最近邻算法简要综述》。载于：*2019 InternationalConferenceon Intelligent Computingand ControlSystems(ICCS)*。电气与电子工程师协会。2019，第1255–1260页。[28] E. Wit、E. van den Heuvel 和 J.-W. Romeijn。《“所有模型都是错的.....”：模型不确定性简介》。载于：*Statistica Neerlandica*66.3（2012），第217–236页。[29] A. H. Zaabab、Q.-J. Zhang 和 M. Nakhla。《用于电路优化和统计设计的神经网络建模方法》。载于：*IEEE Transactions on MicrowaveTheory and Techniques*43.6（1995），第1349–1358页。[30] I. Zeltser 和 S. Ben-Yaakov。《压控电容器的 SPICE 仿真》。载于：*IEEE Transactionson Power Electronics* 33.5（2018），第3703–3710页。DOI：10.1109/TPEL.2017.2766025。