arXiv:2303.03434v2 [math.AP] 9 Jun 2023

一些半线性抛物型自由边界问题的椭圆正则化

´ALESSANDRO AUDRITO 和 TOMAS SANZ-PERELA

Abstract. 我们借助椭圆正则化，证明了一类半线性抛物型自由边界问题的强解的存在性。解的存在性分两步获得：首先，我们证明一些一致能量估计；然后，取弱极限。为完成第二步，我们为逼近序列建立一致非退化估计，并证明极限解具有抛物型非退化性和最优正则性。据我们所知，这是首次在抛物型障碍问题的背景下使用椭圆正则化方法。

1. Introduction

在本文中，我们使用椭圆正则化来构造如下这类半线性抛物型自由边界问题的强解

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = -f_\gamma(u) & \text{in } Q := \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $n \geq 1$, $\gamma \in [1,2)$, $u_0 \geq 0$, 以及

$$f_\gamma(u) := \gamma \chi_{\{u>0\}} u^{\gamma-1}. \tag{1.2}$$

这类抛物型自由边界问题出现在化学工程（见 [29]）和等离子体中的热能输运（见 [24]）中。关于其解及其自由界面的数学研究由 Caffarelli 于 [8, 9] 首先开展（另见 [10]），当时考虑的是情形 $\gamma = 1$，在该情形下，(1.1) 化为一种斯特藩问题（例如见 [20, 10, 19, 4]）的形式；之后，Alt 和 Phillips [2] 将研究拓展至椭圆情形下的范围 $\gamma \in (0, 2)$（另见 [27, 28]）。在抛物型情形下，我们提及 Weiss [35, 36] 的工作（另见 Choe 和 Weiss 的 [12], ），其中建立了爆破解的分类以及自由边界的精细正则性性质，并给出了 $\partial\{u > 0\}$ 的（抛物型）豪斯多夫维数的尖锐界。请注意， [35] 也考虑了奇异范围 $\gamma \in [0, 1)$。据我们所知，除了近期发表的论文 [14, 15], [16] 和 [17], 之外，在范围 $\gamma < 1$ 内尚无其他结果；这两篇论文中，作者在椭圆框架下研究了范围 $\gamma < 0$。

Date: 2023年6月12日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 35A15, 35R35, 35K55,*Key words and phrases.* 椭圆正则化、一致估计、变分方法、非退化性。本项目获得欧盟“地平线2020”研究与创新计划玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议（编号892017，LNLFB-Problems）的资助，并获得欧洲研究理事会（ERC）资助协议（编号948029）的资助。第一作者获得INDAM-GNAMPA项目资助，项目编号为CUP-E53C22001930001。第二作者获得由MCIN/AEI/10.13039/501100011033资助的项目PID2020-113596GB-I00、PID2021-123903NB-I00和RED2018-102650-T的资助，并获得“欧洲区域发展基金——建设欧洲之路”的资助。

(1.1) 的弱解/强解的存在性是众所周知的（例如见 [20]）。然而，据我们所知，椭圆正则化方法在抛物型障碍问题中尚属新颖，并且相较于经典方法具有一些有趣的特点。这是一种变分近似过程（也称为 WIED方法），由 Lions [23] 和 Oleinik [26] 的研究引入（另见 De Giorgi 的文章 [13]）。得益于其内在的灵活性，椭圆正则化已应用于许多领域，例如抛物型情形下的 [21, 25, 6, 1, 7, 30]，以及非线性波动方程领域中的 [31, 32]（另见近期关于强竞争系统和非局部抛物型问题的研究 [5, 3]）。

这种方法的主要思想是通过使用泛函的（绝对）极小化子来逼近抛物型问题 (1.1) 的解

$$\mathcal{E}_\varepsilon(w) := \int_0^\infty \frac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon}\left(\int_{\mathbb{R}^n} (\varepsilon|\partial_t w|^2 + |\nabla w|^2)\,\mathrm{d}x + 2\int_{\mathbb{R}^n} w_+^\gamma\,\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}t, \tag{1.3}$$

其中，$\varepsilon \in (0,1)$ 是一个自由参数，而 w_+ 是 $\max\{w,0\}$ 的标准记号。事实上，不难验证，当 $\gamma \in (1,2)$ 时，任意临界点 u_ε 都满足

$$\begin{cases} -\varepsilon\partial_{tt}u_\varepsilon + \partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = -f_\gamma(u_\varepsilon) & \text{in } Q = \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.4}$$

在弱意义下（$\gamma = 1$ 的情形更为复杂，见下文中的说明）。问题 (1.4) 恰好是（除附加项 $-\varepsilon\partial_{tt}u_\varepsilon$ 外的）(1.1)，该附加项使得方程对于任意 $\varepsilon > 0$ 都是椭圆型的，但在 $\varepsilon \to 0$ 时退化；因此可以合理地预期，如果 (1.3) 的极小化子具有某些一致有界性，我们就可以沿着某个适当的子列 $\varepsilon_j \to 0$ 将 (1.4) 取弱极限，并得到 (1.1) 的一个解 u。

本计划分为两个主要步骤：

1. 按照 [31, 32] 的思路证明一致能量估计，并由此推出适当 Sobolev空间中极小化子族的紧性。
2. 严格地将极限传递到 (1.4) 中，从而得到 (1.1)。

由于我们处理的是自由边界问题，主要困难恰恰出现在第二步以及 $\gamma = 1$ 时（$\gamma \in (1,2)$ 的情形相当标准，因为 f_γ 是连续的）。事实上，有两个问题必须谨慎处理，也是本文的核心。首先，我们证明极小化子 u_ε 满足 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 的 (1.4)。如上所述，这并非显而易见，因为函数 $w \mapsto w_+$ 在 $w = 0$处不可微；见下文引理 3.1。其次，一旦得到极小化子的极限，记为 u（这是利用紧性并经过取子列得到的），我们便证明可以在 (1.4) 中取极限 $\varepsilon \to 0$，从而得到 (1.1)。这需要证明 $\chi_{\{u_\varepsilon>0\}} \to \chi_{\{u>0\}}$，这一点同样并非显而易见。事实上，为证明这一点，我们建立了靠近自由边界点时族 u_ε 的一致非退化性质，并为极限 u证明最优正则性和抛物型非退化估计。在取极限 $\varepsilon \to 0$时，所有这些要素以及关于 $\partial\{u > 0\}$ 的精细测度估计都发挥了关键作用。

需要强调的是，我们采用这种方法，不仅是为了以不同于现有文献的方式构造解（对非线性项 $f_\gamma(u)$ 中的 $\chi_{\{u>0\}}$ 进行正则化，并使用经典工具，见 [20]）。事实上，我们预期椭圆问题（带有 $\varepsilon > 0$）的某些特征会被方程 (1.1) 的解继承，并希望这能为未来研究抛物型自由边界问题开辟一种不同的途径。为此，第一步是建立近似极小化子向方程 (1.1) 的解收敛的适当方式，本文正是如此处理的。

本文采用的技术使我们能够证明，对于每个 $\gamma \in [1,2)$，解都存在；其中一些技术并不适用于 $\gamma \in (0,1)$（见下文注 2.6）。主要原因在于，我们关键性地使用了该问题的弱形式：通过考虑形如 $u+\delta\varphi$、满足 $\delta>0$ 且 $\varphi \in C_c^\infty(Q)$ 的竞争函数，并利用 H^1 中的弱收敛，得到这一弱形式。由于对于 $\gamma \in (0,1)$，函数 $u \mapsto f_\gamma(u)$ 在 $u=0$ 处具有强奇异性，我们无法使用标准弱形式；为避免对函数 $u \mapsto u_+^\gamma$ 求导，需要考虑通过定义域变形构造的竞争函数。这种方法要精细得多，将在后续文章中处理。

注 1.1. 如上所述，椭圆正则化方法相当灵活，可以采用类似技术处理更一般或更复杂的方程（例如参见 [1, 32]）。这里我们仅指出，我们的方法稍加修改即可证明下列方程的强解的存在性

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = -f_\gamma(u) & in\ \Omega \times (0,\infty), \\ u|_{t=0} = u_0 & in\ \Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域，并在 $\partial\Omega \times (0,\infty)$ 上施加齐次狄利克雷条件或诺伊曼条件。关于这一事实的证明将推迟至第 4 节；见推论 4.1。

在下一小节中，我们将介绍函数空间设定，并陈述主要结果。

1.1. 函数空间设定与主要结果。我们将在空间

$$\mathcal{U} := \bigcap_{r>0} H^1(Q_r^+), \qquad \text{where } \ Q_r^+ := B_r \times (0, r^2),$$

中工作，该空间由具有弱导数 $\partial_t u \in L^2(Q_r^+)$、$\partial_i u \in L^2(Q_r^+)$（$i=1,\ ...,\ n$）的函数 $u \in L^2(Q_r^+)$ 构成，对任意 $r>0$ 均成立。泛函 (1.3) 在 $\mathcal{U}$ 上有定义，其值属于 $[0,+\infty]$：我们将在初始条件 $u|_{t=0}=u_0$（按迹的意义）下寻找极小化子 $u \in \mathcal{U}$，其中

$$u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\gamma(\mathbb{R}^n) \quad \text{and} \quad u_0 \geq 0 \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

换言之，我们将在空间 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 上最小化

$$\mathcal{U}_0 := \{u \in \mathcal{U} : u|_{t=0} = u_0\}.$$

我们指出，关于初始数据的假设保证 u_0（视为关于 x 和 t 的函数）属于 $\mathcal{U}_0$：特别是，$\mathcal{U}_0 \neq \varnothing$。这将在引理 2.2 的证明中发挥作用；届时我们将使用 u_0 作为竞争函数，并证明基本但至关重要的估计 (2.3)。我们并不认为这些假设是最优的，但它们有助于使论证直接且易于理解。

现在我们引入 (1.1) 的强解这一概念。

定义 1.2. 令 $n \geq 1$ 和 $\gamma \in [1,2)$。若函数 u 满足

- $u \in L^2_{\text{局部}}(0,\infty;\ H^1(\mathbb{R}^n))$，且 $\partial_t u \in L^2_{\text{局部}}(0,\infty;\ L^2(\mathbb{R}^n))$，并且 $u|_{t=0}=u_0$ 在迹的意义下成立。
- 积分关系

$$\int_Q (\partial_t u \eta + \nabla u \cdot \nabla \eta + f_\gamma(u)\eta)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0 \tag{1.7}$$

对每个 $\eta \in C_c^\infty(Q)$ 均成立。

请注意，此定义与弱解的定义不同之处在于， $\partial_t u$ 是一个 L^2-函数，且积分 (1.7) 涉及项 $\partial_t u\eta$ ，而非 $-u\partial_t\eta$。特别是，由于 $\partial_t u$ 属于 L^2，可知 Δu 也属于 L^2。

最后，我们陈述主要结果。

定理 1.3. 设 $n \geq 1$, $\gamma \in [1, 2)$ ， u_0 如 (1.6) 中所述，且 f_γ 如 (1.2) 中所述。那么，存在 (1.3) 在 $\mathcal{U}_0$ 中的一列极小化子 $\{u_{\varepsilon_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ ， 以及 (1.1) 的一个连续强解 $u \in \mathcal{U}_0$ ， 使得

$$u_{\varepsilon_j} \rightharpoonup u \quad \textit{weakly in } \mathcal{U}$$
$$u_{\varepsilon_j} \to u \quad \textit{locally uniformly in } Q.$$

本文其余部分安排如下。第 2 节证明 $\mathcal{U}_0$ 中 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 的存在性与唯一性，并建立 (2.6) 和 (2.7) 中给出的一致能量估计。作为推论，我们证明极小化子的弱收敛与强收敛（见下文命题 2.1）。第 3 节分为三部分。首先，在第 3.1 节中，我们写出极小化子的欧拉-拉格朗日方程，并证明自由边界点附近的一致非退化性。然后，在第 3.2 节中，我们为抛物型障碍问题的解建立最优正则性与抛物型非退化性结果。最后，在第 3.3 节中，我们关键性地结合所有这些要素来证明定理 1.3。在文章最后一节，即第 4 节中，我们讨论为构造满足抛物边界上齐次狄利克雷条件或诺伊曼条件的 (1.5) 的强解，所需对我们的方法做出的细微修改。

2. Energy estimates and Compactness

本节将建立以下结果。

命题 2.1. 设 $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)} \in \mathcal{U}_0$ 是 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 的一族极小化子。则存在 $u \in \mathcal{U}_0$ 和一个序列 $\varepsilon_j \to 0$ ，使得

$$\begin{aligned} &u_{\varepsilon_j} \rightharpoonup u \quad \textit{weakly in } \mathcal{U} \\ &u_{\varepsilon_j} \to u \quad \textit{in } L^2_{\mathrm{loc}}(Q). \end{aligned} \tag{2.1}$$

在证明上述陈述之前，我们先说明 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 的极小化子的一些基本性质。

2.1. 极小化子的存在性。容易证明，对于每个 $\varepsilon \in (0, 1)$，泛函 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 在 $\mathcal{U}_0$ 中有唯一的极小化子（见下文引理 2.2）。在给出证明之前，我们先引入泛函

$$\mathcal{J}_\varepsilon(w) := \int_0^\infty e^{-t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\partial_t w|^2 + \varepsilon|\nabla w|^2\right) \mathrm{d}x + 2\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} w_+^\gamma \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t, \tag{2.2}$$

其满足

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{J}_\varepsilon(v), \quad \text{whenever } v(x,t) = u(x,\varepsilon t).$$

由于 v 和 u 在 $t = 0$ 处重合，在 $\mathcal{U}_0$ 中极小化 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 等价于在同一空间中极小化 $\mathcal{J}_\varepsilon$。使用泛函 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 可以使我们的记号更加简洁。

引理 2.2. 对每个 $\varepsilon \in (0, 1)$，在 $\mathcal{U}_0$ 中由 (2.2) 定义的泛函 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 有唯一的极小化子 v_ε。该极小化子在 Q 中几乎处处满足 $v_\varepsilon \geq 0$。此外，存在一个常数 $C > 0$，它仅依赖于 n、 γ 和 u_0，使得

$$\mathcal{J}_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq C\varepsilon. \tag{2.3}$$

证明。将 u_0 视为 x 和 t的函数来考察，根据 (1.6)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\varepsilon(u_0) &= \varepsilon\int_0^\infty e^{-t}\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_0|^2\mathrm{d}x + 2\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}(u_0)_+^\gamma\,\mathrm{d}x\bigg)\,\mathrm{d}t\\ &\le \varepsilon\big(\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + 2\|u_0\|^\gamma_{L^\gamma(\mathbb{R}^n)}\big)\\ &\le C\varepsilon,\end{aligned}\tag{2.4}$$

因此， $\mathcal{J}_\varepsilon \not\equiv +\infty$ 在 $\mathcal{U}_0$上。为了证明极小化子的存在性，我们考虑一个极小化序列$v_j \in \mathcal{U}_0$:

$$\mathcal{J}_\varepsilon(v_j) \to \inf_{v\in\mathcal{U}_0}\mathcal{J}_\varepsilon(v) := I_\varepsilon \ge 0.$$

因此，对每个固定的 $r>0$，我们有

$$\int_{Q_r^+}\left(|\partial_t v_j|^2 + \varepsilon|\nabla v_j|^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le C,$$

对于某个与 j无关的 $C>0$。由于对每个 j 都有 $v_j|_{t=0} = u_0$，给定 $\delta>0$，几乎处处对 $s\in\in(0,r^2)$，有

$$\begin{aligned}\|v_j(\cdot,s)\|^2_{L^2(B_r)} &= \|u_0\|^2_{L^2(B_r)} + 2\int_0^s\int_{B_r} v_j(x,t)\partial_t v_j(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\le \|u_0\|^2_{L^2(B_r)} + \delta\int_{Q_r^+}|v_j|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\delta}\int_{Q_r^+}|\partial_t v_j|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

在0和 r^2 之间积分，并取 $\delta := 1/(2r^2)$，得到

$$\int_{Q_r^+} v_j^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le 2\left[\|u_0\|^2_{L^2(B_r)} + 2r^2\int_{Q_r^+}|\partial_t v_j|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right]\,r^2 \le C,\tag{2.5}$$

对于某个与 j无关的新 $C>0$。因此可知， $\{v_j\}_j$ 在 $H^1(Q_r^+)$中关于 j 一致有界，这进而意味着存在 $v\in H^1(Q_r^+)$，使得在取子列后， $v_j \rightharpoonup v$ 在 $H^1(Q_r^+)$中弱收敛，且$v_j\to v$ 在 $L^2(Q_r^+)$中收敛。现在，由于 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty) = Q = \cup_{r>0}Q_r^+$，对角线论证表明

$$v_j \rightharpoonup v \quad \text{weakly in } \mathcal{U} \qquad \text{and} \qquad v_j\to v \quad \text{in } L^2_{\mathrm{loc}}(Q),$$

经过进一步选取子列，并利用 $\mathcal{U}_0$ 是闭凸集这一事实，我们得出 $v\in\mathcal{U}_0$。最后，由下半连续性和法图引理，我们得到

$$\mathcal{J}_\varepsilon(v) \le I_\varepsilon,$$

也就是说， v 是 $\mathcal{U}_0$ 中的 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 极小化子。

现在，由 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 的凸性可得唯一性。此外，由于 $u_0\ge 0$，若 v_ε 是极小化子，则 $(v_\varepsilon)_+$ 是一个可行的竞争函数，因此根据极小性， $\mathcal{J}_\varepsilon(v_\varepsilon) \le \mathcal{J}_\varepsilon((v_\varepsilon)_+)$，除非 $v_\varepsilon\ge 0$ 在 Q 中几乎处处成立，否则这不可能。最后，(2.3) 可由 v_ε 的极小性以及估计 (2.4) 得出。□

2.2. 命题 2.1 的证明。命题 2.1 将作为以下能量估计的推论得出。

命题 2.3。（能量估计）存在一个常数 $C>0$，它仅依赖于 n、 γ 和 u_0，使得对于 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 的每个极小化子 u_ε，我们都有

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|\partial_t u_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \le C\tag{2.6}$$

并且，对于每个 $r \geq \varepsilon$,

$$\int_0^r \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u_\varepsilon|^2 + 2(u_\varepsilon)_+^\gamma \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}\tau \leq Cr. \tag{2.7}$$

事实上，有了这些一致有界性，我们便可轻易得到本节的主要结果。

命题 2.1 的证明。根据 (2.6) 和 (2.7)，对于每个固定的 $r > 0$，极小化子 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 的族 $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1)}$ 在 $H^1(Q_r^+)$ 中一致有界，因此通过标准的对角线过程可知，存在序列 $\varepsilon_j \to 0$ 和 $u \in \mathcal{U}_0$，使得 (2.1) 中的第一个极限成立。由 Sobolev嵌入，经过再取一个子列，我们立即也可得到第二个极限。□

本节余下部分将证明命题 2.3。这是本文的首个关键结果，将作为引理 2.4 和推论 2.5 的推论得到。下文将使用以下记号：记 $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$，对于极小化子 v of $\mathcal{J}_\varepsilon$，记作

$$\mathcal{J}_\varepsilon(v) = \int_0^\infty e^{-t}(I(t) + R(t)) \, \mathrm{d}t, \tag{2.8}$$

其中

$$I(t) := \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t v|^2 \, \mathrm{d}x, \qquad R(t) := \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla v|^2 + 2v_+^\gamma \right) \mathrm{d}x.$$

由于 v 是一个极小化子，显然函数 $t \mapsto I(t)$、$t \mapsto R(t)$ 和 $t \mapsto e^{-t}(I(t) + R(t))$ 在 $\mathbb{R}_+$中局部可积。因此，函数

$$E(t) := e^t \int_t^\infty e^{-\tau}(I(\tau) + R(\tau)) \, \mathrm{d}\tau,$$

属于 $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+})$，其中 $E(0) = \mathcal{J}_\varepsilon(v)$。

注意，根据定义，

$$E' = E - I - R \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+). \tag{2.9}$$

在下面的结果中，我们给出 E' 的另一种表达式，稍后将用它来获得能量估计。

引理 2.4. 设 $v \in \mathcal{U}_0$ 是 $\mathcal{J}_\varepsilon$的一个极小化子。那么

$$E' = -2I \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+). \tag{2.10}$$

证明。我们按照 [31, 命题 3.1]的思路进行。令 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$，并设 $\zeta(t) := \int_0^t \eta(\tau)\mathrm{d}\tau$。给定 $\delta \in \mathbb{R}$，我们定义

$$\varphi(t) := t - \delta\zeta(t), \quad t \geq 0. \tag{2.11}$$

如果 $|\delta| \leq \delta_0$ 和 $\delta_0 > 0$ 足够小，那么 φ 具有光滑逆函数 $\psi := \varphi^{-1}$，其定义为

$$\psi(\tau) = \tau + \delta\zeta(\psi(\tau)). \tag{2.12}$$

现在，对于极小化子 $v \in \mathcal{U}_0$，我们定义竞争函数 $|\delta| \leq \delta_0$

$$w_\delta(x,t) := v(x, \varphi(t)).$$

由于 $\varphi(0)=0$，我们有 $w_\delta|_{t=0}=u_0$（这意味着 $w\in\mathcal{U}_0$），并且根据（2.11）可得 $w_\delta|_{\delta=0}=v$。在（2.8）中作变量替换 $t=\psi(\tau)$，我们很容易看出

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\varepsilon(w)&=\int_0^\infty e^{-t}\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\partial_t w_\delta|^2+\varepsilon|\nabla w_\delta|^2\right)\mathrm{d}x+2\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}(w_\delta)_+^\gamma\,\mathrm{d}x\bigg)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty e^{-t}\left[\varphi'(t)^2\,I(\varphi(t))+R(\varphi(t))\right]\mathrm{d}t=\int_0^\infty\psi'(\tau)e^{-\psi(\tau)}\left[\varphi'(\psi(\tau))^2\,I(\tau)+R(\tau)\right]\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

因此，由于 $\varphi,\psi\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+)$，我们推出 $\mathcal{J}_\varepsilon(w_\delta)<+\infty$。特别地，$w_\delta\in\mathcal{U}_0$ 对所有 $|\delta|\le\delta_0$ 都是一个可接受的竞争函数，因此，根据 v的极小性，

$$\lim_{\delta\to0^+}\frac{\mathcal{J}_\varepsilon(w_\delta)-\mathcal{J}_\varepsilon(v)}{\delta}=0. \tag{2.13}$$

利用 (2.11) 和 (2.12) 进行繁琐但标准的计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\delta}\left(\psi'(\tau)e^{-\psi(\tau)}\right)\Big|_{\delta=0}=\zeta'(\tau)e^{-\tau}-\zeta(\tau)e^{-\tau},\qquad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\delta}\left|\varphi'(\psi(\tau))\right|^2\Big|_{\delta=0}=-2\zeta'(\tau). \tag{2.14}$$

由于 $t\mapsto e^{-t}(I(t)+R(t))$ 是局部可积的，我们可以利用控制收敛将 (2.13) 取极限；结合 (2.14)，(2.13) 中的极限具有如下形式

$$\int_0^\infty(\zeta'(\tau)e^{-\tau}-\zeta(\tau)e^{-\tau})(I(\tau)+R(\tau))\mathrm{d}\tau-2\int_0^\infty e^{-\tau}\zeta'(\tau)\,I(\tau)\,\mathrm{d}\tau=0. \tag{2.15}$$

接下来只需证明 (2.15) 与 (2.10) 等价。记住 ζ 是 η 的原函数，并以 $\zeta'(\tau)e^{-\tau}$ 作为测试函数代入方程 (2.9)，再进行分部积分，得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\zeta'(\tau)e^{-\tau}(I(\tau)+R(\tau))\mathrm{d}\tau&=\int_0^\infty E(\tau)\left[\zeta'(\tau)e^{-\tau}+\left(\zeta'(\tau)e^{-\tau}\right)'\right]\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^\infty\zeta'(\tau)e^{-\tau}E(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\int_0^\infty E(\tau)\left(\eta(\tau)e^{-\tau}\right)'\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{2.16}$$

利用 E 的定义并进行分部积分，(2.16) 右端的第一项变为

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\zeta'(\tau)e^{-\tau}E(\tau)\,\mathrm{d}\tau&=\int_0^\infty\zeta'(\tau)\int_\tau^\infty e^{-s}(I(s)+R(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^\infty\zeta(\tau)e^{-\tau}(I(\tau)+R(\tau))\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{2.17}$$

最后，结合 (2.16)、(2.17) 和 (2.15)，我们推得

$$\int_0^\infty E(\tau)\left(e^{-\tau}\eta(\tau)\right)'\mathrm{d}\tau=2\int_0^\infty e^{-\tau}\eta(\tau)\,I(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

由此，利用 $\eta\in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ 的任意性，可得 (2.10)。 □

由前面的结果可得一个推论，它将是证明命题 2.3 的关键。

推论 2.5. 存在一个常数 $C>0$，它仅依赖于 n、γ 和 u_0，使得对于 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 的每个极小化子 v_ε，我们有

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|\partial_t v_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\varepsilon, \tag{2.18}$$

并且，对于每个 $r \geq 0$,

$$\int_r^{r+1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla v_\varepsilon|^2 + 2(v_\varepsilon)_+^\gamma \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq C. \tag{2.19}$$

证明。首先，由于 $I \geq 0$，函数 $t \mapsto E(t)$ 是非增的，因此对所有 $t \geq 0$，$E(t) \leq E(0)$。回顾 $E(0) = \mathcal{J}_\varepsilon(v_\varepsilon)$ 以及引理 2.2 中的估计 (2.3)，可得

$$E(t) \leq \mathcal{J}_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq C\varepsilon, \tag{2.20}$$

对所有 $t \geq 0$，其中 $C > 0$ 是一个仅依赖于 n、γ 和 u_0 的常数。

现在，由引理 2.4，我们有 $E' = -2I$ 在 $\mathbb{R}_+$ 中几乎处处成立。对该式积分并利用 (2.20)，得到

$$2\int_0^t I(\tau)\,\mathrm{d}\tau = E(0) - E(\tau) \leq E(0) \leq C\varepsilon,$$

对所有 $t \geq 0$ （回顾一下，按定义 $E \geq 0$），由 $t \geq 0$ 的任意性及 I 的定义可得 (2.18)。

要证明 $r \geq 0$ 的 (2.19)，只需利用 (2.20) 推得

$$\varepsilon \int_r^{r+1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla v_\varepsilon|^2 + 2(v_\varepsilon)_+^\gamma \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_r^{r+1} R(t)\,\mathrm{d}t \leq e^{r+1} \int_r^{r+1} e^{-t} R(t)\,\mathrm{d}t \leq eE(r) \leq C\varepsilon.$$

□

利用前面的结果，现在我们可以建立命题 2.3 的一致有界性。

命题 2.3 的证明。设 $u := u_\varepsilon$ 是 $\mathcal{U}_0$ 中 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 的一个极小化子，并设 $v(x,t) := u(x,\varepsilon t)$。首先，作为直接推论，我们注意到 (2.6) 等价于 (2.18)，而后者已在上文得到证明。其次，在 (2.19) 中作变量替换 $\tau = \varepsilon t$，得到

$$\int_{\varepsilon\rho}^{\varepsilon\rho+\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u|^2 + 2u_+^\gamma \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq C\varepsilon,$$

对所有 $\rho \geq 0$ 均成立。若 $r = \varepsilon$，则令 $\rho = 0$，由上述估计可得 (2.7)。否则，若 $r > \varepsilon$，令 $k := \lceil r/\varepsilon \rceil \geq 2$，并对 $j = 0, 1, \ldots,$ 取 $\rho = \rho_j = j$ 应用上述估计。对 $j = 0, \ldots, k-1$ 求和，得到

$$\int_0^{k\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla v|^2 + 2v_+^\gamma \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \leq Ck\varepsilon.$$

由于 $r \leq k\varepsilon \leq 2(k-1)\varepsilon \leq 2r$，故 (2.7) 成立。 □

注 2.6. 请注意，本节的所有证明（以及相应的结论）在整个范围 $\gamma \in [0,1)$ 内均成立（当 $\gamma = 0$ 时，我们令 $u_+^\gamma := \chi_{\{u>0\}}$）。在下一节中，为了在考虑形如 $u + \delta\varphi$、满足 $\delta > 0$ 且 $\varphi \in C_c^\infty(Q)$ 的竞争函数时推导欧拉-拉格朗日方程，我们不得不将范围限制在 $\gamma \in [1,2)$ 内。

3. Proof of the main theorem

本节致力于证明定理 1.3，该证明分为三个步骤。首先，我们为 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 的极小化子 u_ε 写出欧拉-拉格朗日方程（见下文引理 3.1），然后在引理 3.2 中建立一致非退化性质。接下来，我们为抛物型障碍问题的解建立抛物型非退化性和最优正则性结果。最后，我们结合所有这些要素，沿着适当的子列令 $\varepsilon \to 0$，从而完成定理 1.3 的证明。回顾我们所采用的记号：$Q := \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ 和 $f_\gamma(u) := \gamma\chi_{\{u>0\}} u^{\gamma-1}$。

3.1. 欧拉-拉格朗日方程与一致非退化性。我们先从极小化子的欧拉-拉格朗日方程开始。

引理 3.1. 设 $\varepsilon \in (0,1)$，并设 $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_0$ 为 $\mathcal{U}_0$中的 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 极小化子。则

$$\varepsilon \int_Q \partial_t u_\varepsilon \partial_t \eta \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_Q (\partial_t u_\varepsilon \eta + \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta + f_\gamma(u_\varepsilon)\eta)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0 \tag{3.1}$$

对每个 $\eta \in C_c^\infty(Q)$，均有。

证明. 设 $u := u_\varepsilon$ 为 $\mathcal{U}_0$ 中的 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 极小化子，并设 $\varphi \in C_c^\infty(Q)$。我们有

$$\frac{\mathcal{E}_\varepsilon(u+\delta\varphi)-\mathcal{E}_\varepsilon(u)}{\delta} = 2\int_0^\infty \frac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\varepsilon\partial_t u\partial_t\varphi + \nabla u\cdot\nabla\varphi + \frac{(u+\delta\varphi)_+^\gamma - u_+^\gamma}{\delta}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + O(\delta),$$

当 $\delta \to 0$时。我们根据 $\gamma \in (1,2)$ 或 $\gamma = 1$，对证明的其余部分分情况讨论。

• 假设 $\gamma \in (1,2)$。则函数 $u \mapsto u_+^\gamma$ 处处可微，因此

$$\frac{(u+\delta\varphi)_+^\gamma - u_+^\gamma}{\delta} \to \gamma u_+^{\gamma-1}\varphi \quad \text{a.e. in } Q,$$

当 $\delta \to 0$时。因此，对上述增量商取极限，并利用 u的极小性，可得

$$\int_0^\infty e^{-t/\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\varepsilon\partial_t u\partial_t\varphi + \nabla u\cdot\nabla\varphi + \gamma u_+^{\gamma-1}\varphi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

取 $\varphi = e^{t/\varepsilon}\eta$并注意到 $\partial_t\varphi = e^{t/\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}\eta + \partial_t\eta\right)$，即可容易地得到（3.1）。

• 假设 $\gamma = 1$。在此情形下，函数 $u \mapsto u_+$ 在 $u = 0$处不可微：因此，我们将 [18, 命题 5.12] 中的论证推广到我们的退化椭圆情形。由引理 2.2可知，$u \geq 0$ 在 Q中几乎处处成立。因此，可以容易地得到

$$\frac{(u+\delta\varphi)_+ - u_+}{\delta} \;\to\; \chi_{\{u>0\}}\varphi + \chi_{\{u=0\}}\varphi_+ \quad \text{a.e. in } Q,$$

当 $\delta \to 0^+$时。由于根据最小性，$\mathcal{E}_\varepsilon(u+\delta\varphi) - \mathcal{E}_\varepsilon(u) \geq 0$，我们可以像之前一样取 $\varphi = e^{t/\varepsilon}\eta$，并令 $\delta \to 0^+$ 趋于极限，从而得到

$$\varepsilon\int_Q \partial_t u\partial_t\eta\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_Q(\partial_t u\eta + \nabla u\cdot\nabla\eta + \chi_{\{u>0\}}\eta + \chi_{\{u=0\}}\eta_+)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geq 0, \tag{3.2}$$

对每个 $\eta \in C_c^\infty(Q)$均成立。

现在，若我们定义微分算子 $\mathcal{L}_\varepsilon := \varepsilon\partial_{tt} + \Delta$，令

$$-\langle\mathcal{L}_\varepsilon u,\eta\rangle := \int_Q(\varepsilon\partial_t u\partial_t\eta + \nabla u\cdot\nabla\eta)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

前一个不等式 (3.2) 变为

$$-\langle\mathcal{L}_\varepsilon u,\eta\rangle + \int_Q(\partial_t u\eta + \chi_{\{u>0\}}\eta + \chi_{\{u=0\}}\eta_+)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geq 0.$$

因此，

$$\langle\mathcal{L}_\varepsilon u,\eta\rangle \leq \begin{cases}\int_Q(\partial_t u+1)\eta\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t & \text{for all } \eta\in C_c^\infty(Q) \text{ such that } \eta\geq 0,\\ \int_Q(\partial_t u+\chi_{\{u>0\}})\eta\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t & \text{for all } \eta\in C_c^\infty(Q) \text{ such that } \eta\leq 0,\end{cases} \tag{3.3}$$

也就是说，

$$\chi_{\{u>0\}} \leq \varepsilon\partial_{tt}u + \Delta u - \partial_t u \leq 1 \tag{3.4}$$

在弱意义下。

现在，给定 $r>0$，我们利用对偶性对 $\mathcal{L}_\varepsilon u$ 在 $L^2(Q_r^+)$ 中进行估计：给定 $\eta \in C_c^\infty(Q_r^+)$，由 (3.3) 得到

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_\varepsilon u, \eta\rangle &\leq \langle \mathcal{L}_\varepsilon u, \eta_+\rangle + \langle \mathcal{L}_\varepsilon u, -\eta_-\rangle \leq \int_{Q_r^+} |\partial_t u + 1|\eta_+ \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{Q_r^+} |\partial_t u + \chi_{\{u>0\}}||\eta_-|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\leq 2\|\partial_t u + 1\|_{L^2(Q_r^+)}\|\eta\|_{L^2(Q_r^+)} \leq C\|\eta\|_{L^2(Q_r^+)},\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中我们使用了估计 (2.6)（注意，此处常数 $C>0$ 依赖于 r，但与 u 无关）。因此，由于 $r>0$ 的任意性，可得

$$\mathcal{L}_\varepsilon u = \varepsilon\partial_{tt}u + \Delta u \in L^2_{\mathrm{loc}}(Q),$$

因此，根据 Calder´on-Zygmund 型的 $W^{2,2}$ 估计，我们得到 $u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(Q)$（例如参见 [18,第 2] 节）。由于 $W^{2,2}$ 正则性足以应用 Rademarcher 定理，我们推得

$$\partial_t u, \partial_{tt}u, \Delta u = 0 \quad \text{a.e. in } \{u=0\}.$$

将此与 (3.4) 结合，最终得到

$$-\varepsilon\partial_{tt}u - \Delta u + \partial_t u = -\chi_{\{u>0\}} \quad \text{a.e. in } Q,$$

进而推出 $\gamma=1$ 时的 (3.1)。 □

现在，我们为 $\gamma=1$ 时满足 (3.1) 的解建立一致非退化性质。请注意，尽管障碍问题中的非退化性已相当标准，但这种性质能否关于 $\varepsilon \in (0,1)$ 一致成立并不明确，而这正是我们接下来要证明的。

引理 3.2. 存在常数 $c>0$，仅依赖于 n，使得对于每个 $\varepsilon \in (0,1)$、每个满足 $B_1(x_0,t_0) \subset Q$ 的 $(x_0,t_0) \in Q$，以及每个满足以下条件的弱解 u_ε

$$-\varepsilon\partial_{tt}u_\varepsilon + \partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = -\chi_{\{u_\varepsilon>0\}} \quad \text{in } B_1(x_0,t_0) \subset Q, \tag{3.5}$$

对于每个 $(z_\varepsilon,\tau_\varepsilon) \in \overline{\{u_\varepsilon>0\}} \cap B_{1/2}(x_0,t_0)$，以及每个 $r \in (0, \frac{1}{2})$，都有

$$\sup_{B_r(z_\varepsilon,\tau_\varepsilon)} u_\varepsilon \geq cr^2. \tag{3.6}$$

证明。由于方程 (3.5) 在平移下保持不变，且此处 $\{t=0\}$ 处的初始条件不起作用，我们不妨设 $(x_0,t_0) = (0,0)$。为使证明更易读，我们也省略 ε 下标，即令 $u := u_\varepsilon$，并令 $(z,\tau) := (z_\varepsilon,\tau_\varepsilon) \in \overline{\{u>0\}} \cap B_{1/2}$。

现在，取 $\{(z_k,\tau_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u>0\}$，使得当 $k \to +\infty$ 时，$(z_k,\tau_k) \to (z,\tau)$。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们定义

$$w(x,t) := u(x,t) - u(z_k,\tau_k) - c\big(|x-z_k|^2 + (t-\tau_k)^2\big), \qquad \text{with} \quad c := \tfrac{1}{2(n+2)}.$$

那么，若任意固定 $r \in (0,1/2)$，便可容易地计算得出

$$\begin{aligned}-\varepsilon\partial_{tt}w + \partial_t w - \Delta w &= -1 + 2c(n+\varepsilon) - 2c(t-\tau_k) \\ &\leq -1 + 2c(n+1) + 2c|t-\tau_k| \\ &\leq -1 + 2c(n+1) + 2c \leq 0 \qquad \text{in } \{u>0\} \cap B_r(z_k,\tau_k),\end{aligned}$$

根据上文对 c 的定义。注意，由标准椭圆估计可知， u （因而 w）在 $\{u>0\}\cap B_r(z_k,\tau_k)$ 中是光滑的。根据定义，我们还有

$$w(z_k,\tau_k)=0 \qquad \text{and} \qquad w<0 \quad \text{in } \partial\{u>0\}\cap B_r(z_k,\tau_k),$$

因此，根据最大值原理，[1]

$$\begin{aligned} 0=w(z_k,\tau_k) &\le \sup_{\partial(\{u>0\}\cap B_r(z_k,\tau_k))} w = \sup_{\{u>0\}\cap\partial B_r(z_k,\tau_k)} w \\ &= \sup_{\{u>0\}\cap\partial B_r(z_k,\tau_k)} u-u(z_k,\tau_k)-cr^2 \le \sup_{B_r(z_k,\tau_k)} u-u(z_k,\tau_k)-cr^2, \end{aligned}$$

也就是说

$$\sup_{B_r(z_k,\tau_k)} u \ge u(z_k,\tau_k)+cr^2.$$

令 $k\to+\infty$ 时取极限，由于 u 的连续性，(3.6) 得证。 □

3.2. 非退化性与最优正则性：抛物型情形。下面给出两个技术性结果，我们将在 $\gamma=1$ 的情形下证明定理 1.3 时用到它们。第一个结果，即引理 3.3，是一个非退化性质——可视为引理 3.2 的抛物型版本；第二个结果，即推论 3.5，是一个最优正则性估计，它由内部估计以及下文引理 3.4 中建立的最优增长性质结合而得。我们证明的最优正则性与抛物型障碍问题解的最优正则性一致（例如参见 [11]）。证明与经典证明十分相似，但我们采用了稍微一般一些的框架，这正是我们在证明定理 1.3 时进行极限过程所需要的。

本文中此处及下文均采用抛物型圆柱的通常记号。也就是说，令$Q_r(x_0,t_0):=\{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}:\ |x-x_0|<r,\ |t-t_0|<r^2\}$ 以及 $Q_r^-(x_0,t_0):=Q_r(x_0,t_0)\cap\{t<t_0\}$. 按照惯例，当$(x_0,t_0)=(0,0)$时，省略中心点$(x_0,t_0)$。

引理 3.3. 设 $u\in C(Q_1)$是下列方程的非负弱解

$$\partial_t u-\Delta u=-1 \qquad in\ \{u>0\}\cap Q_1.$$

那么，存在一个仅依赖于 n的常数 $c_\circ>0$，使得对任意$(x_0,t_0)\in\overline{\{u>0\}}\cap Q_{1/2}$以及任意 $r\in(0,1/2)$，均有

$$\sup_{Q_r^-(x_0,t_0)} u\ge c_\circ r^2.$$

证明. 论证过程与引理 3.2 的证明类似。给定$(x_0,t_0)\in\overline{\{u>0\}}\cap Q_{1/2}$，取 $\{(x_k,t_k)\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\{u>0\}\cap Q_{1/2}$使得当 $k\to+\infty$时，$(x_k,t_k)\to(x_0,t_0)$。对每个 $k\in\mathbb{N}$，定义

$$w_k(x,t):=u(x,t)-u(x_k,x_k)-c_\circ\big(|x-x_k|^2+t_k-t\big), \qquad \text{with} \quad c_\circ:=\tfrac{1}{2n+1}.$$

那么，在 $\{u>0\}\cup Q_1$ 中有

$$\partial_t w_k-\Delta w_k=-1+c_\circ(2n+1)\le 0.$$

因此，利用最大值原理以及 $w_k<0$ 在 $\partial\{u>0\}\cup Q_r^-$ 中，我们得到

$$0=w_k(x_k,t_k)\le \sup_{Q_r^-(x_k,t_k)\cup\{u>0\}} w_k = \sup_{\partial_p(Q_r^-(x_k,t_k)\cap\{u>0\})} w_k \le \sup_{\partial_p(Q_r^-(x_k,t_k))} w_k,$$

[1]注意，根据标准 对于所有 $\alpha\in(0,1)$，以及 $\{u>0\}\cap B_r(z_k,\tau_k)$ 是一个开集时的椭圆估计 $u,w\in C^{1,\frac{\alpha}{2}}_{x,t}(B_{1/2})$。

其中 $\partial_p\Omega$ 表示集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 的抛物边界。由于 $w_k \le u - u(x_k,t_k) - c_\circ r^2$ 属于$\partial_p(Q_r^-(x_k,t_k))$，因此有

$$\sup_{\partial_p(Q_r^-(x_k,t_k))} w_k \le \sup_{\partial_p(Q_r^-(x_k,t_k))} u - u(x_k,t_k) - c_\circ r^2 \le \sup_{Q_r^-(x_k,t_k)} u - u(x_k,t_k) - c_\circ r^2,$$

由此我们得到

$$\sup_{Q_r^-(x_k,t_k)} u \ge u(x_k,t_k) + c_\circ r^2.$$

令 $k \to +\infty$ 并利用 $u(x_0,t_0) \ge 0$ （注意，当 $(x_0,t_0) \in \partial\{u>0\}$ 时， $u(x_0,t_0) = 0$），取极限即可得出结论。□

接下来，我们将证明一个最优增长界，并由此推得一个最优正则性估计。证明相当标准，但为完整起见，我们仍予以展示，沿用 [4, Lemma 5.3] 中针对抛物型障碍问题的证明方法。

引理 3.4. 设 $K > 0$ 且 $f \in L^\infty(Q_1)$ 满足 $f \le 0$ 在 Q_1 中几乎处处成立，且$\|f\|_{L^\infty(Q_1)} \le K$。设 $u \in C(Q_1)$ 是下列方程的非负弱解

$$\partial_t u - \Delta u = f \quad \text{in } Q_1 \tag{3.7}$$

其中$\|u\|_{L^\infty(Q_1)} \le K$。那么，存在仅依赖于 n 和 K 的 $C_0 > 0$，使得

$$||u||_{L^\infty(Q_r(x_0,t_0))} \le C_0 r^2, \tag{3.8}$$

对每个 $(x_0,t_0) \in \{u=0\} \cap Q_{1/2}$ 以及每个 $r \in (0, \frac{1}{4})$。

证明。给定 $(x_0,t_0) \in \{u=0\} \cap Q_{1/2}$，由于$\|f\|_{L^\infty(Q_1)} \le K$，我们首先注意到 [35, 引理 5.1]（或者等价地， [4, 引理 5.2]）表明，对每个 $\delta \in (0,1)$ 和 $r \in (0, \frac{1}{4})$，

$$\sup_{P_r^\delta(x_0,t_0)} u \le C_0(u(x_0,t_0) + Kr^2) = C_0 K r^2, \tag{3.9}$$

其中 $C_0 > 0$ 仅取决于 n 和 δ，并且

$$P_r^\delta(x_0,t_0) := \{(x,t) \in Q_r^-(x_0,t_0) : t - t_0 < -\delta|x-x_0|^2\}.$$

鉴于 (3.9)，只需在集合 $Q_r(x_0,t_0) \setminus P_r^\delta(x_0,t_0)$ 中对 u 给出上界，其中某个 $\delta \in (0,1)$ 将在稍后选定。我们将通过与函数进行比较来得到这一结论

$$w(x,t) := a(t - t_0 + b|x-x_0|^2),$$

其中

$$b := \tfrac{1}{2n}, \qquad a := 2 \cdot \max\{C_0, 16\} \cdot \tfrac{K}{b}.$$

我们来证明， $u \le w$ 属于 $Q_{1/4}(x_0,t_0) \setminus P_{1/4}^\delta(x_0,t_0)$。首先不难验证，选取 b 可使 w 在 $\mathbb{R}^{n+1}$中为热的。另一方面，令 $\delta := \frac{b}{2} \in (0,1)$，则有

$$w(x,t) \ge a(-\tfrac{\delta}{16} + \tfrac{b}{16}) = \tfrac{ab}{32} \quad \text{in } \partial_p Q_{1/4}(x_0,t_0) \setminus \overline{P_{1/4}^\delta(x_0,t_0)},$$

由此，根据假设$\|u\|_{L^\infty(Q_1)} \le K$ 以及 a 的定义，我们可以推得 $u \le w$ in $\partial_p Q_{1/4}(x_0,t_0) \setminus P_{1/4}^\delta(x_0,t_0)$。另一方面，对于每个 $\rho \in (0, \frac{1}{4})$，我们有

$$w(x,t)|_{t=t_0-\delta|x-x_0|^2} = \tfrac{ab}{2}\rho^2 \quad \text{in } \partial B_\rho(x_0),$$

根据 w 的定义，以及

$$\sup_{x\in\partial B_\rho(x_0),t=t_0-\delta\rho^2} u(x,t)\le C_0K\rho^2,$$

对每个 $\rho\in(0,1/4)$，由 (3.9) 可立即得到这一结论。结合最后两个不等式以及 a 的定义，我们推得 $u\le w$ in $\partial P^\delta_{1/4}(x_0,t_0)\cap\{t-t_0>-\delta/16\}$，因此，由于 u 在 Q_1 中是次热函数（因为 $f\le 0$ 几乎处处在 Q_1 中），我们得到 $u\le w$ in $Q_{1/4}(x_0,t_0)\setminus P^\delta_{1/4}(x_0,t_0)$，如所需。于是，由于对每个 $r\in(0,1/4)$ 都有 $v\le Cr^2$ in $Q_r(x_0,t_0)\setminus P^\delta_r(x_0,t_0)$，且某个 $C>0$ 仅依赖于 a 和 b，结论成立。□

推论 3.5. 设 $K>0$, $f\in L^\infty(Q_1)$ 和 $u\in C(Q_1)$ 如引理 3.4 中所述。此外，假设 f 在 $\{u>0\}\cap Q_1$ 中为常数。那么存在一个常数 $C>0$，仅依赖于 n 和 K，使得

$$\|\partial_t u\|_{L^\infty(Q_{1/2})}+\|D^2u\|_{L^\infty(Q_{1/2})}\le C. \tag{3.10}$$

此外，对于每个 $(y,\tau)\in\{u>0\}\cap Q_{1/2}$，我们有

$$|\nabla u(y,\tau)|\le C\delta, \tag{3.11}$$

其中 $\delta:=\sup\{\rho>0:\ Q_\rho(y,\tau)\subset\{u>0\}\}$。

证明。我们不妨假设 $\partial\{u>0\}\cap Q_{1/2}\neq\varnothing$，否则结论是经典且众所周知的。固定 $(y,\tau)\in\{u>0\}\cap Q_{1/2}$，并令 $\delta=\delta(y,\tau)>0$如命题所述。我们首先应用 [22, 定理 4.9] 中的内部估计（取 $\alpha=1$、$(a_{ij})_{i,\ j=1}^n=I$, $b_i=0$，其中 $i=1$、.....、n，以及 $c=0$），从而推出

$$\|\partial_t u\|_{L^\infty(Q_{\delta/2}(y,\tau))}+\|D^2u\|_{L^\infty(Q_{\delta/2}(y,\tau))}+\frac{1}{\delta}\|\nabla u\|_{L^\infty(Q_{\delta/2}(y,\tau))}$$
$$\le\bar C\left(\frac{1}{\delta^2}\|u\|_{L^\infty(Q_\delta(y,\tau))}+\|f\|_{L^\infty(Q_\delta(y,\tau))}+\delta[f]_{\mathrm{Lip}_p(Q_\delta(y,\tau))}\right),$$

其中某个常数 $C>0$ 仅依赖于 n

$$[f]_{\mathrm{Lip}_p(Q)}:=\sup_{\substack{(x,t),(y,\tau)\in Q\\(x,t)\neq(y,\tau)}}\frac{|f(x,t)-f(y,\tau)|}{\sqrt{|x-y|^2+|t-\tau|}}.$$

然后，利用增长估计 (3.8)（应用于 $Q_{2\delta}(y_0,\tau_0)$）、f 的 L^∞ 界，以及 f 在 Q_δ 上为常数这一事实（因为 $Q_\delta\subset\{u>0\}$），可得

$$\frac{1}{\delta^2}\|u\|_{L^\infty(Q_\delta(y,\tau))}+\|f\|_{L^\infty(Q_\delta(y,\tau))}+\delta[f]_{\mathrm{Lip}_p(Q_\delta(y,\tau))}\le 4C_0+K,$$

其中 $C_0>0$ 与引理 3.4 中相同。结合上述两个不等式，并利用 (y,τ) 的任意性，可得

$$|\partial_t u(y,\tau)|+|D^2u(y,\tau)|\le C\qquad\text{for all }(y,\tau)\in\{u>0\}\cap Q_{1/2} \tag{3.12}$$

and

$$|\nabla u(y,\tau)|\le C\delta\qquad\text{for all }(y,\tau)\in\{u>0\}\cap Q_{1/2}, \tag{3.13}$$

其中 $C:=C(4C_0+K)$。特别地，(3.13) 表明 ∇u 可在 $\{u=0\}\cap Q_{1/2}$ 中连续延拓至零。

要完成证明，只需证明 ∇u 关于空间变量是 Lipschitz 的，即

$$|\nabla u(x,t)-\nabla u(z,t)|\le L|x-z|\qquad\text{for all }(x,t),(z,t)\in Q_{1/2}, \tag{3.14}$$

对于某个仅依赖于 n 和 K 的常数 $L > 0$。事实上，(3.14) 蕴含 $\|D^2u\|_{L^\infty(Q_{1/2})} \leq L$，结合 u 是 (3.7) 的弱解这一事实以及 $\|f\|_{L^\infty(Q_1)} \leq K$，可得界 $\|\partial_t u\|_{L^\infty(Q_{1/2})} \leq L + K$。

在下面的论证中，我们将使用抛物距离。对于点 (x,t)、$(y,\tau) \in \mathbb{R}^{n+1}$，其定义为

$$\mathrm{dist}_p((x,t),(y,\tau)) := \inf\{\rho > 0 : (y,\tau) \in Q_\rho(x,t)\}.$$

对于点 $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 和集合 $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$，我们定义 $\mathrm{dist}_p((x,t), A) := \inf_{(y,\tau)\in A} \mathrm{dist}_p((x,t),(y,\tau))$。

我们来证明 (3.14)。为此，设 (x,t)、$(z,t) \in Q_{1/2}$。若 (x,t)、(z,t) 均 $\in \{u = 0\}$，则结论显然成立，因为 $\nabla u = 0$ 在 $\{u = 0\} \cap Q_{1/2}$ 中。因此，我们不妨设 $(x,t) \in \{u > 0\}$。由对称性，我们还可以假设

$$d := \mathrm{dist}_p((x,t), \{u = 0\}) \geq \mathrm{dist}_p((z,t), \{u = 0\}).$$

一方面，假设 $\mathrm{dist}_p((x,t),(z,t)) \leq d/2$。那么，$(z,\tau) \in Q_{d/2}(x,t) \subset \overline{\{u > 0\}}$，因此由 (3.12) 可得

$$|\nabla u(x,t) - \nabla u(z,t)| \leq \int_0^1 |D^2u(sx + (1-s)z, t)|\mathrm{d}s \cdot |x - z| \leq C|x - z|.$$

另一方面，若 $\mathrm{dist}_p((x,t),(z,t)) \geq d/2$，则由 (3.13) 得

$$|\nabla u(x,t) - \nabla u(z,t)| \leq |\nabla u(x,t)| + |\nabla u(z,t)| \leq 2Cd \leq 4C\mathrm{dist}_p((x,t),(z,t)) = 4C|x - z|.$$

因此，取 $L := 4C$，即可得 (3.14)。 □

3.3. 定理 1.3 的证明。本小节中，我们将结合前面引入的所有要素来证明主要结果。

定理 1.3 的证明。令 $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ 为 $\mathcal{U}_0$ 中 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 的极小化子族。由命题 2.1，存在 $\varepsilon_j \to 0$ 和 $u \in \mathcal{U}_0$，使得 u_{ε_j} 按照 (2.1) 的意义收敛于 u；并且由引理 3.1，每个 u_{ε_j} 对任意 $j \in \mathbb{N}$ 均满足 (3.1)。为简便起见，对于 $j \in \mathbb{N}$，记 $u_j := u_{\varepsilon_j}$。

步骤 1：极小化子序列的局部一致收敛。
首先，在进一步取子列后，我们可以假设，对每个 $r > 0$ 以及每个 $(x_0,t_0) \in Q$ 满足 $Q_r(x_0,t_0) \subset\subset Q$

$$\|u_j\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(Q_{r/2}(x_0,t_0))} \leq Cr^{-\alpha}\big[1 + r^{-\frac{n+2}{2}}\|u_j\|_{L^2(Q_r(x_0,t_0))}\big]$$

对于某个 $\alpha \in (0,1)$，且 $C > 0$ 仅依赖于 n（抛物型 Hölder 范数 $\|\cdot\|_{C^{\alpha,\alpha/2}}$ 的定义相当标准，参见例如 [3, 附录 C]）。这可由结合命题 3.1 和命题 4.1] 中的（重新缩放后的）估计与 $U_\varepsilon = u_{\varepsilon_j} = u_j$, $f_\varepsilon = 0$, $F_\varepsilon = -\chi_{\{u_{\varepsilon_j}>0\}}$, $p = q = \infty$ 和 $a = 0$ 轻易得到。[2] 此外，对每个 $r > 0$，序列 $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 在 $L^2(Q_r^+)$ 中一致有界——参见导出 (2.5) 的论证——因此

$$\|u_j\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(Q_{r/2}(x_0,t_0))} \leq C,$$

对于某个与 j 无关的其他常数 $C > 0$。因此，结合 Arzelà-Ascoli 定理和标准的覆盖论证，并在必要时再取一个子列，我们推得

$$u_j \to u \quad \text{locally uniformly in } Q,$$

这尤其意味着 u 在 Q 中连续。

[2] 注意，由于 $u_{\varepsilon_j} \to u$ 在 $C_{\mathrm{loc}}(0,\infty; L^2(\mathbb{R}^n))$ 中成立（这是 (2.6)-(2.7) 和 [33, 推论 8] 的直接结果），因此这里可以应用 [3, 命题 4.1]，并且满足 [3] 中的假设 (4.1)。

步骤 2：得出 $\gamma \in (1, 2)$ 的结论。
我们证明 u 是 (1.1) 的强解。注意，若 $\gamma \in (1,2)$，则非线性项 f_γ 连续。因此，结合 (2.6)、命题 2.1 以及 f_γ的连续性，我们可以利用控制收敛定理在 (3.1) 中取极限，并得出 u 满足 (1.7)，即满足定义 1.2 意义下的 (1.1)。

步骤 3： $\gamma = 1$的极限问题。
在证明的其余部分，我们假设 $\gamma = 1$。由于 $\chi_{\{u_j>0\}}$ 在 $L^\infty(Q)$ 中一致地关于 $j \in \mathbb{N}$有界，因此存在一个非负函数 $\chi \in L^\infty(Q)$，使得经过子列选取后， $\chi_{\{u_j>0\}} \rightharpoonup^\star \chi$ 在 $L^\infty(Q)$ 中。于是，如上所述，在 (3.1) 中取极限，并回忆 $L^\infty(Q) = L^1(Q)^\star$，可得

$$\int_Q (\partial_t u\eta + \nabla u \cdot \nabla \eta + \chi\eta)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0,$$

对每个 $\eta \in C_c^\infty(Q)$ 都成立。因此，最后只需证明

$$\chi = \chi_{\{u>0\}} \quad \text{a.e. in } Q_R, \tag{3.15}$$

其中， Q_R 是任意一个满足 $Q_{2R} \subset Q$ 和 $R > 0$ 的圆柱域。

为验证 (3.15)，一方面注意到，若 $(x,t) \in \{u > 0\} \cap Q_R$，则由一致收敛可知，对足够大的 j， $\chi_{\{u_j>0\}}(x,t) = 1$。因此， $\chi = 1$ 属于 $\{u > 0\} \cap Q_R$。另一方面，我们断言，对于任意 $\delta \in (0, R^2/4)$，若 $(x,t) \in \{u = 0\} \cap Q_R$ 且 $\operatorname{dist}((x,t)\ \{u > 0\}) > \delta$，则

$$\chi_{\{u_j>0\}}(x,t) = 0$$

当 j 足够大时成立。事实上，假设这不成立，则存在 $\{(x_k,t_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset Q_R$，满足 $\operatorname{dist}((x_k,t_k)\ \{u > 0\}) > \delta$ 且 $(x_k,t_k) \in \{u_k > 0\}$，对 $k \in \mathbb{N}$ 成立。于是，由一致非退化估计 (3.6)，我们有

$$u_k(z_k,\tau_k) = \sup_{B_{\delta/2}(x_k,t_k)} u_k \geq c\delta^2,$$

对于某个 $(z_k,\tau_k) \in \overline{B_{\delta/2}(x_k,t_k)}$，以及某个与 k 无关的 $c > 0$。取子列后，我们有 $(x_k,t_k) \to (x_0,t_0)$，且 $(z_k,\tau_k) \to (z,\tau) \in B_{\delta/2}(x_0,t_0) \subset\subset \{u > 0\}^c$。因此， $u(x_0,t_0) = 0$，但这与事实 $u_k(z_k,\tau_k) \to u(x_0, t_0) \geq c\delta^2$ 相矛盾（这可由一致收敛推出）。由此，断言得证，并可得 $\chi = 0$ 属于 $\operatorname{int}(\{u = 0\}) \cap Q_R$，其中 $\operatorname{int}(A)$ 表示集合 A 的内部。

综上， $u \in C(Q_R)$ 是 $\partial_t u - \Delta u = -\chi$ 在 Q_R 中的一个弱解，其中 $\chi \in L^\infty(Q)$ 非负， $\chi = 1$ 属于 $\{u > 0\} \cap Q_R$，且 $\chi = 0$ 属于 $\operatorname{int}(\{u = 0\}) \cap Q_R$（特别地， u 满足引理 3.3 和推论 3.5 的所有假设，其中 $f = \chi$）。

为了证明 (3.15)，还需证明 $\partial\{u > 0\} \cap Q_R$ 的测度为零，这正是我们接下来要做的，思路与 [35, 定理 5.1]类似。

步骤 4：自由边界的测度。
We 首先证明，对于每个 $(x,t) \in \partial\{u > 0\} \cap Q_R$ 以及每个 $r \in (0, R/4)$，我们有 e

$$\frac{\mathscr{L}^{n+1}(\{u > 0\} \cap Q_r(x,t))}{\mathscr{L}^{n+1}(Q_r(x,t))} \geq c_\star > 0, \tag{3.16}$$

其中， $\mathscr{L}^{n+1}$ 表示（$n+1$）维勒贝格测度， $c_\star$ 是仅依赖于 n 和 K_R 的常数: $= \max\{1, \|u\|_{L^\infty(Q_R)}\}$。为证明（3.16），注意到引理 3.3 保证存在（y， τ） $\in \{u > 0\} \cap Q_{r/2}$（$x$， t），使得

$$u(y,\tau) \geq \tfrac{c_0}{4} r^2, \tag{3.17}$$

其中， $c_\circ > 0$仅依赖于 $n_\circ$现在我们断言，若 $\tilde{c} \in (0, 1_2)$足够小且仅依赖于 n和 K_R，则 $Q_{\tilde{c}r}$（y， τ）$\subset \{u > 0\} \cap Q_r$（$x$， t）。事实上，给定（z， θ） $\in Q_{\tilde{c}r}$（y， τ），令 γ（s）：$=s$（y， τ） $+$（$1-s$）（z， θ），其中 $s \in [0,1]$。由推论 3.5（应用于 $f = -\chi$和 $K = K_R$），可得

$$\begin{aligned} u(y,\tau) - u(z,\theta) &= \int_0^1 (\nabla u(\gamma(s)), \partial_t u(\gamma(s)) \cdot (y-z, \tau-\theta)\,\mathrm{d}s \\ &\leq \sup_{s\in[0,1]} |\nabla u(\gamma(s))| \cdot |y-z| + \sup_{s\in[0,1]} |\partial_t u(\gamma(s))| \cdot |\tau-\theta| \leq Cr \cdot \tilde{c}r + C \cdot (\tilde{c}r)^2 \\ &\leq 2C\tilde{c}r^2, \end{aligned}$$

其中， $C > 0$ 是（3.10）和（3.11）中出现的常数，且仅依赖于 n 和 K_R。令$\tilde{c} := \min\{\frac{c_\circ}{16C}, \frac{1}{2}\}$，并将上述界与（3.17）结合起来，我们得到

$$u(z,\theta) \geq (\tfrac{c_\circ}{4} - 2C\tilde{c})r^2 > 0,$$

我们的断言得证。由于 $Q_{\tilde{c}r}(y,\tau) \subset \{u > 0\} \cap Q_r(x,t)$，显然可得（3.16）。

一旦证明了（3.16），我们来证明自由边界的测度为零。反证法，假设 $\mathscr{L}^{n+1}(\partial\{u > 0\} \cap Q_R) > 0$。现在，由于集合 $\partial\{u > 0\}$ 是可测的，$\chi_{\partial\{u>0\}}$ 在 Q_R 中可积，因此，对于几乎所有点 $(x,t) \in \partial\{u > 0\} \cap Q_R$，

$$\frac{\mathscr{L}^{n+1}(\partial\{u > 0\} \cap E_r(x,t))}{\mathscr{L}^{n+1}(E_r(x,t))} \to 1 \quad \text{as } r \downarrow 0, \tag{3.18}$$

其中 $E_r(x,t) := B_r(x) \times (t-r, t+r)$。取这样一个点 (x,t)（注意，根据假设， $\mathscr{L}^{n+1}(\partial\{u > 0\} \cap Q_R)$ 为正，因此这样的点确实存在）。经过平移，不妨设 $(x,t) = (0,0)$。再取 $r_\circ > 0$，使得对于 $r < r_\circ$, $\mathscr{L}^{n+1}(\partial\{u > 0\} \cap E_{r/2}) \geq \mathscr{L}^{n+1}(E_{r/2})/2_\circ$

现在，取一个序列 $r_k \to 0$，使得 $1/(2r_k) \in \mathbb{N}_\circ$ 对于其中每个 r_k（下文简称为 r），我们将圆柱域 $E_{r/2}$（除去一个零测集）分解为 $1/r$个两两不交的抛物型圆柱 $Q_{r/2}(0,t_i)$，其中 $\{t_i\}_{i\circ}$ 若 $r < r_\circ$，则不难看出，与 $\partial\{u > 0\}$ 相交的圆柱 $Q_{r/2}(0,t_i)$ 的个数（记为 N）满足 $N \geq 1/r_\circ$ 从这些 N个圆柱中，我们可以再选取一组 $\{Q_{r/2}(0,t_j)\}_j$，其基数至少为 $N/4$，且集合中任意两个圆柱之间的距离大于 r^2。因此，我们可以构造另一组抛物型圆柱 $\{Q_{r/2}(z_j,\tau_j)\}_j$，其基数相同，并且满足 $(z_j,\tau_j) \in \partial\{u > 0\} \cap Q_{r/2}(0,t_j)_\circ$ 对于这些圆柱中的每一个，我们都可以应用密度性质 (3.16)，再将结果相加（注意这些圆柱两两不交），得到

$$\mathscr{L}^{n+1}(\partial\{u > 0\} \cap E_r) \geq \sum_{j=1}^{N/4} \mathscr{L}^{n+1}(\partial\{u > 0\} \cap Q_{r/2}(z_j,\tau_j)) \geq c_\star \frac{N}{4} \mathscr{L}^{n+1}(Q_{r/2}) \geq \bar{c}\mathscr{L}^{n+1}(E_r),$$

其中某个常数 $\bar{c} > 0$ 仅依赖于 n 和 K_R。注意，在最后一个不等式中，我们用到了 $N \geq 1/r_\circ$ 因此，

$$\frac{\mathscr{L}^{n+1}(\partial\{u > 0\} \cap E_r)}{\mathscr{L}^{n+1}(E_r)} \geq \bar{c} > 0,$$

将其与 (3.18) 结合——回顾一下，我们假设 $(x,t) = (0,0)$——可得

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{\mathscr{L}^{n+1}(\overline{\{u > 0\}} \cap E_r)}{\mathscr{L}^{n+1}(E_r)} > 1,$$

矛盾。 □

4. Extensions

在最后一节中，我们将说明如何修改上述论证，以构造强解

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = -f_\gamma(u) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域。开始证明之前，先说明几点：

- 方程 (4.1) 的强解概念与定义 1.2 中给出的完全相同，只需将 $\mathbb{R}^n$ 替换为 Ω，将 Q 替换为 $\Omega_\infty := \Omega \times (0,\infty)$，并将 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 替换为 $H_0^1(\Omega)$。
- 读者很容易看出，若在抛物边界上施加齐次诺伊曼条件而非狄利克雷条件，下面的论证稍作修改后仍然成立（另见 [5]）。

现在，我们采用的思路基本上与前面各节相同：考虑如下泛函族

$$\tilde{\mathcal{E}}_\varepsilon(w) := \int_0^\infty \frac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon} \left(\int_\Omega (\varepsilon |\partial_t w|^2 + |\nabla w|^2)\,\mathrm{d}x + 2\int_\Omega w_+^\gamma \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t, \tag{4.2}$$

其中 $\varepsilon \in (0,1)$，并在空间中寻找极小化子

$$\tilde{\mathcal{U}}_0 := \{u \in \tilde{\mathcal{U}} : u|_{t=0} = u_0 \text{ and } u(\cdot,t) = 0 \text{ on } \partial\Omega \quad \text{for a.e. } t > 0\},$$

其中

$$\tilde{\mathcal{U}} := \bigcap_{r>0} H^1(\Omega_r^+), \qquad \text{with } \Omega_r^+ := \Omega \times (0, r^2),$$

且初始数据满足

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\gamma(\Omega) \quad \text{and} \quad u_0 \geq 0 \quad \text{a.e. in } \Omega. \tag{4.3}$$

与上文完全相同，由于每个元素 $u \in \tilde{\mathcal{U}}$ 的所有（一阶）弱导数都属于 $L^2(\Omega_r^+)$，对任意 $r > 0$，~，定义 $\mathcal{U}_0$ 中出现的方程 $u|_{t=0} = u_0$ 和 $u(\cdot,t) = 0$ 在 Ω 上对几乎处处的 $t > 0$成立，必定应理解为迹的意义下成立。

根据这些定义，我们可以陈述并证明定理 1.3 的以下推论。

推论 4.1。设 $n \geq 1$, $\gamma \in [1,2)$， u_0 如 (4.3) 中所述，且 f_γ 如 (1.2) 中所述。那么存在极小化子 $\{u_{\varepsilon_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ （属于 $\mathcal{U}_0$）的序列 ~，~，它们是 (4.2) 的极小化子，并存在 (4.1) 的强解 $u \in \mathcal{U}_0$，其在 Ω_∞ 上连续，使得

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon_j} &\rightharpoonup u \quad \textit{weakly in } \tilde{\mathcal{U}} \\ u_{\varepsilon_j} &\to u \quad \textit{locally uniformly in } \Omega_\infty. \end{aligned}$$

证明。我们将证明概括为以下三点说明。

- 用于证明引理 2.2 的方法在此情形下同样适用，只需稍作修改：关于 u_0 的假设使我们能够将其用作竞争函数，并得到估计 (2.3)；而极小化子存在性的证明（对于固定的 $\varepsilon \in (0,1)$）也相同，只需将 B_r 替换为 Ω，并将 Q_r^+替换为 Ω_r^+。

- 此外，命题 2.3 中所述的能量估计，对于 $\mathcal{U}_0$ 中 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 的极小化子也成立，只~需将~ $\mathbb{R}^n$ 替换为 Ω。事实上，只需在公式 (2.8) 下方的定义中，将 $\mathbb{R}^n$ 替换为 Ω 即可。其余证明完全相同。

• 最后，我们注意到，引理 3.1、引理 3.2、引理 3.3、引理 3.4 和推论 3.5 的证明完全是局部的，并不依赖于极小化子的边界行为。因此，$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }\mathcal{U}_0$ 中 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 的极小化子满足相同的结论，只需将 Q 替换为 Ω_∞。

综合这些观察并按照定理 1.3 的证明进行推导，即可得到我们的结论。□

Acknowledgements

我们感谢匿名审稿人认真审阅本文的第一个版本，并提出了宝贵意见。

References

[1] G. Akagi, U. Stefanelli. *A variational principle for gradient flows of nonconvex energies*, 凸分析杂志 23 (2016), 53–75. [2] H. W. Alt, D. Phillips. *A free boundary problem for semilinear elliptic equations*, 纯粹与应用数学杂志 368 (1986), 63–107.

[3] A. Audrito. *On the existence and Hölder regularity of solutions to some nonlinear Cauchy-Neumann problems*, arXiv 预印本，arXiv:2107.03308 (2021). [4] A. Audrito, T. Kukuljan. *The Stefan problem with fully nonlinear diffusion*, arXiv 预印本，arXiv:2208.14791 (2022). [5] A. Audrito, E. Serra P. Tilli. *A minimization procedure to the existence of segregated solutions to parabolic , , 偏微分 reaction-diffusion systems* **46** 2021 2268 2287 方程通讯 ( ), – . [6] V. Bögelein, F. Duzaar P. Marcellini. *Existence of evolutionary variational solutions via the calculus of , , 微分方 variations* **256** 2014 3912 3942 程杂志 ( ), – . [7] V. Bögelein, F. Duzaar, P. Marcellini, S. Signoriello. *Parabolic equations and the bounded slope condition*, Ann. I. H. Poincar´e 34 (2017), 355–379.

[8] L. Caffarelli. *The regularity of free boundaries in higher dimensions*, 数学学报 139 (1978), 155–184. [9] L. Caffarelli. *Some aspects of the one-phase Stefan problem*, 印第安纳大学数学杂志 27 (1978), 73–77. [10] L. Caffarelli, A. Friedman. *Continuity of the temperature in the Stefan problem*, 印第安纳大学数学杂志 28 (1979), 53–70. [11] L. Caffarelli, A. Petrosyan, H. Shahgholian. *Regularity of a free boundary in parabolic potential theory*, 美国数学会杂志 17 (2004), 827–869. [12] H. J. Choe, G. S. Weiss. *A semilinear parabolic equation with free boundary*, 印第安纳大学数学杂志 52 (2003), 19–50. [13] E. De Giorgi. *Conjectures concerning some evolution problems*, 庆祝 John F. Nash, Jr.，杜克数学杂志 81 (1996), 255–268. [14] D. De Silva, O. Savin. *Uniform density estimates and Γ-convergence for the Alt-Phillips functional of negative powers* 2205 08436 , arXiv 预印本，arXiv: . . [15] D. De Silva, O. Savin. *Compactness estimates for minimizers of the Alt-Phillips functional of negative exponents*, arXiv 预印本，arXiv:2211.00553. [16] S. Dipierro, A. Karakhanyan, E. Valdinoci. *Classification of global solutions of a free boundary problem in the plane* 2203 11663 , arXiv 预印本，arXiv: . . [17] R. Durastanti, L. Giacomelli. *Spreading Equilibria Under Mildly Singular Potentials: Pancakes Versus Droplets*, 非线性科学杂志 32 (2022), 1–61.

[18] X. Fernández-Real, X. Ros-Oton. *Regularity Theory for Elliptic PDE*, 苏黎世高级数学讲座，EMS 图书，2022.

[19] A. Figalli, X. Ros-Oton, J. Serra. *The singular set in the Stefan problem*, arXiv 预印本，arXiv:2103.13379 (2021). [20] A. Friedman, D. Kinderlehrer. *A one phase Stefan problem*, 印第安纳大学数学杂志 24 (1975), 1005–1035.

[21] T. Ilmanen. *Elliptic regularization and partial regularity for motion by mean curvature*, 美国数学会回忆录 108 (1994), 第520号，x+90 页。

[22] G.-M. Lieberman. *Second order parabolic differential equations*, World Scientific Publishing Co., 1996. [23] J.-L. Lions. *Sur certaines équations paraboliques non linéaires*, 法国数学会通报, 93 (1965), 155–175. [24] L. K. Martinson. *The finite velocity of propagation of thermal perturbations in media with constant thermal conductivity* **16** 1976 141 149 , 苏联计算数学与数学物理 ( ), – . [25] A. Mielke, U. Stefanelli. *Weighted energy-dissipation functionals for gradient flows*, ESAIM 控制、优化与变分法 17 (2011), 52–85. [26] O. A. Oleinik. *On a problem of G. Fichera*, 苏联科学院通报 157 (1964), 1297–1300. [27] D. Phillips. *Hausdoff measure estimates of a free boundary for a minimum problem*, 偏微分方程通讯, 8 (1983), 1409–1454. [28] D. Phillips. *A minimization problem and the regularity of solutions in the presence of a free boundary*, 印第安纳大学数学杂志, 32 (1983), 1–17. [29] D. Phillips. *Existence of solutions of quenching problems*, 应用分析, 24 (1987), 253–264. [30] R. Rossi, G. Savaré A. Segatti U. Stefanelli. *Weighted energy-dissipation principle for gradient flows in , , , metric spaces* **127** 2019 1 66 应用数学杂志 ( ), – . [31] E. Serra, P. Tilli. *Nonlinear wave equations as limits of convex minimization problems: proof of a conjecture by De Giorgi* **175** 2012 1551 1574 , 数学年刊 ( ), – . [32] E. Serra, P. Tilli. *A minimization approach to hyperbolic Cauchy problems*, 欧洲数学会杂志 18 (2016), 2019–2044. [33] J. Simon. *Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$*, 纯粹与应用数学年刊 146 (1987), 65–96. [34] L. Wang. *On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations: II*, 纯粹与应用数学通讯 45 (1992), 141–178. [35] G. S. Weiss. *Self-similar blow-up and Hausdorff dimension estimates for a class of parabolic free boundary problems*, SIAM 数学分析杂志 30 (1999), 623–644. [36] G. S. Weiss. *The free boundary of a thermal wave in a strongly absorbing medium*, 微分方程杂志 160 (2000), 357–388.

Alessandro AudritoPolitecnico di Torino, DISMA, Corso Duca degli Abruzzi 24, 10129, Torino, Italia.*Email address*: alessandro.audrito@polito.it

T. Sanz-PerelaDepartamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, Ciudad Universitaria de Canto-blanco, 28049 Madrid, Spain*Email address*: tomas.sanz@uam.es