arXiv:2303.03439v1 [eess.SP] 6 Mar 2023

S色散目标的合成孔径成像

ARNOLD D. KIM 和 CHRYSOULA TSOGKA

Abstract. 我们引入了一种基于远场粒子散射的色散点目标模型。随后，将合成孔径成像问题扩展为识别这些目标，并确定其位置和频率相关反射率。我们证明，基尔霍夫偏移（KM）能够识别成像区域中的色散点目标。然而，KM 预测的目标位置在距离向上相对于真实位置发生了偏移。我们推导出了单个目标距离偏移的估计值。我们还表明，由于这种距离偏移，我们无法恢复复值频率相关反射率，但可以恢复其绝对值，从而得到目标的雷达散射截面（RCS）。仿真结果表明，我们能够检测色散点目标、恢复其近似位置并得到其 RCS，由此为区分多个目标之间的重要差异（例如尺寸或材料组成）提供了可能。

Key词语。 合成孔径雷达、色散目标、基尔霍夫偏移、雷达散射截面 n

1. Introduction

合成孔径雷达是一种成像方式，利用机载天线采集来自地面感兴趣区域的反射信号。通过沿已知飞行轨迹对信号进行相干处理，可重建高分辨率图像 [1, 2, 3, 4]。这些图像可估计反射率的空间依赖性，通常忽略其频率内容。然而，目标反射率的色散特性备受关注，因为它有助于材料识别，例如。

为此提出的一种自然方法是将频带划分为多个子频带，然后为每个子频带生成一幅图像 [5, 6]。尽管单幅图像的分辨率较低，但仍可有效用于提供反射率频率依赖性的信息。同样，通过将带宽和阵列孔径分别划分为子频带和子孔径，利用稀疏约束优化方法，已成功重建频率和方向相关反射率 [7] 。此时，反射率采用四维参数化，即，空间、频率和方向。计算复杂度限制了该方法在实时场景中的适用性。

利用合成孔径雷达模糊函数中的多普勒频移 [1] 已扩展至频率相关反射率，并推导出了空间域和频域中的合成孔径雷达点扩散函数表达式 [8]。该点扩散函数可用于重建图像，使每个像素都能提供有关反射率的频率相关信息 [9]。这种方法取得了令人鼓舞的结果，但实现高距离分辨率仍然是一项挑战。

处理色散目标的另一种方法是考虑时域中的信号；在这种情况下，需要将目标引起的散射时延与传播时延分离。这是一个颇具挑战性的问题，在合成孔径足够宽的情况下，文献 [10]对此进行了研究。 [11] 利用统计散度度量评估了一个重要问题：在存在斑点噪声时，能否检测到这种散射时延。

本文考虑一种频率相关反射率的现实模型，并提出一种基于相干反投影的成像方法。该方法使我们能够先对目标的空间位置成像，再确定其频率相关反射率。采用 [12] 提出的可调合成孔径雷达成像方法，可实现目标位置的高分辨率成像。该方法依赖于对经典 SAR 图像进行简单的数学变换，变换由用户定义参数 ϵ 控制。所得图像将传统 SAR 图像的分辨率缩放 $\sqrt{\epsilon}$ ，从而实现亚波长目标定位。

由于反射率具有频率依赖性，重建得到的目标位置存在距离向偏移。我们的理论分析估算了这一偏移，并表明它与目标的基本散射特性——即反射率——有内在联系。估算出目标位置后，即可恢复目标的雷达散射截面（RCS）。针对单目标和多目标场景，均取得了令人鼓舞的结果。获取 RCS 信息对某些遥感应用非常重要，因为除探测和空间定位外，这些信息还能提供目标分类信息。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们回顾粒子散射的基础理论，并以此介绍我们的色散点目标模型。在第 3 节中，我们描述色散点目标的合成孔径雷达成像问题。在第4节中，我们应用基尔霍夫偏移（KM）确定目标位置，进而恢复单个色散点目标的雷达散射截面。我们将展示，KM 能够准确确定目标在方位向上的位置，但可能会在距离向上产生偏移。我们推导出该距离偏移的估计值，并确定产生这一偏移的关键机制。在第 5节中，我们将这些结果扩展到多个目标的情况。针对该情形，我们引入一个基础的线性回归问题，以获得各个目标的雷达散射截面。在第 6 节中，我们给出结论。附录 A 介绍球体的标量波散射，我们利用该内容生成频率相关反射率，并将其用于本文所示的仿真结果。

2. Scattering by a particle

我们简要回顾粒子散射的基本原理，并借此引入我们的色散点目标模型。考虑观测距离粒子 R 处的散射场 U_s，其中 $R > d^2/\lambda$，d 为粒子直径，λ 为入射光的波长。对于这种情况，散射场的主导行为为 [13]

$$U_s \sim f(\hat{\boldsymbol{o}}, \hat{\boldsymbol{\imath}}; \omega) \frac{e^{\mathrm{i}\omega R/c}}{R} \tag{1}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{o}}$ 为观测方向，$\hat{\boldsymbol{\imath}}$ 为入射平面波的传播方向，ω 为频率，c 为波速。式（1）所给出的主导行为是一个经 f（即散射振幅）调制的球面波。散射振幅包含频率为 ω时远场中散射场的振幅和相位。

在合成孔径成像中，我们只测量对应于 $\hat{\boldsymbol{o}} = -\hat{\boldsymbol{\imath}}$ 的后向散射场。雷达散射截面（RCS）

$$\sigma_{\mathrm{RCS}}(\omega) = 4\pi |f(-\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\imath}}; \omega)|^2 \tag{2}$$

可用于衡量粒子的后向散射功率。RCS 随 ω 变化，取决于粒子的尺寸、形状和材料特性。

诸如 KM 的合成孔径雷达成像方法往往会生成一般物体的图像，并在这些物体最奇异的部分呈现峰值，例如，最近的边界、角点等 [3]。因此，点目标模型通常用于这些成像问题。合成孔径雷达成像问题中通常使用的点目标模型假设，在某点测得的散射场 $\boldsymbol{x}$ 可表示为

$$U^s(\boldsymbol{x}) = \rho \frac{e^{\mathrm{i}\omega|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|/c}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} U^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{y}). \tag{3}$$

这里，U^{inc} 是入射场，$\boldsymbol{y}$ 是点目标的位置，而 ρ 是一个称为反射率的复标量。比较（3）和（1），我们可以看到，当假设 f 与方向和频率无关时，反射率就是散射振幅。

通过引入频率相关反射率 ϱ（ω），我们将（3）扩展为

$$U^s(\boldsymbol{x}) = \varrho(\omega) \frac{e^{\mathrm{i}\omega|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|/c}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} U^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{y}). \tag{4}$$

我们将 (4) 称为色散点目标模型。该模型由位置 $\boldsymbol{y}$ 和频率相关反射率 $\varrho(\omega)$ 表征。

在接下来的数值仿真中，我们根据半径为 α 、相对折射率为 n_{rel} 的介电球体的散射振幅，确定 $\varrho(\omega)$（参见附录 A）。利用该反射率，我们通过计算 $\sigma_{\mathrm{RCS}}(\omega) = 4\pi|\varrho(\omega)|^2$，求得雷达散射截面。

3. Synthetic aperture imaging

在合成孔径雷达（SAR）成像中，单个发射器/接收器用于收集由移动平台形成的合成孔径范围内的散射电磁场 [1, 3, 4]。移动平台用于开展一系列实验：发射脉冲，并由发射器/接收器在飞行路径上的多个位置记录所产生的回波。设 $f(t)$表示发射的宽带脉冲， $d(s,t)$表示记录的数据。这里，测量数据取决于慢时间 s ，它对平台的飞行路径进行参数化；还取决于 $\boldsymbol{r}(s)$以及快时间 t ，快时间用于测量平台与地面成像场景之间的往返传播时间。

由于对移动平台形成的大合成孔径范围内的数据进行相干处理，因此可以获得探测场景的高分辨率图像。如图1所示，平台沿轨迹移动，通过发射脉冲 $p(t)$探测成像场景，并收集相应的回波。我们将距离向定义为：把连接成像区域中心与平台中心位置的向量投影到成像平面上所得到的方向。方位向则是与距离向正交的方向。设合成孔径的尺寸为 a ，可用带宽为 B，则成像系统的典型分辨率在距离向为 $O((c/B)(L/R))$，在方位向为$O(\lambda_0 L/a)$。其中， c为光速， λ_0 为对应于中心频率的波长； L 表示平台与成像区域之间的距离， R 表示距离向偏移量。

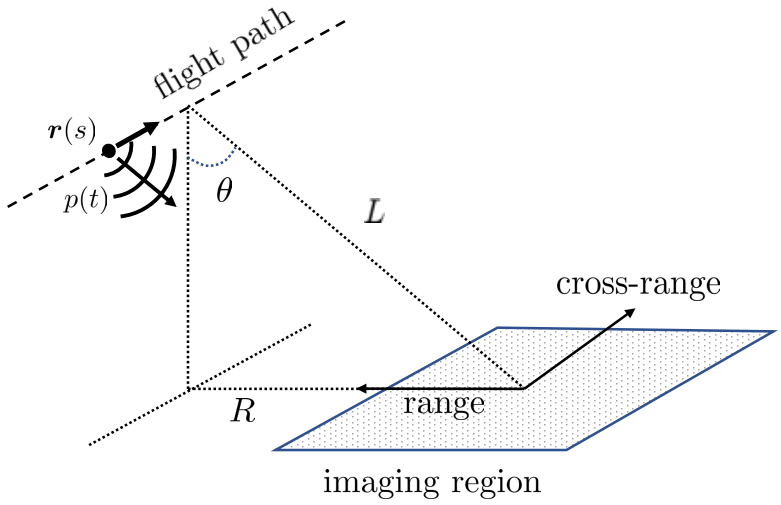


Figure 1. 合成孔径雷达成像示意图。

下文采用启停近似，即忽略平台和目标的位移，相对于平台上发射和接收信号传播过程中所发生的位移而言。令 $\boldsymbol{x}_n$ 表示构成合成孔径的飞行路径上发射器/接收器的位置，其中$n = 1, \ldots, N$。成像系统采用频率 ω_m，以对系统带宽 $2\pi B$进行采样，其中 $m = 1, \ldots, M$。

假设成像区域中的一点 $\boldsymbol{y}_0$ 处存在一个色散点目标，其频率相关反射率为 $\varrho_0(\omega)$。信号从发射器/接收器发出后，传播到介质中，入射到色散点目标并发生散射。随后，在发射器/接收器处测量色散点目标产生的散射场。由发射器/接收器测得的散射场

是由位于 $\boldsymbol{x}_n$ 处的各向同性平频点源产生的

$$d_{mn} = \varrho_0(\omega_m)\frac{e^{\mathrm{i}2\omega_m|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_0|/c}}{(4\pi|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_0|)^2}, \quad m=1,\dots,M, \quad n=1,\dots,N. \tag{5}$$

矩阵 $D\in\mathbb{C}^{M\times N}$ 其元素由（5）给出，包含测量数据。

成像问题是确定指定成像区域内目标的位置及其频率相关反射率。下面我们将说明，通常无法恢复频率相关反射率。因此，我们试图恢复每个目标的雷达散射截面（RCS）。

在接下来的仿真中，我们采用基于 GOTCHA 数据集的系统参数 [14]。具体而言，我们设定 $R=3.55$基尔霍夫偏移和 $H=7.30$ 基尔霍夫偏移，因此 $L=\sqrt{H^2+R^2}=8.12$ 基尔霍夫偏移。直线飞行路径形成的合成孔径为 $a=0.13$ 基尔霍夫偏移。中心频率为 $\omega_0/(2\pi)=9.6$GHz，带宽为 $B=622$MHz。取 $c=3\times10^8$ m/s，可得中心波长为$\lambda_0=3.12$cm。成像区域位于地面高度 $z=0$。我们采用 $M=25$ 个等间隔频率对带宽进行采样，并采用 $N=32$ 个等间隔空间测量对合成孔径进行采样。

4. KM FOR A SINGLE DISPERSIVE POINT TARGET

令 $\boldsymbol{y}$ 表示成像区域中的一个点。我们考虑通过计算 KM 成像函数形成的图像，

$$I^{\mathrm{KM}}(\boldsymbol{y}) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} d_{mn}e^{-\mathrm{i}2\omega_m|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}|/c}. \tag{6}$$

注意，在（6）中，数据矩阵的元素通过与 $\boldsymbol{y}$ 相乘，反向传播至$e^{-\mathrm{i}2\omega_m|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}|/c}$。将这些结果按空间位置（对 n求和）和频率（对 m求和）进行累加。通过在一组点上计算此 KM 成像函数并绘制这些结果，即可生成成像区域内目标的图像。

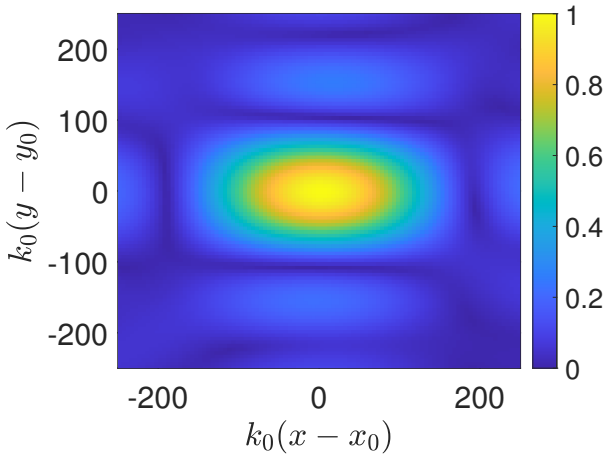


FIGURE 2. 在以目标位置（$500/k_0\times500/k_0$，x_0）为中心的 y_0成像区域上计算（k_0 6），其中 $k_0\alpha=1.4$ 表示中心波数。球体的反射率按 $n_{rel}=1.4$和 $=3.73$ 计算。随后添加测量噪声，使信噪比为 $=3.73$ dB。

在图 2 中，我们展示了对位于 $(k_0x_0,\ k_0y_0)$ 处的色散点目标计算 ($=(273.713,\ -346.167)$ 的结果，成像区域为 $500/k_0\times500/k_0$。球体的反射率计算为 $k_0\alpha=1.4$，且 $n_{rel}=1.4$。我们添加了测量噪声，使得信噪比为 $=3.73$ dB。图 2 所示图像 I^{KM} 按其最大值进行了归一化。该图像通过峰值表明目标的存在。峰值的位置可预测目标的位置。在远离峰值处，我们观察到成像伪影，表现为峰值的旁瓣。

我们最近提出了一种对基尔霍夫偏移（KM）的修改方法，可生成分辨率可调的高分辨率图像 [12]。令 $\tilde{I}^{\mathrm{KM}}$ 表示图 6 中的结果，并按其最大值进行归一化，如图 2所示。对基尔霍夫偏移（KM）的修改只需计算

$$I_\epsilon^{\mathrm{KM}} = \frac{\epsilon}{1-(1-\epsilon)\tilde{I}^{\mathrm{KM}}}, \tag{7}$$

其中 ϵ 表示一个用户定义参数。使用（7）生成的图像分辨率随 $\sqrt{\epsilon}$ 变化。

当我们使用图 2 所示的图像绘制 I_ϵ^{KM}，其中 $\epsilon = 10^{-4}$ 时，得到图 3 所示的图像。请注意，绘制的区域为 $20/k_0 \times 20/k_0$，比图 2 中绘制的区域小得多。这一结果表明，这种改进的 KM 方法能够以亚波长分辨率对目标成像。此外，由于参数 ϵ 是用户定义的，因此这种高分辨率是可调的。

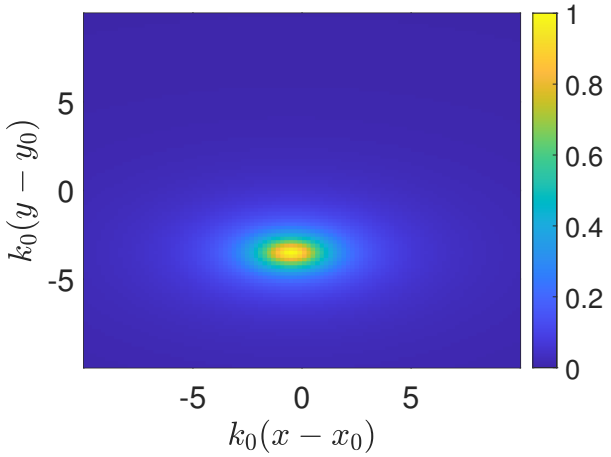


FIGURE 3. 将式（7）中的改进 KM 方法 $\epsilon = 10^{-4}$ 应用于图 2 所示的图像，并在以目标位置（x_0，y_0）为中心的 $20/k_0 \times 20/k_0$ 成像区域内进行评估。

4.1. 距离偏移。由于改进的 KM 方法具有高分辨率能力，我们能够观察到，预测的目标位置会偏离精确位置，尤其是在距离向上。图 3 所示图像的峰值位于 $(k_0\hat{}x, k_0\hat{}y) = (273.113, -349.770)$，而真实位置为 $(k_0x_0, k_0y_0) = (273.713, -346.167)$。在仿真中，我们发现，信噪比越高，横向坐标 x_0 就越精确。然而，距离坐标 y_0 仍然存在偏移。例如，当信噪比为 $= 13.73\,\mathrm{dB}$ 时，我们得到的预测目标位置为 $(k_0\hat{}x, k_0\hat{}y) = (273.713, -350.170)$；当信噪比为 $= 23.73\,\mathrm{dB}$ 时，预测目标位置为 $(k_0\hat{}x, k_0\hat{}y) = (273.713, -350.170)$。我们发现，目标预测距离的这一偏移会随尺寸参数 $k_0\alpha$以及用于生成频率相关反射率的相对折射率 n_{rel} 而变化。

为理解距离坐标发生偏移的原因，我们将（5）代入（6），得到

$$I^{\mathrm{KM}}(\boldsymbol{y}) = \sum_{m=1}^{M} \varrho_0(\omega_m) \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{\mathrm{i}2\omega_m(|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_0|-|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}|)/c}}{(4\pi|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_0|)^2}. \tag{8}$$

考虑一个坐标系，其原点位于成像区域的中心。空间测量的坐标为 $\boldsymbol{x}_n = (\xi_n, R, H)$，其中 $n = 1, \ldots, N$，且 $\xi_n = -a/2 + a(n-1)/(N-1)$。我们记 $\boldsymbol{y}_0 = (x_0, y_0, 0)$ 和 $\boldsymbol{y} = (x_0, y_0 + y, 0)$。令 θ 表示观测角（见图 1），使得 $R = L\sin\theta$ 且 $H = L\cos\theta$。在渐近极限 $L \to \infty$ 下，我们得到

$$|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_0| - |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}| = y\sin\theta + O(L^{-1}). \tag{9}$$

由此可得

$$I^{\mathrm{KM}} \sim \frac{N}{(4\pi L)^2} \sum_{m=1}^{M} \varrho_0(\omega_m) e^{\mathrm{i}2\omega_m y \sin\theta/c}, \tag{10}$$

在此渐近极限下。

Let

$$a(y) = \sum_{m=1}^{M} \varrho_m e^{\mathrm{i}2k_m y \sin\theta}, \tag{11}$$

其中 $\varrho_m = \varrho_0(\omega_m)$ 和 $k_m = \omega_m/c$。使用

$$k_m = k_0 + \frac{2\pi B}{c}\left(-\frac{1}{2} + \frac{m-1}{M-1}\right), \tag{12}$$

对于 $m = 1, \ldots, M,$，其中 k_0 表示中心波数，我们引入缩放变量 $y \sin\theta = 2\pi BY/c$，并改为考虑

$$a\left(\frac{2\pi B}{c\sin\theta} Y\right) = e^{\mathrm{i}2\kappa_0 Y} A(Y), \tag{13}$$

其中

$$A(Y) = \sum_{m=1}^{M} \varrho_m \exp\left[\mathrm{i}\left(-1 + 2\frac{m-1}{M-1}\right) Y\right], \tag{14}$$

且 $\kappa_0 = k_0 \sin\theta c/(2\pi B)$。

接下来，我们将用到以下恒等式

$$\sum_{m=r+1}^{M} \exp\left[\mathrm{i}\left(-1 + 2\frac{m-1}{M-1}\right) Y\right] = e^{\mathrm{i}rY/(M-1)} \Psi_r^M(Y). \tag{15}$$

其中

$$\Psi_r^M(Y) = \frac{\sin\left(\frac{M-r}{M-1}Y\right)}{\sin\left(\frac{Y}{M-1}\right)}. \tag{16}$$

函数 $\Psi_r^M(Y)$ 是实偶函数，并在 $Y = 0$ 上取得最大值 $M - r$。应用分部求和公式后，

$$\sum_{m=1}^{M} u_m v_m = u_1 \sum_{m=1}^{M} v_m - \sum_{r=1}^{M-1} (u_{r+1} - u_r) \sum_{m=r+1}^{M} v_m, \tag{17}$$

到（14），我们得到

$$A(Y) = \sum_{m=1}^{M} \Delta\varrho_m e^{\mathrm{i}(m-1)Y/(M-1)} \Psi_{m-1}^M(Y), \tag{18}$$

其中 $\Delta\varrho_m = \varrho_{m+1} - \varrho_m$ 和 $\varrho_0 \equiv 0$。由此可得

$$\begin{aligned} |A(Y)|^2 = \sum_{m=1}^{M} |\Delta\varrho_m|^2 (\Psi_{m-1}^M(Y))^2 + 2\sum_{m=1}^{M-1}\sum_{r=m+1}^{M} \left\{ \mathrm{Re}\left[\Delta\varrho_m^* \Delta\varrho_r\right] \cos\left(\frac{r-m}{M-1} Y\right) \Psi_{m-1}^M(Y) \Psi_{r-1}^M(Y) \right\} \\ - 2\sum_{m=1}^{M-1}\sum_{r=m+1}^{M} \left\{ \mathrm{Im}\left[\Delta\varrho_m^* \Delta\varrho_r\right] \sin\left(\frac{r-m}{M-1} Y\right) \Psi_{m-1}^M(Y) \Psi_{r-1}^M(Y) \right\}. \end{aligned} \tag{19}$$

注意，在（19）中，前两个求和关于 Y 是偶函数，而第三个求和关于 Y 是奇函数。第三个求和在距离偏移中起着关键作用。

为了估算 $|A(Y)|^2$ 达到最大值的位置，我们将（ Y 19）中三个求和里的函数在 附近展开，并保留至 $Y = 0$ 阶的项。结合这些结果，可得到 $O(Y^2)$ 的二次近似。通过求出该二次近似的临界点，我们发现该近似在 $|A(Y)|^2$处达到最大值，其中

$$\alpha_1 = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{r=m+1}^{M} \mathrm{Im}[\Delta\varrho_m \Delta\varrho_r](r-m)(M-m+1)(M-r+1), \tag{20}$$

and

$$\alpha_2 = \sum_{m=1}^{M} |\Delta\varrho_m|^2 \left[(M-m+1)^4 - (M-m+1)^2\right] + \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{r=m+1}^{M} \mathrm{Re}[\Delta\varrho_m^* \Delta\varrho_r] \left(M^2 + 2M - 3mr + m(2m-M-1) + r(2r-M-1)\right). \tag{21}$$

ˆ这一临界点 Y 给出了基尔霍夫偏移（KM）预测的目标位置距离偏移的估计值。图 4展示了数值确定的目标预测位置与该估计值的比较。此比较采用了相对折射率为 1.4 的球体的频率相关反射率，并考虑了不同的无量纲尺寸， $k_0\alpha$。

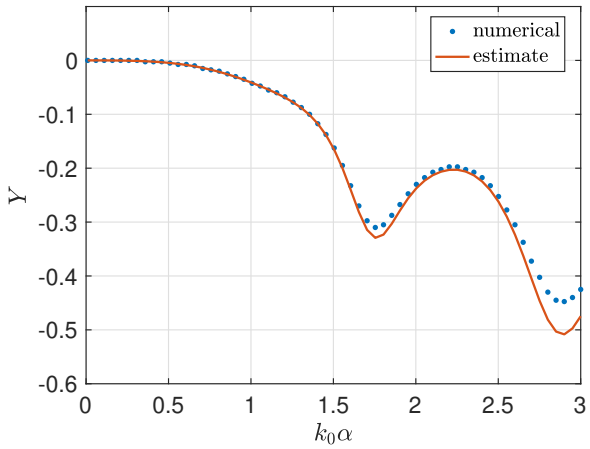


FIGURE 4. 在使用基尔霍夫偏移（KM）预测的目标距离坐标（数值结果）与通过计算估计值 Y （估计值）进行比较时，采用了由不同尺寸范围内的球体计算得到的反射率， $k_0\alpha$。

这些结果表明，该估计值能够准确反映球体尺寸在较大范围内的距离偏移变化趋势。然而，随着球体尺寸增大，该估计值的误差也会增大，尤其是在距离偏移发生振荡的区域。这些振荡可能是由大球体（$k_0\alpha > 1$）复杂的散射行为所致，例如米氏共振等现象。图 5 展示了在中心频率 ω_0 处计算的雷达散射截面（RCS），并以几何截面 $\sigma_g = \pi\alpha^2$ 归一化；所用球体满足 $n_{rel} = 1.4$ ，其尺寸范围与图 $k_0\alpha$ 中绘制的范围相同。请注意，图 4所示的距离偏移变化与图 4所示的雷达散射截面变化密切相关。由此可见，基尔霍夫偏移预测的目标距离向偏移，本质上与目标的基本散射特性密切相关。

4.2. **雷达散射截面**。 现在，我们寻求恢复 $\varrho(\omega_m)$，其中 $m = 1, \ldots, M$。假设我们已计算出（6），并生成了一幅图像，该图像识别出一个目标及其预测位置ˆ$\boldsymbol{y}_0$。我们计算

$$\phi_m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} d_{mn} (4\pi|\boldsymbol{x}_n - \hat{\boldsymbol{y}}_0|)^2 e^{-\mathrm{i}2\omega_m|\boldsymbol{x}_n - \hat{\boldsymbol{y}}_0|/c}, \tag{22}$$

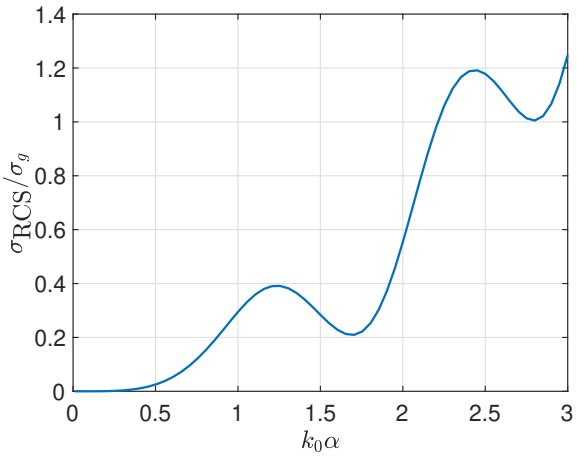


FIGURE 5. 在中心频率 ω_0 处评估的、 σ_{RCS} 以几何截面 $\sigma_g = \pi\alpha^2$ 归一化的雷达散射截面 σ_{RCS}，对于具有 $n_{rel} = 1.4$ 、球体尺寸范围为 $k_0\alpha$的球体。

其中 $m = 1, \ldots, M$。将（5）代入（22）得到

$$\phi_m = \varrho_0(\omega_m)\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{|\boldsymbol{x}_n - \hat{\boldsymbol{y}}_0|^2}{|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_0|^2}e^{\mathrm{i}2\omega_m \Delta\tau_n}, \tag{23}$$

其中 $\Delta\tau_n = (|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_0| - |\boldsymbol{x}_n - \hat{\boldsymbol{y}}_0|)/c$。

在渐近极限 $L \to \infty$下，我们使用上文所用的相同展开，得到

$$\phi_m \sim \varrho_0(\omega_m)e^{\mathrm{i}2\omega_m \Delta y \sin\theta/c}, \tag{24}$$

对于 $m = 1, \ldots\ldots, M$。其中， Δy 表示与预测位置 $\hat{\boldsymbol{y}}_0$相关的距离偏移。由于距离偏移 Δy未知，我们无法从上述表达式中移除 $e^{\mathrm{i}2\omega_m \Delta y \sin\theta/c}$这一因子。因此，我们无法恢复 $\varrho_0(\omega_m)$的复数值。然而，我们发现

$$|\phi_m|^2 \sim |\varrho_0(\omega_m)|^2. \tag{25}$$

因此，我们恢复了 通过评估 KM 给出的目标预测位置处的估计雷达散射截面

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{RCS}}(\omega_m) = 4\pi|\phi_m|^2. \tag{26}$$

在图6 中，我们使用（26）对与图2 和3中相同的数据计算估计雷达散射截面。为估计 $\hat{\boldsymbol{y}}_0$ ，我们采用绘制这些图像时所使用的网格位置，其中 I_ϵ^{KM}达到最大值，即（$\hat{x}$, $\hat{y}$） = （1.357, −1.738）厘米；而真实位置为（x_0, y_0） = （1.360, −1.720）厘米。为进行比较，我们绘出了根据反射率计算得到的精确雷达散射截面。估计雷达散射截面与精确雷达散射截面无法区分，相对误差约为 10^{-4}。

我们考虑这样一个目标：其反射率根据尺寸为 $k_0\alpha = 2.8$ 且相对折射率为 $n_{rel} = 1.4$的球体计算得到。我们加入了测量噪声，使得信噪比为 $= 3.72$ dB。通过寻找 I_ϵ^{KM}达到最大值的网格点，得到的预测位置为（$\hat{x}$, $\hat{y}$） = （1.358, −1.797）厘米。我们使用该目标预测位置，通过计算（26）来估计雷达散射截面。结果绘于图7中。请注意，该问题的雷达散射截面与图6所示的雷达散射截面有明显差异。尽管如此，估计雷达散射截面仍然准确，相对误差约为 10^{-5}。

5. 多个目标

现在假设成像区域包含位于 $\boldsymbol{y}_q$ 的 Q 个色散点目标，其反射率为 $\varrho_q(\omega)$，其中 $q = 1, \ldots, Q$。假设这些目标独立散射，测量数据可建模为

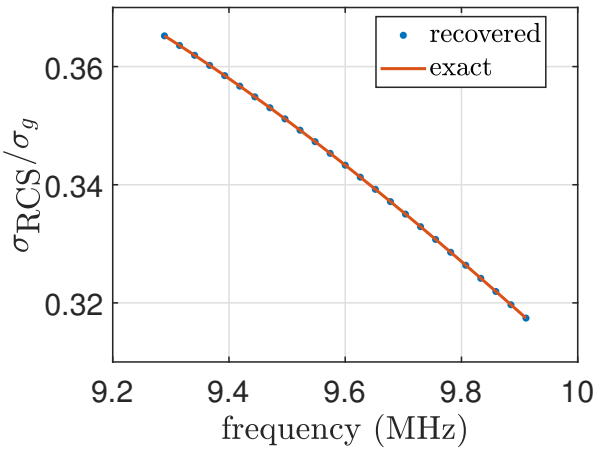


FIGURE 6. 使用式（26）得到的恢复雷达散射截面，并按几何截面进行归一化；对于图 $\sigma_g = \pi\alpha^2$ 中使用的反射率，分别对应 2 和 3 中的 $k_0\alpha = 1.4$ 和 $n_{rel} = 1.4$。要计算 $\hat{}\sigma_{\mathrm{RCS}}(\omega)$，我们通过找出$\boldsymbol{y}_0$ 在用于绘图的网格上I_ϵ^{KM}达到最大值的位置来估算 $\hat{}$

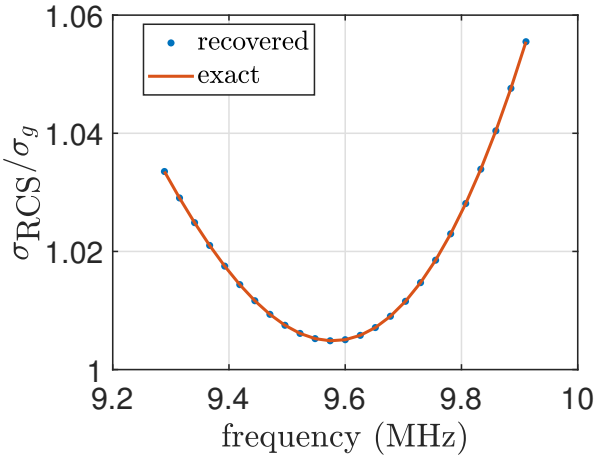


FIGURE 7. 使用式（26）得到的恢复雷达散射截面，并按几何截面进行归一化；对于对应于 $\sigma_g = \pi\alpha^2$ 的反射率，分别对应 $k_0\alpha = 2.8$ 和 $n_{rel} = 1.4$。要计算 $\hat{}\sigma_{\mathrm{RCS}}(\omega)$，我们通过找出$\boldsymbol{y}_0$ 在用于绘图的网格上 I_ϵ^{KM}达到最大值的位置来估算 $\hat{}$

根据

$$d_{mn} = \sum_{q=1}^{Q} \varrho_q(\omega_m) \frac{e^{\mathrm{i}2\omega_m|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_q|/c}}{(4\pi|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_q|)^2}. \tag{27}$$

根据单个目标的结果，我们预计，计算式（6）中给出的 KM 成像函数能够识别并定位目标，前提是这些目标彼此间距足够大；这里的间距是相对于 KM 对单个目标产生的分辨率而言的。

在图8 中，我们展示了在包含三个不同色散点目标的成像区域上计算（6）的结果。第一个目标位于（k_0x_1，k_0y_1，k_0z_1）=（140.882，40.252，0）。其反射率ϱ_1（ω）根据尺寸为 $k_0\alpha_1 = 0.8$ 、相对折射率为 $n_{rel,\ 1} = 1.8$的球体计算得出。第二个目标位于（k_0x_2，k_0y_2，k_0z_2）=（−40.252，−140.882，0）。其反射率 ϱ_2（ω）根据尺寸为 $k_0\alpha_1 = 1.2$ 、相对折射率为$n_{rel,\ 2} = 1.4$的球体计算得出。第三个目标位于

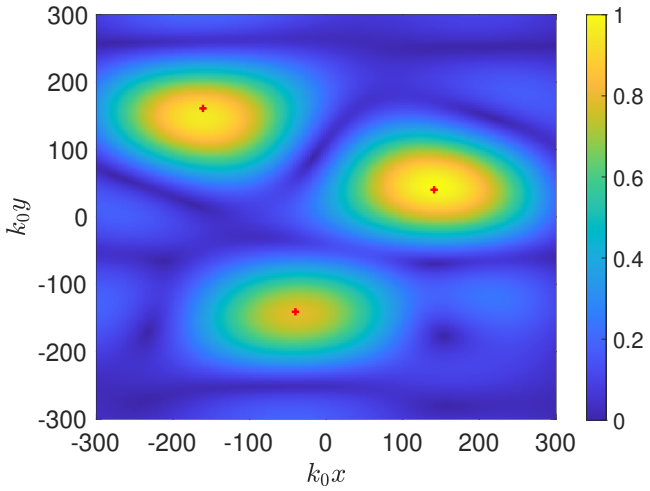


FIGURE 8. 通过对（6）进行评估，利用 KM 生成的图像。成像区域内包含 3 个色散点目标，其精确位置以红色“+”符号标出。

位于（k_0x_3，k_0y_3，k_0z_3）=（−161.008，161.008，0）。其反射率 $\varrho_3(\omega)$ 根据尺寸为$k_0\alpha_3 = 1.8$、相对折射率为$n_{rel,\ 3} = 1.4$。在数据中加入了测量噪声，使信噪比为 = 22.84 分贝。图8 显示，三个目标附近出现了三个明显的峰值，其位置以红色“+”符号标出。

为了获得各个目标的高分辨率图像，我们考虑围绕图 8 所示各峰值的 $50/k_0 \times 50/k_0$ 尺寸子区域。我们对每个子区域内的图像部分进行归一化，使该子区域内的最大值为 1。然后，我们应用（7），其中 $\epsilon = 10^{-4}$。结果如图 9 所示。

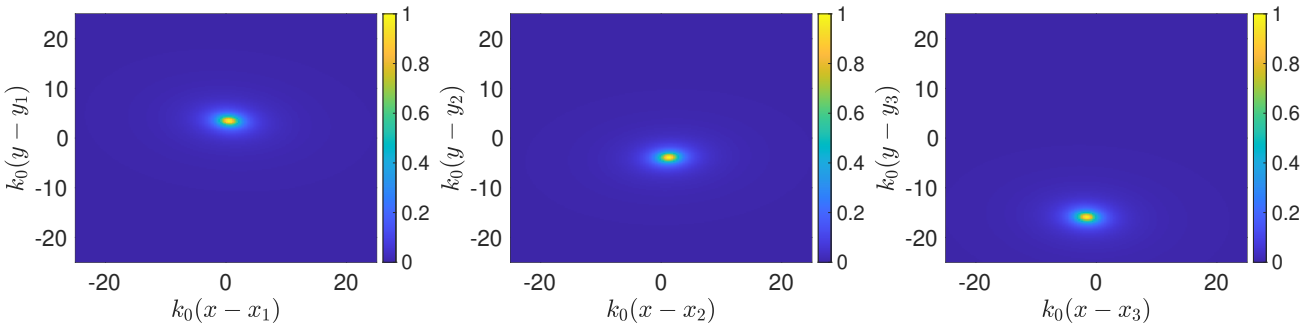


FIGURE 9. 使用（7）中给出的修正 KM 生成的图像，显示 $50/k_0 \times 50/k_0$ 以各精确目标位置为中心的子区域。左图对应目标 1，中图对应目标 2，右图对应目标 3。

修正 KM 图像能够生成目标的高分辨率图像。然而，我们观察到，预测目标位置相对于精确目标位置，在距离向和方位向上都发生了偏移。目标 1 的预测位置为（$k_0\hat{}x_1, k_0\hat{}y_1$）=（141.382, 43.502），目标 2 的预测位置为（$k_0\hat{}x_2, k_0\hat{}y_2$）=（−39.002, −144.882），目标 3 的预测位置为（$k_0\hat{}x_3, k_0\hat{}y_3$）=（−162.758, 145.008）。这些预测位置相对于精确位置的偏移约为 $2\lambda_0$。

为了理解为什么预测目标位置在距离向和方位向上都会发生这些偏移，假设我们在6上计算 $\boldsymbol{y}_1$，也就是目标一的精确位置。结果为

$$I^{\mathrm{KM}}(\boldsymbol{y}_1) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{\varrho_1(\omega_m)}{(4\pi|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_1|)^2} + \sum_{q=2}^{Q}\varrho_q(\omega_m)\frac{|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_1|^2}{|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_q|^2}e^{\mathrm{i}2\omega_m\Delta\tau^n_{1q}}\right], \tag{28}$$

其中 $\Delta\tau_{pq}^n=(|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_q|-|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_p|)/c$。从这一结果可以看出，除了目标 1 的贡献外，所有其他目标也都带来了较小但不可忽略的贡献，每个贡献都带有与 $\Delta\tau_q^n$、p 相关的相位。因此，在计算 $|I^{\mathrm{KM}}|$ 时，这些相位会相互混合，从而导致预测目标位置发生偏移。

尽管目标的预测位置并不精确，我们仍希望恢复每个目标的雷达散射截面。令 $\hat{\boldsymbol{y}}_p$ 表示目标 p 的近似位置。令

$$\phi_m(\hat{\boldsymbol{y}}_p)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}d_{mn}(4\pi|\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{y}}_p|)^2e^{-\mathrm{i}2\omega_m|\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{y}}_p|/c}. \tag{29}$$

将（27）代入此表达式，得到

$$\phi_m(\hat{\boldsymbol{y}}_p)=\sum_{q=1}^{Q}a_{pq}(\omega_m)\varrho_q(\omega_m), \tag{30}$$

其中

$$a_{pq}(\omega_m)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{|\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{y}}_p|^2}{|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_q|^2}e^{\mathrm{i}2\omega_m\Delta\hat{\tau}_{q,p}^n}, \tag{31}$$

且 $\Delta\hat{\tau}_{pq}^n=(|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_q|-|\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{y}}_p|)/c$。（30）是关于未知反射率的线性方程组$\varrho_q(\omega_m)$。尽管 $a_{pq}(\omega_m)$ 使用了预测目标位置 $\hat{\boldsymbol{y}}_p$，但它使用的是精确目标位置 $\boldsymbol{y}_q$。由于我们无法获得这些精确目标位置，因此转而考虑以下线性方程组：

$$\phi_m(\hat{\boldsymbol{y}}_p)=\sum_{q=1}^{Q}\tilde{a}_{pq}(\omega_m)\tilde{\varrho}_q(\omega_m), \tag{32}$$

其中

$$\tilde{a}_{pq}(\omega_m)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{|\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{y}}_p|^2}{|\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{y}}_q|^2}e^{\mathrm{i}2\omega_m\Delta\tilde{\tau}_{q,p}^n}, \tag{33}$$

其中 $\Delta\tilde{\tau}_{pq}^n=(|\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{y}}_q|-|\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{y}}_p|)/c$，并且

$$\tilde{\varrho}_q(\omega_m)=\varrho_q(\omega_m)\frac{|\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{y}}_q|^2}{|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_q|^2}e^{\mathrm{i}\omega_m(\Delta\tau_{pq}^n-\Delta\hat{\tau}_{pq}^n)}. \tag{34}$$

当预测目标位置彼此接近时，我们预期 $|\boldsymbol{x}_n-\hat{\boldsymbol{y}}_q|^2/|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_q|^2\approx 1$。相位差 $\Delta\tau_{pq}^n-\Delta\hat{\tau}_{pq}^n$ 可能很显著，因此我们预期无法从 $\tilde{\varrho}_q(\omega_m)$ 中恢复 $\varrho_q(\omega_m)$。然而，当 $L\to\infty$ 时，在渐近极限下，我们发现第 q 个目标的雷达散射截面为

$$\sigma_{\mathrm{RCS},q}(\omega_m)=4\pi|\tilde{\varrho}_q(\omega_m)|^2+O(L^{-1}). \tag{35}$$

因此，我们利用这一主导行为来估计这些目标的雷达散射截面。

总而言之，对于成像区域内识别出的每个目标，我们采用以下步骤估计其雷达散射截面。

（1）在成像区域内计算（6），以识别目标。（2）在子区域内计算（7），以估计各个目标的位置。（3）求解线性方程组（32），并获得 $\tilde{\varrho}_q(\omega_m)$，对应于 $q=1$、……、Q 以及 $m=1$、……、M。（4）计算（35），以获得每个 Q 目标的雷达散射截面估计值。

图8和图9所示的三个目标的恢复雷达散射截面结果见图10。这些结果比单目标情况下得到的结果噪声更大，但其精度仍足以帮助我们表征由不同材料/尺寸构成的目标。随着数据的信噪比降低，目标位置的恢复精度保持不变，但恢复的雷达散射截面噪声更大。对于信噪比为 $=12.84\,\mathrm{dB}$ 的数据，目标1的预测位置为 $(k_0\hat{x}_1,k_0\hat{y}_1)=(141.632,43.002)$，目标2为 $(k_0\hat{x}_2,k_0\hat{y}_2)=(-39.502,-144.632)$，目标3为 $(k_0\hat{x}_3,k_0\hat{y}_3)=(-163.508,145.508)$，恢复的雷达散射截面如图11所示。

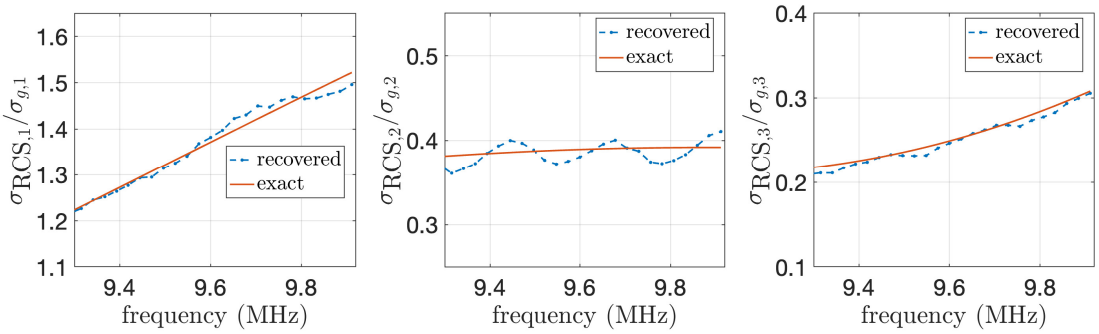


FIGURE 10. 三个目标的恢复的雷达散射截面，分别以对应的几何截面归一化；这三个目标的位置从图7中恢复。数据的信噪比为 = 22.84 dB。左图对应目标 1，中图对应目标 2，右图对应目标 3。

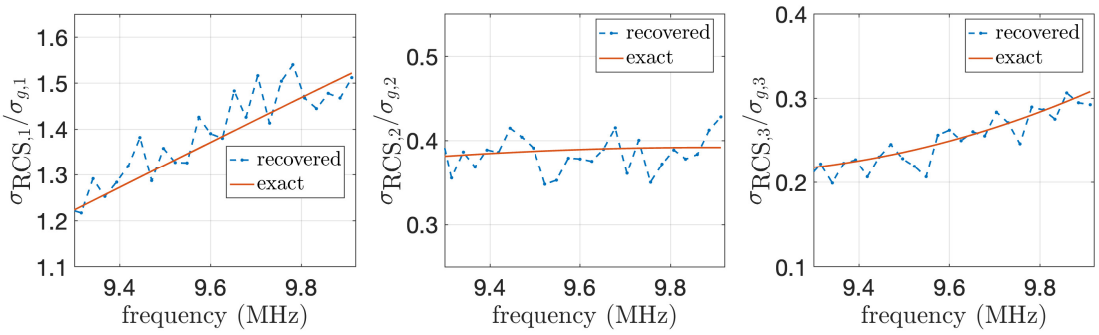


FIGURE 11. 三个目标的恢复的雷达散射截面，分别以对应的几何截面归一化。数据的信噪比为 = 12.84 dB。左图对应目标 1，中图对应目标 2，右图对应目标 3。

我们从图 11 中观察到，恢复的雷达散射截面因测量噪声而发生振荡。根据图 12所示结果，使用二次回归可以得到平滑估计。平滑后的结果有效地捕捉了各个目标雷达散射截面的变化特征。

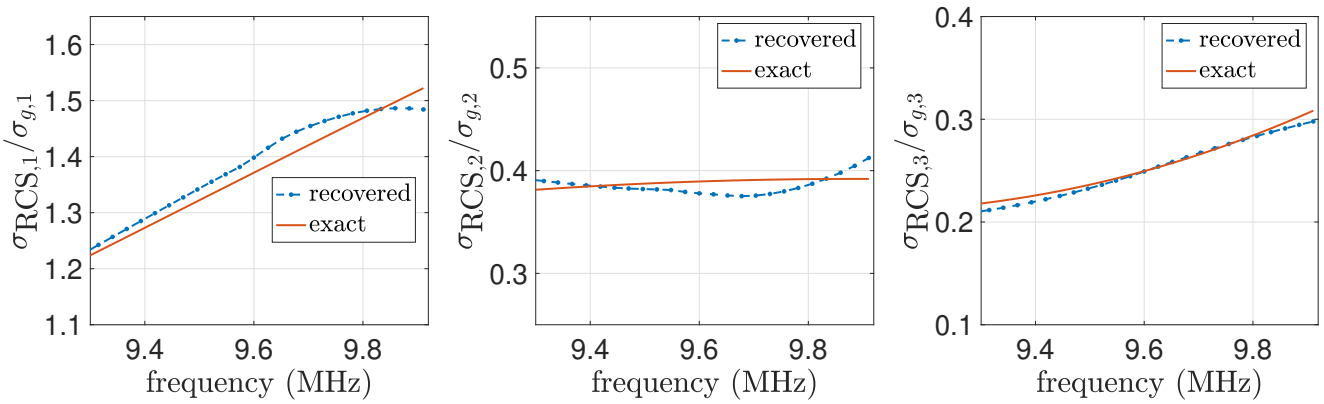


FIGURE 12. 三个目标的恢复的雷达散射截面，分别以对应的几何截面归一化。数据的信噪比为 = 12.84 dB。对图9所示结果采用二次回归进行平滑。左图对应目标 1，中图对应目标 2，右图对应目标 3。

6. Conclusions

我们引入了一种色散点目标模型，其中反射率随频率变化。我们利用介电球的标量波散射来模拟不同尺寸和材料的目标。随后，我们应用KM及其近期改进方法，根据SAR测量数据获得色散点目标的高分辨率图像。对于单个色散点目标，我们观察到目标在距离坐标上的预测位置发生了偏移。我们根据频率相关反射率计算出了该距离偏移的精确估计值。尽管单个色散点目标的预测位置存在距离偏移，我们仍能利用该预测恢复其雷达散射截面（RCS）。

当我们将KM及其改进方法应用于包含多个色散点目标的成像区域时，发现只要这些目标彼此间隔足够远（相对于KM的分辨率而言），就能够对每个目标位置成像。我们证明了，对隔离单个目标的子区域应用KM改进方法是有效的。这些单个目标的高分辨率图像显示，目标的预测位置在距离向和方位向上均发生了偏移。为了恢复每个目标的RCS，我们利用预测位置建立了一个线性方程组。数值结果表明，多个目标的RCS恢复对噪声更加敏感。对这些RCS结果进行平滑处理后，我们得到了良好的近似结果，能够据此区分不同目标之间的定性差异。

通过引入色散点目标模型并开发色散点目标成像方法，我们为目标分类开辟了新的可能。事实上，通过恢复随频率变化的雷达散射截面，我们或许能够区分具有不同特征的目标，例如尺寸或材料特性。我们认为，除了目标检测和定位之外，目标分类也为各种合成孔径雷达成像应用提供了实用价值。

Appendix A. Scalar wave scattering by a sphere

我们简要介绍球体的标量波散射，并说明如何根据这一问题生成不同的频率相关反射率。对于固定频率，令 k_0 表示半径为 α 的球体外部的波数，令 $k_1 = k_0 n_{rel}$ 表示该球体内部的波数。平面波沿方向 $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ 入射到球体上，我们将其记为 U_i。球体外部的散射场为

$$U_s(R, \hat{\boldsymbol{o}}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n^{(1)}(k_0 R) P_n(\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{o}}), \tag{36}$$

其中，$h_n^{(1)}$ 表示阶数为 n 的第一类球汉克尔函数，P_n 表示阶数为 n 的勒让德多项式。球体内部的场为

$$U_{int}(R, \hat{\boldsymbol{o}}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n j_n(k_0 R) P_n(\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{o}}), \tag{37}$$

其中 j_n 表示球贝塞尔函数。我们通过要求 $U_i + U_s = U_{int}$ 和 $\partial_r U_i + \partial_r U_s = \partial_r U_{int}$ 在 $R = \alpha$ 上，确定展开系数 a_n 和 b_n。我们利用勒让德多项式的正交性质，将级数截断于 $n = 32$，从而计算数值近似。利用渐近行为 $h_n^{(1)}(z) \sim \mathrm{i}^{-n-1} z^{-1} e^{\mathrm{i}z}$ 当 $z \to \infty$ 时，我们得到

$$U_s(R, \hat{\boldsymbol{o}}) \sim \left[\frac{1}{k_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{i}^{-n-1} P_n(\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{o}}) \right] \frac{e^{\mathrm{i}k_0 R}}{R}, \tag{38}$$

在渐近极限下，$R \to \infty$。上述表达式中括号内的项给出了散射振幅 f。接下来，我们使用 $P_n(-1) = (-1)^n$ 来确定

$$f(\hat{\boldsymbol{\imath}}, -\hat{\boldsymbol{\imath}}) = \frac{1}{k_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathrm{i}^{-n-1} a_n. \tag{39}$$

我们通过截断级数来近似这个散射振幅，方法与确定展开系数时相同。该结果用作我们的频率相关反射率。通过指定半径 α 和反射指数 n_{rel}的不同取值，我们计算出不同的反射率。

Acknowlegments

本研究得到美国空军科学研究办公室 FA9550-21-1-0196号资助项目的支持。A. D. Kim 也感谢美国国家科学基金会 DMS-1840265 号资助项目的支持。

References

[1] M. Cheney，《合成孔径雷达数学教程》，*SIAM Review*，第 43 卷，第 2 期，第 301–312 页，2001 年。[2] I. G. Cumming 和 F. H. Wong，*Digital Processing of Synthetic Aperture Radar Data: Algorithms and Implementation*。Artech House，波士顿，马萨诸塞州，2005 年。[3] M. Cheney 和 B. Borden，*Fundamentals of Radar Imaging*。工业与应用数学学会，2009 年，第 79 卷。[4] A. Moreira、P. Prats-Iraola、M. Younis、G. Krieger、I. Hajnsek 和 K. P. Papathanassiou，《合成孔径雷达教程》，*IEEE Geosci. Remote Sens. Mag.*，第 1 卷，第 1 期，第 6–43 页，2013 年。[5] P. Sotirelis、J. T. Parker、M. Fu、X. Hu 和 R. Albanese，《利用合成孔径雷达进行材料识别的研究》，载于 *Radar Conference* 2012 0112 0115 *2013 IEEE*，，第 – 页。[6] R. A. Albanese 和 R. L. Medina，《材料识别合成孔径雷达：迈向实现能力的进展》，*Inverse Probl.*，第 29 卷，第 054001 页，2013 年。[7] L. Borcea、M. Moscoso、G. Papanicolaou 和 C. Tsogka，《方向与频率相关反射率的合成孔径成像》，*SIAM J. Imaging Sci.*，第 9 卷，第 1 期，第 52–81 页，2016 年。[8] M. Cheney，《利用合成孔径雷达对频率相关反射率成像》，*Inverse Probl.* 29， 054002, ，第 卷，第 页。2013
[9] P. Sotirelis、J. Parker、X. Hu、M. Cheney 和 M. Ferrara，《频率相关反射率图像重建》，载于 *Algorithms for Synthetic Aperture Radar Imagery XX*，E. Zelnio 和 F. D. Garber 编，第 8746 卷，国际光学与光子学学会。SPIE，2013， 874602 [ ] 10 1117 12 2020647 第 页。在线。网
[10] *Inverse Probl.* 35， 085005, 2019 址：https://doi.org/ 。/ 。M. Gilman 和 S. Tsynkov，《合成孔径雷达中延迟目标响应的探测》，，第 卷，第 页。[11] ——，《合成孔径雷达中色散目标的散度度量与检测性能》，*Radio Science*，第 56 卷，第 1 期，第 e2019RS007011 页，2021 年。[12] A. D. Kim 和 C. Tsogka，《可调谐高分辨率合成孔径雷达成像》，*Radio Science*，第 57 卷，第 11 期，第 e2022RS007572 页，2022 年。[13] A. Ishimaru，*Wave Propagation and Scattering in Random Media*。Wiley-IEEE出版社，1997 年。[14] C. H. Casteel Jr、L. A. Gorham、M. J. Minardi、S. M. Scarborough、K. D. Naidu 和 U. K. Majumder，《针对从城市环境体数据集中目标的 2 3 *Algorithms for Synthetic* D/ D 成像的挑战问题》，载于 ，第 卷。国际光学与光子学学会，第 D 页。*Aperture Radar Imagery XIV* 6568 2007， 65680

Department of Applied Mathematics, University of California, Merced, 5200 North Lake Road, Merced, CA 95343, USA*Email address*: adkim@ucmerced.edu, ctsogka@ucmerced.edu