二范畴结构的不动点算子

Zeinab Galal,
LIP6，索邦大学

arXiv:2303.03440v2 [cs.LO] 6 Jun 2023

摘要——不动点算子是研究通过归纳（例如列表、树）或余归纳（例如流）得到的递归程序和数据类型的工具。借助带不动点的范畴这一概念，人们对其进行了范畴论处理。Plotkin 和 Simpson 的一条定理刻画了满足关于双自由代数的某些条件的范畴中不动点算子的存在性与唯一性，并重新得到域理论中的标准范畴 Cppo（ω-完备尖点偏序集及连续函数）以及线性逻辑中的关系模型。

我们给出了这一结果的范畴化，并发展了二范畴不动点算子的理论；二维框架使我们能够对具有（余）归纳原理的语言的执行步骤进行建模。我们重新得到自函子的初始代数和终余代数这一标准范畴构造，以及广义物种和多项式函子的不动点。

引言

不动点算子在计算机科学的众多领域中都发挥着重要作用，可用于建模无限计算，包括程序设计语言的设计、验证、模型检验、数据库、并发理论、类型理论等。程序 t 的不动点是一个输入 x，使得 x 与 t之间存在一个计算序列（x）。例如，无类型 λ-演算的一个基本性质是不动点组合子的存在性，也就是说，存在一些项 Y，使得对于任意 λ-项 t，都存在一条归约路径连接项 Yt 与 t（Yt）。

从集合论观点来看，自映射 $f : A \to A$ 的不动点的标准概念，是指满足 $f(x) = x$ 的元素 $x \in A$；这一概念通过带不动点算子的范畴 [1]公理化。然而，目前尚无范畴不动点算子的概念能够兼顾计算归约步骤，而不将它们简化为严格相等。

本文旨在二维框架中明确建模带不动点语言的归约，并研究其相容性，也就是程序计算步骤所满足的方程。本文属于计算模型范畴化这一研究方向：通过用更丰富的范畴结构取代类型为集合或预序的语义，以确立更强的数学不变量。

一维范畴由对象和可复合的态射构成。我们可以通过引入 2-范畴或双范畴的概念，来考虑额外的一个维度。这类结构包含对象、可复合的 1-态射，以及可用两种不同方式复合并满足相容性条件的 2-态射。这些 2-态射被视为 1-态射之间的态射。使用双维范畴结构对计算建模时，我们可以将程序执行步骤作为基本对象来研究，因为它们会成为显式的 2-态射，携带有关程序化简的信息。这种方法已广泛应用于并发、博弈语义、类型理论和高维重写等领域 [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10]。

将预序语义推广到更丰富的范畴语义时，最小不动点变为初始代数，最大不动点则变为终余代数。在这两种情况下，不动点的严格等式 $t(x) = x$ 如今都由显式同构表示

$$t(x) \xrightarrow{\text{algebra}} x \qquad x \xrightarrow{\text{coalgebra}} t(x)$$

从而捕捉不动点约简的动态特性。初始代数对应于递归定义，并以归纳作为逻辑推理原则。它们通常用于通过构造子操作为有限数据类型（如有限列表和树）建模。

与之对偶，终余代数是共递归和余归纳的对应形式，其中结构通过析构子或观察子操作来描述。如今，终余代数已广泛应用于计算机科学，用于为具有循环或非终止行为的基于状态的系统（自动机、迁移系统、网络动态等）建模。范畴余代数框架也是研究双模拟等价和轨迹等价等概念的标准工具。它还被用于函数式编程，为 Haskell 等语言中的惰性数据类型建模，也用于在 Coq 和 Agda 等证明助手中为反应式程序建模。

初始代数与终余代数因极限-余极限一致性论证而重合的情形，也已被研究用于求解含有混合变差变量的方程（例如用于 λ-演算模型的自反对象 [11]）。这些代数被称为双自由代数，它们提供了一个使归纳论证与余归纳论证等价的框架。该领域中 Plotkin 和 Simpson 的一项重要结果表明，只要满足关于双自由代数的某些条件，我们就能得到 1-范畴 [1] 上唯一的一致不动点算子的存在性。

虽然使用初始代数或终余代数语义来建模无限计算，已成为计算机科学中广为确立的传统，但针对 2-范畴结构中的不动点算子，还没有相应的公理化理论。本文旨在发展这一理论。要公理化二维不动点算子的概念，主要难点在于理解重写2-态射应满足哪些公理和相容性。我们既需要

确保这些等式是正确的，即它们在具体模型中成立；也需要完备性，即确保我们已经列出了所有等式。

我们分两步进行：首先，我们将 Plotkin-Simpson 定理中受限的情形范畴化。该定理刻画了 1-范畴存在唯一一致不动点算子的条件，由此我们提取出 2-范畴伪不动点算子的公理化描述。这些算子构成一个范畴，而不动点算子的唯一性则被可缩性这一性质取代：任意两个不动点算子之间都存在唯一的同构。第二步是将其推广到不动点不唯一的模型中，以验证我们的公理化描述依然成立。我们选择这种方法，是因为 Plotkin-Simpson 的证明利用双自由代数显式构造了一个典范不动点算子，然后运用不动点公理证明它确实是唯一的。在二维情形中，伪双自由代数使我们能够构造一个典范伪不动点算子；为了获得可缩性，我们需要对结构约化 2-态射施加某些相干方程，这也为一般伪不动点算子的公理化提供了指引。

相关工作

递归域理论的范畴化有着悠久的历史，相关工作包括 Lambek、Freyd、Lehmann、Adamek、Taylor、Fiore、Winskel 和 Cattani 的研究 [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18]。本文主要采用 Cattani、Fiore 和 Winskel 的研究成果：他们将富化范畴中代数紧范畴的概念推广到富化双范畴，并证明了这一环境下的极限-余极限重合定理，且将其应用于并发的预层模型 [17], [18]。从句法角度看，Pitts 提出了一种用于不动点的候选二维类型理论，可用于证明我们所定义的伪不动点算子的相干定理 [19]。

Ponto 和 Shulman 也从不同方向研究了双范畴中不动点与迹概念的范畴化 [20], [21]。他们考察 1-胞 $f : A \to B$ 的自 2-胞$\alpha : f \Rightarrow f$ 的迹；而在我们的情形中，我们仍希望计算自 1-胞的迹或不动点，但允许显式的重写 2- 胞。我们旨在未来的工作中探究这两种方法在笛卡尔闭环境下是否可以相互比较。

论文结构

- 我们首先在第 I 节回顾 1-范畴不动点算子的标准理论，并举出域理论和线性逻辑中的例子，这些例子都可以由 Plotkin-Simpson 定理导出。
- 在第 II 节，我们给出带有一致性和 dinat 自然性公理的 2-范畴伪不动点算子的定义。
- 我们将在第三节证明 Plotkin–Simpson 定理在 2-范畴中的一个推广，其中伪不动点算子现在构成一个范畴，而不动点算子的唯一性则被可缩性取代。
- 我们在第五节展示，如何在众所周知的 2-范畴模型中验证我们在第 II 节提出的 2-范畴不动点概念。

I. 1-范畴的不动点算子

定义 I.1. 设 $\mathbb{D}$ 是一个具有终对象 1 的范畴，在 $\mathbb{D}$ 上的不动点算子是由 $\mathbb{D}$ 的对象 A 索引的函数族 $(-)^* : \mathbb{D}(A, A) \to \mathbb{D}(1, A)$，并满足对所有态射 $f : A \to A$，

$$f^* = ff^*. \tag{fix}$$

我们还可以要求其他公理，例如一致性和二自然性；这些公理通常在具体模型中成立，并可用于刻画不动点算子的唯一性性质 [22]。我们也可以考虑参数化公理，以建立与带迹幺半范畴的联系 [23]，但参数化情形留待配套论文讨论。

对于具有不动点的范畴，一致性原理（也称 Plotkin 公理）是相对于一个由“严格映射”构成的子范畴而言的；它用于在不依赖序论论证的情况下唯一刻画不动点算子 [24],[25]。对于域类结构，严格映射通常是保底元的映射，而一般映射只要求是 Scott 连续的。另一种做法是用线性映射代替严格映射，也就是说，考虑与所有上确界（而不仅仅是有向上确界）交换的映射；这类映射是不动点线性逻辑模型中的典型例子。Freyd 还研究了严格映射子范畴为反射子范畴的情形 [26]。

定义 I.2. 设 $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ 是带有终对象的范畴，且 $J : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 是一个保终对象的对象恒等函子。

- 若不动点算子 $(-)^*$ 定义在 $\mathbb{D}$ 上，且对于每个 $s : A \to B$（属于 $\mathbb{C}$）以及 $f : A \to A, g : B \to B$（属于 $\mathbb{D}$），都有：则称它关于 J 一致：

$$J(s)f = gJ(s) \quad \text{implies} \quad J(s)f^* = g^*. \tag{unif}$$

- 若不动点算子 $(-)^*$ 定义在 $\mathbb{D}$ 上，且对于每个$f : A \to B$ 和属于 $\mathbb{D}$ 的 $g : B \to A$，都有：则称其为 dinatural：

$$(fg)^* = f(gf)^*. \tag{dinat}$$

注 1. 实际上，我们也可以考虑用于 $J : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 的对象双射函子，但为了使记号更简洁，我们仅考虑对象恒等函子。

如引言所述，我们的方法是对 Plotkin-Simpson 定理进行范畴化。该定理刻画了由满足关于双自由代数的某些条件的余单子之 Kleisli 范畴构成的 1-范畴中，不动点算子的存在性和唯一性 [1]。

回顾一下，对于一个自函子 $T : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$，双自由 T-代数（也称为二代数、紧代数或自由双代数）是一个初始 T-代数 $(A, a : TA \to A)$，且 a的逆是一个终结 T-余代数 $(A, a^{-1} : A \to TA)$。

定理 I.3 (Plotkin-Simpson [1])。设 $\mathbb{C}$ 是一个配备了余单子 (T,δ,ε) 和终对象的范畴。我们用 $\mathbb{D}$ 表示余 Kleisli 范畴 $\mathbb{C}_T$，用 $J:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ 表示由余单子伴随诱导的自由函子。

1）如果自函子 T 有双自由代数，那么 $\mathbb{D}$ 有唯一的关于 J的一致不动点算子。2）如果 $\mathbb{C}$ 是笛卡尔的，并且自函子 TT 有双自由代数，那么 $\mathbb{D}$ 有唯一的关于J的一致二自然不动点算子。

接下来，我们将介绍一套通用方法，在适当的预序富化环境中为自函子构造双自由代数，以此说明第五节中维度 2 的推广。

我们用 Cpo 表示这样一个范畴：其对象是 ω-完备偏序，其态射是 Scott 连续函数（即保持 ω-链余极限的单调映射）。若将对象限制为带基点 cpo（具有底元素–），则将这个子范畴记为 Cppo。我们还可以进一步将态射限制为严格的 Scott 连续函数（即保持底元），并用 $\mathbf{Cppo}_\perp$ 表示带基点 cpo 与严格 Scott 连续函数构成的范畴。我们关注 $\mathbf{Cppo}_\perp$-富化范畴，因为正如下面将看到的，这类范畴为计算双自由代数提供了良好的环境。具体而言，若一个范畴 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbf{Cppo}_\perp$-富化的，则每个同态集 $\mathbb{C}(A,B)$都是带底元素–的 cpo，且复合运算 $\mathbb{C}(A,B)\times\mathbb{C}(B,C)\to\mathbb{C}(B,C)$在两个分量上均为 Scott 连续且严格。$\mathbf{Cppo}_\perp$-富化范畴的例子包括范畴 $\mathbf{Cppo}_\perp$（它以自身为富化范畴）以及范畴 Rel，其对象是集合，态射是二元关系。另一个例子是范畴 Lin，其对象是预序，态射是理想关系（即预序之间的二元关系 $R\subseteq A\times B$，在 A 中向上封闭，并在 B中向下封闭）。范畴 Rel 可以视为 Lin 的子范畴，其中包含离散预序。

以下定理是 Smyth 和 Plotkin 的极限-余极限重合定理的推论 [27]，该定理由 Fiore 推广 [16]:

定理 I.4. 设 $\mathbb{C}$ 是一个 $\mathbf{Cppo}_\perp$-富集范畴。若 $\mathbb{C}$有始对象，且存在嵌入链的 ω-余极限，则 $\mathbb{C}$ 是 Cpo-代数紧的。这意味着，对于每个自函子 $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$，若 T 是 Cpo-富集的，即对所有A、B，诱导映射

$$\mathbb{C}(A,B)\longrightarrow\mathbb{C}(TA,TB)$$

保持 ω-链的余极限，则 T 有一个双自由代数。

接下来，我们举例说明可由 Plotkin-Simpson 定理推出的若干著名不动点算子。考虑 $\mathbf{Cppo}_\perp$ 上的提升余单子 $(-)_\perp$：这个余单子自由地添加了一个底元素，其余 Kleisli 范畴与 Cppo 同构。由于自函子 $(-)_\perp$ 和 $(-)_\perp(-)_\perp$ 都是 Cppo-富集的，范畴 Cppo 上存在唯一的二自然不动点算子，它相对于自由函子 $\mathbf{Cppo}_\perp\to$Cppo 一致，并由标准公式给出

$$f^*=\bigvee_{n\in\omega}f^n(\perp)$$

其中 $f:A\to A$ 属于 Cppo。我们还可以考虑 Rel 范畴上的有限多重集余单子 $\mathbf{M}_{\mathrm{fin}}$。它导出了线性逻辑的一种定量模型，其中多重集可以用来统计项 [28]各输入的重数。由于 $\mathbf{M}_{\mathrm{fin}}$和 $\mathbf{M}_{\mathrm{fin}}\mathbf{M}_{\mathrm{fin}}$ 都有双自由代数，我们重新得到关系模型 [29] 中的不动点算子，并证明它是唯一的。

最后，范畴 Lin（也称为线性斯科特范畴 ScottL）可以配备 $\vee$-半格余单子，从而得到线性逻辑的定性模型，其中代入允许复制和擦除。该余单子还满足必要的富集条件，从而得到唯一的一致二自然不动点算子。

II. 二维不动点算子

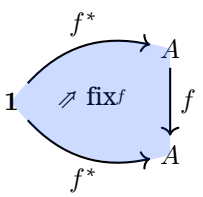
本节给出 2-范畴的不动点算子的定义。我们将在后续各节说明，所提出的公理如何源自 Plotkin-Simpson构造在维度 2 上的推广，以及如何在具体示例中得到验证。转向更高维度时，根据严格程度以及 2-态射的方向（严格、伪、（反）松弛），我们有多种选择。

出于篇幅考虑，本文将聚焦于一种情形：2-范畴的伪不动点算子；其余情形以及双范畴弱化版本将留待扩展版讨论。即便我们只考虑 2-胞腔可逆的伪情形，仍会为箭头指定方向，以便更好地理解它们的来源，并为有向松弛和反松弛情形提供指引。

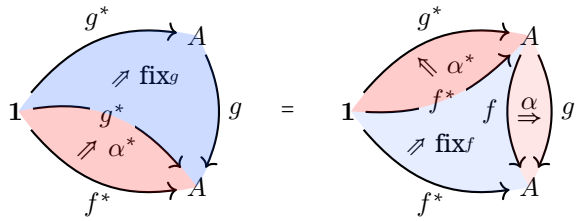
定义 II.1. 设 $\mathscr{D}$ 是一个具有终对象 1 的 2-范畴。$\mathscr{D}$ 上的伪 fix 点算子由一个以 $\mathscr{D}$的对象 A 为指标的函子族组成：

$$(-)^*_A:\mathscr{D}(A,A)\to\mathscr{D}(\mathbf{1},A)$$

以及一族自然同构fix_A（为简化记号，我们将省略对象的下标），其分量为：



对于 $\mathscr{D}$ 中的 1-胞 $f:A\to A$。自然性意味着，对于 $\mathscr{D}$ 中的可逆 2-胞 $\alpha:f\Rightarrow g$，有:



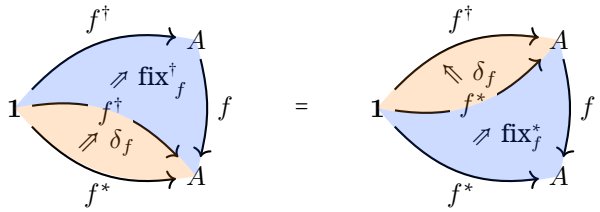
注 2. 严格来说，我们的伪不动点算子作用于 $\mathscr{D}$ 的子 2-范畴，其中我们只考虑可逆 2-胞。事实上，对于一般的 2-胞 $\alpha : f \Rightarrow g$，α^* 未定义，除非 α 可逆；若要作用于不可逆的 2-胞，我们需要考虑（op）lax 不动点算子。为简化记号，在本文余下部分中，对于一个 2-范畴 $\mathscr{D}$，我们对 $\mathscr{D}$ 及其仅包含可逆 2-胞的子 2-范畴隐式地使用相同的记号。

在预序情形中，我们可以逐点比较不动点算子，通常关注最小不动点和最大不动点。在范畴化情形中，不动点算子构成一个范畴，因此比较两个不动点算子的方式可能不止一种。伪不动点算子的态射是与结构 2-胞 fix 相交换的变换。该范畴中的始对象对应于最小不动点，而终对象对应于最大不动点。预序情形中不动点算子的唯一性性质，在这里变成了不动点算子范畴的可缩性。若一个范畴非空，且任意两个对象之间都存在唯一的同构（尤其是一个群胚），则称该范畴是可缩的。

定义 II.2. 设 $((-)^*, \mathrm{fix}^*)$ 和 $((-)^\dagger, \mathrm{fix}^\dagger)$ 是 2-范畴 $\mathscr{D}$ 上的两个伪不动点算子。伪不动点算子的伪态射 $((-)^*, \mathrm{fix}^*) \to ((-)^\dagger, \mathrm{fix}^\dagger)$ 由一族自然同构组成

$$\delta_A : (-)^*_A \Rightarrow (-)^\dagger_A : \mathscr{D}(A, A) \to \mathscr{D}(\mathbf{1}, A)$$

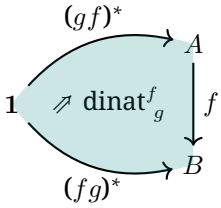
由 $\mathscr{D}$ 的对象 A 索引，且与结构 2-胞 fix 相容；也就是说，它满足以下相容性，对每个 $f : A \to A$ 均成立：



我们用 $\mathbf{Fix}(\mathscr{D})$ 表示 $\mathscr{D}$ 上伪不动点算子的范畴。

余自然变换用于刻画混合变异算子，这类算子对其参数既协变又逆变。语义中典型的例子包括（笛卡尔或幺半）闭结构，其中求值映射是余自然的；以及不动点算子。在我们的框架中，我们使用伪 dinatural 变换来处理 2-函子。

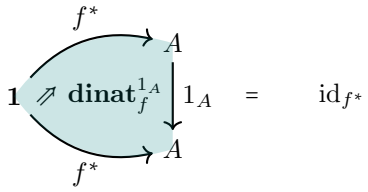
定义 II.3. $\mathscr{D}$ 上的伪二自然不动点算子由 $\mathscr{D}$ 上的伪不动点算子 $((-)^*, \mathrm{fix})$ 以及一个可逆 2-胞腔族组成



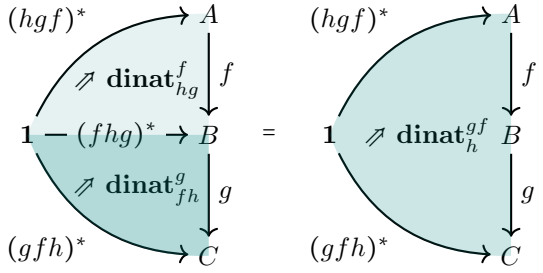
对于满足以下公理的 1-胞腔 $f : A \to B$ 和 $g : B \to A$，其中 $\mathscr{D}$：

1）伪自然性公理：

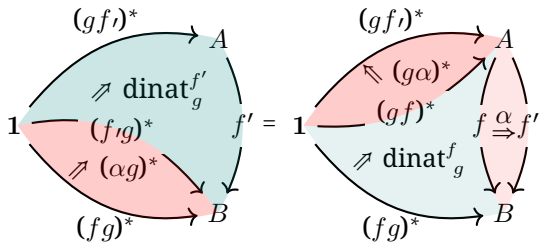
a）单位公理：对于一个 1-胞 $f : A \to A$，有



b）1-自然性公理：对于 $\mathscr{D}$ 中的所有 1-胞腔 $f : A \to B$、$g : B \to C$ 和 $h : C \to A$：



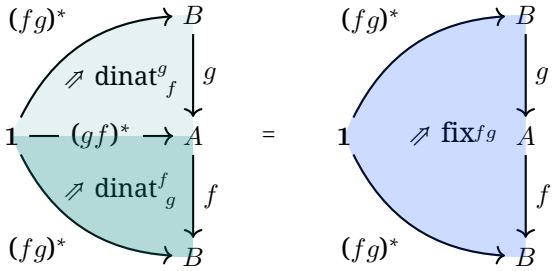
c）2-自然性公理：对于 $\mathscr{D}$ 中的可逆 2-胞 $\alpha : f \Rightarrow f' : A \to B$ 以及 $\mathscr{D}$ 中的一个 1-胞 $g : B \to A$，有



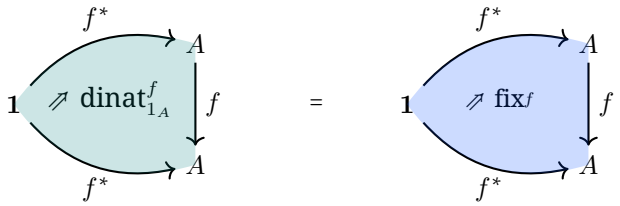
这三个公理导出一个伪 dinatural 变换：

$$\mathbf{dinat} : \mathscr{D}(-,-) \overset{\cdot}{\Longrightarrow} \mathscr{D}(\mathbf{1},-) : \mathscr{D}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{D} \to \mathbf{CAT}$$

2）dinat 与 fix 之间的一致性：对于 $\mathscr{D}$ 中的所有 1-胞 $f : A \to B$ 和 $g : B \to A$，我们有：



注记 3. 注意，上文 dinat 与 fix 之间的相干公理蕴含

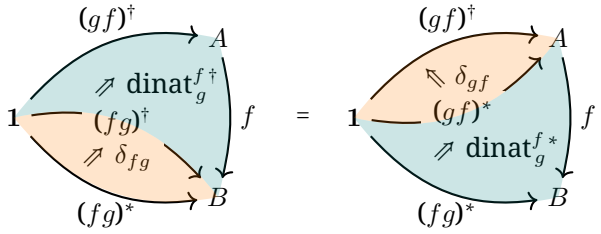


因为 $\mathrm{dinat}^{1_A}_{f} = \mathrm{id}_{f^*}$。在一范畴情形中，如果二自然性公理 $f(gf)^* = (fg)^* f$ 成立，那么不动点公理 $ff^* = f^*$ 便是冗余的（只需取 $g = \mathrm{id}_A$ 即可）。在二维情形中，fix 这些 2-胞完全由 dinat 这些 2-胞决定，因此对于伪二自然不动点算子，我们只写 ((–)*,dinat)，而不写 ((–)*,fix,dinat)。

定义 II.4. 设 ((–)*, dinat*) 和 ((–)†, dinat†) 是 2-范畴 $\mathscr{D}$ 上的两个伪二自然不动点算子。伪二自然不动点算子 ((–)*, dinat*) $\to$ ((–)†, dinat†) 的一个伪态射由一族自然同构组成

$$\delta_A : (-)^*_A \Rightarrow (-)^\dagger_A : \mathscr{D}(A,A) \to \mathscr{D}(\mathbf{1}, A)$$

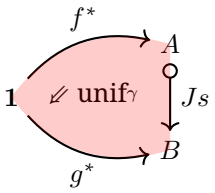
以 A 的对象为指标的 $\mathscr{D}$，它与结构 2-胞腔 dinat 相容，即对每个 $f : A \to B$ 和 $g : B \to A$，都满足以下相容性：



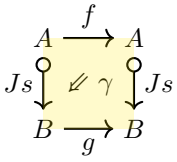
我们用 DinFix($\mathscr{D}$) 表示 $\mathscr{D}$ 上伪二自然不动点算子的范畴。

dinatural 变换通常不具备复合性，因此它们并不构成一个范畴。为了使这一概念具有复合性，人们引入了强二自然变换。Mulry 指出，不动点的一致性公理（定义 I.2）可以改写为：要求 (–)* 关于严格映射 [30] 属于一个强二自然变换；在转向维度 2 时，我们采用这一刻画。尽管已有关于 dinatural 变换和 2-范畴结构的 extranatural 变换的推广研究 [31], [32], [33], [34], [35]，据我们所知，目前尚无维度 2 下强二自然变换的现有概念。

定义 II.5. 设 $J : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 是一个（严格）保持终对象的对象上恒等的 2-函子。相对于 J 一致的 $\mathscr{D}$ 上的伪不动点算子，由定义 II.1 中的伪不动点算子 ((–)*, fix) 以及一族 2-胞构成



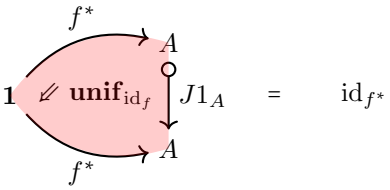
对于每个 1-胞腔 $s : A \to B$ in $\mathscr{C}$, $f : A \to A$ 和 $g : B \to B$ in $\mathscr{D}$，以及如下的可逆 2-胞腔 γ：



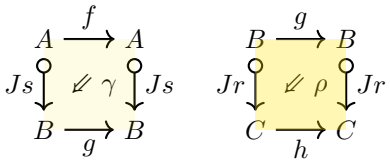
满足以下公理：

1) 强拟二自然性：

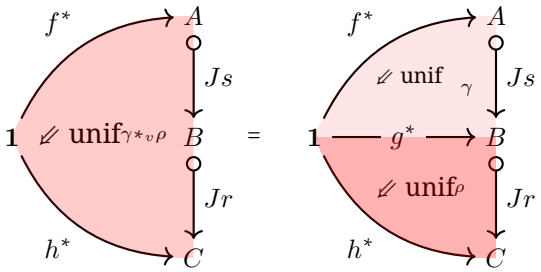
a) 单位公理：我们有



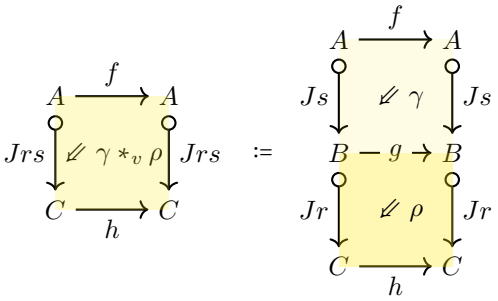
b) 1-自然性：对于 $\mathscr{D}$ 中的两个方形



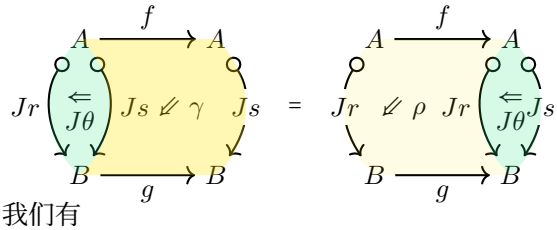
我们有：



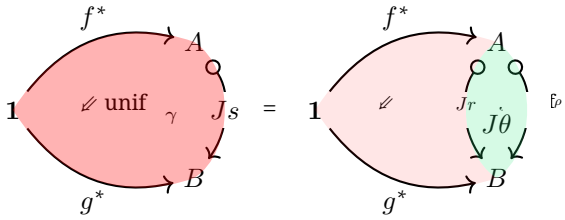
其中 $\gamma *_v \rho$ 表示将两个方形按如下方式垂直堆叠所对应的 2-胞腔：



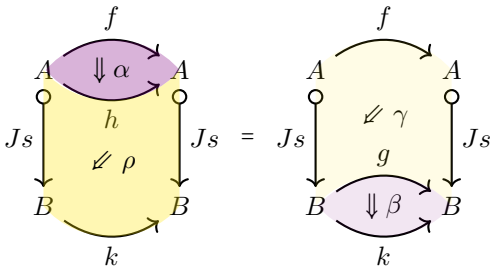
c) 2-自然性：对于每个可逆 2-胞 $\theta : s \Rightarrow r$ in$\mathscr{C}$ suchthat



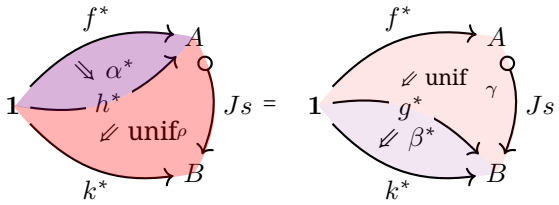
我们有



d) 如果以下等式成立，



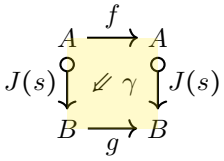
那么我们有：



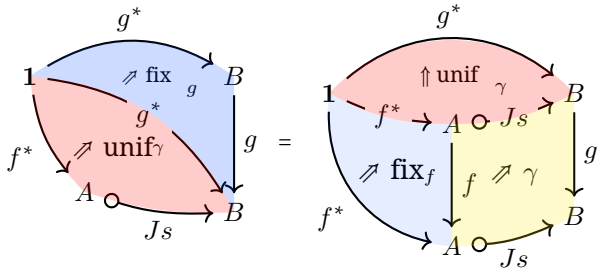
这四条公理诱导出一个强伪二自然变换：

$$\mathbf{unif} : \mathscr{D}(J(-), J(-)) \dot{\Longrightarrow} \mathscr{D}(\mathbf{1}, J(-)) : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C} \to \mathbf{CAT}$$

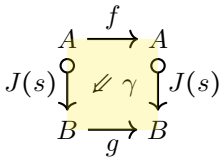
2) fix 与 unif 之间的相干性：对于一个可逆的 2-胞腔，如下所示



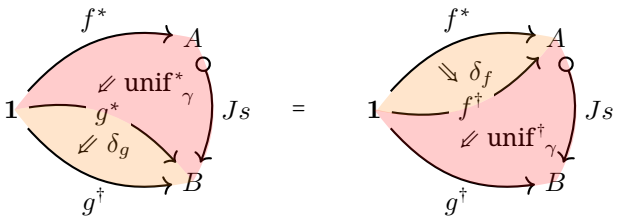
我们有：



定义 II.6. 设 $((-)^*, \mathrm{fix}^*, \mathrm{unif}^*)$ 和 $((-)^\dagger, \mathrm{fix}^\dagger, \mathrm{unif}\,\dagger)$ 是关于 $J : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 一致的两个伪不动点算子。从 $((-)^*, \mathrm{fix}^*, \mathrm{unif}^*)$ 到 $((-)^\dagger, \mathrm{fix}^\dagger, \mathrm{unif}\,\dagger)$ 的一致不动点算子的伪态射，是定义 II.2 中的从 $\delta : ((-)^*, \mathrm{fix}^*) \to ((-)^\dagger, \mathrm{fix}^\dagger)$ 的不动点算子伪态射，并满足对 $\mathscr{D}$ 中每个方形都成立的附加相容性：



我们有：

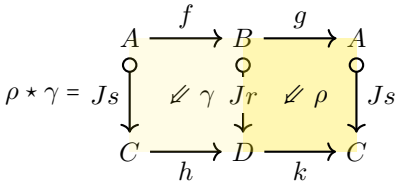


我们用 Fix($\mathscr{D}, J$) 表示关于 J 的 $\mathscr{D}$ 一致上的伪不动点算子范畴。

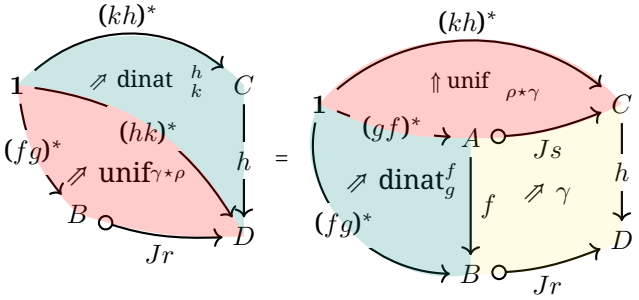
定义 II.7. 设 $J : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 为一个（严格）保持终对象的对象上恒等的 2-函子。关于 J 一致的伪二自然不动点算子由 $\mathscr{D}$上的一个伪二自然不动点算子（$(-)^*$，dinat）以及一个强二自然变换组成

$$\mathbf{unif} : \mathscr{D}(J(-), J(-)) \dot{\Longrightarrow} \mathscr{D}(\mathbf{1}, J(-),) : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C} \to \mathbf{CAT}$$

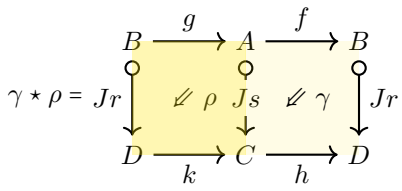
满足 dinat 和 unif 之间以下额外的相容性：对于 $\mathscr{D}$ 中形如以下形式的两个方形



我们有：



其中 $\gamma \star \rho$ 对应以下 2-胞腔:



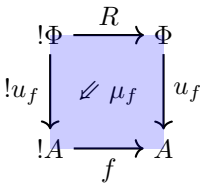
注意，若我们限制在 $A = B$, $C = D$,$g = 1_A$, $k = 1_C$, $r = s$ 和 $\rho = \mathrm{id}$ 的情形，就会得到定义 II.5 中 fix 与 unif 之间的相干公理。因此，相对于 J 一致的伪不动点算子，正如预期的那样，是相对于 J 一致的伪二自然不动点算子的特例。

定义 II.8。设 ((–)*, dinat*, unif*) 和 ((–)†, dinat†, unif †) 是两个相对于 $J : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 一致的伪二自然不动点算子。从 ((–)*, dinat*, unif *) 到 ((–)†, dinat†, unif†) 的一致二自然不动点算子伪态射，是定义 II.4 中所述的二自然不动点算子伪态射$\delta : ((–)^*, \mathrm{dinat}^*) \to ((–)^\dagger, \mathrm{dinat}^\dagger)$，同时也是定义 II.6 中所述的一致不动点算子伪态射；也就是说，δ 与二自然性和一致性的结构 2-胞 dinat 和 unif 均相交换。

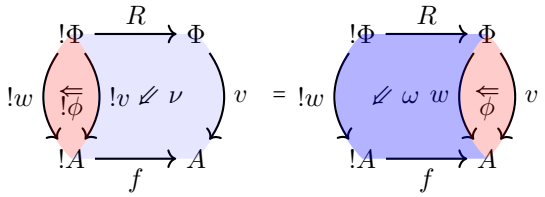
我们将关于 J 的 $\mathscr{D}$ 一致伪二自然不动点算子所成的范畴记为 DinFix($\mathscr{D}, J$)。

在陈述本文的主定理之前，我们先回顾 2-函子的伪双自由代数概念。

定义 II.9. 对于 2-函子 $! : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$，伪初始代数是一个 1-胞 $R : !\Phi \to \Phi$，使得对于每个 1-胞 $f : !A \to A$，都存在一个代数伪态射 $(u_f, \mu_f) : R \to f$，即一个 1-胞 $u_f : \Phi \to A$ 和一个 2-胞腔



验证以下泛性质：对于任意伪代数 1-胞腔 (v, ν)、(w, ω) $: R \to f$，存在唯一的可逆代数 2-胞 $\phi : (v, \nu) \Rightarrow (w, \omega)$，即存在唯一的可逆 2-胞 $\phi : v \Rightarrow w$ in $\mathscr{C}$，使得:



我们也可以类似地定义伪终 !-余代数的对偶概念。兰贝克定理指出，初始代数或终余代数是一个可逆态射；这一结论被推广为伴随等价:

引理 II.10 ([18])。如果 $R : !\Phi \to \Phi$ 是一个伪初始 !-代数，那么它是一个伴随等价 $(R : !\Phi \to \Phi, L : \Phi \to !\Phi, \eta : \mathrm{id} \cong \Phi \Rightarrow RL$, $\varepsilon : LR \cong \Phi \Rightarrow \mathrm{id})$ 的一部分。

定义 II.11. 若 $R : !\Phi \to \Phi$ 是一个伪双自由代数，则称之为伪双自由代数，当且仅当 R 是伪初始代数，且其（唯一确定的）左伴随 L 是伪终余代数。

现在我们可以陈述本文的主定理，它是定理 I.3 的范畴化:

定理 II.12. 设 $\mathscr{C}$ 是一个配备了（严格）2-余单子$(!, \delta, \varepsilon)$和（严格）终对象 1 的 2-范畴。我们将余 Kleisli 2-范畴 $\mathscr{C}_!$ 记作 $\mathscr{D}$，并将由余单子伴随诱导的自由函子记作 $J : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$。

1) 若自函子 ! 有一个伪双自由代数，则关于 J 一致的、定义在$\mathscr{D}$ 上的伪不动点算子范畴 Fix($\mathscr{D}, J$) 是可缩的。
2) 若 $\mathscr{C}$ 是笛卡尔的，且自函子 !! 有一个伪双自由代数，则关于 J 一致的、定义在 $\mathscr{D}$ 上的伪二自然不动点算子范畴 DinFix($\mathscr{D}, J$) 是可缩的。

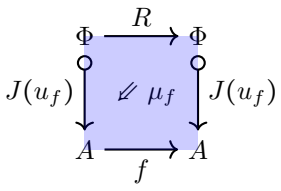
我们将在下一节证明该定理：首先根据双自由代数构造一个显式的伪不动点算子，并证明它满足所需的公理；然后证明可缩性，即对于任意其他伪不动点算子，它们之间都存在唯一的同构。

III. 2-范畴的 Plotkin-Simpson 定理

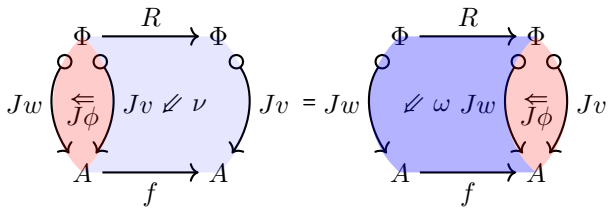
本节中，我们固定一个配备（严格）2-余单子 $(!, \delta, \varepsilon)$ 和一个（严格）终对象 1 的 2-范畴 $\mathscr{C}$。我们将余 Kleisli 2-范畴记为 $\mathscr{D}$ $\mathscr{C}_!$，并将由余单子伴随诱导的自由函子记为 $J : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$。此外，我们假设自函子 ! 具有一个伪双自由代数 $R : !\Phi \to \Phi$。

下面的引理只是将定义 II.9 从 $\mathscr{C}$ 改写到余 Kleisli $\mathscr{D}$上的形式:

引理 III.1. 对于任意的 1-胞 $f : A \to A$ in $\mathscr{D}$，存在一个 1-胞 $u_f : \Phi \to A$ in $\mathscr{C}$ 和一个 2-胞 μ_f

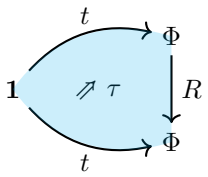


in $\mathscr{D}$ 满足以下性质：对于任意的 1-胞腔 $v, w\ \Phi \to A$ in $\mathscr{C}$ 以及 2- 胞 $\nu : J(v)R \Rightarrow fJ(v)$ 和 $\omega : J(w)R \Rightarrow fJ(w)$ in $\mathscr{D}$，存在唯一一个可逆的$\phi : v \Rightarrow w$ in $\mathscr{C}$，使得

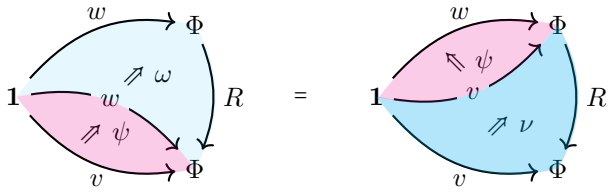


下一个引理利用了这样一个事实： R 是伪双自由的，因此属于一个伴随等价，其中左伴随L 是伪终的。

引理 III.2. 存在一个 1-胞 $t : \mathbf{1} \to \Phi$ 和一个可逆 2-胞 $\tau : t \Rightarrow Rt$，位于 $\mathscr{D}$中



满足以下性质：对于 $\mathscr{D}$ 中的任意 1-胞腔 v、 $w : \mathbf{1} \to \Phi$以及可逆 2-胞 $\nu : v \Rightarrow Rv$ 和 $\omega : w \Rightarrow Rw$，都存在 $\mathscr{D}$ 中的唯一可逆 2-胞 $\psi : v \Rightarrow w$，使得



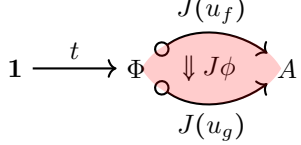
利用这两个引理，我们现在可以在 $\mathscr{D}$上构造伪不动点算子。我们定义一个以对象 $A \in \mathscr{D}$为指标的函子族

$$(-)^*_A : \mathscr{D}(A, A) \to \mathscr{D}(\mathbf{1}, A)$$

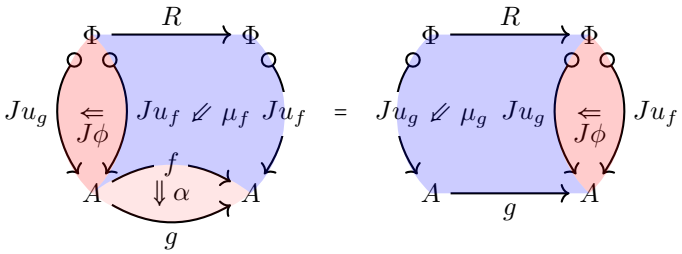
将一个 1-胞 $f : A \to A$ 映射为

$$f^* := \mathbf{1} \xrightarrow{t} \Phi \xrightarrow{J(u_f)} A$$

其中 u_f 和 t 由引理 III.1 和 III.2 得出。对于 $\mathscr{D}(A, A)$ 中的 2-胞腔 $\alpha : f \Rightarrow g$，定义 $\alpha^* : f^* \Rightarrow g^*$ 为

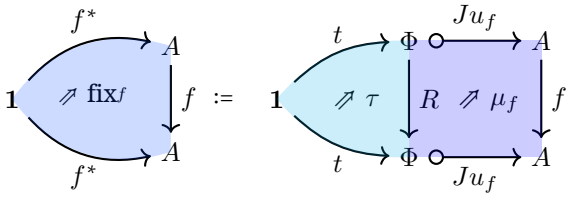


其中 ϕ 是 $\mathscr{C}$ 中唯一满足以下条件的 2-胞腔 $u_f \Rightarrow u_g$



它由引理 III.1 保证存在。

现在我们可以如下定义 1-胞 $f : A \to A$ 在 $\mathscr{D}$中的不动点 2-胞 $\mathrm{fix}_f : ff^* \Rightarrow f^*$：

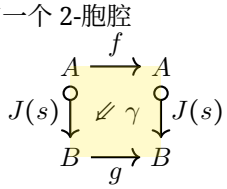


其中， μ_f 和 τ 由引理 III.1 和 III.2 得到。为了证明 ((–)*, fix) 是 $\mathscr{D}$上的伪不动点算子，只需证明 fix 具有自然性：

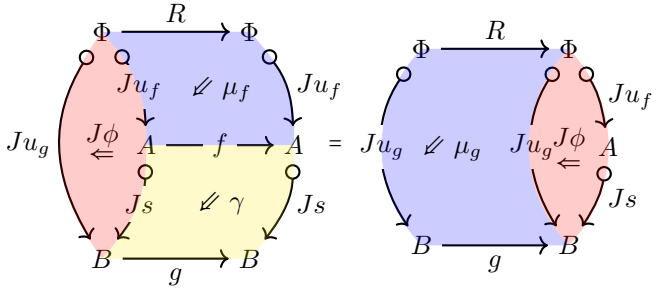
引理 III.3（fix 的自然性）。对于 $\mathscr{D}$中的 2-胞腔 $\alpha : f \Rightarrow g$，有 $\mathrm{fix}_g\ \alpha^* = (\alpha \cdot \alpha^*)\ \mathrm{fix}_f$。

现在我们已经在 $\mathscr{D}$上构造了一个伪不动点算子，希望证明它相对于自由函子 $J : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 是一致的；该自由函子从基底 2-范畴 $\mathscr{C}$ 映射到余 Kleisli $\mathscr{D} = \mathscr{C}_!$。

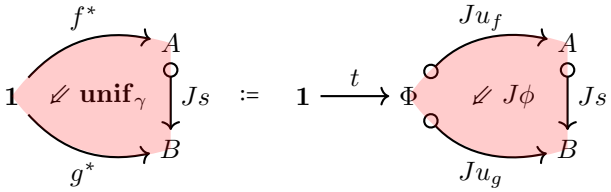
假设存在 $\mathscr{C}$ 中的一个 1-胞 $s : A \to B$ 以及 $\mathscr{D}$中的 $f : A \to A$, $g : B \to B$ 和一个 2-胞腔



在 $\mathscr{D}$ 中。根据引理 III.1，存在唯一的 2-胞腔 $\phi : su_f \Rightarrow u_g$，它位于 $\mathscr{C}$ 中，使得：



定义 unif_γ 如下：

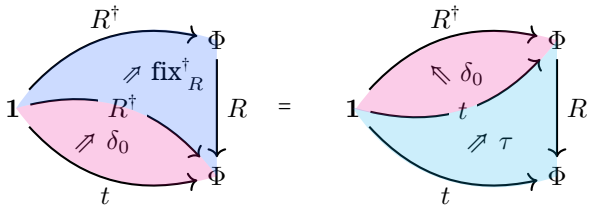


命题 III.4。我们构造的 2-胞 unif$_\gamma$ 构成一个强伪二自然变换，并验证了 fix 与 unif 之间的相干公理。

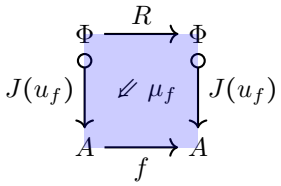
我们构造了一致伪不动点算子，说明范畴 Fix($\mathscr{D}, J$) 非空；接下来只需证明它是可缩的。

假设在 $\mathscr{D}$ 上还存在另一个伪不动点算子 ((–)†, fix†, unif†)，它相对于 $J : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 是一致的。我们要证明，一致伪不动点算子 $\delta : ((–)^* \mathrm{fix}^*, \mathrm{unif}^*) \to ((–)^\dagger, \mathrm{fix}^\dagger, \mathrm{unif}\,\dagger)$ 之间存在唯一的同构。

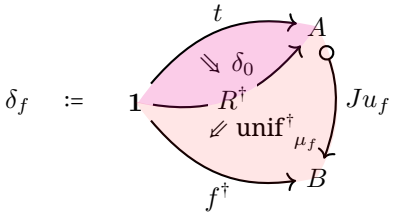
由引理 III.2，存在唯一可逆 2-胞 $\delta_0 : t \Rightarrow R^\dagger$，使得



现在，对于每个 1-胞 $f : A \to A$，由引理 III.1，存在一个 $\mathscr{C}$ 中的 1- 胞 $u_f : \Phi \to A$，以及一个 2- 胞



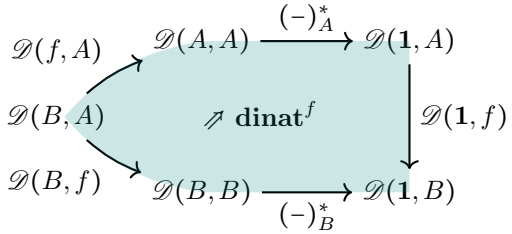
在 $\mathscr{D}$ 中。由于 (–)† 相对于 J 是一致的，我们有一个 2-胞 $\mathrm{unif}^\dagger_{\mu_f} : Ju_f R^\dagger \Rightarrow f\dagger$，并定义 $\delta_f : f^* \Rightarrow f\dagger$ 如下：



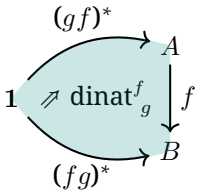
命题 III.5。范畴 Fix($\mathscr{D}, J$) 是可缩的，即，δ 是一致伪不动点算子之间的同构，且该同构唯一。

IV. 二自然性

为了证明伪不动点算子是伪二自然的，我们希望为 $\mathscr{D}$ 中的每个 1- 胞 $f : A \to B$ 构造一个可逆的二自然性 2- 胞，



其分量为



对于 g 在 $\mathscr{D}(B, A)$ 中。为此，我们还需假设自函子 !! $: \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ 具有伪双自由代数，且 2-范畴 $\mathscr{C}$ 是笛卡尔的。注意，这意味着余 Kleisli$\mathscr{D}$ 也是笛卡尔的，并且自由函子 $J : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$保留笛卡尔结构。

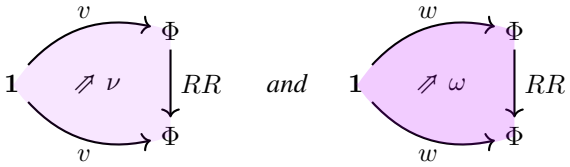
以下引理采用与 Freyd [26] 的严格情形相同的论证。

引理 IV.1. 假设 !! $: \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ 具有伪双自由代数。那么，如果 $R : !\Phi \to \Phi$ 是一个伪双自由 !- 代数，

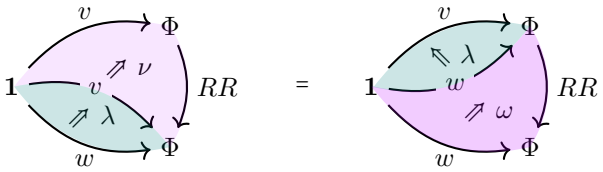
$$!!\Phi \xrightarrow{!R} !\Phi \xrightarrow{R} \Phi$$

就是一个伪双自由 !!-代数。

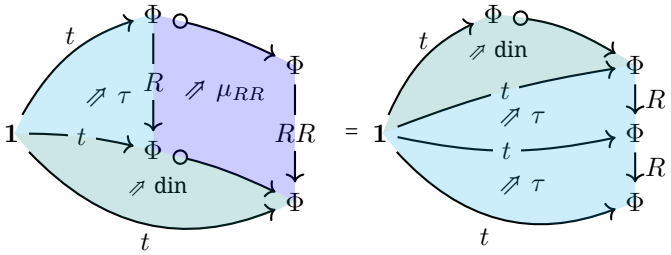
引理 IV.2. 对于 1-胞腔 $v, w : \mathbf{1} \to \Phi$，其中 $\mathscr{D}$，以及 2-胞腔



在 $\mathscr{D}$ 中，存在唯一可逆 2-胞 $\lambda : w \Rightarrow v$，其中 $\mathscr{D}$，使得



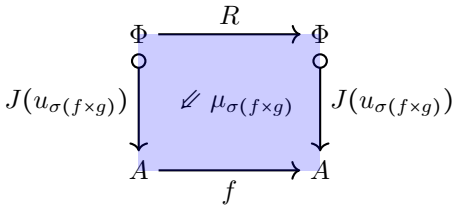
为了构造反自然性 2-胞，我们首先构造一个 2-胞 din $: t \Rightarrow (RR)^*$。令 din 为从 t 到 $J(u_{RR})t$ 的唯一可逆 2-胞（由引理 IV.2 得到），使得：



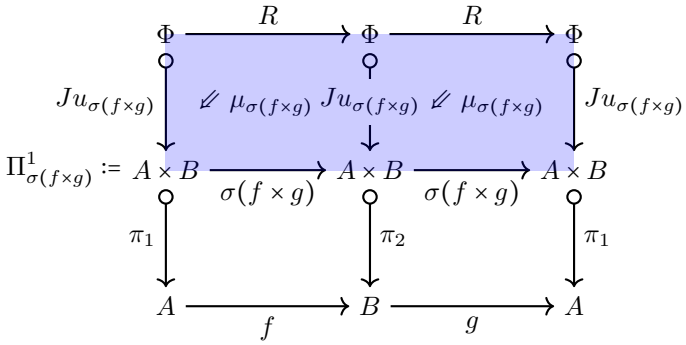
得到这个同构后，我们利用一致性构造 dinat^f_g 自然性 2- 胞腔。考虑以下自端 1- 胞：

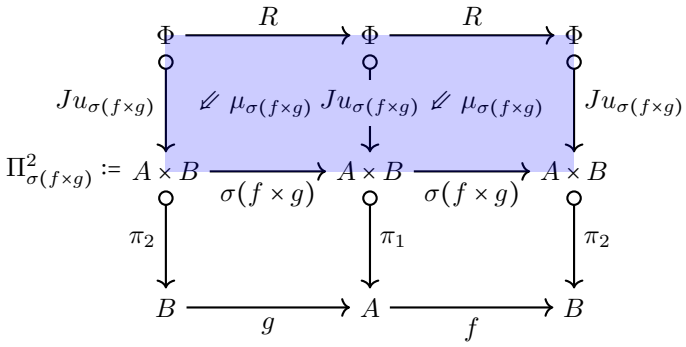
$$A \times B \xrightarrow{f \times g} B \times A \xleftarrow{\sigma} A \times B$$

其中， σ 是通过标准方式，由配对 π_1, π_2得到的对称性。根据引理 III.1，存在 $\mathscr{C}$中的一个 1-胞 $u_{\sigma(f\times g)} : \Phi \to A \times B$，以及一个 2-胞 $\mu_{\sigma(f\times g)}$:

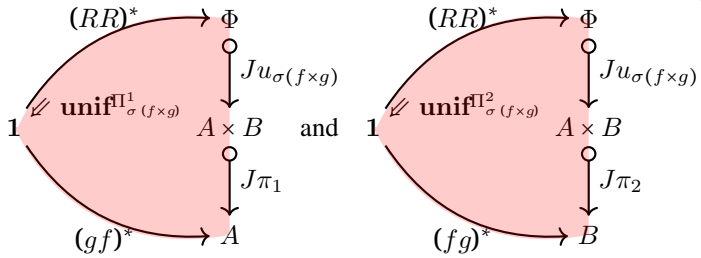


由这两个方形





我们得到一致性 2-胞



现在我们可以如图 1 所示构造一般的反自然性 2-胞 dinat_g^f。

请注意，对于 fix 和 unif，我们在无需取逆的情况下写出了 2-胞的方向；而对于二自然性，则需要通过往返操作来构造 2-胞。这意味着

在一般的有向情形下，我们需要同时具备 lax 和 oplax 方向，才能得到二自然性。

命题 IV.3。我们构造的 2-胞 dinat_g^f 给出了一个伪 dinatural 变换，并验证了 dinat 与 unif 之间的相干公理。

我们现在已经证明，一致伪二自然不动点算子组成的范畴 DinFix($\mathscr{D}, J$) 非空；要完成定理 II.12 的证明，还需证明该范畴是可缩的。

假设还存在另一个一致伪二自然不动点算子 $((–)^\dagger, \mathrm{dinat}^\dagger, \mathrm{unif}^\dagger)$。根据命题 III.5，我们已经构造出一个一致伪不动点算子之间的态射 $\delta : ((–)^*, \mathrm{fix}^*, \mathrm{unif}^*) \to ((–)^\dagger, \mathrm{fix}^\dagger, \mathrm{unif}\dagger)$，其中 2-胞 fix 是由 2-胞 dinat 诱导的。因此，只需证明：

命题 IV.4。范畴 DinFix($\mathscr{D}, J$) 是可缩的，即 δ 与反自然性 2-胞相交换，且它是唯一的。

V. 示例

我们首先介绍一些例子，其中伪不动点算子是定理 II.12 的特例，因此伪不动点算子的范畴是可缩的。特别是，最小和最大不动点（即伪不动点范畴的始对象和终对象）彼此同构。之后，我们将考察多项式函子的例子。它们并非定理的特例，但满足第 II 节中给出的伪不动点公理。

A. 2-范畴结构的极限-余极限重合定理

我们简要回顾一下如何运用 Cattani、Fiore 和 Winskel [16],[17], [18] 开发的工具，为 2-范畴上的自函子构造伪双自由代数的一般方法。我们不再考虑预序富集范畴，而是转向 2-范畴或双范畴，其中的同态范畴具有 ω-链的余极限和始对象。在范畴化情形中，预序富集情形下嵌入-投影对的 ω-链的余极限，被推广为余反射（具有可逆单位的伴随）之 ω-链的伪余极限。

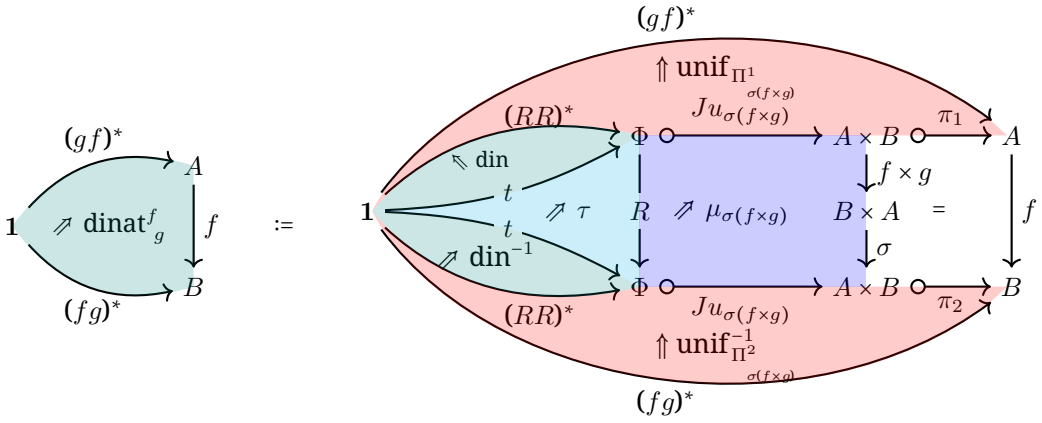
如果对所有对象 A 和 B，其同态范畴$\mathscr{C}(A, B)$ 都有 ω-链的余极限（以及始对象），且其复合函子

$$\mathscr{C}(A, B) \times \mathscr{C}(B, C) \to \mathscr{C}(B, C)$$

在两个变量中都保持 ω-链的余极限（以及始对象）。范畴 Cppo 的对应物是由以下内容给出的 2-范畴 Catω

- 0-胞：具有 ω-链余极限和始对象的范畴；
- 1-胞腔：保持 ω-链余极限的函子；

图 1. 反自然性 2-胞的构造



- 2-胞：自然变换。

及其子 2-范畴 $\mathbf{Cat}_{\omega,\perp}$ 其中 1-态射被限制为保持始对象的态射（在预序情形下对应于范畴 $\mathbf{Cppo}_{\perp}$ ）。

为得到伪双自由代数，我们使用以下定理：

定理 V.1 ([18])。设 $\mathscr{C}$ 为 $\mathbf{Cat}_{\omega,\perp}$-富集 2-范畴。若 $\mathscr{C}$ 有一个伪始对象，且具有余反射（单位可逆的伴随）之链的伪-ω-余极限，那么$\mathscr{C}$ 是 $\mathbf{Cat}_{\omega}$-伪代数紧的。这意味着，对于每个伪函子 $T:\mathscr{C}\to\mathscr{C}$，若 T 是 $\mathbf{Cat}_{\omega}$-富集的，即对所有 A,B，诱导函子

$$\mathscr{C}(A,B)\longrightarrow\mathscr{C}(TA,TB)$$

保留 ω-链的余极限，则 T 有一个伪双自由代数。

B. 范畴论域理论

典型的例子是 2-范畴 $\mathbf{Cat}_{\omega,\perp}$ 以及提升 2-余单子 $(-)_{\perp}:\mathbf{Cat}_{\omega,\perp}\to\mathbf{Cat}_{\omega,\perp}$ 它自由地添加始对象。$(-)_{\perp}$ 和 $(-)_{\perp}(-)_{\perp}$ 都是 $\mathbf{Cat}_{\omega}$-富化的，因此余克莱斯利 2-范畴（它等价于 $\mathbf{Cat}_{\omega}$）验证了其伪二自然不动点算子范畴是一致的（相对于自由函子 $\mathbf{Cat}_{\omega,\perp}\to\mathbf{Cat}_{\omega}$），且可缩。有限型自函子$f:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ 在具有始对象的范畴 $\mathbb{A}$ 上的初始代数的标准 Lambek 构造——以及 ω-余极限，可通过计算图的余极限得到

$$\perp\to f(\perp)\to f^2(\perp)\to\dots$$

同时给出了始伪不动点算子和终伪不动点算子 [36]。作为定理 II.12 的推论，Lambek 的构造验证了二自然性公理，并且相对于由保持始对象（至同构）的函子构成的子 2- 范畴是一致的。

我们还可以得到 Adamek 关于 Scott 完备范畴的结果；这类范畴可视为 Scott 域的一种范畴化 [14]。他考虑由下式给出的 2-范畴 SCC：

- 0-胞：Scott 完备范畴（即有限可及范畴，其中每个具有余锥的图都有余极限）；
- 1-胞腔：保持有向余极限的函子；
- 2-胞：自然变换。

及其子 2-范畴 $\mathbf{SCC}_{\perp}$，其中 1-胞腔限于保持有向余极限和始对象的函子。$\mathbf{SCC}_{\perp}$ 上的提升 2-余单子具有所需的双自由代数，因此余 Kleisli SCC 具有一个可缩范畴，其对象为伪 Dinatural 不动点算子，且相对于自由 2-函子 $\mathbf{SCC}_{\perp}\to\mathbf{SCC}$ 一致。

C. 伴随函子与线性逻辑模型

$\mathbf{Cat}_{\omega,\perp}$-富集双范畴的另一个例子是称为 Prof [37]的预函子双范畴。对于小范畴 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$，从 $\mathbb{A}$ 到 $\mathbb{B}$ 的预函子 P 是一个函子 $P:\mathbb{A}\times\mathbb{B}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Set}$，或者等价地，是一个从 $\hat{}\mathbb{A}$ 到预层范畴 $\mathbb{B}$的函子。预函子可以看作是 Rel 的一种范畴化，因为关系 $R\subseteq A\times B$ 对应于离散范畴之间的一个预函子，且其每个分量要么是空集，要么是单元素集合。

人们在 Prof 上考察了许多伪余单子结构，从而得到具有各种代入概念的线性逻辑模型 [3], [4], [38]。特别地，Prof 上的自由对称幺半完备化余单子产生了广义结构物种模型，该模型涵盖了 Joyal 的组合物种，同时也是线性逻辑关系模型的范畴化 [4]。余 Kleisli 双范畴中的态射对应于解析函子的概念，即带有商的广义幂级数 [39]。我们还可以考虑自由添加有限余积或有限余极限的伪余单子，从而利用第 I 节中的 $\vee$-半格余单子推广 Lin范畴，或者简单地使用自由添加一个始对象的余单子。关于更一般的 Prof 上伪（余）单子处理，我们请读者参阅

[40]，关于其他应用于交类型系统的例子，请参阅 [9] 。

我们所考虑的伪余单子满足关于双自由代数的必要条件，因为它们全都是 Cat_ω-富集的，而且定理 V.1 已推广到双范畴和伪函子 [18]。对于余极限完备化的情形，这直接由余极限的交换性得出；只有在自由对称严格幺半的情形下，才需要手动验证。

严格来说，我们只为 2-范畴而非双范畴给出了伪不动点算子的概念。即使将双范畴 Prof 严格化为与之双等价的 2-范畴 Cocont（预层范畴之间的连续函子），我们所考虑的余单子仍是伪的，因此相应的余 Kleisli 结构是双范畴，而不是 2-范畴。

受篇幅所限，本文不提供定理 II.12 在双范畴情形下的证明，只指出我们可推论得出：具有自由对称严格幺半完备化、始对象、有限余积和有限余极限的物种伪余单子，都是这一构造的实例，因此它们的不动点算子伪二自然范畴均为可缩，且相对于将预函子包含到这些广义物种中的映射是一致的。

D. 多项式函子

多项式函子的初始代数（良基树）和终余代数（非良基树）已得到广泛研究 [41], [42], [43], [44] ，并且是依赖类型论中建模（余）归纳类型的标准工具。若我们固定一个局部笛卡尔闭范畴 $\mathbb{C}$，对于其中的对象 I 和 J，从 I 到 J 的多项式是一个形如以下的图

$$\begin{array}{ccccc} & & E & \xrightarrow{p} & B & & \\ & \overset{s}{\swarrow} & & & & \overset{t}{\searrow} & \\ I & & & & & & J \end{array}$$

它位于范畴 $\mathbb{C}$中。它诱导出一个多项式函子 $\mathbb{C}/I \to \mathbb{C}/J$，作用于切片范畴之间；这些切片范畴构成一个 2-范畴，其 2-胞由笛卡尔变换给出。若 $\mathbb{C}$ 中所有多项式自函子都有初始代数，我们就说 $\mathbb{C}$ 具有 W-类型；若它们都有终余代数，则称其具有 M-类型。

众所周知，W-类型和 M-类型并不一致，因此它们不是定理 II.12 中可缩性性质的一个实例。因此，这个例子足以检验我们在第 II 节中陈述的公理：它们不仅适用于受限的可缩情形，还提供了一种一般的伪不动点算子概念。

计算初始代数（或终余代数）的算子的 2-自然性公理众所周知，有时也称为“函子性”。文献中也已讨论初始代数或终余代数算子的二自然性 [26]。其表述如下：对于函子 $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$、$G : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$，若 GF 和 FG 存在初始代数，且 $GFA \overset{a}{\text{Đ}}\to A$ 是 GF-初始的，则 $FGFA \overset{Fa}{\text{Đ}}\to FA$ 是 FG-初始的。据我们所知，伪 dinatural 变换的公理虽然很容易验证，但尚未被明确表述。

另一方面，一致性取决于在环境 2-范畴中如何计算初始代数（或终余代数）。一般而言，如果初始代数是通过余极限构造得到的，那么当这些概念定义良好时，保始对象函子或余连续函子便是 2-范畴中严格映射的自然候选者。对偶地，如果伪不动点算子是通过计算某些极限得到的终余代数构造而成，那么我们可以考虑将保终对象函子或连续函子视为严格映射。对于 Set 上的多项式函子，W-类型相对于跨度是一致的，即形状为

$$\begin{array}{ccccc} & & E & \xrightarrow{\cong} & B & & \\ & \overset{s}{\swarrow} & & & & \overset{t}{\searrow} & \\ I & & & & & & J \end{array}$$

而 M-类型相对于单项式是一致的，即形状为

$$\begin{array}{ccccc} & & E & \xrightarrow{!} & 1 & & \\ & \overset{s}{\swarrow} & & & & \overset{t}{\searrow} & \\ I & & & & & & J \end{array}$$

其中 1 是一个单元素集合。

结论

我们以 Plotkin-Simpson 定理的范畴化为指引，提出了关于 2-范畴不动点算子的理论，并据此推导出维度 2 上结构 2-胞的方程。具体的 2-范畴例子使我们得以确认这些方程均成立。

在未来的工作中，我们计划将理论扩展到参数化不动点算子和受保护不动点算子。引入参数可以为项考虑更丰富的上下文，而受保护性则限制不动点可能具有的无限行为，以确保满足可解性或生产性等性质。由于验证 Conway 公理的参数化不动点算子等价于以笛卡尔积作为所选张量的迹幺半范畴，我们计划运用这一形式体系发展迹幺半双范畴理论，并建立其与循环 λ-演算 [45], [46] 的新联系。我们还希望在笛卡尔闭框架中构建二维不动点理论，其中不动点算子在内部表示为一族类型为 $(A \Rightarrow A) \to A$ 的 1-胞腔，这将使我们更接近对 λ-演算不动点组合子的直观理解。

致谢

感谢匿名审稿人提出的意见，也感谢 Marcelo Fiore、Nicola Gambino 和 Martin Hyland 就这项工作展开的宝贵讨论。本工作得到 EPSRC 资助项目 EP/V002309/1 以及 RealiSe PGRM Emergence 项目的支持。

参考文献

[1] A. Simpson 和 G. Plotkin，“范畴不动点算子的完备公理”，载于《第十五届 IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会论文集》（目录号 99CB36332）。IEEE，2000 年，第 30–41 页。[2] M. P. Fiore，《偏映射范畴中的公理化域理论》。剑桥大学出版社，2004 年，第 14 卷。[3] G. L. Cattani 和 G. Winskel，“预函子、开映射与双模拟”，《计算机科学中的数学结构》，第 15 卷，第 3 期，第 553–614 页，2005 年。[4] M. Fiore、N. Gambino、M. Hyland 和 G. Winskel，“广义结构种类的笛卡尔闭双范畴”，《伦敦数学学会学报》（第 2 辑），第 77 卷，第 1 期，第 203–220 页，2008 年。 [在线]。可访问：http://dx.doi.org/ 10 1112 096 。/jlms/jdm D. Mazza、L.

[5] Pellissier 和 P. Vial，“多元逼近、纤维化与交类型”，《ACM 程序设计语言汇刊》，第 2 卷，POPL:6，2018 年。[6] M. Fiore 和 P. Saville，“笛卡尔闭双范畴的类型理论”，载于《2019 年第 34 届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会（LICS）》。IEEE，2019 年，第 1–13 页。[7] P.-A. Melli`es，“模板博弈与微分线性逻辑”，载于《2019 年第 34 届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会（LICS）》，2019 年，第 1–13 页。[8] M. Fiore 和 P. Saville，“双范畴笛卡尔闭结构的相容性与通过求值归一化”，载于《第 35 届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会论文集》，2020 年，第 425–439 页。[9] F. Olimpieri，“交类型分配器”，载于《第 36 届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会（LICS 2021）》，意大利罗马，2021 年 6 月 29 日至 7 月 2 日。IEEE，2021 年，第 1–15 页。 [在线]。可访问：https://doi.org/ 10 1109 52264 2021 9470617 。/LICS 。.

[10] A. Kerinec 、 G. Manzonetto 和 F. Olimpieri，“ 为什么证明在证明相关模型中具有相关性? ”《PACMPL》，第 7, 8 1 8 31，卷，2023 [ ] 10 1145 POPL，页码：–: 。在线。可访问：https://doi.org/ 3571201

[11] D. Scott 和 C. Strachey，《迈向计算机语言的数学语义》。牛津大学计算实验室、程序设计研究组，牛津，1971 年，第 1 卷。[12] J. Lambek，“完备范畴的不动点定理”，《数学杂志》，第 103 卷，第 151–161 页，1968 年。 [在线]。可访问：http://eudml.org/doc/ 70906 。[13] D. J. Lehmann 和 M. B. Smyth，“数据类型的代数规范：一种综合方法”，《数学系统理论》，第 14 卷，第 1 期，第 97–139 页，1981 年。[14] J. Ad´amek，“Scott 域的范畴推广”，《计算机科学中的数学结构》，第 7 卷，第 5 期，第 419–443 页，1997 年。[15] P. Taylor，“范畴的极限-余极限一致性”，未发表预印本，帝国理工学院，伦敦，1988 年。[16] M. P. Fiore，《偏映射范畴中的公理化域理论》。剑桥大学出版社，2004 年，第 14 卷。[17] G. L. Cattani、M. Fiore 和 G. Winskel，“递归域理论及其在并发中的应用”，载于《第 13 届 IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会论文集》，LICS ’98 系列。美国：IEEE 计算机学会，1998 年，第 214 页。[18] G. L. Cattani 和 M. P. Fiore，“递归域方程的双范畴理论解”，《理论计算机科学电子札记》，第 172 卷，第 203–222 页，2007 年。[19] A. Pitts，“逼近演算基础”，1987 年。[20] K. A. Ponto，《双范畴的不动点理论与迹》。芝加哥大学，2007 年。[21] K. Ponto 和 M. Shulman，“双范畴中的影子与迹”，《同伦及相关结构杂志》，第 8 卷，第 2 期，第 151–200 页，2013 年。[22] A. K. Simpson，“通过二自然性刻画最小不动点算子”，《理论计算机科学》，第 118 卷，第 2 期，第 301–314 页，1993 年。[23] A. Joyal、R. Street 和 D. Verity，“带迹幺半范畴”，载于《剑桥哲学学会数学学报》，第 119 卷，第 3 期。剑桥大学出版社，1996 年，第 447–468 页。[24] S. Eilenberg，“范畴 C”。[25] G. Plotkin，“域。比萨笔记，1983”，爱丁堡大学。[26] P. Freyd，“代数完备范畴”，载于《范畴论》。施普林格，1991 年，第 95–104 页。

[27] M. B. Smyth 和 G. D. Plotkin，《递归域方程的范畴论解》，《SIAM计算杂志》，第 11 卷，第 4 期，第 761–783 页，1982 年。[28] J. Girard，《线性逻辑》，《理论计算机科学》，第 50 卷，第 1–102 页，1987 年。 [ ] 10 1016 0304 3975 87 90045 4 在线。

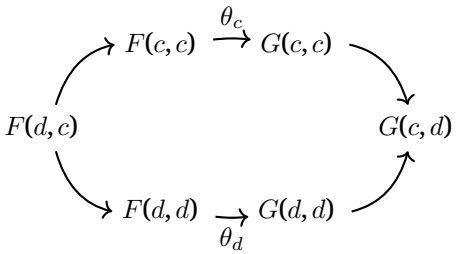
[29] 可访问：https://doi.org/。/ - ( ) - C. Grellois 和 P.-A. Mellies，《线性逻辑的无穷模型》，载于《国际软件科学基础与计算结构会议》。施普林格，2015 年，第 41–55 页。[30] P. S. Mulry，《强单子、代数与不动点》，《范畴在计算机科学中的应用》，第 177 卷，第 202–216 页，1992 年。[31] S. Bozapalides，《双范畴形式理论》。Ehresmann、Bastiani，1976 年。[32] ——，《广义笛卡尔端》，《数学档案》，第 13 卷，第 2 期，第 75–87 页，1977 年。[33] J. Climent Vidal 和 J. Soliveres Tur，《机构概念的二范畴推广》，《逻辑学研究》，第 95 卷，344，2010 年 3，301，第 – 页。[34] A. S. Corner，《余下降对象的泛刻画》，arXiv 预印本 arXiv:1709.01332，2017 年。[35] K. Hirata，《关于松弛端的札记》，arXiv 预印本 arXiv:2210.01522，2022 年。[36] J. Lambek，《完备范畴的不动点定理》，《数学杂志》，第 103 卷，第 2 期，第 151–161 页，1968 年。[37] J. Bénabou，《分配子在工作》，2000 年，Thomas Streicher 撰写的讲义。[在线。可访问：https://www2.mathematik.tu-darmstadt.de/~streicher/FIBR/DiWo.pdf [38] Z. Galal，《预函子式 Scott 语义》，载于第五届形式计算与演绎结构国际会议（FSCD 2020）。Schloss Dagstuhl-Leibniz 信息学中心，2020 年。[39] M. Fiore，《群胚上预层范畴之间的解析函子》，《理论计算机科学》，第 546 卷，第 120–131 页，2014 年。[40] M. Fiore、N. Gambino、M. Hyland 和 G. Winskel，《相对伪单子、Kleisli 双范畴与代换幺半结构》，《数学选刊》，第 24 卷，第 3 期，第 2791–2830 页，2018 年。[41] I. Moerdijk 和 E. Palmgren，《范畴中的良基树》，《纯粹与应用逻辑年刊》，第 104 卷，第 1–3 期，第 189–218 页，2000 年。[42] P. Aczel、J. Adámek 和 J. Velebil，《无限树与迭代的余代数视角》，《理论计算机科学电子札记》，第 44 卷，第 1 期，第 1–26 页，2001 年。[43] N. Gambino 和 M. Hyland，《良基树与依赖多项式函子》，载于《证明与程序类型国际研讨会》。施普林格，2004 年，第 210–225 页。[44] B. van den Berg 和 F. De Marchi，《范畴中的非良基树》，《纯粹与应用逻辑年刊》，第 146 卷，59，2007 年 1，40，第 – 页。[45] M. Hasegawa，《循环共享中的递归：带迹幺半范畴与循环 λ 演算模型》，载于《类型化 λ 演算与应用国际会议》。施普林格，1997 年，第 196–213 页。[46] N. Benton 和 M. Hyland，《带迹预幺半范畴》，《RAIRO-理论计算机科学与应用》，第 37 卷，299，2003 年 4，273，第 – 页。

A. 适用于 2-范畴的余自然变换与强二自然变换

我们首先回顾余自然变换和强余自然变换的 1-范畴概念，然后介绍它们在 2-范畴中的推广。

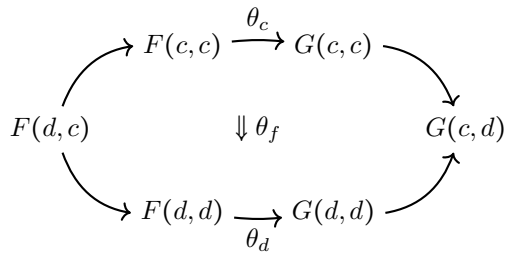
1）余自然变换：

定义 A.1. 对于范畴 $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ 和函子 $F, G : \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，余自然变换 $\theta : F \Rightarrow G$ 由一族 1-胞腔 $\{\theta_c : F(c,c) \to G(c,c)\}_{c \in \mathscr{C}}$ 组成，该族以 $\mathbb{C}$ 中的对象 c 为指标，并且对于 $\mathbb{C}$ 中的每个态射 $f : c \to d$，以下六边形交换：



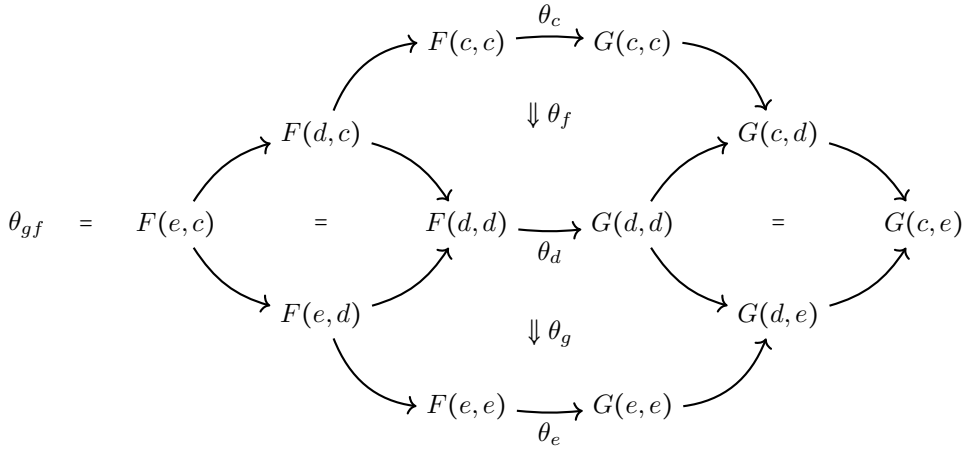
定义 A.2. 对于 2-范畴 $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ 和 2-函子 $F, G : \mathscr{C}^{\text{对偶}} \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$，松余自然变换 $\theta : F \Rightarrow G$ 由以下部分组成：

- 一族 1-胞腔 $\{\theta_c : F(c,c) \to G(c,c)\}_{c \in \mathscr{C}}$，由 $\mathscr{C}$ 中的对象 c 索引；
- 对于 $\mathscr{C}$ 中的每个 1-胞 $f : c \to d$，一个 2-胞腔：

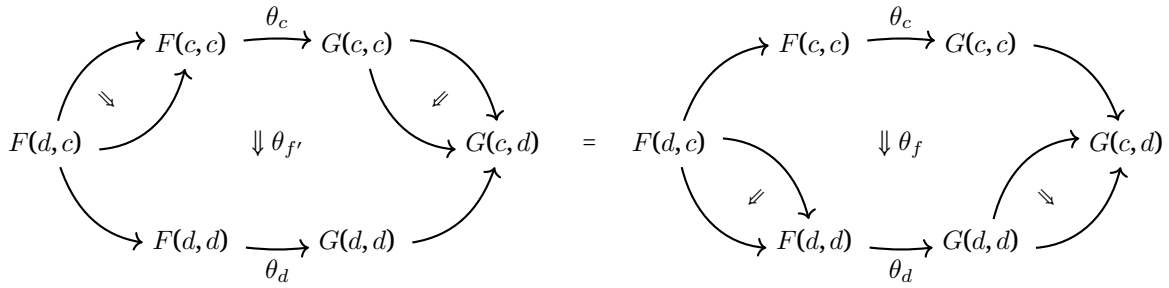


满足以下公理：

1) 单位性：对于每个对象 $c \in \mathscr{C}$，$\theta_{1_c} = \mathrm{id}_{\theta_c}$；2) 1-自然性：
对于 $\mathscr{C}$ 中的每对 1-胞腔 $f : c \to d$ 和 $g : d \to e$，

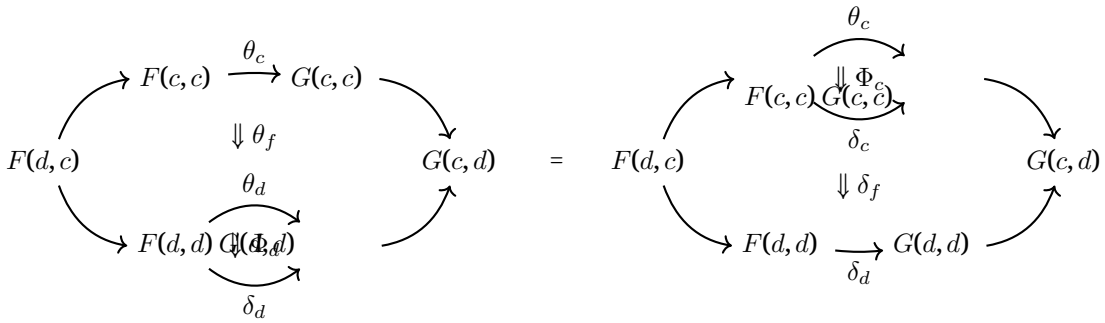


3）2-自然性：对于 $\mathscr{C}$ 中的每个 2-胞腔 $\alpha : f \Rightarrow f'$：



对于余松弛二自然变换，2-胞 θ_f 的方向相反。当 2-胞 θ_f 可逆时，我们得到伪二自然变换的概念；当它们是严格恒等时，我们得到严格二自然变换。

定义 A.3. 松余自然变换 $\Phi : \theta \Rrightarrow \delta : F$、$\hat{\mathbf{O}}\Rightarrow G : \mathscr{C}_{\text{对偶}} \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$之间的修正由一族 2-胞腔 $\{\Phi_c : \theta_c \Rightarrow \delta_c\}_{c\in\mathscr{C}}$组成，并满足对于 $\mathscr{C}$中的每个 1-胞 $f : c \to d$，以下等式成立：



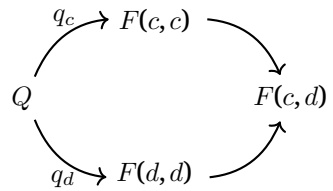
与 1-范畴情形类似，我们无法对松弛二自然变换进行水平复合，因此以下数据

- 0-胞：混合变变 2-函子 F、$G : \mathscr{C}_{\text{op}} \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$;
- 1-胞腔：松余自然变换 $\theta : F$。$\hat{\mathbf{O}}\Rightarrow G$;
- 2-胞：它们之间的修正 $\Phi : \theta \Rrightarrow \delta$。

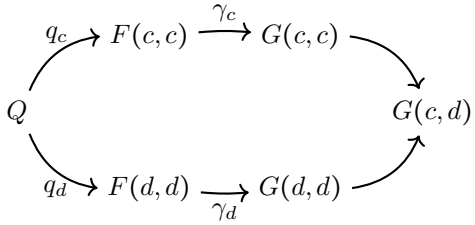
这并不构成一个 2-范畴，因此我们需要强松弛二自然变换的概念来使其具有复合性。

2）强二自然变换:

定义 A.4. 对于范畴 $\mathbb{C}$、$\mathbb{D}$ 以及函子 F、$G : \mathbb{C}^{\text{op}} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，强二自然变换 $\gamma : F$。$\hat{\mathbf{O}}\Rightarrow G$ 由一族 1-胞 $\gamma_c : F(c,c) \to G(c,c)_{c\in\mathbb{C}}$ 构成，该族由对象 c 在 $\mathbb{C}$ 中的取值索引，并满足：对于 $\mathbb{C}$ 中的每个态射 $f : c \to d$ 以及 $\mathbb{D}$ 中的每个跨度 $F(c,c) \xleftarrow{q_c} Q \xrightarrow{q_d} F(d,d)$，如果方形



若该图交换，则六边形也交换:



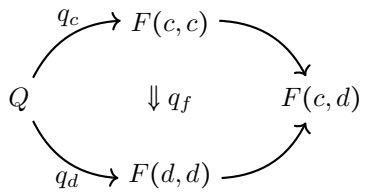
对于函子 F、G、$H:\mathbb{C}^{\mathrm{op}}\times\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ 以及强二自然变换 $\gamma:F\hat{\Rightarrow}G$ 和 $\delta:G\hat{\Rightarrow}H$，变换

$$\{\delta_c\gamma_c:F(c,c)\to H(c,c)\}_{c\in\mathbb{C}}$$

它也具有强二自然性，因此强二自然变换构成一个范畴。要得到二维类比，我们首先需要考虑松弛楔的概念 [31], [32], [33], [34], [35]:

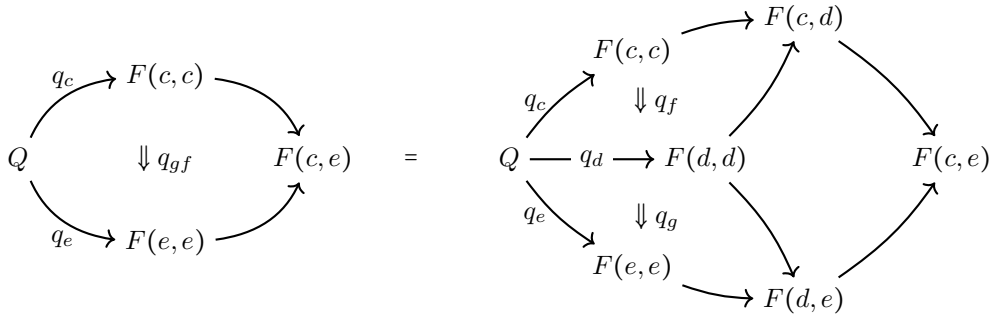
定义 A.5（松弛楔）。设 $\mathscr{C}$、$\mathscr{D}$为 2-范畴， $F:\mathscr{C}^{\text{对偶}}\times\mathscr{C}\to\mathscr{D}$为一个 2-函子。对于 $\mathscr{D}$中的一个对象 Q， Q 在 F 上的松弛楔由以下部分组成:

- 一族 1-胞腔 $\{q_c:Q\to F(c,c)\}_{c\in\mathscr{C}}$，由 $\mathscr{C}$中的对象 c索引;
- 对每个 1-胞 $f:c\to d\in\mathscr{C}$，一个 2-胞腔:

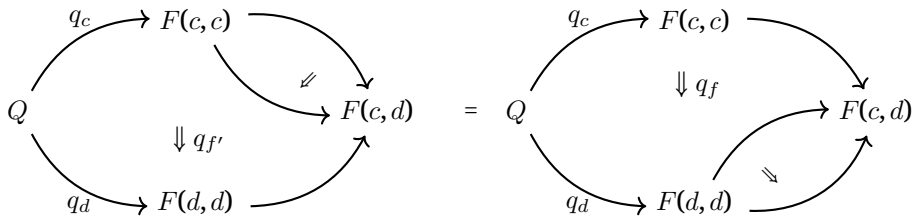


满足以下公理:

1）单位性： $q_{1_c}=\mathrm{id}_{q_c}$ 2）1-自然性：对 1-胞腔 $f:c\to d$ 和 $g:d\to e$,



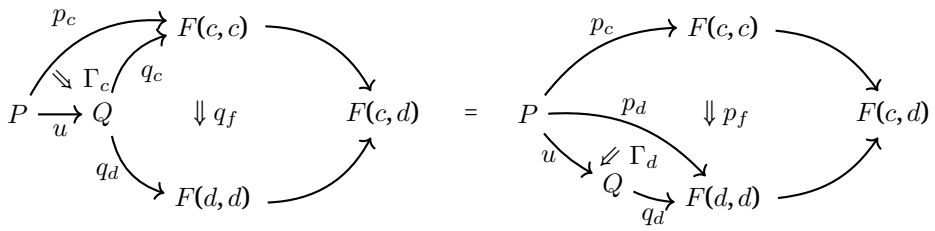
3) 2-自然性：对于每个 2-胞腔 $\alpha:f\Rightarrow f'$,



定义 A.6（松弛楔的态射）。对于 $F:\mathscr{C}_{\mathrm{op}}\times\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 上的两个松弛余楔 (Q,q) 和 (P,p)，从 (P,p) 到 (Q,q) 的松弛态射由以下内容组成

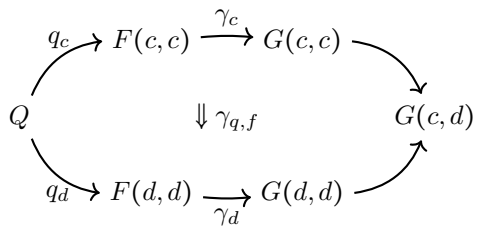
- a 1-cell $u:P\to Q$ in $\mathscr{D}$,
- a family of 2-cells $\{\Gamma_c:p_c\to q_cu\}_{c\in\mathscr{C}}$ indexed by the objects c in $\mathscr{C}$

使得对于所有的 $f:c\to d$ in $\mathscr{C}$，以下两个图相等:



定义 A.7（强松弛二自然变换）。对于 2-范畴 $\mathscr{C}$、$\mathscr{D}$ 和 2-函子 F、$G:\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\times\mathscr{C}\to\mathscr{D}$，强松弛二自然变换 $\gamma:F\ \hat{\Rightarrow}\ G$ 由以下部分组成：

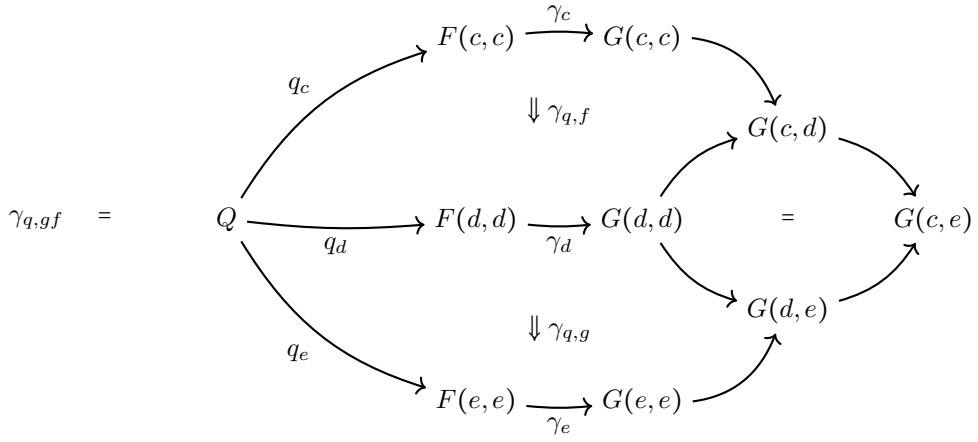
- 一族 1-胞腔 $\{\gamma_c:F(c,c)\to G(c,c)\}_{c\in\mathscr{C}}$，其由对象 $c\,\mathrm{in}\ \mathscr{C}$ 索引；
- 对于每个在 F 上、相对于 (Q,q) 的松弛楔，以及 $\mathscr{C}$ 中的每个 1-胞腔 $f:c\to d$，有一个 2-胞腔：



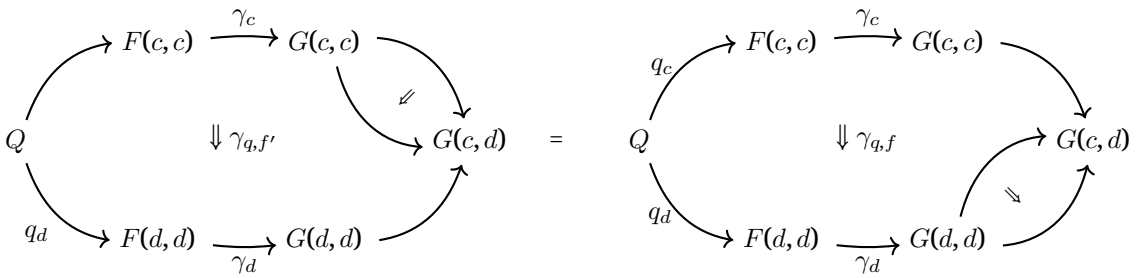
满足以下公理：

1）单位性：对于每个对象 $c\in\mathscr{C}$、$\gamma_{q,\ 1_c}=\mathrm{id}_{\gamma_c q_c}$；2）

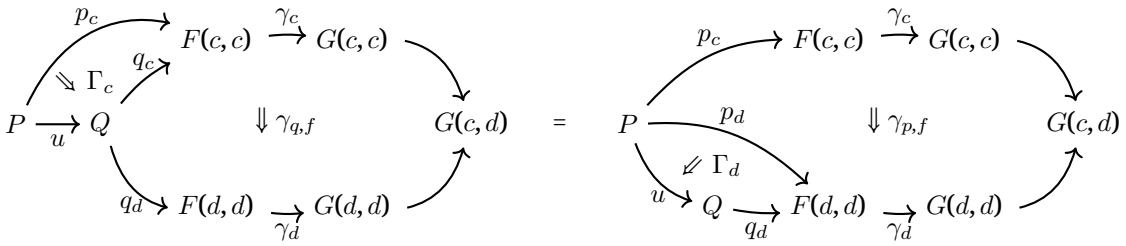
1-自然性：对于每个 1-胞腔 $f:c\to d$ 和 $g:d\to e$，



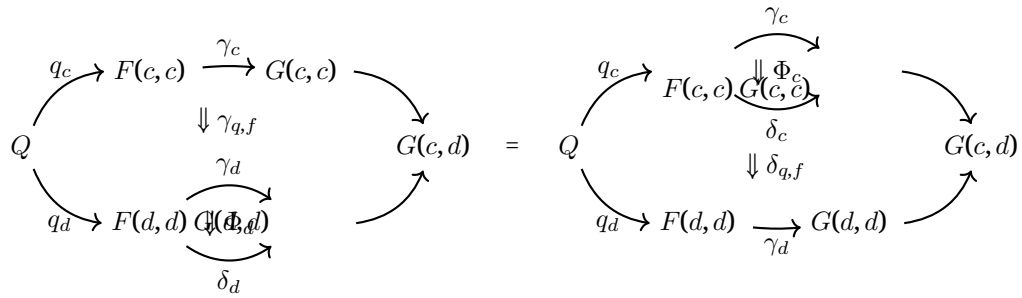
3）2-自然性：对于 $\mathscr{C}$ 中的每个 2-胞腔 $\alpha:f\Rightarrow f'$：



4) 对于每个关于 F 的松弛楔态射 $(u,\Gamma):(P,p)\to(Q,q)$，以及每个 $f:c\to\qquad\qquad d$，



定义 A.8. 强松弛二自然变换 $\Phi : \gamma \Rrightarrow \delta : F \mathbin{.\hat{O}\Rightarrow} G$ 之间的修正由一族 2-胞腔 $\{\Phi_c : \gamma_c \Rightarrow \delta_c\}_{c \in \mathscr{C}}$ 构成，使得对于 $\mathscr{C}$ 中每个关于 F 的松弛楔 (Q, q) 和 1-胞 $f : c \to d$，以下等式成立：



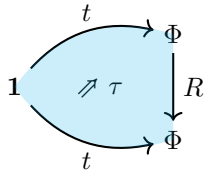
定义 A.9. 对于 2-范畴 $\mathscr{C}$和 $\mathscr{D}$，我们用 StDin($\mathscr{C}, \mathscr{D}$) 表示以下数据：

- 0-胞：混合变变 2-函子 $F, G : \mathscr{C}^{反\times} \mathscr{C} \to \mathscr{D}$;
- 1-胞腔：强松弛二自然变换 $\gamma : F \mathbin{。} \Rightarrow G$;
- 2-胞腔：它们之间的修正 $\Phi : \gamma \Rrightarrow \delta$。

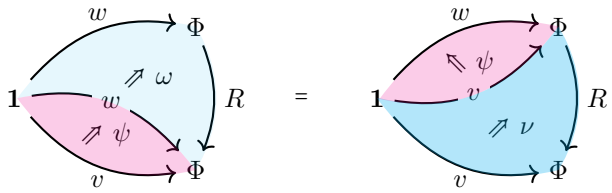
Pr命题 A.10. 对于 2-范畴 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$，上文定义的 StDin($\mathscr{C}, \mathscr{D}$) 构成一个 2-范畴 *ry.*

B. 第 III 节的证明

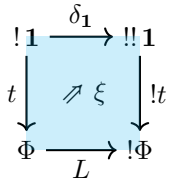
引理 III.2. 存在一个 1-胞 $t : \mathbf{1} \to \Phi$ 以及 $\mathscr{D}$ 中的一个可逆 2-胞 $\tau : t \Rightarrow Rt$



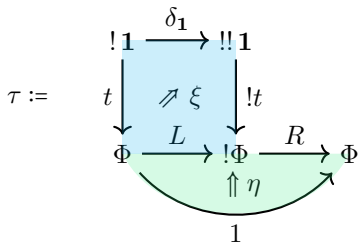
满足以下性质：对于 $\mathscr{D}$ 中的任意 1-胞腔 v、$w : \mathbf{1} \to \Phi$ 以及可逆 2-胞 $\nu : v \Rightarrow Rv$ 和 $\omega : w \Rightarrow Rw$，存在 $\mathscr{D}$ 中唯一的可逆 2- 胞 $\psi : v \Rightarrow w$，使得



证明。由引理 II.10， R是伴随等价（$R : !\Phi \to \Phi, L : \Phi \to !\Phi, \eta : \mathrm{id} \mathbin{\tilde{\hat{O}}\Rightarrow} RL, \varepsilon : LR \mathbin{\tilde{\hat{O}}\Rightarrow} \mathrm{id}$）的一部分，其中 $L : \Phi \to !\Phi$ 是伪终。因此，存在一个 1-胞 $t : !\mathbf{1} \to \Phi$ 和一个 2-胞腔 ξ，位于 $\mathscr{C}$中，如下所示：

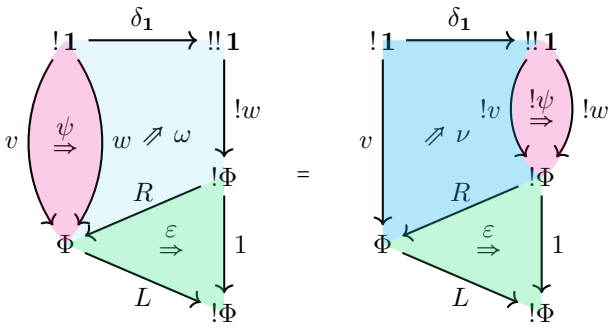


并将 τ 定义为 $\mathscr{C}$ 中如下的 2-胞腔

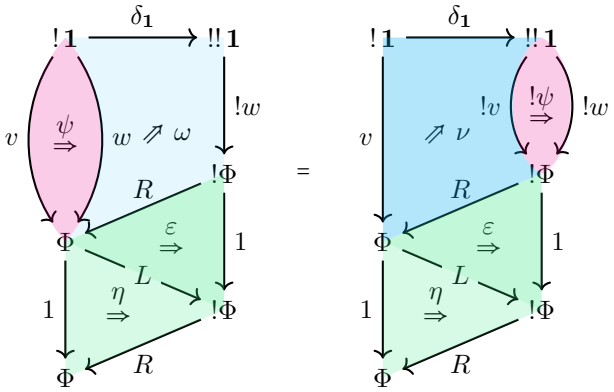


这正如所需，对应于 $\mathscr{D}$ 中边界为 $t \Rightarrow Rt$ 的一个 2-胞腔。

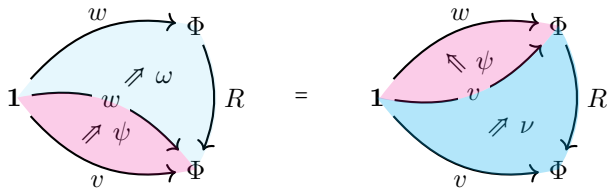
现在假设我们有 $\mathscr{D}$ 中的 2-胞 $\nu : v \Rightarrow Rv$ 和 $\omega : w \Rightarrow Rw$。根据 L 的泛性质，存在唯一的 2-胞 $\psi : v \Rightarrow w$，使得



在 $\mathscr{C}$ 中。利用伴随恒等式，消去等式两边的 2-胞 ε



并在 $\mathscr{D}$ 中改写上述等式，我们得到存在 $\mathscr{D}$ 中唯一的可逆 2-胞 $\psi : v \Rightarrow w$，使得：



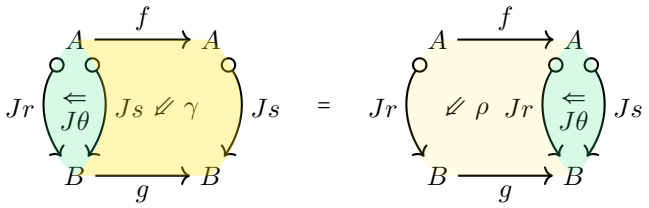
□

引理 III.3（fix 的自然性）。对于 $\mathscr{D}$ 中的 2-胞 $\alpha : f \Rightarrow g$，我们有 $\mathrm{fix}_g\ \alpha^* = (\alpha \cdot \alpha^*)\ \mathrm{fix} f$。

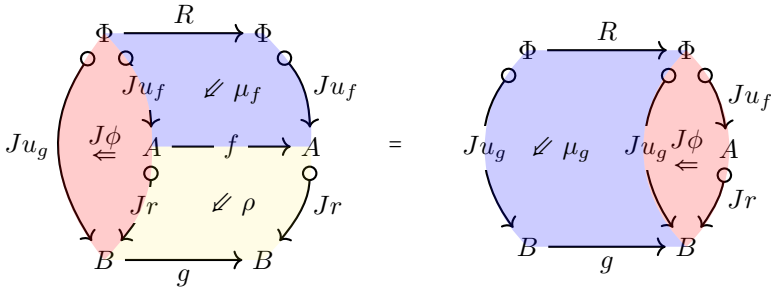
证明。直接展开相应的 2-胞即可。 □

命题 III.4。我们构造的 2-胞 unif_γ 给出了一个强伪二自然变换，并且它们满足 fix 与 unif 之间的相干公理。

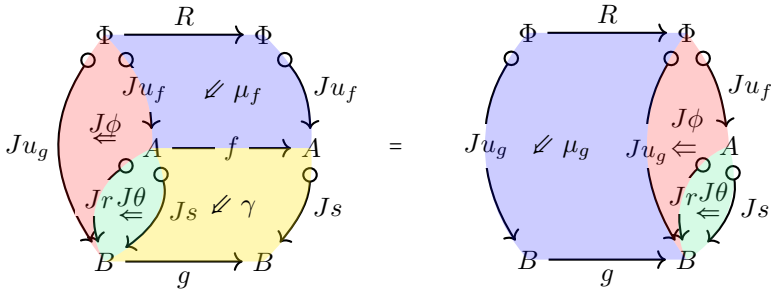
证明。对于强伪二自然公理，我们只证明 2-自然性公理，其他情形的证明方法类似。假设我们在 $\mathscr{D}$ 中有以下等式：



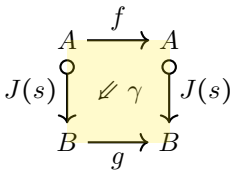
令 $\phi : ru_f \Rightarrow u_g$ 为 $\mathscr{C}$ 中唯一满足以下条件的 2-胞腔：



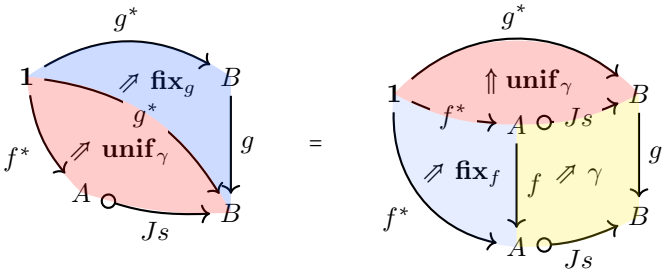
使得 $\mathrm{unif}_\rho = J\phi \cdot t : J(r)J(u_f)t \Rightarrow J(u_g)t_\circ$ 我们要证明 $\mathrm{unif}_\gamma = \mathrm{unif}_\rho(J\theta \cdot (J(u_f)t))$，这可由以下等式立即得出：



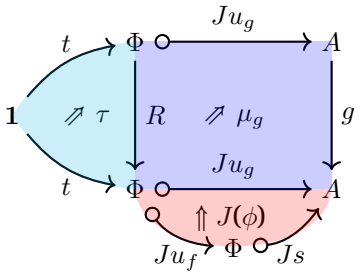
要证明我们构造的算子 ((–)*, fix, unif) 是关于 J 的 $\mathscr{D}$一致伪不动点算子，只需证明 fix 与 unif 之间的相干公理，也就是说，对于一个 2-胞腔



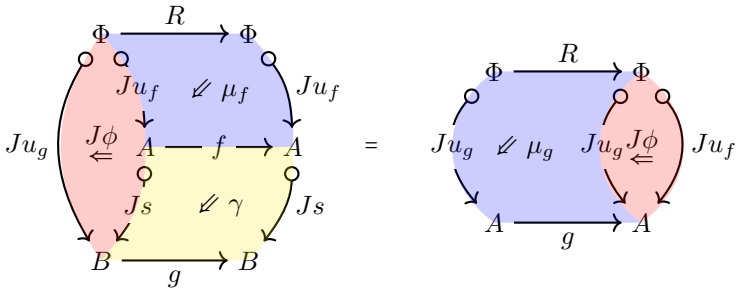
在 $\mathscr{D}$ 中，我们有：



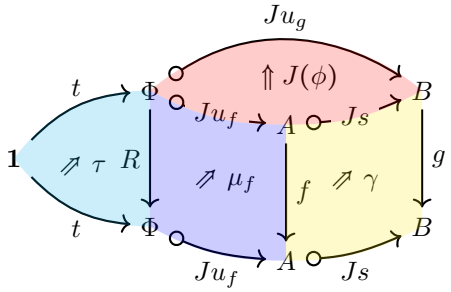
左边等于：



其中，$\phi : su_f \Rightarrow u_g$ 是 $\mathscr{C}$ 中满足以下条件的唯一可逆 2-胞：



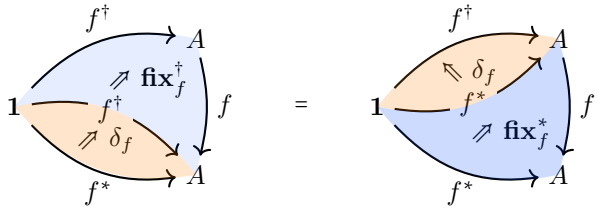
使得左侧等于下图



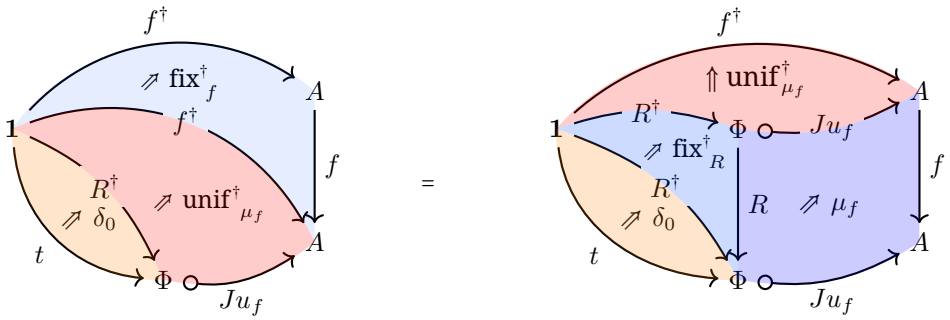
它对应于所需等式的右侧。 □

命题 III.5. 范畴 $\mathbf{Fix}(\mathscr{D}, J)$ 是可缩的，即 δ 是一致伪不动点算子之间的同构，且该同构唯一。

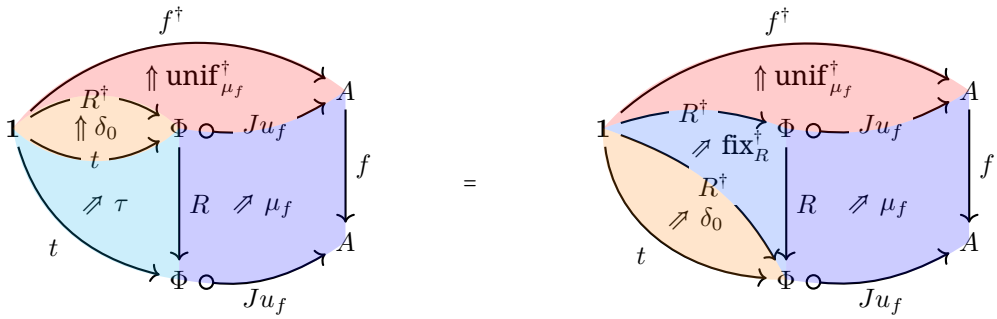
证明。我们首先证明 δ 是伪不动点算子态射，方法是证明它与不动点 2-胞相容：



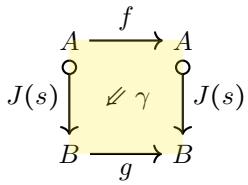
左侧图等于：



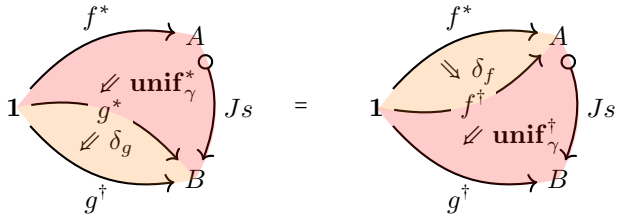
上面的等式由 $\mathbf{fix}^\dagger$ 与 $\mathbf{unif}^\dagger$ 之间的相容性推出。根据 δ_0 的定义，右侧图表等于：



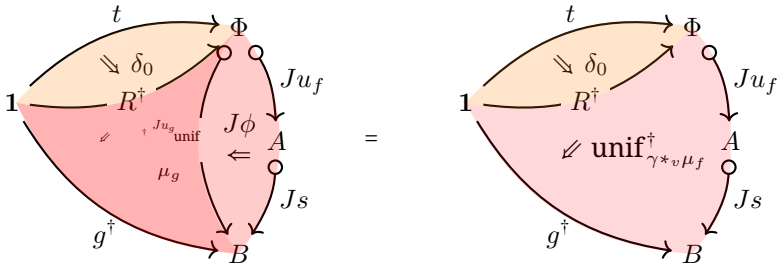
并由此得到所需的等式。现在我们需要证明 δ 是一致伪 fix 点算子的态射，即对于 $\mathscr{D}$ 中的每个方形：



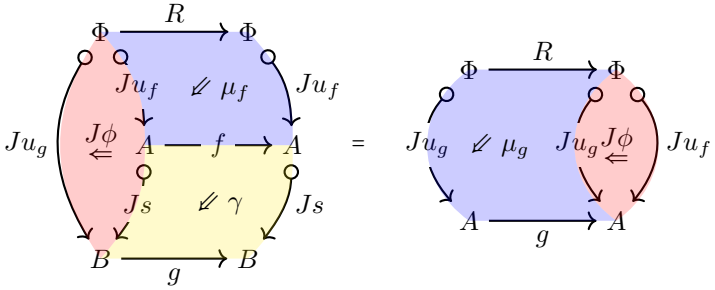
我们有：



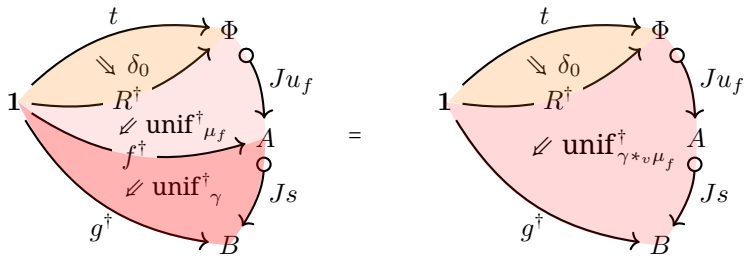
根据 $\mathbf{unif}^*_\gamma$ 的定义以及 $\mathbf{unif}^\dagger$ 的 2-自然性公理，左侧的图等于：



其中 ϕ 是唯一的 2-胞腔 $su_f \Rightarrow u_g$，满足：

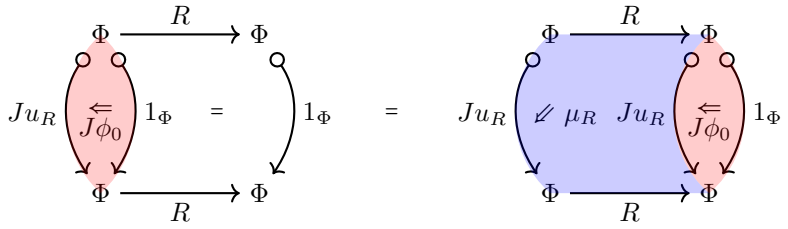


右侧的图等于

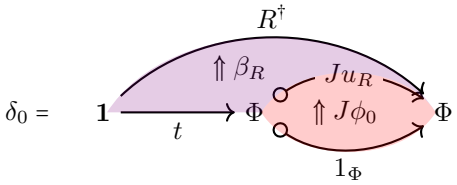


其中，上述等式由 $\mathsf{unif}^\dagger$ 的 1-自然性公理推出。

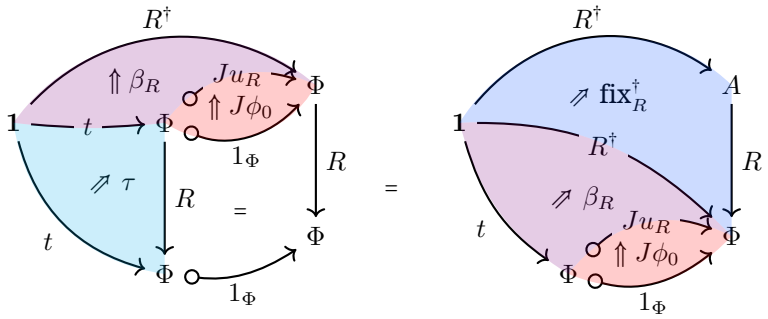
为证明唯一性，假设存在另一个一致伪不动点算子态射 $\beta : (\text{–})^* \to (\text{–})^\dagger$。我们将证明，对于每个 $f : A \to A$，$\delta_f = \beta_f$。令 ϕ_0 为 $\mathscr{C}$ 中满足以下条件的唯一可逆 2-胞 $1_\Phi \Rightarrow u_R$：



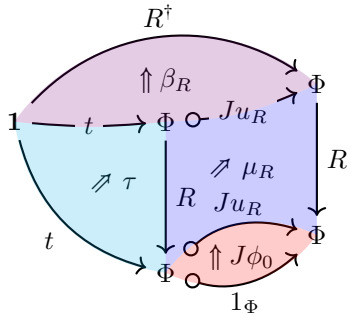
这是由引理 III.1 得到的。我们证明



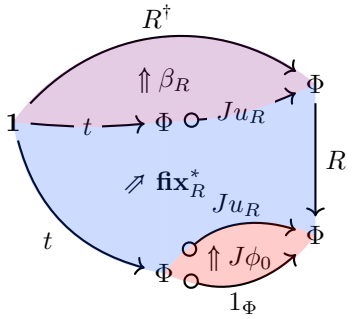
通过证明以下等式：



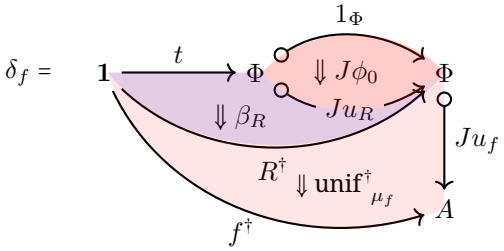
并利用 δ_0 的泛性质。根据 ϕ_0 的定义，左边等于：



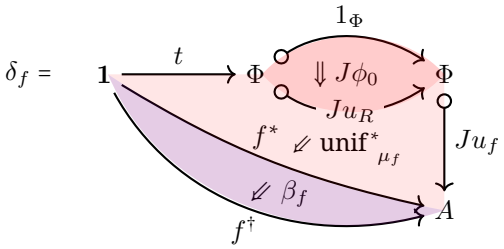
由于 β 是伪不动点算子态射，右边等于：



因此，根据 $\mathbf{fix}^*_R$ 的定义，两边相等。由此可得

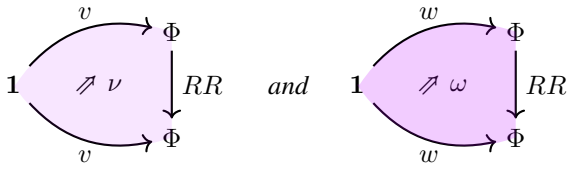


由于 β 是一致伪不动点算子的态射， δ_f 等于：

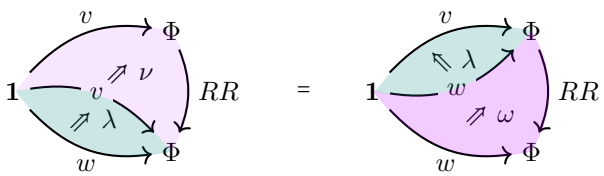


利用 $\mathbf{unif}^*_{\mu_f}$ 的泛性质，我们得到 $\mathbf{unif}^*_{\mu_f}(J\phi_0 \cdot t) = \mathrm{id}$，从而得出所需结论。 □

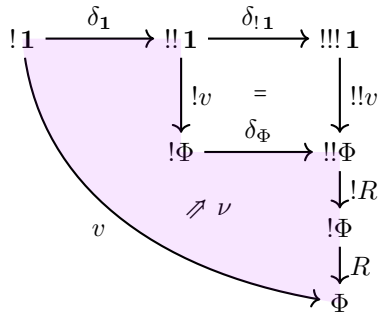
引理 IV.2. 对于 $\mathscr{D}$ 中的 1-胞腔 v、$w : \mathbf{1} \to \Phi$ 以及 2-胞腔



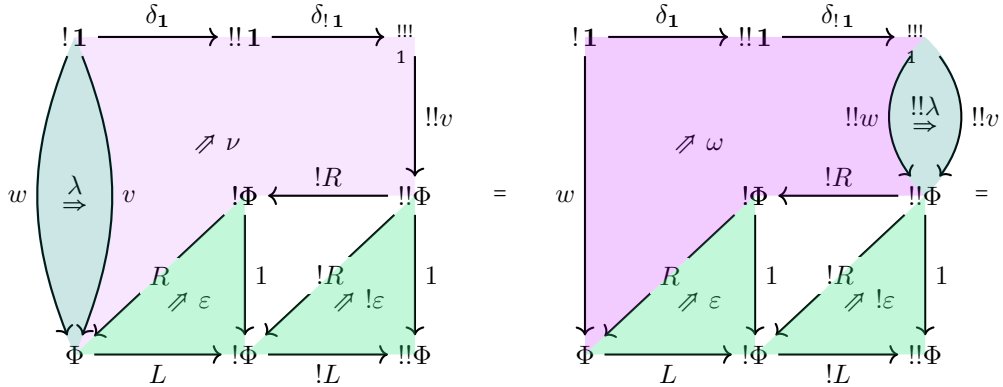
在 $\mathscr{D}$ 中，存在唯一可逆 2-胞 $\lambda : w \Rightarrow v$，使得它位于 $\mathscr{D}$ 中



证明。 ν 中的 2-胞在 $\mathscr{D}$ 中，其在 $\mathscr{C}$ 中具有以下边界：



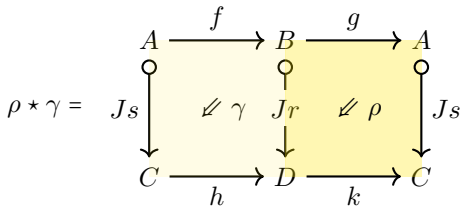
由于 $!LL$ 是一个伪终!!-余代数，故存在唯一的同构 $\lambda : w \Rightarrow v$，使得 :



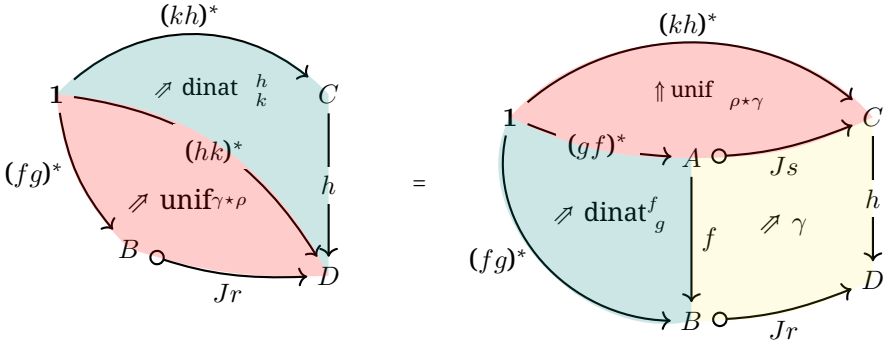
利用伴随恒等式消去两边的 2-胞腔 ε 和 $!\varepsilon$，并在 $\mathscr{D}$中改写上述等式，我们便在 $\mathscr{D}$中得到所需的等式。 □

命题 IV.3。我们构造的 2-胞 dinat_g^f 给出一个伪 dinatural 变换，并且它们验证了 dinat 与 unif 之间的相干公理。

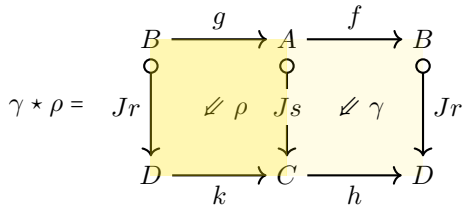
证明。dinat 与 unif 之间的相容性：对于 $\mathscr{D}$ 中如下形式的两个方形



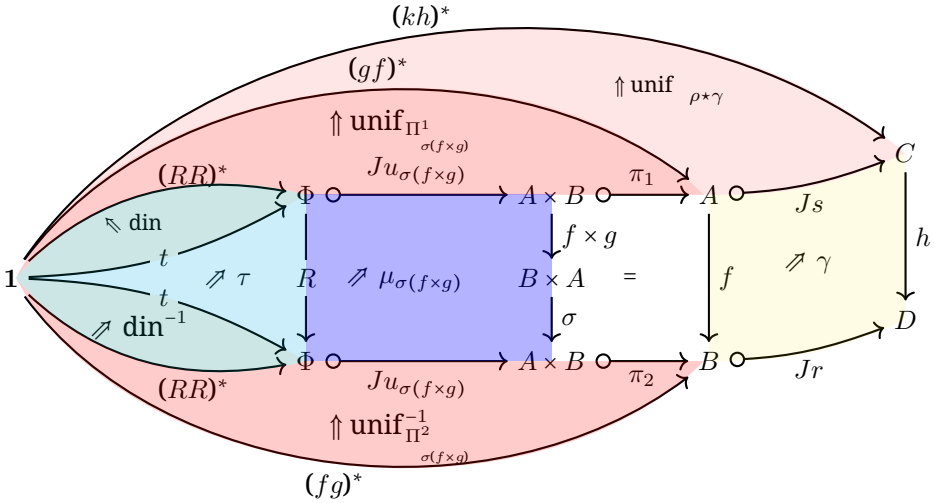
我们有：



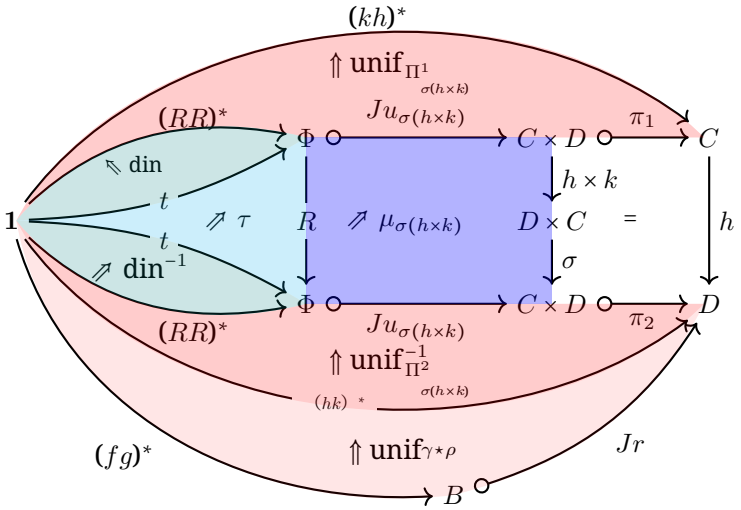
其中 $\gamma \star \rho$ 对应于以下 2-胞腔:



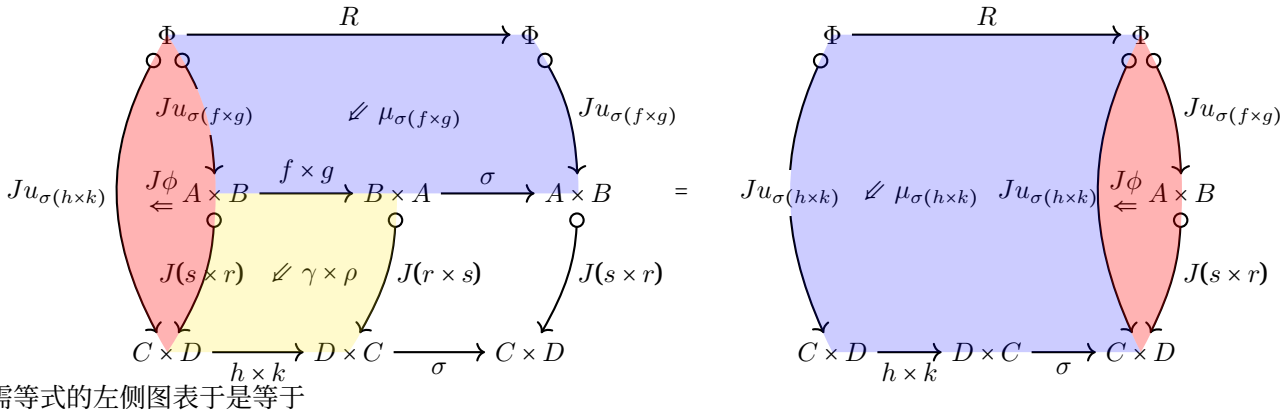
右侧图表等于:



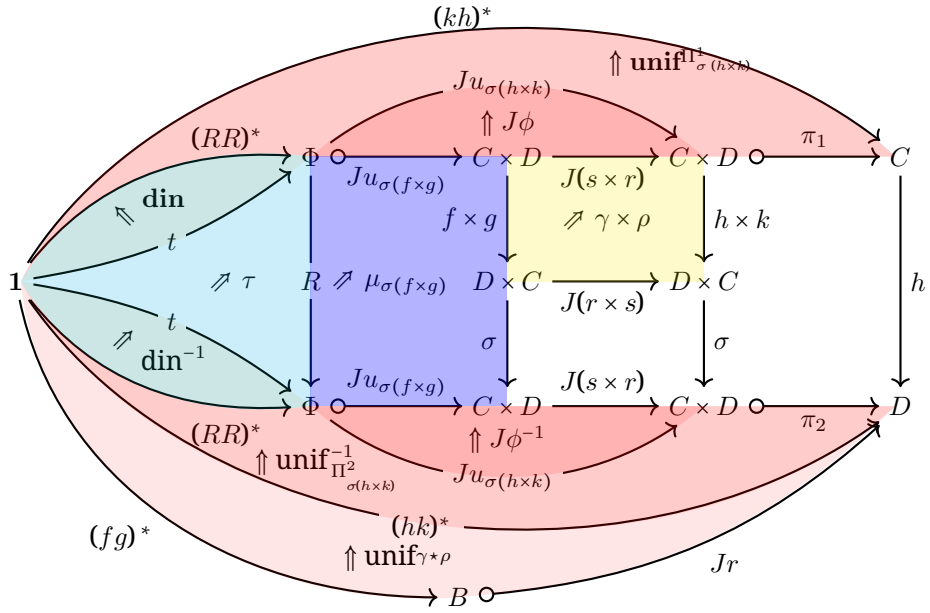
并且左侧图表等于:



令 $\phi : (s \times r)^{u_{\sigma(f\times g)}} \Rightarrow u_{\sigma(h\times k)}$ 为 $\mathscr{C}$ 中满足以下条件的唯一可逆 2-胞



所需等式的左侧图表于是等于



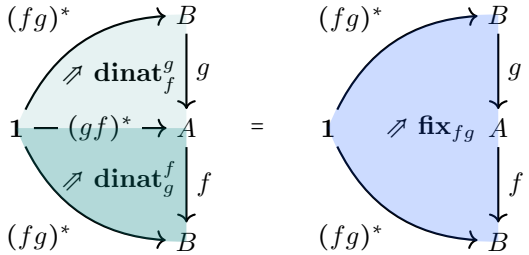
根据 unif 的泛性质，现在可以验证

$$\mathbf{unif}_{\Pi^1_{\sigma(h\times k)}}(\pi_1 \cdot J\phi \cdot (RR)^*) = \mathbf{unif}_{\rho\star\gamma}(Js \cdot \mathbf{unif}_{\Pi^1_{\sigma(f\times g)}}) \qquad \text{and}$$

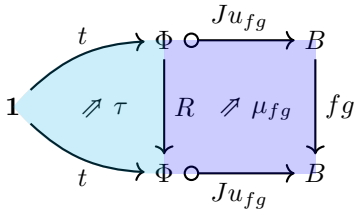
$$(\pi_2 \cdot J\phi^{-1} \cdot (RR)^*)\, \mathbf{unif}^{-1}_{\Pi^2_{\sigma(h\times k)}}\, \mathbf{unif}_{\gamma\star\rho} = Jr \cdot \mathbf{unif}^{-1}_{\Pi^2_{\sigma(f\times g)}}$$

从而得到所需的等式。

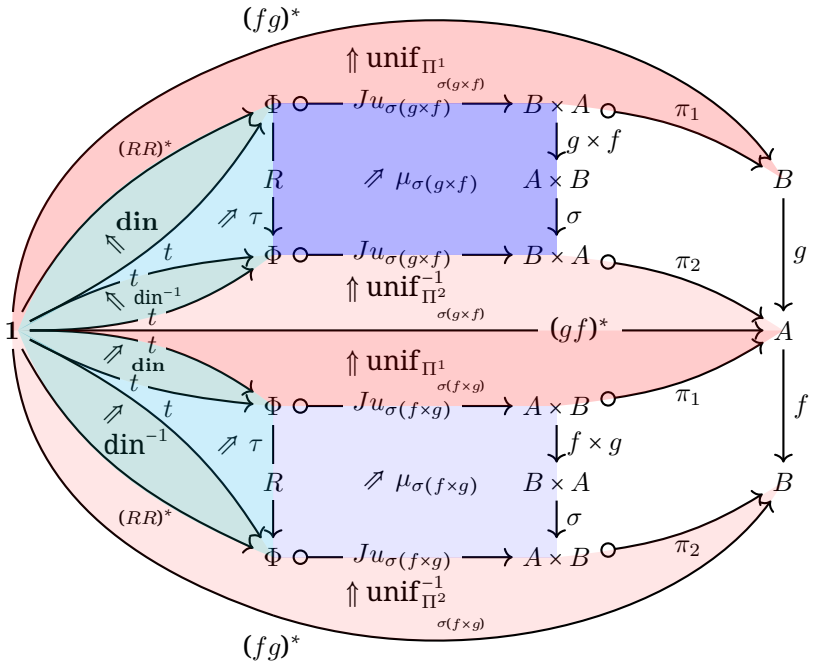
dinat 与 fix 之间的一致性：对于 $\mathscr{D}$ 中的 1-胞腔 $f : A \to B$ 和 $g : B \to A$，我们希望证明：



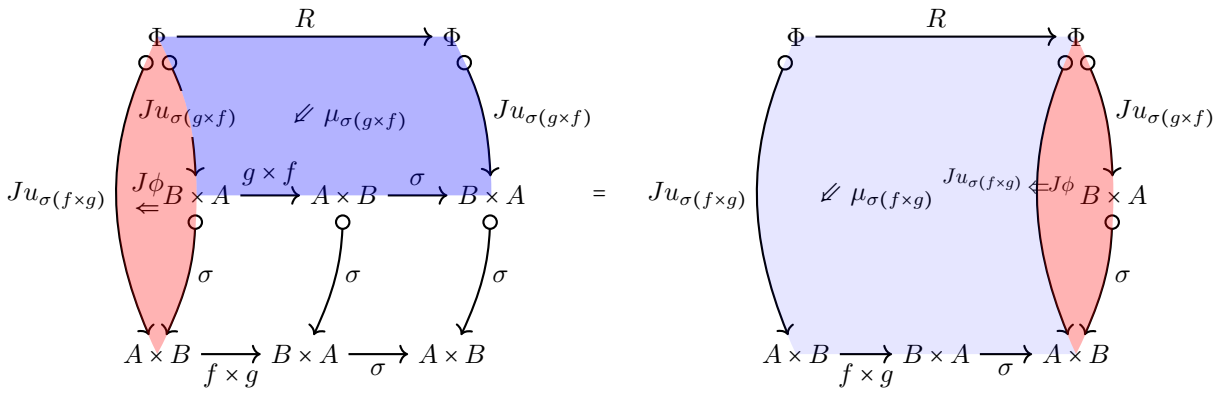
右侧图表等于：



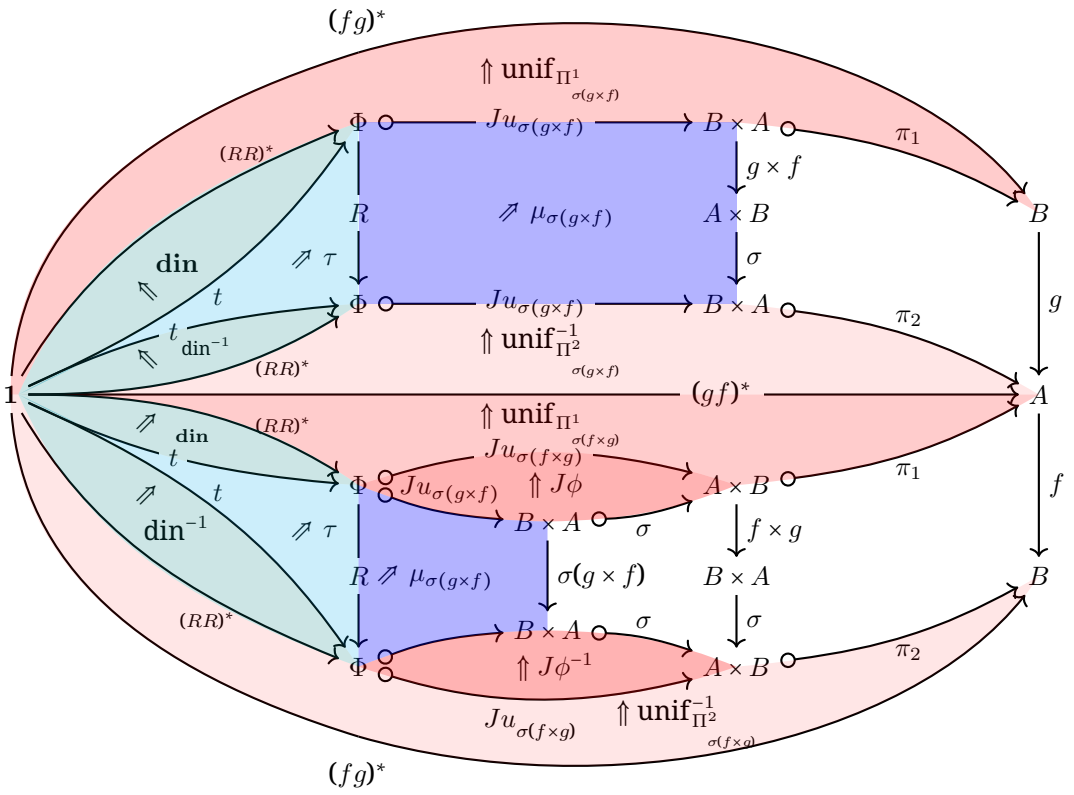
且左侧图表等于：



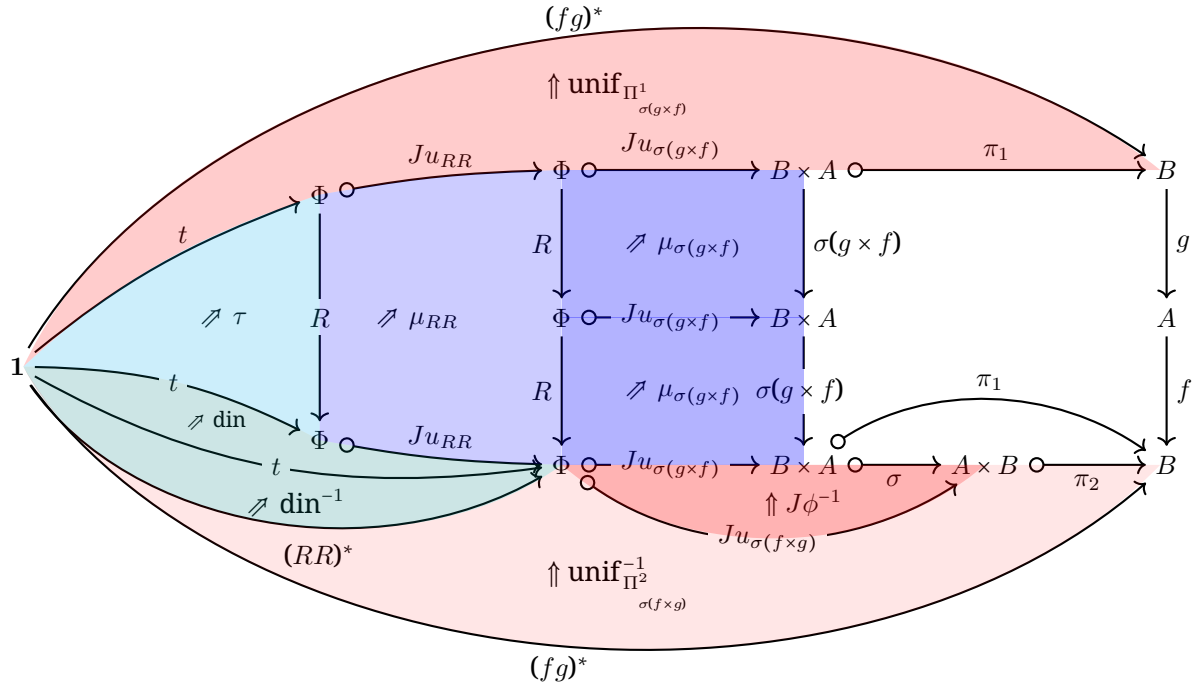
我们采用与之前类似的推理，并令 $\phi : \sigma u_{\sigma(g\times f)} \Rightarrow u_{\sigma(f\times g)}$ 为 $\mathscr{C}$ 中的唯一可逆 2-胞，使得



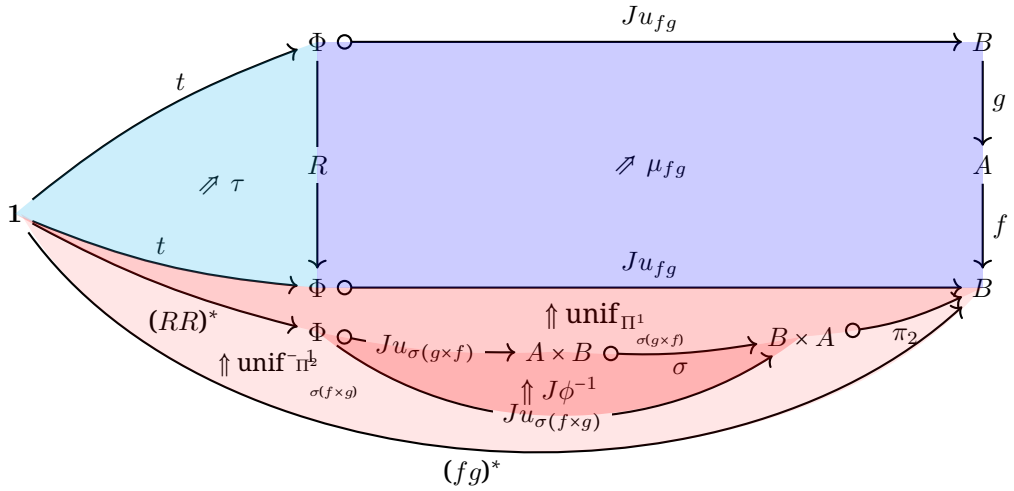
因此，我们可以将前面的图改写为：



利用 unif 的泛性质，我们可以证明 $\mathrm{unif}^{-1}_{\Pi^2_{\sigma(g\times f)}}\mathrm{unif}_{\Pi^1_{\sigma(f\times g)}}(\pi_1\cdot J\phi\cdot t)=\mathrm{id}$，从而可以将图简化为

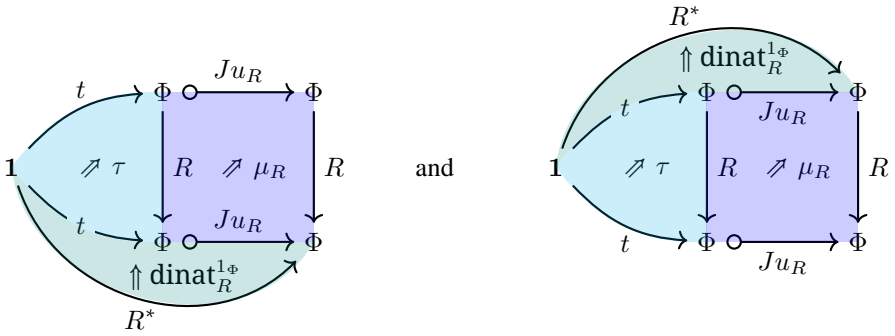


使用 unif 的定义 以及 unif 和 fix 之间的相容性，我们将上面的图改写为 s:

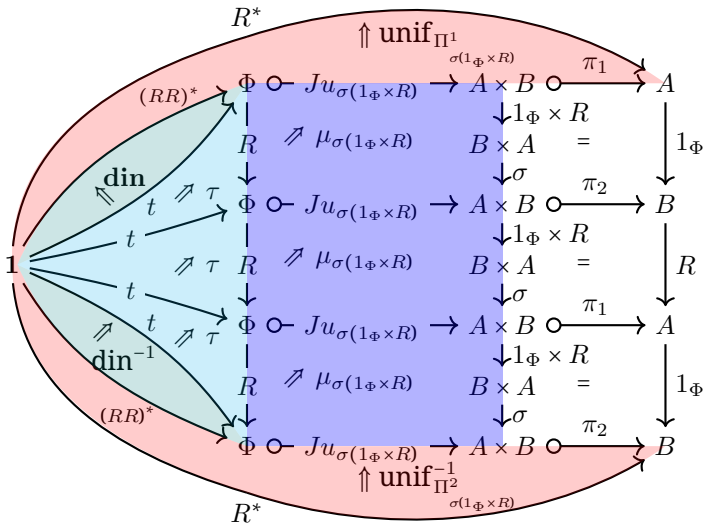


接下来只需验证 $\mathrm{unif}^{\Pi^1}_{\sigma(g\times f)}(\pi_2 \cdot J\phi^{-1} \cdot (RR)^*)\ \mathrm{unif}^{-1}_{\Pi^2_{\sigma(f\times g)}} = \mathrm{id}$，即可得到所需的等式。

dinat 的伪自然性公理：我们只证明单位公理，其他公理的证明方法类似。我们要证明对所有的 $f : A \to A$，都有 $\mathrm{dinat}^{1_A}_f = \mathrm{id}_{f^*}$。我们先证明 $f = R$ 的情形，再利用一致性得到一般结论。首先注意到下面两个图表

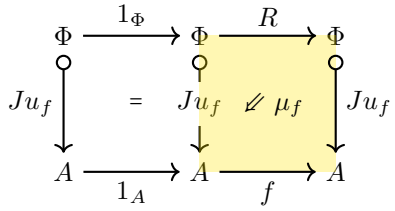


都等于：

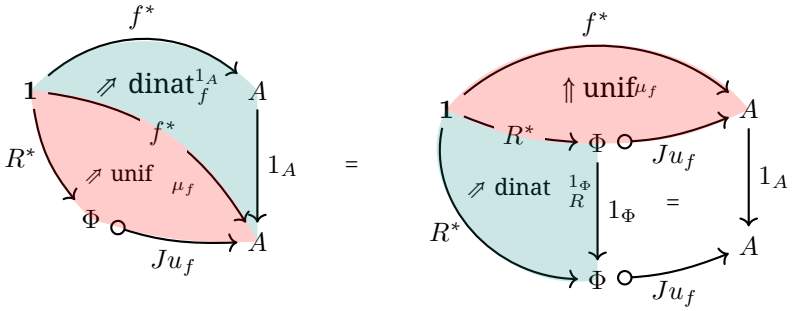


利用引理 III.2，我们得出 $\mathrm{dinat}^{1_\Phi}_R = \mathrm{id}_{R^*}$。

对于一般的 $f : A \to A$ in $\mathscr{D}$，要证明 $\mathsf{dinat}_f^{1_A} = \mathsf{id}_{f^*}$，我们使用先前证明的 unif 与 dinat 之间的相干公理。考虑以下两个方形：

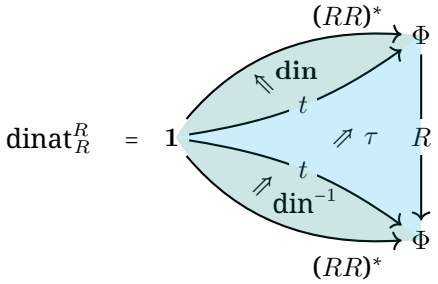


我们得到：

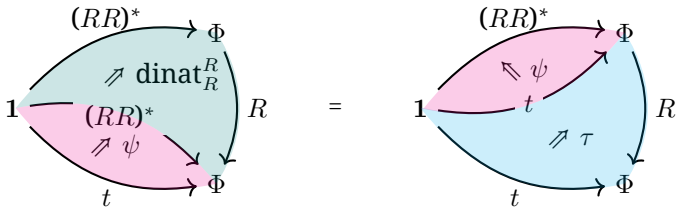


由于我们已经证明了 $\mathsf{dinat}_R^{1_\Phi} = \mathsf{id}_{R^*}$，因此根据上面的等式，我们得到 $\mathsf{dinat}_f^{1_A} = \mathsf{id}_{f^*}$。 □

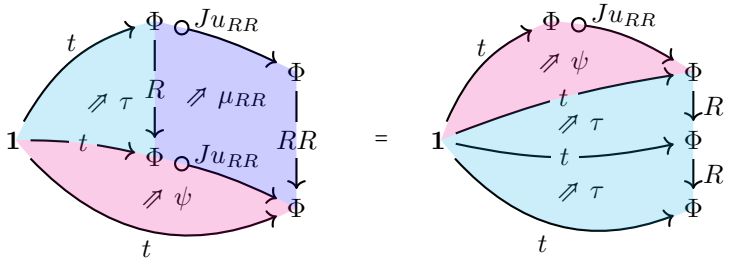
引理 A.11。对于伪双自由代数 R，2-胞腔 dinat_R^R 等于：



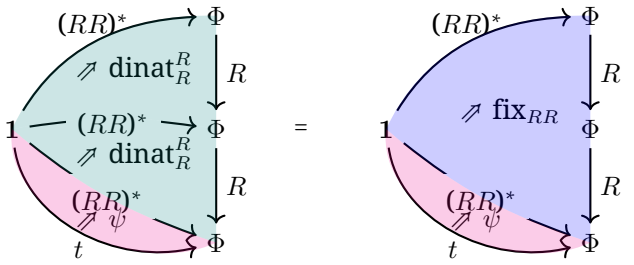
证明。根据引理 III.2，存在唯一可逆 2-胞 $\psi : t \Rightarrow (RR)^*$，使得：



只需证明下述等式成立，即可说明 $\psi = \mathsf{din}$：



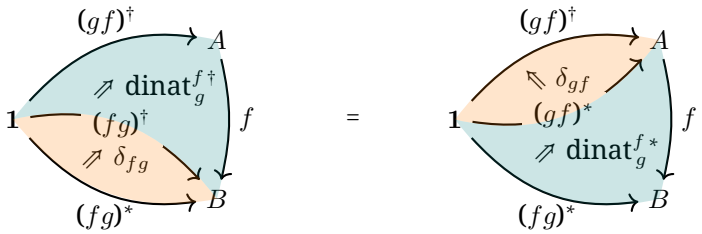
根据定义根据 ψ 的定义以及 dinat 与 fix 之间的相干公理，左侧图表等于 o



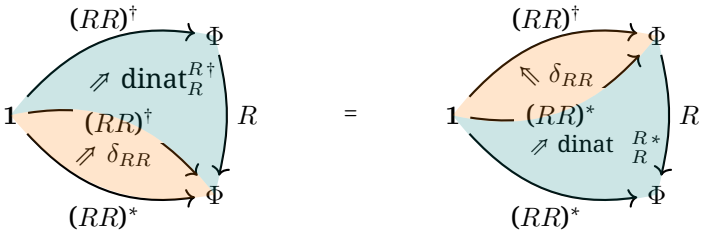
由此得到所需的等式。 □

命题 IV.4. 范畴 DinFix($\mathscr{D}, J$) 是可缩的，即 δ 与 dinaturality 2-胞相交换，且它是唯一的。

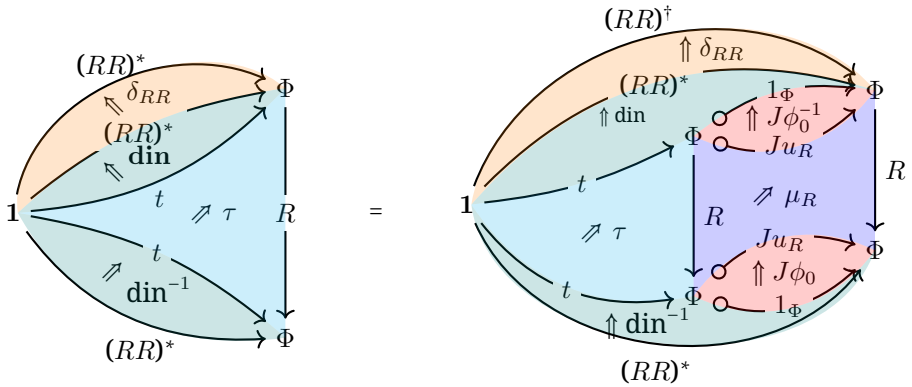
证明。设 ((–)†, dinat†, unif †) 是另一个关于 J 在 $\mathscr{D}$ 上的一致伪二自然不动点算子。我们证明，在第三节中定义的态射 δ : ((–)*, unif *) →((–)†, unif†) 也与结构 2-胞 dinat 相容，即对于每个 $f : A \to B$ 和 $g : B \to A$，它满足以下相容性：



和之前一样，我们先证明它对 $f = g = R$ 成立

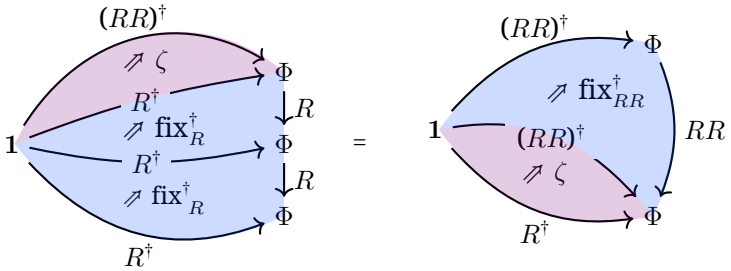


并利用 unif 与 dinat 之间的相容性得到一般结果。根据引理 A.11，右侧图表等于：

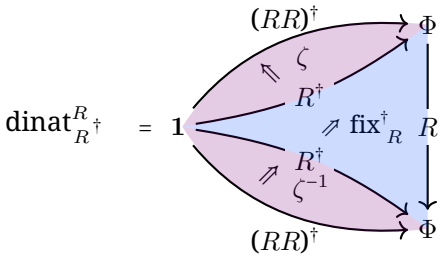


其中 $\phi_0 : 1_\Phi \Rightarrow J(u_R)$ 是 唯一可逆 2-胞，使得 $R \cdot J\phi_0 = \mu_R(J\phi_0 \cdot R)$（参见命题 III.5 的证明).

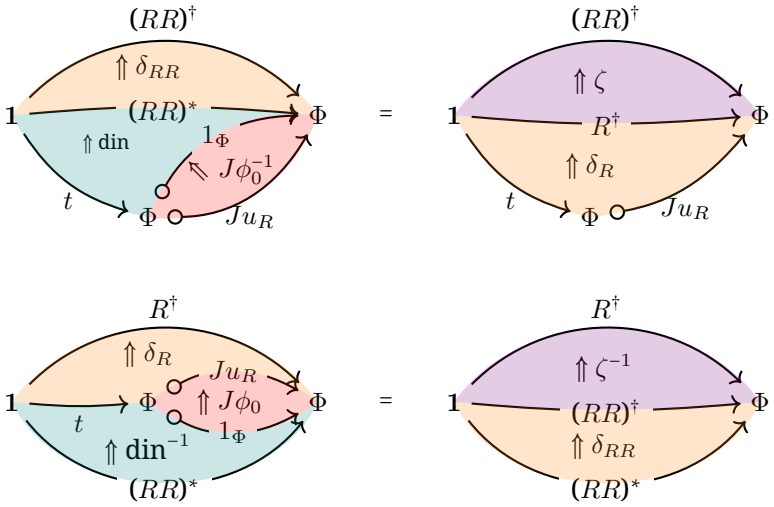
令 $\zeta : R^\dagger \Rightarrow (RR)^\dagger$ 为唯一可逆 2-胞（由引理 IV.2 得到），使得 t



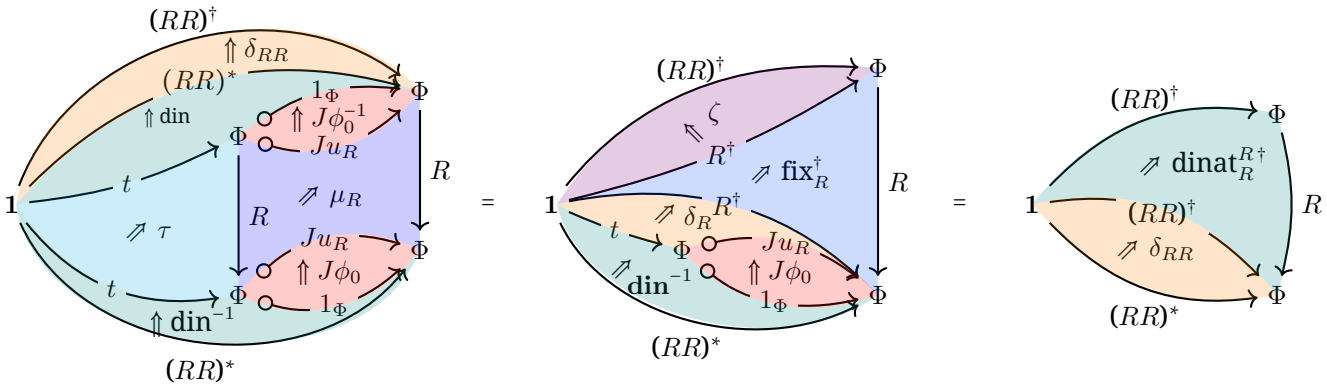
它对算子（–）† 所起的作用与 din $: t \Rightarrow (RR)^*$ 类似，我们可以证明：



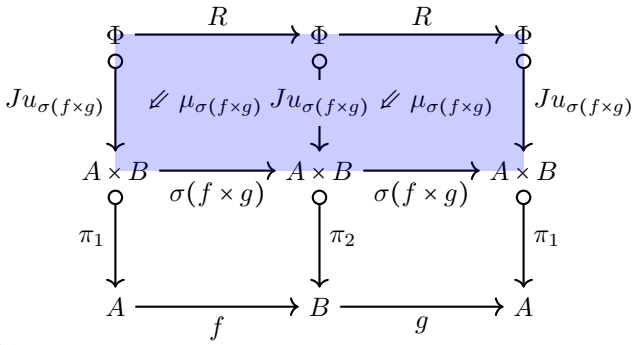
我们还可以证明：



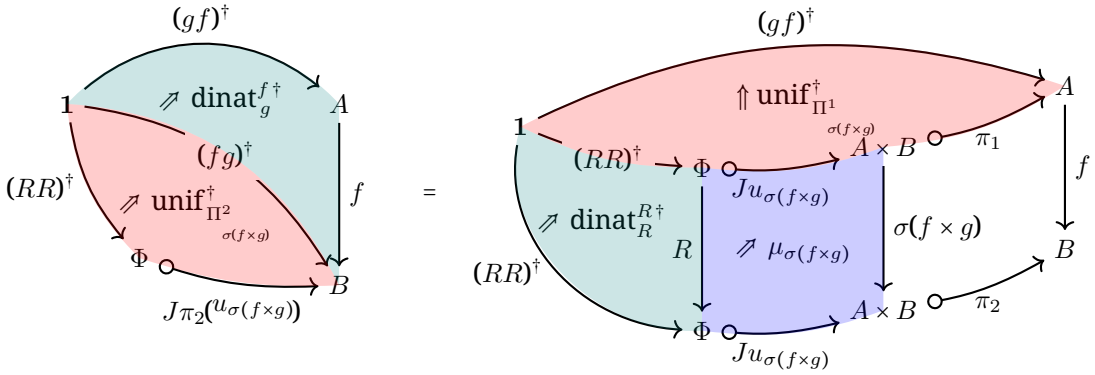
现在我们可以得出结论：



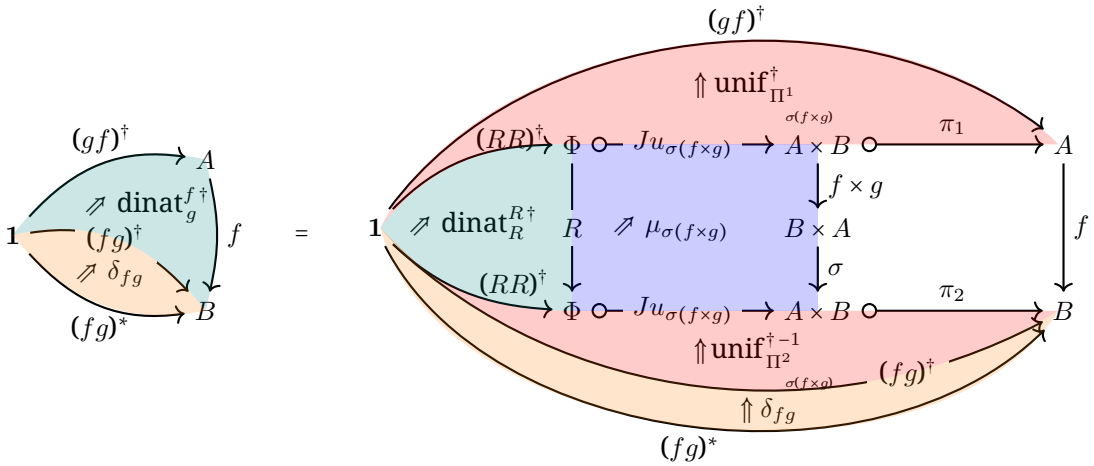
对于一般的态射 $f : A \to B$ 和 $g : B \to A$ 在 $\mathscr{D}$中，我们考虑以下方形：

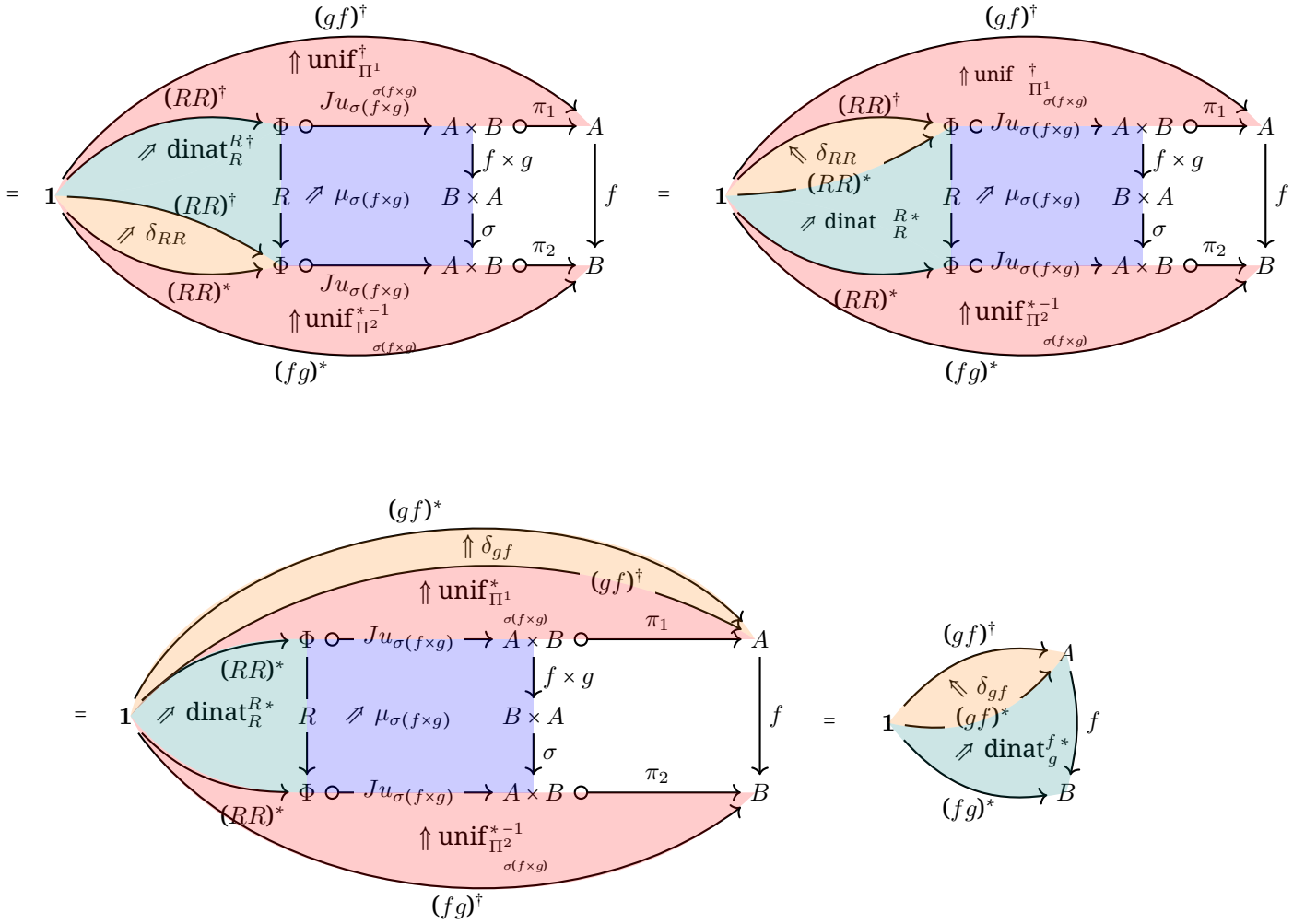


并由 unif 与 dinat 之间的相容性得到：



因此，我们有：




(gf)†
⇑ unif†Π1
(RR)†
Ju σ(f×g)
⇗ dinat R† R
Φ
A × B
π1
A
f × g
1
R
⇗ μσ(f×g)
B × A
f
(RR)†
⇗ δRR
σ
π2
Φ
A × B
B
(RR)*
Ju σ(f×g)
⇑ unif*−1 Π2 σ(f×g)
(fg)*
=
(gf)†
⇑ unif †Π1 σ(f×g)
(RR)†
⇖ δRR
(RR)*
⇗ dinat R* R
Φ
Ju σ(f×g)
A × B
π1
A
f × g
1
R
⇗ μσ(f×g)
B × A
f
σ
π2
Φ
Ju σ(f×g)
A × B
B
(RR)*
⇑ unif*−1 Π2 σ(f×g)
(fg)*
=
(gf)*
⇑ δgf
(gf)†
⇑ unif*Π1 σ(f×g)
Φ
Ju σ(f×g)
A × B
π1
A
(RR)*
f × g
1
⇗ dinat R* R
R
⇗ μσ(f×g)
B × A
f
σ
π2
Φ
Ju σ(f×g)
A × B
B
(RR)*
⇑ unif*−1 Π2 σ(f×g)
(fg)†
=
(gf)†
A
⇖ δgf
1
(gf)*
f
⇗ dinat f* g
B
(fg)*

□