arXiv:2303.03448v1 [cond-mat.stat-mech] 6 Mar 2023

# 非厄米哈密顿量违反本征态热化假说

Giorgio Cipolloni[1], * 和 Jonah Kudler-Flam[1], 2, †[1] *Princeton Center for Theoretical Science, Princeton University, Princeton, NJ 08544, USA*[2] *School of Natural Sciences, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540 USA*（日期：2023年3月8日）

本征态热化假说（ETH）是理解封闭量子系统中热行为如何涌现的理论基石。ETH断言，能量本征态中简单可观测量的期望值可由热力学参数的光滑函数准确描述，而涨落和非对角矩阵元则受到熵的指数级抑制。我们研究了ETH在非厄米多体系统中成立的程度，并得出一个令人意外的结论：本征态之间的涨落与平均值处于同一量级，这表明系统不会发生热化。我们以Ginibre 系综中严格的数学结果，以及包括非厄米Sachdev-Ye-Kitaev模型在内的其他系综的数值结果支持这一结论，这些结果表明混沌非厄米量子系统具有普适性。

引言。—量子系统中的热化描述了非平衡态逐渐演化为准平衡态的动力学过程，而量子统计力学和热力学能够很好地描述这些准平衡态。理解哪些系统会发生热化以及它们如何热化，是量子物理学中的基础问题，在过去几十年里受到了极大关注 [1]。

近年来，非厄米量子物理学领域逐渐兴起，它将标准的厄米物理学范式推广到具有耗散的系统 [2]。自然会产生这样的问题：热化是否以及如何在这些系统中表现出来。这一研究方向被称为耗散量子混沌，近年来已经取得了一些有趣的成果 [3–19]。

本征态热化假说（ETH）是封闭量子系统中热性的典型描述或定义。本征态热化假说断言，对于混沌量子系统，简单算符的矩阵元在能量本征基的对角线上平滑变化 $\{|E_i\rangle\}$，其涨落受到熵的抑制

$$\langle E_i|\,\mathcal{O}\,|E_j\rangle = f_{\mathcal{O}}(\overline{E})\delta_{ij} + e^{-S(\overline{E})/2}\omega_{\mathcal{O}}\left(\overline{E}, \Delta E\right) R_{ij}. \quad (1)$$

这里，$f_{\mathcal{O}}$ 和 $\omega_{\mathcal{O}}$ 是平滑的 $O(1)$ 函数，$E = \frac{E_i+E_j}{2}$，$\Delta E = |E_i - E_j|$ 和 $R_{ij}$ 是方差为 1 的伪随机数。这描述了热化，因为它意味着简单算符的期望值可以仅利用能量等热力学参数准确近似。这一论述适用于时间演化后的晚期态以及能量本征态本身。

在本文中，我们探讨非厄米哈密顿量是否存在式（1）的对应形式，能够刻画耗散量子混沌。非厄米算符通常具有不同的左、右特征向量，$\{\langle L_i|\}$和$\{|R_i\rangle\}$，它们构成一个双正交基

$$\langle L_i|\,R_j\rangle = \delta_{ij}. \quad (2)$$

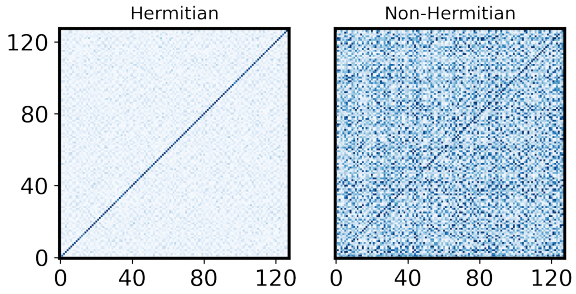



图 1. 展示了厄米 SYK 模型（左）和非厄米 SYK 模型（右）单次实现中单格点数算符$\hat{n}_{ij} := |\langle L_i|\hat{n}\,|R_j\rangle\,|$的矩阵元绝对值。x 轴和 y 轴分别表示左特征向量和右特征向量。在厄米情形下，$\hat{n}_{ij}$ 几乎完全局限于对角线上；而在非厄米情形下，整个矩阵中都存在大幅涨落。

令人惊讶的是，我们发现，非厄米 Sachdev-Ye-Kitaev（SYK）模型的本征态 [20], ——多体量子混沌的典型模型 [21–23], ——并未 热化；对于简单算符的期望值，无论是对角还是非对角涨落，其幅度都与均值一样大。图 1 展示了厄米 SYK 模型与非厄米 SYK 模型的矩阵元之间的鲜明差异。这些 $N$马约拉纳费米子哈密顿量的形式为

$$H_{nSYK} = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_q}^{N} \left(J_{i_1 i_2 \ldots i_q} + iM_{i_1 i_2 \ldots i_q}\right) \psi_{i_1}\psi_{i_2}\ldots\psi_{i_q}, \quad (3)$$

其中，$J_{i_1 i_2 \ldots i_q}$ 和 $M_{i_1 i_2 \ldots i_q}$ 是均值为零、方差为 $\frac{2}{N^{q-1}}$ 的独立同分布实高斯随机变量，且

$\{\psi_i, \psi_j\} = 2\delta_{ij}$。 $M_{i_1 i_2 \ldots i_q} = 0$ 在厄米情形下。

我们将通过用随机矩阵建模非厄米量子混沌哈密顿量，从解析上解释这一引人注目的现象。厄米系统和非厄米系统中的混沌量子系统与随机矩阵理论之间的联系早已为人所知 [24–27]，并为理解 (1) 提供了一种简单的思路。事实上，人们普遍认为，非可积量子系统呈现出与厄米随机矩阵相同的谱统计。在随机哈密顿量的语境下，“简单”算子指的是独立于哈密顿量选取的确定性算子。对于 $N \times N$ Wigner 矩阵，(1) 已得到严格证明 [28, 29]。

为了对典型的混沌非厄米哈密顿量建模，我们研究从 Ginibre 系综中抽取的矩阵的特征向量；该系综由矩阵元为独立同分布（i.i.d.）复高斯变量的矩阵构成 [30]。我们计算确定性算子的矩阵元的行为，并对其大幅涨落进行了精确刻画。厄米情形中未曾出现的新现象包括前述的大幅涨落，以及矩阵元之间的相关性。此外，我们证明，针对 Ginibre 系综所得的严格结果具有普适性，并且在复伯努利系综和均匀系综等高度非高斯系综中也有较广的适用范围。

*Ginibre* 特征向量的结构。— 设 $H$ 是从复 Ginibre 系综中抽取的一个 $N \times N$ 矩阵。我们用 $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ 表示其特征值，并用 $\langle L_i|, |R_i\rangle$ 表示相应的双正交左右特征向量。 $H$ 的分布在酉共轭下不变。按照 [31–33], ，我们写作 $H = UTU^\dagger$，其中 $U$ 与 $T$ 独立，且在酉群上服从均匀分布，并且

$$T := \begin{pmatrix} \lambda_1 & T_{12} & \ldots & T_{1N} \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & T_{2N} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中 $T_{ij}$ 是互不相关的高斯随机变量。 $T$ 的特征向量形式为

$$\begin{aligned} |\widetilde{R}_1\rangle &= (1, 0 \ldots, 0)^T, \qquad |\widetilde{R}_2\rangle = (a, 1, 0 \ldots, 0)^T \\ |\widetilde{L}_1\rangle &= (b_1, \ldots, b_N)^T, \qquad |\widetilde{L}_2\rangle = (d_1, \ldots, d_N)^T, \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $b_1 = 1$、 $d_1 = 0$、 $d_2 = 1$、 $a = -{b_2}^*$。

特征向量重叠。— 在分析 $H$ 的谱时，一个基本量是所谓的特征向量重叠

$$O_{ij} := \langle R_j | R_i \rangle \langle L_i | L_j \rangle. \tag{6}$$

与厄米哈密顿量的特征向量不同，在这种情况下，$\langle R_i | R_j \rangle = \langle L_i | L_j \rangle = \delta_{ij}$ 特征向量重叠可能相当大，而且高度相关。

我们只需考虑涉及一个或两个特征向量的重叠，分别记为 $O_{11}$、$O_{12}$、$O_{22}$，也就是说省略对 $i$、 $j$ 的依赖。这些重叠可以用式 (5) 中出现的量表示为

$$\begin{aligned} O_{11} = \sum_{i=1}^N |b_i|^2, \quad O_{12} = -b_2^* \sum_{i=2}^N b_i d_i^*, \\ O_{22} = (1 + |b_2|^2) \sum_{i=2}^N |d_i|^2. \end{aligned} \tag{7}$$

我们的分析关键依赖于 [34], 中的定理 1.1 和定理 1.4，其中重叠在 $N$ 很大时进行了评估（对角重叠另见 [35]）。对角重叠的完整分布收敛到

$$O_{11} \to \frac{N(1 - |\lambda_1|^2)}{\gamma_2}, \tag{8}$$

其中， $\gamma_2$ 是一个密度为$xe^{-x}$的伽马随机变量。我们将用到的其他重叠，其期望值和二阶矩才是已知的

$$\mathbb{E} O_{12} \to -\frac{1 - \lambda_1 {\lambda_2}^*}{N|\lambda_1 - \lambda_2|^4}, \tag{9}$$

$$\mathbb{E}|O_{12}|^2 \to \frac{(1 - |\lambda_1|^2)(1 - |\lambda_2|^2)}{|\lambda_1 - \lambda_2|^4}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} O_{11} O_{22} \to \frac{(1 - |\lambda_1|^2)(1 - |\lambda_2|^2)}{|\lambda_1 - \lambda_2|^4} \\ \times \frac{1 + N^2|\lambda_1 - \lambda_2|^4 - e^{-N|\lambda_1 - \lambda_2|^2}}{1 - e^{-N|\lambda_1 - \lambda_2|^2}}. \end{aligned} \tag{11}$$

为了研究本征态热化假说，我们考虑 $\langle L_i | A | R_j \rangle$及其相关性。具体而言，我们将使用魏因加滕微积分计算这些量的期望值和方差。该方法为关于哈尔测度 [36]的酉群积分提供闭式表达式：

$$\begin{aligned} &\int [dU]\, U_{i_1, j_1} \ldots U_{i_n, j_n} U^*_{i'_1, j'_1} \ldots U^*_{i'_n, j'_n} \\ &= \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \delta_{i_1 i'_{\sigma(1)}} \ldots \delta_{i_n i'_{\sigma(n)}} \delta_{j_1 j'_{\tau(1)}} \ldots \delta_{j_n j'_{\tau(n)}} \mathrm{Wg}(N, \sigma\tau^{-1}). \end{aligned} \tag{12}$$

这里，Wg 是所谓的魏因加滕函数，其显式形式可以用对称群的特征标表示。对于我们的研究，只需要用到酉群的四阶矩。我们发现 Mathematica 软件包 RTNI [37] 有助于显式计算总和中的 576 项。这里只给出关于 $N$的最低阶结果。

重要的是，我们计算的期望值仅针对 $U$。 $T$ 矩阵中的独立随机变量并未进行平均，因此得到的分布有助于提出猜想。

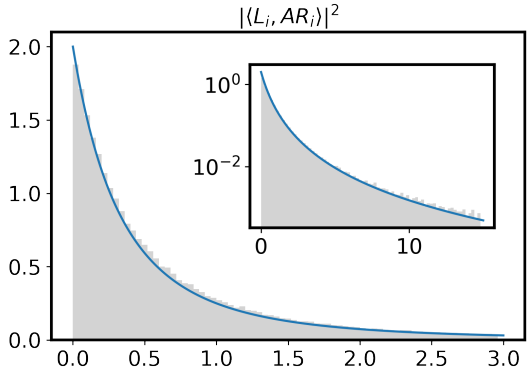



图2. 确定性矩阵的矩阵元绝对值平方，其权重方式与公式（15）左端相同。我们取 $N = 200$的1000次实现。蓝线表示公式（16）。插图展示的是相同数据，但纵轴采用对数刻度。

对角*ETH*。—我们首先考虑算符的期望值，即本征态热化假说的对角部分。Haar积分计算起来很直接，结果为可观测量的归一化迹

$$\mathbb{E}_U \langle L_i| A |R_i\rangle = \frac{\mathrm{Tr}\,(A)}{N}. \tag{13}$$

为了估计平均大小，我们需要改为考虑平方

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_U |\langle L_i| A |R_i\rangle|^2 &= \frac{1}{N^2}|\mathrm{Tr}\,(A)|^2 \\ +\frac{O_{11}}{N^2}&\left(\mathrm{Tr}\left(A^\dagger A\right) - N^{-1}|\mathrm{Tr}\,(A)|^2\right).\end{aligned} \tag{14}$$

由（8）可知，第二行与第一行同阶，因此期望值的涨落并未受到抑制，严重违背了（1）。

我们可以预期，在大-$N$ 时（动机见下方的普适性 部分）

$$\frac{N}{(1-|z|^2)\mathrm{Tr}\,(A^\dagger A)}\left|\langle L_i| A |R_i\rangle - N^{-1}\mathrm{Tr}(A)\right|^2 \to \frac{|\xi|^2}{\gamma_2}, \tag{15}$$

在分布意义下，其中 $\xi$ 是一个与 $\gamma_2$独立的复高斯随机变量。概率密度函数为

$$p(x) = \frac{2}{(1+x)^3}. \tag{16}$$

由于分母中的 $\gamma_2$ ，该分布具有重尾，这是非厄米系统的一个特征；在典型态的纠缠谱 [12], 中也能观察到这一点，这与厄米情形形成鲜明对比。我们在图2中通过数值计算验证了这一预期。

非对角*ETH*。—在对角线之外，本征态热化假说意味着矩阵元受到指数级抑制。由于式（2）中存在缩放歧义，取 $|R_i\rangle \to c_i|R_i\rangle$ 和 $\langle L_i| \to c_i^{-1}\langle L_i|$, ，可得到一个定义良好的（与尺度无关的）非对角元概念，即为 $\langle L_i| A |R_j\rangle \langle L_j| A |R_i\rangle$。对酉矩阵取平均后，我们发现（对于 $i \neq j$）

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_U \langle L_i| A |R_j\rangle \langle L_j| A |R_i\rangle \\ &= \frac{1}{N^2}\left(\mathrm{Tr}\left(A^2\right) - N^{-1}\mathrm{Tr}\,(A)^2\right).\end{aligned} \tag{17}$$

不存在对 $O_{12}$ 的依赖，因为我们没有对第二项取复共轭。尽管上述表达式在 $N$ 中受到抑制，但其平均大小很大，这可从绝对值的平方看出

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_U|\langle L_i| A |R_j\rangle \langle L_j| A |R_i\rangle|^2 \\ &= \frac{O_{11}O_{22}\mathrm{Tr}[A^\dagger A]^2 + |O_{12}|^2\mathrm{Tr}[A^\dagger A]^2}{N^4}\end{aligned} \tag{18}$$

由式 **(11)** 可知，这为 $O$**(1)**，因此非对角元不存在熵抑制，这再次表明其强烈违背了本征态热化假说。只有当特征值非常接近时，第二项才与第一项处于同一量级。

邻近能量的关联。—我们所探究的非厄米哈密顿量中的最后一个新颖特征，是邻近特征值之间存在很强的关联。这意味着，尽管对角元中存在大幅涨落（见式 **(14)**），这些涨落却是相互关联的。为简便起见，我们给出无迹可观测量的结果

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_U|\langle L_i| A |R_i\rangle \langle L_j| A |R_j\rangle|^2 \\ -\mathbb{E}_U|\langle L_i| A |R_i\rangle|^2&\mathbb{E}_U|\langle L_j| A |R_j\rangle|^2 = \frac{|O_{12}|^2\,\mathrm{Tr}[A^\dagger A]^2}{N^4}.\end{aligned} \tag{19}$$

由式 **(10)** 可见，当特征值非常接近时（$\lambda_i - \lambda_j \sim N^{-1/2}$），该关联很强，但随着特征值彼此分离会迅速衰减。

普适性。—我们预期，针对 Ginibre 矩阵推导出的结果具有普适性。特别是，若考虑一个具有独立同分布条目、但不一定服从高斯分布（甚至可能具有某种特定相关结构）的矩阵 $H$ ，那么相同的收敛结果应当成立。

为此，我们采用了[38] 中提出并在 [12] 中使用的厄米化技巧 。以下讨论与 [12], 中的内容类似，但为方便读者，我们在此重复说明。更确切地说，我们定义厄米矩阵

$$H^z := \begin{pmatrix} 0 & H-z \\ (H-z)^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

其中 $z \in \mathbb{C}$。注意到

$$\lambda \in \mathrm{Spec}(H) \Leftrightarrow 0 \in \mathrm{Spec}(H^\lambda), \tag{21}$$

当 $z$ 非常接近其某个特征值时，可以利用 $H^z$ 研究 $H$ 本身的谱性质。我们指出

$H^z$ 满足手征对称性，由此产生关于零对称的对称谱。因此，特征向量 $|\mathbf{w}^z_{\pm i}\rangle$ 具有如下形式：$|\mathbf{w}^z_{\pm i}\rangle = (|\mathbf{u}^z_i\rangle, \pm|\mathbf{v}^z_i\rangle)$，其中 $|\mathbf{u}^z_i\rangle, |\mathbf{v}^z_i\rangle \in \mathbb{C}^N$。这里，$|\mathbf{u}^z_i\rangle, |\mathbf{v}^z_i\rangle$ 表示 $H - z$ 的左、右奇异向量，即

$$(H-z)\,|\mathbf{v}^z_i\rangle = E^z_i\,|\mathbf{u}^z_i\rangle\,, \quad (H-z)^\dagger\,|\mathbf{u}^z_i\rangle = E^z_i\,|\mathbf{v}^z_i\rangle\,, \tag{22}$$

及其对应的 $E^z_i \geq 0$ 奇异值。由于奇异值与 $H^z$ 的特征值（取绝对值）相同，因此这两种表示是等价的。我们选择同时给出两种表示，因为在接下来的讨论中，引用其中一种或另一种可能更方便。

利用关系式 (22) 以及左右特征向量的定义 $\langle L_i|, |R_i\rangle$，我们可写为

$$\langle L_i|\,A\,|R_i\rangle = \frac{\langle \mathbf{u}|\,A\,|\mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{u}|\,\mathbf{v}\rangle}, \tag{23}$$

这里 $|\mathbf{u}\rangle = |\mathbf{u}_1^{\lambda_i}\rangle$, $|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}_1^{\lambda_i}\rangle$。等式 (23) 的关键特点是，我们可以将左侧的非厄米量表示为厄米奇异向量的形式，而后者更容易理解。对于固定的 $z$，$|\mathbf{u}^z_i\rangle, |\mathbf{v}^z_i\rangle$ 的分布可借助文献 [39] 中引入的针对特征向量的戴森布朗运动（DBM）来理解（数学文献中关于 DBM 分析的详细说明另见 [29, 40–45] ）。更具体地说，为了应用 DBM，对于固定的 $z$，我们写为

$$\langle \mathbf{u}^z_1|\,A\,|\mathbf{v}^z_1\rangle = \langle \mathbf{w}^z_1|\,\mathcal{A}\,|\mathbf{w}^z_1\rangle\,, \qquad \mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

并注意到，(24) 是由厄米特征向量构成的二次型 $|\mathbf{w}^z_1\rangle$，因此可以应用 [29, 39–45] 中的厄米戴森布朗运动技术。感兴趣的读者可参阅 [12, 补充材料]，其中简要介绍了针对厄米特征向量的戴森布朗运动分析。特别是，这项分析有助于理解 (15) 中收敛现象的动机。不过，这里有一个注意事项；(23) 中的等式仅对 (22) 中的 $z = \lambda_i$成立，也就是说，只有当 $z$ 不是固定值，而是一个特征值时才成立。尽管计算固定 $z$ 时 (24) 的分布不足以求出 (23) 左侧的分布，我们仍预期这会给出正确答案。事实上，我们还在图 3 中通过数值计算证实了这一普适性现象：我们考察了两种满足圆律的非厄米随机矩阵系综（特征值均匀分布在复单位圆上）。这两种系综分别是复伯努利系综（矩阵元素的实部和虚部相互独立，且均为 $\pm$ ）以及随机复均匀系综（矩阵元素从复单位圆上均匀抽取）。

回到非厄米 SYK 模型，我们注意到，图 1 中观察到的所有定性现象如今都已通过 Ginibre 系综得到解释。

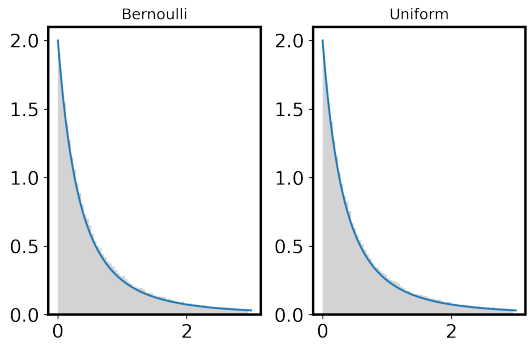



图 3. 展示了复伯努利矩阵和随机复均匀矩阵的矩阵元平方绝对值，并按式 (15) 加权。蓝线表示式 (16)，这为普适性提供了依据。对于 $N = 200$，我们进行了 1000 次实现，并使用了一个固定的确定性矩阵 $A$。

然而，我们并不认为 Ginibre 系综的方程会与 SYK 模型定量吻合，因为 SYK 模型的特征值不遵循圆律。我们仍然认为，在对（15）式左端进行适当的 $z$–重标度后，算符的期望值会按照（16）式分布。这类似于厄米情形：高斯系综中的解析结果与混沌哈密顿量仅在定性上吻合，因为一般哈密顿量的特征值不遵循半圆律。

讨论。——在这封短文中，我们证明了非厄米多体系统中的本征态热化假说遭到了严重违背。尽管这一现象最初是在 SYK 模型中观察到的，我们通过使用随机矩阵理论对量子混沌非厄米哈密顿量进行建模，对这一普遍现象获得了分析上的理解。我们严格证明了简单算符矩阵元的若干新特征，包括：(1) 能量本征基中对角线方向存在大幅涨落，其量级与均值相同；(2) 非对角线方向的涨落与对角线方向的涨落一样大；(3) 能量相近的矩阵元之间存在很强的相关性。这些现象在量子混沌厄米哈密顿量中均未出现。

非厄米哈密顿量具有与厄米哈密顿量截然不同的显著特征。不断发展的非厄米随机矩阵理论提供了一套强有力的工具，目前才刚刚开始被应用于新兴的耗散量子混沌领域，以揭示其中的普适现象。我们希望在不久的将来建立与耗散动力学的联系。

致谢。—我们感谢 Paul Bourgade、Amos Chan、Kohei Kawabata 和 Shinsei Ryu 提供有益的讨论和评论。JKF 得到了高等研究院和

美国国家科学基金会资助，基金编号为 PHY- 2207584。

* gc4233@princeton.edu † jkudlerflam@ias.edu

[1]J. M. Deutsch, 《本征态热化假说》, Reports on Progress in Physics 81, 082001 (2018), arXiv:1805.01616 [quant-ph]。 [2] Y. Ashida、Z. Gong 和 M. Ueda, 《非厄米物理》, Advances in Physics 69, 249 (2020), arXiv:2006.01837 [cond-mat.mes-hall]。 [3] R. Hamazaki、K. Kawabata 和 M. Ueda, 《非厄米多体局域化》, Phys. Rev. Lett. 123, 090603 (2019), arXiv:1811.11319 [cond-mat.dis-nn]。 [4] G. Akemann、M. Kieburg、A. Mielke 和 T. Prosen, 《耗散开放量子系统中从可积性到混沌的普适特征》, Phys. Rev. Lett. 123, 254101 2019 1910 ( ), arXiv: .03520 [cond-mat.stat-mech]。 [5] L. S´a、P. Ribeiro 和 T. Prosen, 《复间距比：耗散量子混沌的特征》, Physical Review X 10, 021019 (2020), arXiv:1910.12784 [cond- mat.stat-mech]。 [6] J. Li、T. Prosen 和 A. Chan, 《非厄米矩阵的谱统计与耗散量子混沌》, Phys. Rev. Lett. **127**, 170602 2021 2103 05001 ( ), [ ] arXiv: . cond-mat.stat-mech . [7] L. S´a、P. Ribeiro 和 T. Prosen, 《强关联量子物质的林德布拉德耗散》, arXiv 预印本, arXiv: 2112 12109 2021 2112 12109 。 [ ] ( ), arXiv: . cond-mat.stat-mech . [8] A. Kulkarni、T. Numasawa 和 S. Ryu, 《SYK 林德布拉德算符》, arXiv 预印本, arXiv:2112.13489 (2021), arXiv:2112.13489 [cond-mat.stat-mech]。 [9] S. Denisov、T. Laptyeva、W. Tarnowski、D. Chru´sci´nski 和 K. ˙Zyczkowski, 《随机林德布拉德算符的普适谱》, Phys. Rev. Lett. 123, 140403 (2019), arXiv:1811.12282 [quant-ph]。 [10] K. Wang、F. Piazza 和 D. J. Luitz, 《局域随机刘维尔算符的弛豫时间尺度层级》, Phys. Rev. Lett. 124, 100604 (2020), arXiv:1911.05740 [cond-mat.str-el]。 [11] O. E. Sommer、F. Piazza 和 D. J. Luitz, 《量子计算机中耗散时间尺度的多体层级》, Physical Review Research 3, 023190 (2021), arXiv:2011.08853 [quant-ph]。 [12] G. Cipolloni 和 J. Kudler-Flam, 《非厄米本征态的纠缠熵与 Ginibre 系综》, Phys. Rev. Lett. **130**, 010401 2023 2206 12438 ( ), [ ] arXiv: . cond-mat.stat-mech . [13] K. Kawabata、A. Kulkarni、J. Li、T. Numasawa 和 S. Ryu, 《开放量子系统的对称性：耗散量子混沌的分类》, arXiv 预印本, arXiv:2212.00605 (2022), arXiv:2212.00605 [cond- mat.mes-hall]。 [14] K. Kawabata、A. Kulkarni、J. Li、T. Numasawa 和 S. Ryu, 《SYK 林德布拉德算符中的动力学量子相变》, arXiv 预印本, arXiv:2210.04093 (2022), arXiv:2210.04093 [cond-mat.stat-mech]。 [15] Z. Xiao、K. Kawabata、X. Luo、T. Ohtsuki 和 R. Shin- dou, 《非厄米系统中实本征值的能级统计》, Physical Review Research 4, 043196 (2022), arXiv:2207.01826 [cond-mat.dis-nn]。 [16] L. S´a、P. Ribeiro 和 T. Prosen, 《多体林德布拉德算符的对称性分类：十重分类及其他》, arXiv 预印本, arXiv:2212.00474 ( 2022), arXiv:2212.00474 [cond-mat.stat-mech]。 [17] A. M. Garc´ıa-Garc´ıa、L. S´a 和 J. J. M. Ver- baarschot, 《利用 Sachdev-Ye-Kitaev 模型研究非厄米多体量子混沌中的普适性及其局限》, arXiv 预印本, arXiv:2211.01650 (2022), arXiv:2211.01650 [hep-th]。 [18] J. Costa、P. Ribeiro、A. de Luca、T. Prosen 和 L. S´a, 《费米子随机二次 Liouvillian 的谱与稳态性质》, arXiv 预印本, arXiv:2210.07959 (2022), arXiv:2210.07959 [cond-mat.stat-mech]。 [19] A. M. Garc´ıa-Garc´ıa、L. S´a、J. J. M. Verbaarschot 和 J. P. Zheng, 《耗散 Sachdev-Ye-Kitaev 模型中的 Keldysh 虫洞与反常弛豫》, arXiv 预印本, arXiv: 2210 01695 2022 2210 01695 。( ), [ ] arXiv: . hep-th . [20] R. Hamazaki、K. Kawabata、N. Kura 和 M. Ueda, 《非厄米随机矩阵的普适类》, Physical Review Research 2, 023286 (2020), arXiv:1904.13082 [cond-mat.stat-mech]。 [21] S. Sachdev 和 J. Ye, 《随机量子海森堡磁体中的无能隙自旋流体基态》, Phys. Rev. Lett. 70, 3339 (1993), arXiv:cond-mat/9212030 [cond-mat]。 [22] A. Kitaev, 《量子全息的一个简单模型》(2015), kITP 弦研讨会与纠缠。 [23] J. Maldacena 和 D. Stanford, 《关于 Sachdev-Ye-Kitaev 模型的评述》, Phys. Rev. D 94, 106002 (2016), arXiv:1604.07818 [hep-th]。 [24] O. Bohigas、M.-J. Giannoni 和 C. Schmit, 《混沌量子谱的特征及能级涨落定律的普适性》, Physical review letters 52, 1 (1984)。 [25] M. V. Berry 和 M. Tabor, 《规则谱中的能级聚集》, 伦敦皇家学会会刊。A. Mathematical and Physical Sciences 356, 375 (1977)。 [26] R. Grobe、F. Haake 和 H.-J. Sommers, 《规则与混沌耗散运动的量子判别》, Phys. Rev. Lett. 61, 1899 (1988)。 [27] R. Grobe 和 F. Haake, 《耗散量子混沌中立方能级排斥的普适性》, Phys. Rev. Lett. 62, 2893 1989( )。 [28] G. Cipolloni、L. Erd¨os 和 D. Schr¨oder, 《Wigner 矩阵的本征态热化假说》, Communications in Mathematical Physics 388, 1005 (2021), arXiv:2012.13215 [math.PR]。 [29] G. Cipolloni、L. Erd¨os、J. Henheik 和 O. Kolupaiev, 《Wigner 矩阵均分原理中的高斯涨落》, arXiv 预印本 arXiv:2301.05181 (2023)。 [30]J. Ginibre, 《复矩阵、四元数矩阵与实矩阵的统计系综》, 数学物理杂志 6, 440 (1965)。 [31] J. T. Chalker 和 B. Mehlig, 《非厄米随机矩阵系综中的本征向量统计》, Physical review letters 81, 3367 (1998)。 [32] B. Mehlig 和 J. T. Chalker, 《非厄米高斯随机矩阵系综中本征向量的统计性质》, 数学物理杂志 41, 3233 (2000)。 [33] B. Mehlig 和 J. T. Chalker

, 特征向量相关性在

《物理学年鉴》**510**，427（1998）。[34] P. Bourgade 和 G. Dubach，《 Ginibre 矩阵特征向量重叠的分布》，《概率论及相关领域》**177**，397（2020）。[35] Y. V. Fyodorov，《实和复Ginibre系综中双正交特征向量的统计：结合部分Schur分解与超对称性》，《数学物理通讯》**363**，579（2018）。[36] B. Collins，《酉群上多项式随机变量的矩与累积量、伊辛-祖伯积分及自由概率》，《国际数学研究公告》**2003**，953（2003）。[37] M. Fukuda、R. K¨onig 和 I. Nechita，《RTNI——Haar随机张量网络的符号积分器》，《物理学杂志A：数学与一般》**52**，425303（2019），arXiv:1902.08539 [quant-ph]。[38] J. Feinberg 和 A. Zee，《非厄米随机矩阵理论：厄米化约方法》，《核物理B》**504**，579（1997），arXiv:cond-mat/9703087 [cond-mat]。[39] P. Bourgade 和 H.-T. Yau，《特征向量矩流与局部量子唯一遍历性》，《通讯

《数学物理通讯》**350**, 231 (2017). [40] J. Marcinek 和 H.-T. Yau，《含噪特征向量的高维正态性》，arXiv 电子预印本，arXiv:2005.08425 (2020)，arXiv:2005.08425 [math.PR]。[41] L. Benigni 和 P. Lopatto，《广义 Wigner 矩阵局部量子唯一遍历性的涨落》，《数学物理通讯》**391**, 401 (2022)，arXiv:2103.12013 [math.PR]。[42] L. Benigni 和 G. Cipolloni，《特征向量重叠的涨落与 Wigner 矩阵的 Berry猜想》，arXiv 预印本 arXiv:2212.10694 (2022)。[43] G. Cipolloni、L. Erd˝os 和 D. Schr¨oder，《Wigner 矩阵量子遍历性中的正态涨落》，《概率年刊》**50**, 984 (2022)。[44] G. Cipolloni、L. Erd˝os 和 D. Schr¨oder，《Wigner 矩阵的秩一致局部定律》，arXiv 电子预印本，arXiv:2203.01861 (2022)，arXiv:2203.01861 [math.PR]。[45] P. Bourgade、H.-T. Yau 和 J. Yin，《非局域化相中的随机带状矩阵：I. 量子唯一遍历性与普适性》，arXiv 预印本 arXiv:1807.01559 (2018)。