arXiv:2303.03458v1 [cs.CV] 6 Mar 2023

平面曲线微分不变量学习

Roy Velich 和 Ron Kimmel

以色列理工学院
royve@campus.technion.ac.il
ron@cs.technion.ac.il

摘要。 我们提出一种学习范式，用于数值近似平面曲线的微分不变量。我们利用深度神经网络（DNN）的通用逼近性质来估计几何度量。研究表明，所提出的框架是公理化构造的一种更优替代方案。具体而言，我们证明，DNN 能够学会克服不稳定性和采样伪影，并为平面上受给定变换群作用的曲线生成一致的签名。我们将所提出的方案与其他先进的微分不变量公理化构造方法进行比较。我们对模型进行了定性和定量评估，并提出一个基准数据集，用于评估平面曲线微分不变量的近似模型。

关键词： 微分不变量 · 形状分析 · 微分几何 ·

1 引言

微分不变量与签名曲线。 根据 É. Cartan 的一项重要定理 [6], 两条曲线通过一个变换群相关联 $g \in G$，即相对于 G变换群而言的等价曲线 G当且仅当它们的签名曲线相同时才等价。这一观察使人们能够开发用于衡量两条平面曲线等价性的分析工具，并将其应用于计算机视觉、形状分析、几何处理、目标检测等多个领域和任务。平面曲线通常从图像中提取，作为物体的边界或灰度图像的等值集。物体的边界编码了重要信息，可以进一步由各种计算机视觉和图像分析工具加以利用。一个常见的计算机视觉任务是找出两个不同图像帧中的两个物体之间的共同特征。将图像物体表示为其边界的签名曲线，可以自然地处理这一任务。由于已经证明签名曲线能够为平面曲线的等价性问题提供完整解 [14,第 183 页，定理 8。53], 因此，可以进一步分析它们，以寻找图像物体之间的对应关系。签名曲线由微分不变量参数化。因此，为了生成给定平面曲线的签名曲线，必须计算所需的微分

不变量在每个点处的值。在实践中，平面曲线以离散点集的形式进行数字表示，这意味着微分不变量的量（例如某一点处的曲率）只能使用有限差分技术进行数值近似。由于许多重要且有意义的微分不变量都表示为高阶导数的函数，其近似值容易出现固有的数值不稳定性，并且对采样噪声高度敏感。例如，等仿射曲率是特殊仿射变换群 SA(2) 的一个微分不变量，属于四阶微分不变量；对于离散曲线，尤其是在拐点附近，直接采用公理化方法对其进行近似在实践中几乎不可行。

贡献。 受 Calabi 等人的数值近似工作的启发， [5], 以及 [15, 10], 中介绍的学习方法，我们提出了一个完整的学习环境，用于近似相对于各种变换群（包括仿射群）的平面曲线微分不变量；此前，针对仿射群在离散情形下微分不变量的近似研究寥寥无几。此外，我们还推出了一套形状匹配基准，用于评估微分不变量近似模型。

2 相关工作

微分不变量的公理化近似。Calabi 等人在 [5], 中提出的用于近似离散平面曲线微分不变量的公理化方法，基于离散平面曲线上各点之间的联合不变量。如 Calabi 等人所建议的，给定变换群 G 和一条平面曲线 $\mathcal{C}$，可以近似曲线在点 $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$处相对于 G 的基本微分不变量，该不变量记为 $\kappa(\mathbf{x})$，称为 $\mathbf{x}$ 处的 G不变量曲率。具体而言，首先利用辅助曲线 $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$对 $\mathbf{x}$ 附近一个小邻域中的一组 $\mathcal{P}_{\mathbf{x}} \subset \mathcal{C}$ 个点进行插值；根据定义，该辅助曲线上的微分不变量为常数。然后，利用 $\mathcal{P}_{\mathbf{x}}$中各点的联合不变量，计算 $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$ 的常微分不变量 $\widetilde{\kappa}(\mathbf{x})$。最后，将 $\widetilde{\kappa}(\mathbf{x})$作为 $\kappa(\mathbf{x})$的近似值。由于该近似值由 G的联合不变量计算得到，其取值不受群变换 $g \in G$的作用影响。因此，随着点网格 $\mathcal{P}_{\mathbf{x}}$的大小趋近于零，点 $\mathbf{x}$ 处微分不变量的近似值将收敛于连续情形下的值。例如，在欧几里得情形中，群 E (2) 和 SE (2) 的基本联合不变量是两点之间的欧几里得距离。应用 Calabi 等人提出的方法，欧几里得曲率 $\kappa(\mathbf{x})$可以通过以下方式近似：首先经过 $\mathbf{x_{i-1}}$、$\mathbf{x_i}$ 和 $\mathbf{x_{i+1}}$三点插值得到一个圆，然后利用这三点之间的欧几里得距离，并结合海伦公式，计算插值圆的常曲率 $\widetilde{\kappa}(\mathbf{x})$。曲线上点 $\mathbf{x}$ 处的第二个微分不变量，定义为 G不变量曲率 κ 相对于 G不变量弧长元素 s的导数，记为 $\kappa_s(\mathbf{x})$。根据 Calabi 等人的方法， $\kappa_s(\mathbf{x})$通过有限差分进行近似，即计算 $\widetilde{\kappa}(\mathbf{x}_{i-1})$与 $\widetilde{\kappa}(\mathbf{x}_{i+1})$之差，并将其除以 $\mathbf{x_{i-1}}$ 与

$\mathbf{x}_{i+1}$之间的距离。在其论文中，Calabi 等人进一步解释了如何近似相对于等仿射群 SA(2)的平面曲线微分不变量。在这种情况下，基本联合不变量是由三个点定义的三角形面积，而辅助曲线是圆锥曲线；该曲线具有恒定的等仿射曲率，必须在$\mathbf{x}$附近的五个曲线点上进行插值。他们的方法在等仿射情形下的主要局限在于，实际上仅适用于凸曲线，因为等仿射曲率在拐点处没有定义。

基于学习的近似。近期的一种方法由[15]提出。在该研究中，Pai 等人采用自监督学习方法，并使用孪生卷积神经网络，从离散平面曲线数据集中学习欧几里得曲率。然而，他们的研究缺少一个模块，无法近似每个点处的欧几里得弧长和／或曲率关于弧长的导数，因此无法生成签名曲线。这意味着他们的方法无法用于评估平面形状之间的等价性。此外，他们尚未将研究扩展到限制较少的变换群，例如等面积仿射群和仿射群。在 [10],中，Lichtenstein 等人提出了一种深度学习方法，用于数值近似程函方程的解。他们建议用经过训练的神经网络取代公理化的局部数值求解器，以便在各种不同的几何形状和采样条件下，准确估计局部距离。

3 数学框架

我们先来看以下定理，见 [14, 第 176 页，定理 8。47],

定理 1（微分不变量基本定理）。作用于 $\mathbb{R}^2$ 的变换群 G 具有以下性质：存在唯一的微分不变量 κ （除相差一个关于它的函数外），称为 G不变曲率；存在唯一的 G不变一形式 $ds = p\ (x)\ dx$ （除相差一个常数倍外），称为 G不变弧长元。 G 的任何其他微分不变量，都是 G不变曲率κ 及其关于 G不变弧长 s 的导数的函数 I： $(\kappa, \kappa_s, \kappa_{ss}, \ldots) \to \mathbb{R}$。

定义 1（等价平面曲线）。设 G 为作用于 $\mathbb{R}^2$ 的变换群。若存在 $g \in G$ 使得 $\mathcal{C} = g \cdot \mathcal{C}$，则平面曲线 $\mathcal{C}$ 与 $\hat{}\mathcal{C}$ 关于 G 等价。

定义 2（签名曲线）。与参数化平面曲线 $\mathcal{C} = \left\{\left(x\ (t)\quad y\ (t)\ \right)\right\}$相关联的 G-不变量签名曲线，是一条以曲线 $\mathcal{C}$ 在某点处的 G-不变曲率及其关于 G-不变弧长的导数为参数的曲线 $S \subset \mathbb{R}^2$，表示为 $S = \left\{\left(\kappa\ (t)\quad \kappa_s\ (t)\ \right)\right\}$。

签名曲线可用于求解一般变换群 G 下平面曲线的等价问题，正如下一个定理所述，该定理见[14,第 183 页，定理 8。53],

定理 2（平面曲线的等价性）。两条非奇异平面曲线 $\hat{\mathcal{C}}$ 和 $\mathcal{C}$ 关于变换群 G 等价，当且仅当它们的签-$\hat{}$名曲线 S 和 S 相等。

有关微分不变量和签名曲线的更多信息，请参阅 [12,13, 14, 3, 2, 1, 8, 9, 4, 7, 3]。

4 方法

我们提出了一种简单的神经网络架构，以及一种适当的训练方案和损失函数，用于生成关于群变换 G 的两个基本微分不变量 κ 和 κ_s 的数值稳定近似。这两个量可以结合起来，用于评估和绘制平面曲线的 G-不变量签名曲线。给定一条平面曲线 $\mathcal{C}$ 以及曲线上的一点$\mathbf{p} \in \mathcal{C}$，神经网络接收$\mathbf{p}$的局部邻域的离散样本作为输入，并输出两个标量，我们将其解释为$\mathbf{p}$处的 κ 和 κ_s。

4.1 学习微分不变量

有两个基本思想指导着我们学习关于变换群 G的微分不变量的训练方法。

群与重参数化不变性。神经网络应学习一种表示，使其既对群变换的作用 $g \in G$ 不变，也对输入曲线的重参数化不变。这样，网络便能学习到真正不变的表示，不会偏向任何特定的离散采样方案，并能涵盖曲线的局部几何性质。给定一条离散平面曲线 $\mathcal{C}$，我们将其下采样版本记为 $\mathcal{C}(\mathcal{D})$，该版本按照随机的非均匀概率质量函数 $\mathcal{D} : \mathcal{C} \to [0, 1]$，以非均匀方式采样 N 个点。对于两个不同的非均匀概率质量函数 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$，可以将下采样曲线 $\mathcal{C}(\mathcal{D}_1)$ 和 $\mathcal{C}(\mathcal{D}_2)$ 视为 $\mathcal{C}$ 的两种不同重参数化。这促使我们提出这样的要求：如果点 $\mathbf{p} \in \mathcal{C}$ 同时出现在 $\mathcal{C}(\mathcal{D}_1)$ 和 $\mathcal{C}(\mathcal{D}_2)$ 中，那么对于任意两个群变换 $g_1, g_2 \in G$，无论将 $g_1 \cdot \mathbf{p}$ 的邻域还是 $g_2 \cdot \mathbf{p}$ 的邻域作为输入，可靠的预测模型都应对点 $\mathbf{p}$ 输出相同的曲率值。

微分不变量的正交性。我们预期 κ 和 κ_s 是正交量，因为后者是前者关于弧长的导数。因此，例如，考虑一组 M 点，其中每个点都从任意平面曲线上采样得到。此外，令 κ^i 和 κ_s^i 分别表示在该 i^{th} 点处求得的曲率及其关于弧长的导数。那么，如果我们将 $\{\kappa^i\}_{i=1}^M$ 和 $\{\kappa_s^i\}_{i=1}^M$ 视为随机变量 M 的观测值 X_κ 和 X_{κ_s}，则预期皮尔逊相关系数的绝对值 $\left|\rho(X_\kappa, X_{\kappa_s})\right|$ 会随着 $M \to \infty$ 趋近于零。我们通过计算从大量光滑曲线上随机采样的一组点中 X_κ 和 X_{κ_s} 的皮尔逊相关系数，在欧几里得情形下对这一假设进行了实证验证。参见图 1。

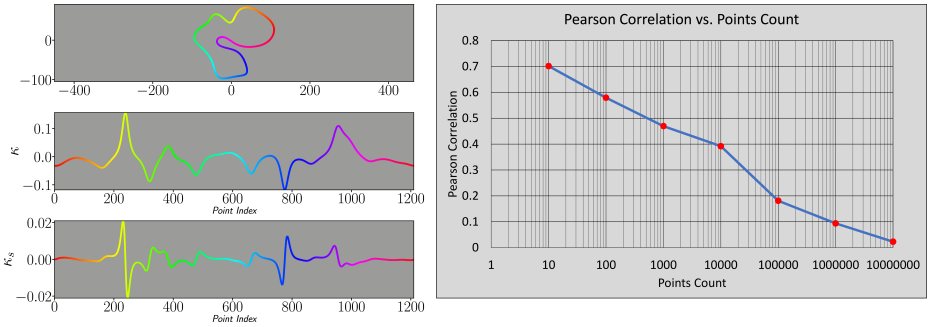


图1. 左图：平滑曲线及其在各点处计算的欧几里得 κ 和 κ_s 的图。**右图**：X_κ 和 X_{κ_s} 的皮尔逊相关系数绝对值随点数变化的半对数图。

4.2 训练方案

给定由 n 条离散平面曲线 $\{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^n$组成的数据集，我们的训练方案会即时生成训练批次，每个批次由一组训练元组构成。一个训练元组 $\mathcal{T} = (\mathcal{E}_a,\ \mathcal{E}_p,\ \mathcal{E}_{n_1},\ \ldots\ldots,\ \mathcal{E}_{n_m})$由一组采样得到的邻域组成，分别称为锚点 $(\mathcal{E}_a)$、正样本 $(\mathcal{E}_p)$和负样本 $(\{\mathcal{E}_{n_i}\}_{i=1}^m)$。生成元组时，首先抽取一条随机曲线 $\mathcal{C}$ 以及曲线上的一个随机点 $\mathbf{p} \in \mathcal{C}$。给定两个随机群变换 $g_a,\ g_p \in G$ 和两个随机非均匀概率质量函数 $\mathcal{D}_a$ 和$\mathcal{D}_p$，锚点和正样本 $\mathcal{E}_a$ 与 $\mathcal{E}_p$均通过以下方式生成：从 $\mathcal{C}$ 经变换并下采样后得到的版本中，分别由 $g_a \cdot \mathcal{C}_a\,(\mathcal{D}_a)$ 和 $g_p \cdot \mathcal{C}_p\,(\mathcal{D}_p)$指定，选取$\mathbf{p}$ (N 个紧邻点，这些点紧接在$\mathbf{p}$之前，以及另外 N 个紧邻点，这些点紧接在$\mathbf{p}$之后)。换言之，$\mathcal{E}_a$ 和 $\mathcal{E}_p$ 都表示在不同重参数化下采样得到的$\mathbf{p}$ 的局部邻域，并且经过了取自同一变换群 G的群变换。

生成 i^{th} 负样本 $\mathcal{E}_{n_i}$ 的方法类似。我们绘制另一条随机曲线 $\mathcal{C}_i$，并在其上取一个随机点$\mathbf{p}_i \in \mathcal{C}_i$。然后，我们再次从 $\mathcal{C}_i$ 经变换和降采样后的版本中，选择另外 $2N$ 个与$\mathbf{p}_i$ 相邻的点；该版本由 $g_{n_i} \cdot \mathcal{C}_i(\mathcal{D}_i)$给出，其中 $g_{n_i} \in G$ 是一个随机群变换，$\mathcal{D}_i$ 是一个随机概率质量函数。

给定一批 K 训练元组 $\{\mathcal{T}_i\}_{i=1}^K$，我们通过最小化如下给出的损失来训练一个多头孪生全连接神经网络，

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_O \tag{1}$$

其中 $\mathcal{L}_I$ 和 $\mathcal{L}_O$ 由下式给出，

$$\mathcal{L}_I = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\mathcal{L}_{\text{tuplet}}^{i} \tag{2}$$

$$\mathcal{L}_{\text{tuplet}}^{i} = \log\left(1+\sum_{j=1}^{m}\exp\left(\|\mathbf{x}_a^i-\mathbf{x}_p^i\|-\|\mathbf{x}_a^i-\mathbf{x}_{n_j}^i\|\right)\right) \tag{3}$$

$$\mathcal{L}_O = \frac{1}{m+2}\left(\left|\rho\left(\left\{\mathbf{x}_a^i\right\}_{i=1}^{K}\right)\right|+\left|\rho\left(\left\{\mathbf{x}_p^i\right\}_{i=1}^{K}\right)\right|+\sum_{j=1}^{m}\left|\rho\left(\left\{\mathbf{x}_{n_j}^i\right\}_{i=1}^{K}\right)\right|\right) \tag{4}$$

$$\rho\left(\left\{\mathbf{x}^i\right\}_{i=1}^{K}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{K}\left(\mathbf{x}^i[0]-\bar{\mathbf{x}}[0]\right)\left(\mathbf{x}^i[1]-\bar{\mathbf{x}}[1]\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{K}\left(\mathbf{x}^i[0]-\bar{\mathbf{x}}[0]\right)^2\sum_{i=1}^{K}\left(\mathbf{x}^i[1]-\bar{\mathbf{x}}[1]\right)^2}} \tag{5}$$

其中，$\mathbf{x}_a^i$、$\mathbf{x}_p^i$、$\mathbf{x}_{n_1}^i$、.. . 、$\mathbf{x}_{n_m}^i \in \mathbb{R}^2$ 是神经网络对由 $\mathcal{T}_i = \left(\mathcal{E}_a^i, \mathcal{E}_p^i, \mathcal{E}_{n_1}^i, \ldots, \mathcal{E}_{n_m}^i\right)$给出的$i^{th}$输入元组的输出，$\mathbf{x}$ [0] 和$\mathbf{x}$ [1]分别是输出向量的第一和第二个分量。此外，$\bar{}\mathbf{x}$ [0] 和 $\bar{}\mathbf{x}$ [1] 分别是输出向量集合中第一和第二个分量的均值。公式3称为元组损失 [17]；当$\mathbf{x}_a^i$ 与$\mathbf{x}_p^i$ 之间的距离最小，且对于 $j = 1$、.. . 、 m，$\mathbf{x}_a^i$ 与$\mathbf{x}_{n_j}^i$之间的距离最大时，该损失达到最小值。公式2称为不变性损失，它等于训练批次中所有训练元组的元组损失的均值。公式4称为正交性损失；在整个批次范围内，相对于锚点、正样本和负样本的输出，当皮尔逊相关系数的绝对值最小时，该损失达到最小值。图2以详细的可视化方式展示了一个训练批次中训练元组的训练方案。注意，在将每个输入样例馈入神经网络之前，我们会将其变换到规范位置，以消除任何平移和旋转歧义。具体做法是平移每个样例，使其第一个点位于原点，然后旋转该样例，使从第一个点指向中间点的向量与正x轴对齐。

5 实验与结果

5.1 数据集与训练

我们通过从互联网上抓取的任意图像中提取等值曲线，创建了三个平面曲线数据集。前两个数据集用于训练和验证，第三个数据集用于定性评估。每个数据集都包含数万条曲线。我们基于简单的全连接架构训练了一个多头孪生神经网络。该架构由多个模块组成，每个模块包含 3 个大小相同的全连接层。

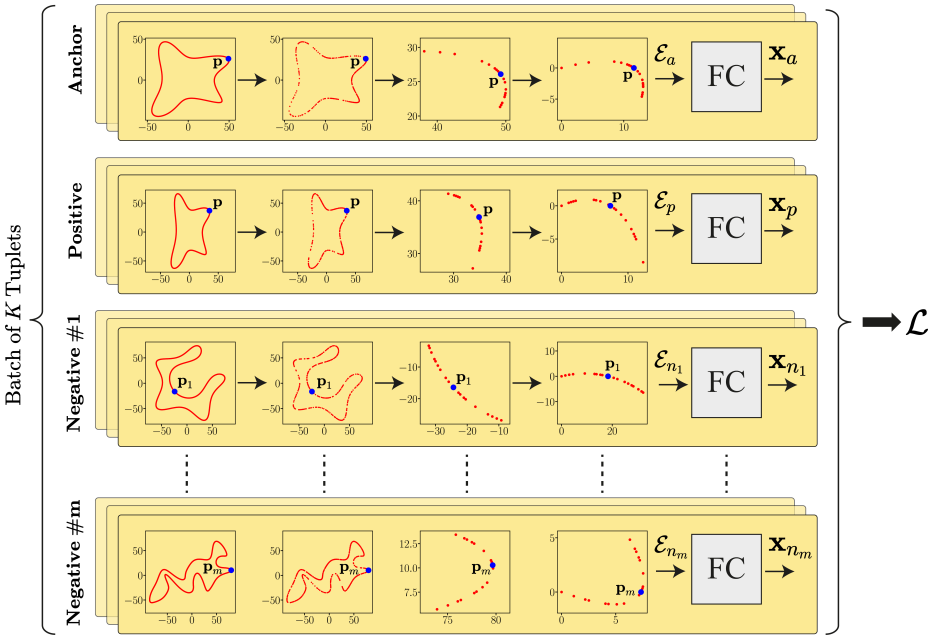


图 2. 给定一批训练三元组时，训练方案的示意图。**从左到右**：绘制一条随机曲线及其上的一个随机点。对曲线进行非均匀降采样。提取该点周围的局部邻域。按照上文所述，将提取出的点邻域变换到规范位置。将规范化后的点邻域输入神经网络，网络输出两个标量，我们将其解释为 κ 和 κ_s。**从上到下**：锚点和正训练样本，以及 m 负训练样本。它们共同构成一个训练三元组。

第一个模块中的层大小为 128，之后每个模块中各层的大小都比前一个模块减半。我们在每个线性层后接一个批归一化层，再接一个正弦激活函数。使用周期激活函数的原因在于，其导数可以通过相位偏移来表示。我们认为，这一特性使我们的网络更容易学习高阶导数 [16]。

5.2 定性评估

我们针对仿射群，对微分不变量近似模型进行定性评估。我们重点关注可解释性、群不变性、重参数化不变性，以及与欧几里得公理化特征的比较。

可解释性。如图 3所示，我们模型的输出可以解释为 κ 和 κ_s。第一个输出，我们将其解释为 κ，当第二个输出（我们将其解释为 κ_s）穿过零线时，它大致达到极值点。

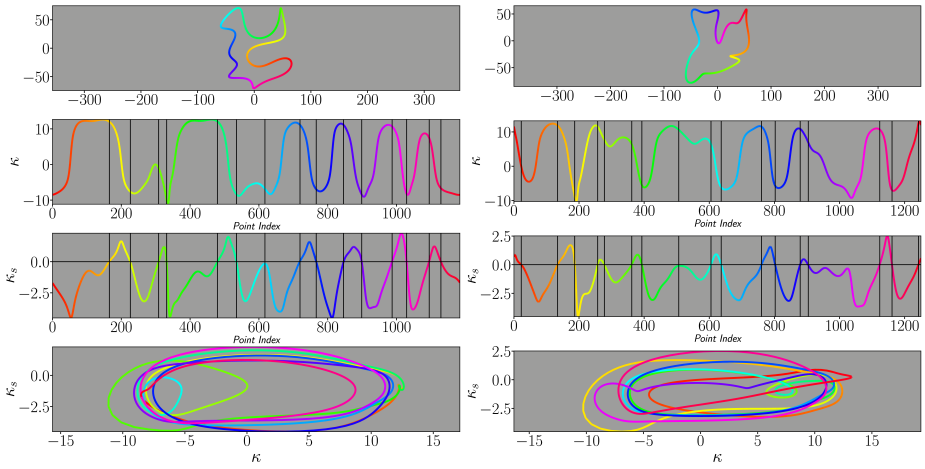


图 3. 两条离散平面曲线，以及模型对其仿射 κ 和 κ_s 随点索引变化的近似结果，以及 κ_s 随 κ 变化的近似结果（仿射标志曲线）。

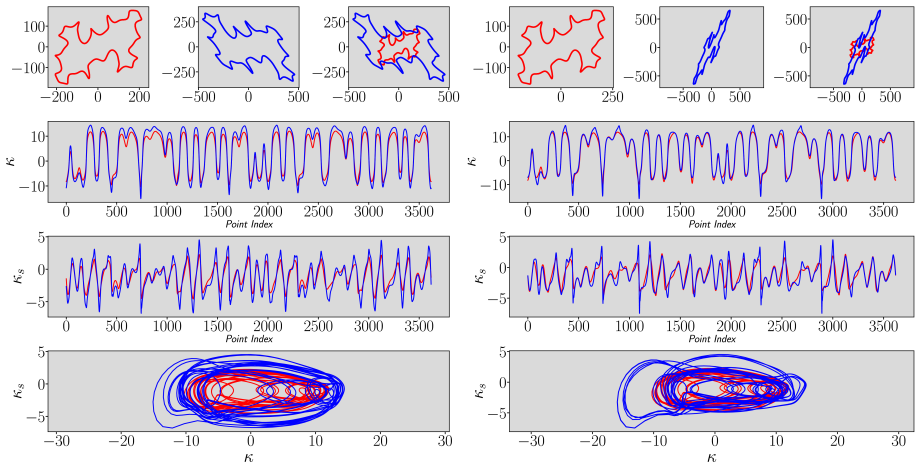


图 4. 对比模型对两对等价曲线的仿射 κ 和 κ_s 随点索引变化的近似结果。蓝色曲线是对红色曲线应用线性算子得到的。**左**：条件数为 2.5、行列式为 3.5 的线性算子。**右**：条件数为 5、行列式为 2 的线性算子。

群作用不变性。 如图 4所示，相对于仿射群，我们的近似模型表现出明显的群不变性。两条等价曲线（红色和蓝色曲线）的 κ 和 κ_s 图中的峰值和谷值均正确对齐，且相对振幅放大程度较小。

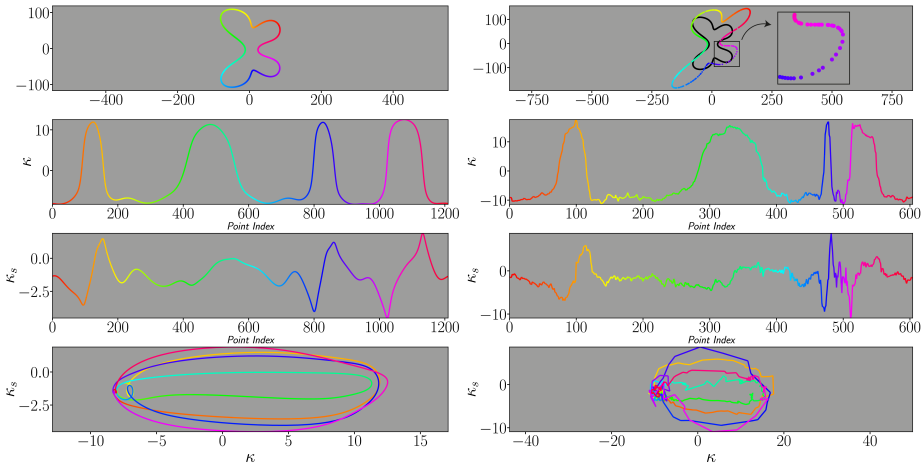


图 5. 展示了我们的模型在非均匀下采样情况下的鲁棒性。**左图**：我们的模型对参考平面曲线的 κ 和 κ_s 的近似。**右图**：参考曲线经 50% 非均匀下采样并施加任意仿射变换后，我们的模型对该曲线的 κ 和 κ_s 的近似。

重参数化不变性。 如图 5所示，我们的近似模型对重参数化和非均匀下采样具有鲁棒性。参考曲线的 κ 和 κ_s 的波峰与波谷模式，在其下采样和变换后的版本中得到了清晰再现（颜色对应）。

与欧几里得公理化方法的比较。 如图6所示，我们的模型关于仿射群对 κ 和 κ_s 的近似优于公理化欧几里得方法（该方法基于有限差分）。正如预期的那样，对于两条等价曲线，公理化签名中的 κ 和 κ_s 明显错位，且振幅放大的差异很大。另一方面，我们模型生成的近似彼此对齐，且只出现轻微的振幅放大。

5.3 定量评估

我们编制了一个评估基准，其中包含34组平面曲线。这些曲线提取自自然物体轮廓的边界，这些轮廓不一定光滑（见图7）。每组包含同一概念物体在不同姿态和形变下的30条边界曲线。我们进行简单的形状匹配评估，流程如下：遍历所有集合中的所有边界曲线。给定 j^{th} 集合中的 i^{th}曲线，我们使用仿射变换对其进行形变，然后对其下采样，得到我们所称的查询曲线。随后，将查询曲线与其所在集合中的所有曲线（称为数据库曲线）进行比较。比较查询曲线与数据库曲线时，我们会计算其对应签名曲线之间的平均豪斯多夫距离；这些签名曲线由我们的模型计算得出

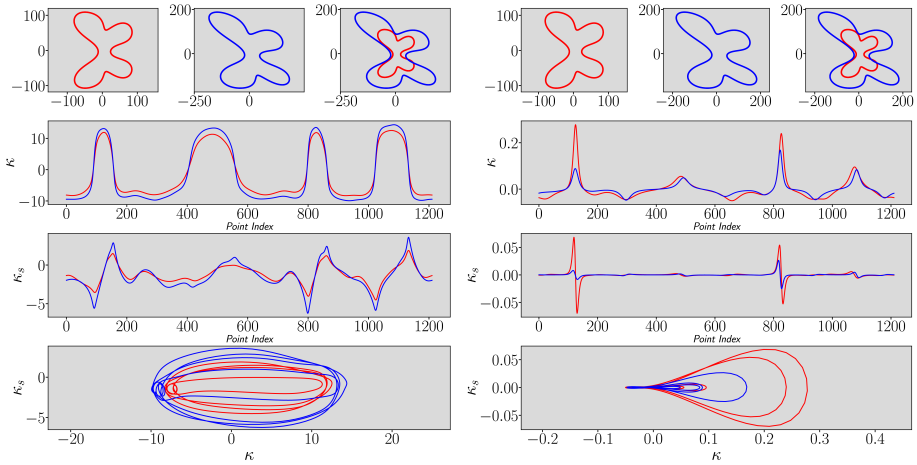


图6. 两条仿射等价曲线（蓝色和红色）及其微分不变量的近似。**左图**：使用我们的训练模型对仿射 κ 和 κ_s 进行近似。**右图**：使用基于有限差分的公理化方法对欧几里得 κ 和 κ_s 进行近似。

表1.形状匹配评估（兔子数据集）

	成功率								
	我们的模型			欧几里得公理化方法			等面积仿射公理化方法		
采样率	$\det = 2$ $\text{cond} = 2$	$\det = 2$ $\text{cond} = 3$	行列式 $= 3$ 条件数 $= 2$	行列式 $= 2$ 条件数 $= 2$	行列式 $= 2$ 条件数 $= 3$	行列式 $= 3$ 条件数 $= 2$	行列式 $= 2$ 条件数 $= 2$	行列式 $= 2$ 条件数 $= 3$	$\det = 3$ $\text{cond} = 2$
100.00%	100.00%	100.00%	70.00%	3.33%	16.67%	10.00%	16.67%	10.00%	3.33%
90.00%	100.00%	100.00%	63.33%	13.33%	6.67%	10.00%	3.33%	0.00%	3.33%
80.00%	90.00%	90.00%	56.67%	10.00%	6.67%	10.00%	0.00%	0.00%	3.33%
70.00%	83.33%	90.00%	46.67%	6.67%	0.00%	3.33%	3.33%	0.00%	0.00%
60.00%	63.33%	73.33%	43.33%	13.33%	10.00%	6.67%	13.33%	3.33%	3.33%
50.00%	56.67%	46.67%	33.33%	3.33%	3.33%	3.33%	3.33%	3.33%	3.33%

模型。如果通过将一条曲线与其自身经过变换和下采样后的版本进行比较，得到的距离最小，我们就称其匹配成功。我们通过计算每个集合中成功匹配曲线数量的平均值来评估该集合，并将其称为该集合的成功率。我们在不同的下采样比例和仿射变换下进行这项实验。我们使用此基准测试来评估我们的模型，以及 [5] 提出的欧几里得群和等仿射群的公理化近似。我们运行了三种不同形式的基准测试。第一种形式中，我们使用仿射变换 $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 对每条曲线进行变换，其中 $\det(A) = 2$ 且 $\text{cond}(A) = 2$。第二种形式中，$\det(A) = 2$ 且 $\text{cond}(A) = 3$；第三种形式中，$\det(A) = 3$ 且 $\text{cond}(A) = 2$。在这三种形式中，我们都以递增的采样比例对查询曲线进行下采样：采样比例为100%表示保留所有点，采样率为90%表示舍弃10%的点，依此类推。兔子数据集的评估结果见表1。

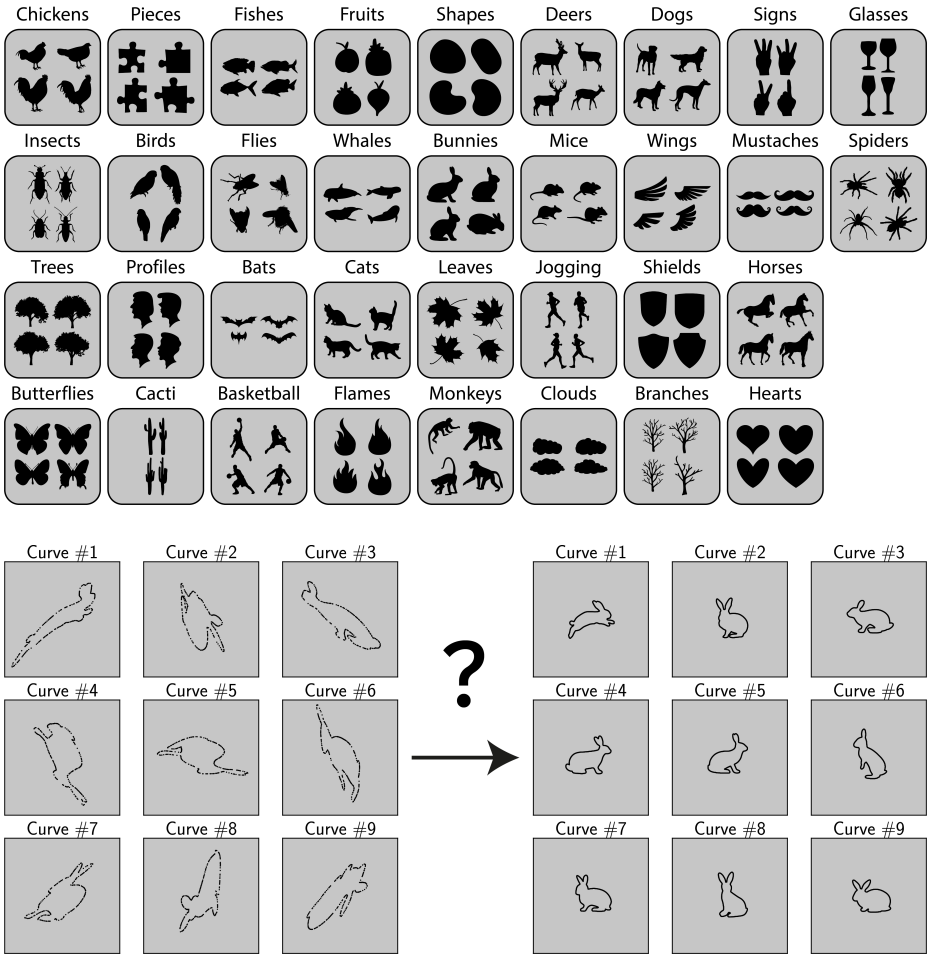


图 7。**上**：我们的基准测试中曲线集合的示例。我们从每个集合中绘制了四个样本（共 30 个）。**下**：以兔子 集合为例，展示我们的形状匹配基准。左侧每条经过变换和降采样的曲线，都应与右侧对应的曲线匹配。虽然图中仅展示了 9 条曲线，但在实际的形状匹配基准中，每个集合都包含 30 条需要匹配的曲线。

6 结论与未来研究

我们提出了一种自监督方法，利用多头孪生神经网络来近似相对于给定变换群 G 的平面曲线微分不变量。我们通过定性结果表明，模型对于群作用、重参数化和非均匀下采样具有不变性。我们还展示了该方法在形状匹配任务中的适用性。作为未来的研究方向，我们计划设计

用于近似高维微分不变量的学习模型 [11], ，例如空间曲线的挠率，以及嵌入欧氏空间中的曲面的主曲率。

参考文献

1. Bruckstein, A., Netravali, A.：《平面曲线微分不变量及部分遮挡平面形状的识别》。《数学与人工智能年刊》（1995 4 2）。Bruckstein, A.M., Katzir, N., Lindenbaum, M., Porat, M.：部分遮挡平面形状的相似不变签名。《国际计算机视觉杂志》（1992 4 3）。Bruckstein, A., Holt, R., Netravali, A., Richardson, T.：部分遮挡条件下平面形状识别的不变签名（1992 4 4）。Bruckstein, A., Shaked, D.：通过不变签名进行斜对称检测。《模式识别》（1998 4 5）。Calabi, E., Shakiban, C., Olver, P.J., Haker, S.：应用于目标识别的微分及数值不变签名曲线。《国际计算机视觉杂志》（1998）2, 10 6。Cartan, E.：《移动标架法、连续群理论与广义空间》。《数学公报》（1935 1 7）。Catté, F., Lions, P.L., Morel, J.M., Coll, T.：通过非线性扩散进行图像选择性平滑与边缘检测。《SIAM数值分析杂志》（1992 4 8）。Kimmel, R.：平面形状灰度图像的仿射微分签名（1996 4 9）。Kimmel, R., Zhang, C., Bronstein, A.M., Bronstein, M.M.：MSER特征真的有趣吗？《IEEE模式分析与机器智能汇刊》（2011 4 10）。Lichtenstein, M., Pai, G., Kimmel, R.：深度Eikonal求解器。载于：Lellmann, J., Burger, M., Modersitzki, J.（编）：《计算机视觉中的尺度空间与变分方法》。Springer（2019 2, 3 11）。Olver, P.：曲面的微分不变量。《微分几何及其应用》（2009 12 12）。Olver, P., Sapiro, G., Tannenbaum, A.：计算机视觉中的微分不变签名与流：对称群方法。Springer（1994 4 13）。Olver, P.J.：《等价、不变量与对称性》。剑桥大学出版社（1995 4 14）。Olver, P.J.：《经典不变量理论》。《伦敦数学学会学生教材》，剑桥大学出版社（1999 1, 3, 4 15）。Pai, G., Wetzler, A., Kimmel, R.：学习平面曲线的不变表示。载于：5 2, 3 16 2017 th Int. Conf. on Learning Representations（）。Sitzmann, V., Martel, J.N., Bergman, A.W., Lindell, D.B., Wetzstein, G.：具有周期激活函数的隐式神经表示。载于：NeurIPS论文集（2020）7 17。Yu, B., Tao, D.：采用元组边际损失的深度度量学习。载于：2019年IEEE/CVF国际计算机视觉会议（ICCV）（2019）6