arXiv:2303.03466v1 [math.CO] 6 Mar 2023

Donaldson-Thomas 变换的 F-多项式

DAPING WENG

Abstract. F-多项式是系数为整数的多项式，用于编码簇代数中簇变量的突变。本文研究与 Donaldson-Thomas 变换作用于簇变量相关联的 F-多项式。对于无环箭图、曲面型箭图以及与三重旗相关联的箭图，我们用标记偏序集上理想的生成函数，明确描述其 Donaldson-Thomas F-多项式。我们还描述了所需的组合过程，通过修改这些标记偏序集，为全子箭图和三角扩张得到 Donaldson-Thomas F-多项式。

Contents

1. 引言 1 2. 来自标记偏序集的理想函数 3 3. 箭图与簇代数概述 5 4. DT 变换的 F-多项式的性质 8 5. 无环箭图上 DT 变换的 F-多项式 11 6. 曲面型箭图上 DT 变换的 F-多项式 12 7. 与三重旗相关联的箭图上 DT 变换的 F-多项式 19 参考文献 26

1. Introduction

簇代数由 Fomin 和 Zelevinsky [FZ02], 引入，是一类特殊的交换代数，其生成元和关系由一种称为簇变异的递归过程给出。簇代数的组合结构由一族箭图刻画，这些箭图是不含有向 1-圈和 2-圈的有向图，并通过箭图突变彼此关联。根据突变等价箭图的族，簇代数可以划分为若干较小的类别，例如有限型（存在 Dynkin 型箭图）、无环型（存在不含有向圈的箭图）、曲面型（存在来自带标记曲面三角剖分的箭图）、有限变异型（在同构意义下只有有限多个突变等价箭图），以及局部无环型（可局部化为无环簇代数）。

Kontsevich 和 Soibelman [KS08] 将带有稳定性条件的三维 Calabi-Yau 范畴与一个（带势）箭图联系起来，并构造了此类范畴的 Donaldson-Thomas 不变量。该 Donaldson-Thomas 不变量在相应的簇代数上诱导出一个唯一的形式自同构，称为 Donaldson-Thomas 变换。Keller [Kel17] 通过箭图上的变红变异序列，从组合角度刻画了 DT 变换。利用组合方法，人们已为有限型箭图和无环箭图 [BDP14], 、plabic 图箭图 [FS18], 、有限变异型箭图的一个子族 [Mil17],以及一类称为 Banff 箭图的局部无环箭图 [BM20]构造了变红变异序列。另一方面，基于 Keller 的刻画，许多源自几何的簇代数的 DT 变换已

在模空间上以几何方式构造出来，这些模空间对应于 G-局部系统 [GS18, GS19], 、格拉斯曼流形[Wen21], 、双 Bott-Samelson 细胞 [Wen20, SW19], 以及辫 varieties [CW22, CGG+22]。

由簇变异产生的簇代数中特殊生成元称为簇变量，它们被分组成大小相同且彼此重叠的子集，称为簇。簇代数的一项重要性质是 Laurent 现象 [FZ02], : 给定一个固定的簇（也称为初始簇），任何其他簇变量都可以表示为初始簇变量的 Laurent 多项式。此外，根据 Fomin 和 Zelevinsky 的分离公式 [FZ07], ，这个 Laurent 多项式还可以进一步写成一个 Laurent 单项式与另一个 Laurent 多项式的乘积。前者由一个称为 G-向量的整数元组编码，后者则可由多项式 F 通过变量代换得到（定理 3.5）。多项式 F 称为 F-多项式。Lee 和 Schiffler [LS15] 证明，F-多项式具有正整数系数。Gross、Hacking、Keel 和 Kontsevich [GHKK18]将 F-多项式作几何解释，视其为对某些称为折线的热带曲线的计数；这不仅意味着系数具有正性，也表明 F-多项式总有常数项 1。然而，由于折线的构造过程十分复杂， F-多项式通常仍缺乏深入理解。

DT 变换通过置换簇并将簇变量映射为簇变量，在簇代数上作用。因此，对于任意初始簇变量 A_i ，都可以对 DT(A_i) 应用分离公式，并提取一个 G- 向量 g_i 和一个 F- 多项式 F_i （见公式 (4)）。由热带簇对偶 [NZ12] 可知， G-向量 g_i 总是负基向量；因此，DT 作用的所有信息都包含在 F-多项式 F_i 中。本文聚焦于某些特殊的箭图族和簇变量，并将其 DT 变换的 F-多项式与某个标记偏序集中的理想的特定生成函数联系起来，我们称之为理想函数（定义 2.1、2.2、2.3）。下面概述我们的主要结果。

定理 1.1. 对于以下箭图族和顶点，其 DT 变换的 F-多项式由简单标记的带基点偏序集的理想函数给出:

箭图类型	顶点	偏序集	定理
无环	任意顶点	上升树	5.2
曲面型	可容许弧	图6	6.4
三重旗	任意顶点	三维杨图	7.1

此外，对于通过取全子箭图或进行三角扩张构造的箭图，其F-多项式可通过相应的截断（推论 4.4）或扩张（推论 4.7）构造出来。

由于定理 1.1 将 DT 变换的 F-多项式与简单标记的带基点偏序集的理想函数联系起来，因此关于 F-多项式具有正系数和常数项 1 的性质便显而易见。

例 1.2。作为演示，考虑图 1 左侧所示的箭图。注意，由顶点 $\{0, 1, \ldots, 6\}$ 张成的全子箭图，是与 $\mathbb{C}^6$ 中的三重旗相关联的箭图的全子箭图；由顶点 $\{7, 8, 9\}$ 张成的全子箭图是曲面型箭图；整个箭图则是这两个全子箭图的三角扩张。因此，通过应用定理 1.1，我们可以写出一个标记偏序集，对于该箭图中的每个顶点，其理想函数都是 DT 的 F-多项式。例如，顶点 0 所对应的一个这样的标记偏序集绘于图 1 右侧。注意，它是通过将三条线性链附接到一个立方体形三维杨图偏序集上得到的。

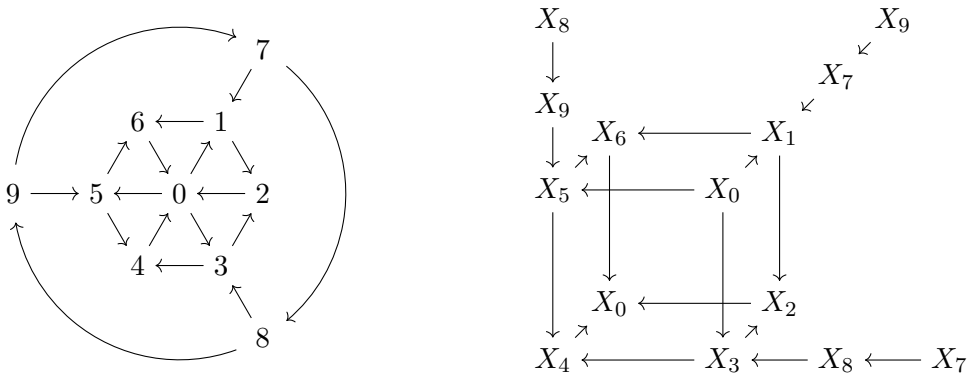


FIGURE 1. 一个箭图示例，以及描述该箭图某个顶点的 DT F-多项式的标记偏序集。

例1.3。基于 Shen 的一个想法，Zhou [Zho20] 研究了 DT 变换在箭图折叠下的关系。结合我们的结果与 Zhou 的结果，我们甚至可以写出马尔可夫箭图上 DT 变换的 F-多项式（图2左图）；众所周知，该箭图没有变红序列。关键在于注意到：从与四点穿孔球面相关联的箭图（图2中图）到马尔可夫箭图存在一个二对一覆盖。注意，覆盖箭图具有一个变红序列，并且定理 1.1 适用于该覆盖箭图的所有顶点。然后，为了得到马尔可夫箭图上 DT 的 F-多项式，我们只需将偏序集的标记替换为其在折叠箭图（马尔可夫箭图）中的对应标记。我们在图2右侧绘出了这样一个标记偏序集的哈斯图。其余两个顶点的 DT 的 F-多项式可以通过循环对称性得到。

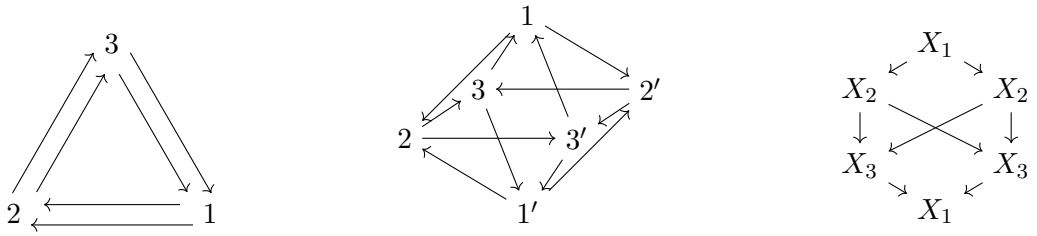


FIGURE 2. 马尔可夫箭图上 DT F-多项式对应的标记偏序集。

致谢。我们感谢 Alexander Goncharov 在研究 DT 变换过程中给予的指导和鼓励。我们还要感谢 Linhui Shen 就子箭图／折叠箭图的 DT 变换与原箭图之间的关系展开讨论。

2. Ideal Functions from Labeled Posets

偏序集（"partially ordered set"的简称）是一个带有偏序 $\leq$的有限集合 P。如果偏序集 P中存在唯一的极小元，则称该偏序集有唯一极小元。

定义2.1。偏序集 P 的理想是满足以下条件的子集 $I \subset P$

$$(i \in I \text{ and } j \leq i) \implies (j \in I).$$

注意，我们允许理想为空。给定 P 中的一组元素，由这些元素生成的理想是所有包含这些元素的理想的交集。我们用 $\mathcal{I}(P)$ 表示偏序集 P 中理想的集合。

设 X 是一组形式交换变量，令 $\mathbb{Q}$(X) 表示以 X 中变量为自变量的有理系数有理函数域。

定义 2.2. 偏序集 P 的 $\mathbb{Q}$(X)-标记，或简称标记，是一个映射 $L\colon P \to \mathbb{Q}$(X)。我们不假设该映射是单射。我们称二元组 (P, L) 为标记偏序集。若标记 L 的像包含于子集 X $\subset \mathbb{Q}$(X) 中，则称 L 为简单的。由简单标记标记的简单偏序集称为简单标记偏序集。注意，当标记 L 是简单的时，理想函数 $F_{(P,L)}$ 自然属于带有正系数的 $\mathbb{Z}$[X] 。为简化记号，对于任意标记 L，我们定义 $L_i := L(i)$。

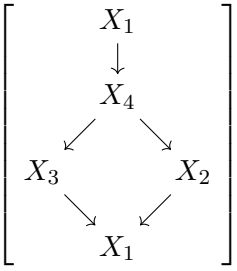
定义 2.3. 设 (P, L) 为一个标记偏序集。与该标记偏序集相关联的理想函数定义为函数

$$F_{(P,L)} := \sum_{I \subset \mathcal{I}(P)} L_I, \quad \text{where} \quad L_I := \prod_{i \in I} L_i.$$

我们将 $F_{(P,L)}$ 视为 $\mathbb{Q}$(X) 中的一个元素。特别地，空理想总会在理想函数中贡献一个常数项 1。

为了更直观地表示理想函数，我们可以使用哈斯图。偏序集 P 的哈斯图是一个箭图，其顶点集为 P；当且仅当 $i > j$ 且不存在满足 $i > k > j$的 k 时，存在一条从 i 到 j 的箭头。注意，哈斯图自动构成无环箭图。此外，我们可以将哈斯图画成箭头始终朝下。现在，给定一个额外的 $\mathbb{Q}$(X)-标记 $L\colon P \to \mathbb{Q}$(X)，我们可以用其像 L_i替换哈斯图中的每个顶点 i 。要写出理想函数，我们只需沿着哈斯图自下而上读取，找出 P中的所有理想，而每个理想都会在理想函数中贡献一项。我们采用这样的约定：若用哈斯图表示一个标记偏序集，则在哈斯图外加上方括号来表示其理想函数。

例 2.4。考虑下面这个简单标记偏序集。其理想函数为



$$= 1 + X_1 + X_1X_2 + X_1X_3 + X_1X_2X_3 + X_1X_2X_3X_4 + X_1^2X_2X_3X_4.$$

我们来证明一些关于理想函数的基本引理。

引理 2.5. 设 (P, L) 是一个标记偏序集，并假设 P 是有唯一极小元的。令 P' 为从 P 中移除唯一极小元 $i_{\min}$ 后得到的集合。设 (P', L') 是将偏序和标记限制到 P' 上所得到的标记偏序集。则

$$F_{(P,L)} = 1 + L_{i_{\min}} F_{(P',L')}.$$

证明。由以下事实可知： P 中的任意非空理想都包含极小元 $i_{\min}$。 □

引理2.6. 设 (P, L) 是一个标记偏序集。设 $j < i$ 是 P 中的一对顶点。令 $P' := P \sqcup \{k\}$，并通过声明 $j < k < i$ 将偏序扩展到 P' 。我们选取一个可逆元 $L_0 \in \mathbb{Q}$(X)，使得 $1 + L_0$ 也是可逆的，并在 P' 上定义新的标记 L'，其定义为

$$L'_s := \begin{cases} L_j(1 + L_0)^{-1} & \text{if } s = j, \\ L_0 & \text{if } s = k, \\ L_i(1 + L_0^{-1}) & \text{if } s = i, \\ L_s & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then

$$F_{(P',L')} = F_{(P,L)}.$$

证明。 P 中的理想属于三个互不相交的族。

对于那些不包含 j的 P 中的理想 I ，它们也是 P'中的理想。由 P' 的构造可知，对于这些理想，$L_I = L'_I$ 。

对于那些包含 j 但不包含 i的 P 中的理想 I ，每个理想都对应于 P'中的两个理想，即 I 和 $I \sqcup \{k\}$。根据构造，我们有

$$L'_I + L'_{I\sqcup\{k\}} = L_I(1+L_0)^{-1} + L_I(1+L_0)^{-1}L_0 = L_I.$$

任意　同时包含 i 和 j的 P中的理想 I 是 P'中的一个理想，并且我们有 $I \sqcup \{k\}$

$$L'_{I\sqcup\{k\}} = L_I(1+L_0)^{-1}L_0(1+L_0^{-1}) = L_I.$$

注意，这三种情况也涵盖了 P' 中的所有理想。这意味着$F_{(P',L')} = F_{(P,L)}$。 □

注意，引理2.6也可以反向使用。如果 $i \to k \to j$ 是标记偏序集 H 的哈斯图中的箭，且 k 不与任何其他顶点相连，那么我们可以从偏序集 P 中移除 k ，并重新标记顶点 i 和 j ，而不改变理想函数。

如果标号映射 L 将某些偏序集元素标记为 0，那么我们可以进一步简化该标记偏序集，而不改变理想函数。

定义 2.7. 设 P 是一个偏序集。对偶偏序集 P^{op} 是一个与 P 底集相同、但序关系相反的偏序集。在 P对偶 中的理想称为 P 中的反理想。给定 P 中的一组元素，由这些元素生成的反理想，与在 P^{op} 中由同一组元素生成的理想相同。

引理 2.8. 设 (P, L) 是一个标记偏序集，并设 $S \subset P$ 满足 $L|_S$ 是常零映射。令 P_S 为由 S 生成的反理想的补集，并令 $L_S := L|_{P_S}$。那么

$$F_{(P,L)} = F_{(P_S,L_S)}.$$

证明。令 A_S 为由 S 生成的反理想。如果理想 I 在 P 中与 A_S 有非空交集，那么 I 必须包含某个元素 $i \in S$。由于 $L|_S = 0$，这意味着 $L_I = 0$。因此， $F_{(P,L)}$ 中唯一非零的项对应于与 A_S 不相交的理想 I 。但它们与 P_S 中的理想相同。因此我们可以得出结论：$F_{(P,L)} = F_{(P_S,L_S)}$。□

3. Overview of Quivers and Cluster Algebras

本文中，我们始终假设箭图没有有向 1-圈或有向 2-圈。我们用 I 表示 Q 的顶点集合，并用其交换矩阵 ϵ记录 Q 中的箭； ϵ是一个$I \times I$ 斜对称矩阵，其元素为

$$\epsilon_{ij} := \#(i \to j) - \#(j \to i).$$

给定 Q中的一个顶点 k ，我们可以沿着 k 的方向突变 Q ，得到一个新的箭图 Q' ，其顶点集合相同，但交换矩阵变为

$$\epsilon'_{ij} = \begin{cases} -\epsilon_{ij} & \text{if } k \in \{i,j\}, \\ \epsilon_{ij} + [\epsilon_{ik}]_+[\epsilon_{kj}]_+ - [-\epsilon_{ik}]_+[-\epsilon_{kj}]_+ & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这里 $[a]_+ := \max\{a, 0\}$。通过一系列突变从 Q 得到的箭图称为与 Q突变等价。突变等价关系是一种等价关系，我们将其记为 $\sim$。

与 Q 通过关联构造系数箭图是一个箭图 i ，添加一个冻结顶点 i' ，并添加一条从 i 指向 i'的箭头。请注意，我们不能在冻结顶点处进行突变。因此， Q的交换矩阵

具有如下形式：$\begin{pmatrix} & \epsilon & \\ - & \mathrm{id} & \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}$。现在，对于 Q的一个给定箭图顶点序列 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_l)$，我们可以沿着该序列对箭图 Q 进行突变，从而得到另一个箭图 $Q' = \mu_{\mathbf{k}}(Q) = \mu_{k_l} \circ \mu_{k_{l-1}} \circ \cdots \circ \mu_{k_1}(Q)$。$\tilde{Q}'$的交换矩阵具有如下形式：$\begin{pmatrix} \epsilon' & c \\ -c & * \end{pmatrix}$，其中 ϵ'是箭图 $\mu_{\mathbf{k}}(Q)$的交换矩阵。矩阵 c $I \times I$ 称为与 Q 及突变序列 $\mathbf{k}$ 相关联的 C矩阵。 C矩阵的行向量称为 C向量。特别地，矩阵 c 满足一项特殊的符号相干性性质；该性质由 Fomin 和 Zelevinsky 在 [FZ07], 中提出猜想，随后由 Derksen、Weyman 和 Zelevinsky 在斜对称情形下证明，并由 Gross、Hacking、Keel 和 Kontsevich 在一般情形下证明。

定理 3.1（符号相干性 [DWZ10, GHKK18]）。对于每个 C-向量 c_i，其行向量中的所有元素要么均为非负，要么均为非正。

利用这一特殊性质，Keller [Kel17] 为任意与初始箭图 Q突变等价的箭图的顶点定义了着色；基于这一着色方案，他进一步定义了称为“变红序列”和“极大绿色序列”的特殊突变序列。

定义 3.2。设 Q 为一个箭图，$\mathbf{k}$ 为一个突变序列。设 c 为与箭图 Q 及突变序列 $\mathbf{k}$ 相关联的 C-矩阵。若顶点 i 在 $\mu_{\mathbf{k}}(Q)$ 中对应的所有元素均为非负，则称其为绿色；若顶点 i 在 $\mu_{\mathbf{k}}(Q)$ 中对应的所有元素均为非正，则称其为红色。注意，根据定理 3.1， $\mu_{\mathbf{k}}(Q)$ 中的任意顶点要么是绿色，要么是红色。

定义 3.3。在初始箭图 Q 上的突变序列 $\mu_{\mathbf{k}}$ 称为变红序列，如果 $\mu_{\mathbf{k}}(Q)$ 中的所有顶点都是红色。若一个变红序列在每一步都只在绿色顶点处进行突变，则称其为极大绿色序列。

对于每个突变等价的箭图族，Fomin 和 Zelevinsky [FZ02] 引入了一种称为“簇代数”的交换代数。为了构造具有初始箭图Q的簇代数，我们首先为 Q的每个顶点 i 关联一个形式变量 A_i。令 $\mathbb{Q}(\mathbf{A})$表示形式变量集合 $\mathbf{A} = \{A_i\}_{i \in I}$上的有理函数域。现在，对于任意突变序列 $\mu_{\mathbf{k}}$，我们将按照递归过程在 $\mathbb{Q}(\mathbf{A})$中生成新的元素。设我们为$Q' = \mu_{k_{l-1}} \circ \cdots \circ \mu_{k_1}(Q)$得到的元素为 $\{A'_i\}_{i \in I}$，且 Q' 的交换矩阵为 ϵ'；那么对于 $Q'' = \mu_{k_l}(Q')$，我们通过以下变异公式生成一个新的集合：

$$A''_i = \begin{cases} \dfrac{1}{A'_k} \left(\displaystyle\prod_j A_j'^{[\epsilon'_{kj}]_+} + \prod_j A_j'^{[-\epsilon'_{kj}]_+} \right) & \text{if } i = k, \\ A'_i & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

这样一个元素集合称为簇，而簇中的元素称为簇变量。

定义 3.4（[FZ02，定义 2.3]）。与箭图 Q （以及与其突变等价的箭图族）相关联的簇代数 $\mathcal{A}$ ，是 $\mathbb{Q}(\mathbf{A})$中由所有簇变量生成的子代数。

Fock 和 Goncharov [FG09] 引入了簇代数的一种对偶版本，称为簇泊松代数。簇泊松代数的构造与簇代数的构造只有细微差别。我们再次从一组形式变量 $\mathbf{X} = \{X_i\}_{i \in I}$开始，并沿突变序列对它们进行突变，从而为突变等价族中的每个箭图生成一组新的 $\mathbb{Q}(\mathbf{X})$ 中的元素。与簇变量的突变 (1) 不同，簇泊松

变量按照 [FG09，公式 (13)],[FZ07，命题 3.9] 进行突变 :

$$X_i'' = \begin{cases} X_k'^{-1} & \text{if } i = k, \\ X_i' \left(1 + X_k'^{-\mathrm{sign}(\epsilon_{ik}')}\right)^{-\epsilon_{ik}'} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

对于每个箭图 $Q' \sim Q$，我们可以取 Laurent 多项式环 $\mathbb{Q}[X_i'^{\pm 1}]_{i\in I}$。簇泊松代数定义为以下交集

$$\mathcal{X} := \bigcap_{Q'\sim Q} \mathbb{Q}[X_i'^{\pm 1}]_{i\in I}.$$

注意，与簇代数不同，簇泊松变量未必是簇泊松代数中的元素。

对于任意带有交换矩阵 ϵ' 的箭图 $Q' \sim Q$，我们有映射 $p\colon \mathbb{Q}(\mathbf{X}) \to \mathbb{Q}(\mathbf{A})$，其定义如下:

$$p(X_i') = \prod_{j\in I} A_j'^{\epsilon_{ij}'}, \tag{3}$$

其中， A_j' 和 X_i 是与箭图 Q' 相关联的变量。通过比较突变公式 (1) 和 (2)，不难看出， p 映射与突变可交换，因此无论使用哪个箭图，都存在唯一的 p 映射 $p\colon \mathbb{Q}(\mathbf{X}) \to \mathbb{Q}(\mathbf{A})$。

设 $Q' = \mu_{\mathbf{k}}(Q)$ 是一个与 Q 突变等价的箭图。设 A_i' 为簇变量， X_i' 为与 Q' 相关联的簇泊松变量。那么， A_i' 和 X_i' 可以用初始簇变量和初始簇泊松变量（即与 Q 相关联的变量）表示如下。

定理 3.5（分离公式 [FZ07，命题 3.13，推论 6.3]）。存在一组整数 g_{ij} 和关于初始簇泊松变量 $\mathbf{X}$ 的系数为整数的多项式 $F_{A_i'}(\mathbf{X})$，使得

$$A_i' = \left(\prod_j A_j^{g_{ij}}\right) p(F_{A_i'}(\mathbf{X})) \qquad and \qquad X_i' = \prod_j \left(X_j^{c_{ij}} F_{A_j'}(\mathbf{X})^{\epsilon_{ij}'}\right).$$

整数 c_{ij} 是相应 C-矩阵的条目。

定义 3.6。整数 g_{ij} 构成一个矩阵 g，称为初始箭图 Q上与突变序列 $\mu_{\mathbf{k}}$ 相关联的 G-矩阵。 G-矩阵的行向量称为 G-向量。多项式 $F_{A_i'}$ 称为关于初始箭图 Q、与簇变量 A_i' 相关联的 F-多项式。

F-多项式具有许多有趣的性质。下面列出其中两个。

定理 3.7（Po sitivity [LS15，定理 1.1]）。 F-多项式具有正整数系数。

定理 3.8（常数项 [GHKK18，推论 5.5]）。 F-多项式的常数项为 1。

另一方面， G-矩阵与其对应的 C-矩阵通过以下定理密切相关。

定理 3.9（热带簇对偶 [NZ12，定理 1.2]）。 $g^t = c^{-1}$。因此，G-矩阵 g 的列向量也具有符号相干性。

回顾一下，若存在双射 $\sigma\colon I \to I'$ 使得 $\epsilon'_{\sigma(i)\sigma(j)} = \epsilon_{ij}$，则称两个箭图 Q 和 Q' 同构。若 $\mu_{\mathbf{k}}$ 是初始箭图 Q 上的一个突变序列，且 $Q' = \mu_{\mathbf{k}}(Q)$ 通过 σ 与 Q 同构，则 σ 在簇代数 $\mathcal{A}$ 和簇泊松代数 $\mathcal{X}$ 上分别诱导一个自同构。为简便起见，我们也将这些

自同构记作 σ，其在 Q' 和 Q 的簇变量与簇泊松变量上的定义如下：

$$\sigma(A_i) = A'_{\sigma(i)} \qquad \text{and} \qquad \sigma(X_i) = X'_{\sigma(i)}.$$

由变异等价箭图之间的同构定义的自同构称为簇变换。

定理 3.10（[GS18，定理 3.4]）。若 $\mu_{\mathbf{k}}$ 是初始箭图 Q 上的一个变红序列，则 $\mu_{\mathbf{k}}(Q)$ 与 Q 同构。特别地，存在唯一同构 σ，使得 $c_{i\sigma(j)} = -\delta_{ij}$。

定义 3.11。在 Q 上由变红序列定义的簇变换（连同唯一同构 σ）称为簇唐纳森-托马斯变换；我们用 DT 表示簇唐纳森-托马斯变换。

定理 3.12（[GS18，推论 3.7]）。若簇 DT 变换存在，则它是唯一的。特别地，DT 与簇变异可交换，且不依赖于初始箭图的选择。

由于簇 DT 变换将簇变量映射为簇变量，我们可以对簇变量 DT(A_i) 和簇泊松变量 DT(X_i) 应用分离公式（定理 3.5）。此外，由于热带簇对偶（定理 3.9），我们知道这些整数$g_{ij} = -\delta_{ij}$；因此有

$$\mathrm{DT}(A_i) = A_i^{-1} p(F_i(\mathbf{X})) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{DT}(X_i) = X_i^{-1} \prod_j F_j(\mathbf{X})^{\epsilon_{ij}}. \tag{4}$$

注意，由于 DT 是唯一的，F-多项式 F_i 不依赖于所选取的消红序列。总之，对于任何具有簇 DT 变换（即消红序列）的箭图 Q，都存在唯一的一组关于该簇 DT 变换的 F-多项式；反之，相对于初始箭图 Q，簇 DT 变换的信息完全由其 F-多项式确定。

4. Properties of F-Polynomials for DT Transformations

与簇变量类似，F-多项式本身也具有一个突变公式。与每个初始簇变量相关联的 F-多项式是常数多项式 1。现在，假设我们已经获得了某个具有交换矩阵ϵ'和 C-矩阵 c'的箭图 Q'所对应的一组 F多项式 $\{F'_i\}$。随后沿方向 k再次进行突变时，所有 F-多项式 F'_i及 $i \neq k$保持不变，而 F'_k 变为 [FZ07，命题 5.1]:

$$F''_k = \mu_k(F'_k) = \frac{1}{F'_k} \left(\prod_j X_j^{[c'_{kj}]_+} F_j'^{[\epsilon'_{kj}]_+} + \prod_j X_j^{[-c'_{kj}]_+} F_j'^{[-\epsilon'_{kj}]_+} \right). \tag{5}$$

注意，根据符号相干性（定理 3.1），$\prod_j X_j^{[c'_{kj}]_+}$ 和 $\prod_j X_j^{[-c'_{kj}]_+}$ 中恰有一个是非平凡的。

现在让我们聚焦于簇 DT 变换（4）的 F-多项式。设 $Q' = \mu_k(Q)$。我们可以使用 Q' 代替 Q 作为初始箭图，并且对于以 Q'为初始箭图的 DT 变换，还有另一组 F-多项式$\{F'_i(\mathbf{X}')\}_{i\in I}$。请注意，与 Q' 相关联的变量 $\mathbf{X}' = \{X_i\}_{i\in I}$ 不同于与 Q相关联的变量。通过对簇泊松变异公式（2）取逆，我们得到以下关系：

$$X_i = \begin{cases} X_k'^{-1} & \text{if } i = k, \\ X'_i \left(1 + X_k'^{\mathrm{sign}(\epsilon_{ik})}\right)^{\epsilon_{ik}} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6}$$

给定 X 变量中的一个表达式 F（例如多项式），我们可以使用方程（6）将其改写为用 X′ 变量表示的$\widehat{}$形式。我们将所得表达式记为 F。

命题 4.1（相邻簇的 DT 变换的 F-多项式之间的关系）。设 $Q' = \mu_k(Q)$。相对于 Q' 的 DT 变换的 F-多项式 $\{F'_i(\mathbf{X}')\}_{i\in I}$ 与相对于 Q 的 DT 变换的 F-多项式 $\{F_i(\mathbf{X})\}_{i\in I}$ 满足

$$F'_i(\mathbf{X}') = \begin{cases} (1+X'_k)\widehat{\mu_k(F_k)} & \text{if } i = k, \\ \widehat{F}_i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。首先设我们以 Q 为初始箭图，并设 $\mu_{\mathbf{k}}$ 是 Q 上的一个变红序列。为简单起见，假设联系 Q 与 $\mu_{\mathbf{k}}(Q)$ 的箭图同构 σ 是恒等映射。现在，在变红序列 $\mu_{\mathbf{k}}$ 之后，我们可以沿 k 的方向再突变一次。除了 F_k 以外，这次额外突变之后的 F-多项式都与 DT 变换的 F-多项式完全相同，而 F_k 按照 (5) 突变。

接下来，我们想将初始种子改为 Q'。注意，对于 $i \neq k$，初始簇变量 A'_i 与 Q 的初始簇变量 A_i 完全相同。因此

$$\mathrm{DT}(A'_i) = \mathrm{DT}(A_i) = A_i^{-1}p(F_i) = A_i'^{-1}p(F_i),$$

$\widehat{}$因此， F多项式F'_i经根据（6）进行代换后，恰好是 F_i，即 F_i。

现在考虑簇变量 A'_k。根据（1）和（4），我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{DT}(A'_k) =& \frac{A_k}{p(F_k)}\left(\prod_j A_j^{-[\epsilon_{kj}]_+}p(F_j)^{[\epsilon_{kj}]_+} + \prod_j A_j^{-[-\epsilon_{kj}]_+}p(F_j)^{[-\epsilon_{kj}]_+}\right) \\ =& A_k\left(\prod_j A_j^{-[\epsilon_{kj}]_+}\right)\frac{1}{p(F_k)}\left(\prod_j A_j^{-\epsilon_{kj}}p(F_j)^{[\epsilon_{kj}]_+} + \prod_j p(F_j)^{[-\epsilon_{kj}]_+}\right) \\ =& A_k\left(\prod_j A_j^{-[\epsilon_{kj}]_+}\right)\frac{p(X_k)^{-1}}{p(F_k)}\left(\prod_j p(F_j)^{[\epsilon_{kj}]_+} + p(X_k)\prod_j p(F_j)^{[-\epsilon_{kj}]_+}\right) \end{aligned}$$

注意，由于 DT 变换后的 C矩阵是 –id。与F多项式的变异公式（5）比较，最后一个表达式又等于

$$\mathrm{DT}(A'_k) = A_k\left(\prod_j A_j^{-[-\epsilon_{kj}]_+}\right)p(X_k)^{-1}p(\mu_k(F_k)). \tag{7}$$

另一方面，我们也可以由（1）推出

$$A_k\prod_j A_j^{-[-\epsilon_{kj}]_+} = A_k'^{-1}\left(1+\prod_j A_j^{\epsilon_{kj}}\right) = A_k'^{-1}\left(1+p(X_k)\right).$$

将此代入（7），得到

$$\mathrm{DT}(A'_k) = A_k'^{-1}\left(1+p(X_k)^{-1}\right)p(\mu_k(F_k)) = A_k'^{-1}p\left((1+X'_k)\widehat{\mu_k(F_k)}\right).$$

由此我们可以得出，关于初始箭图 Q' 的 DT 的 F-多项式为$\widehat{}F'_k = (1+X'_k)\mu_k(F_k)$。 □

接下来，我们来考虑子箭图上的簇 DT 变换的 F-多项式。设 Q 是一个顶点集为 I、交换矩阵为 ϵ 的箭图。Q 的全子箭图 Q' 定义为由 I 的非空子集 I' 确定、交换矩阵为 $\epsilon' = \epsilon|_{I'\times I'}$ 的子箭图。关于子箭图上的簇 DT 变换，我们有如下定理。

定理 4.2（[Mul16，定理 1.4.1]）。如果 Q 存在簇 DT 变换，那么 Q的任何全子箭图 Q' 也存在簇 DT 变换。

然而，通常情况下，如果 $\mu_{\mathbf{k}}$ 是 Q上的变红序列，那么将 $\mu_{\mathbf{k}}$ 限制到 Q' 后不一定仍是变红序列。尽管如此，我们仍然可以将全子箭图 Q' 上的 DT 的 F多项式与整个箭图 Q上的 DT 的多项式联系起来。

命题 4.3（关于全子箭图的 DT 的 F多项式）。设 Q' 是由子集 $I' \subset I$定义的Q 的子箭图。假设 Q上存在簇 DT 变换。那么， Q' 上的 DT 变换的 F多项式可以通过将 I' 中索引对应的 Q 的多项式中的所有 $j \notin I'$替换为 $X_j = 0$ 而得到。

证明。这个命题的证明基于散射图退化的思想[BFMMNC20]。按照 [GHKK18], 中的构造，可以从任意箭图 Q 构造一个散射图，并为初始墙选取附加函数。为了得到散射图的退化，对于每个 $j \notin I'$，我们选择将函数 $1 + tX_j$ 而非 $1 + X_j$ 附加到第 j个初始墙上。我们将得到的一致散射图记为 $\mathfrak{D}_t$。注意， $\mathfrak{D}_1$ 与箭图 Q的普通簇散射图 $\mathfrak{D}_Q$ 相同，而 $\mathfrak{D}_0$ 是普通簇散射图 $\mathfrak{D}_{Q'}$ 与一个线性空间 $\mathbb{R}^{|I\setminus I'|}$的乘积。

DT 变换对应于一条路径 γ ，它从散射图 $\mathfrak{D}_t$的正室通向负室。对于每个簇变量 A_i，$\mathbf{DT}_t(A_i)$ 等于沿路径 γ对 A_i 施行跨墙变换所得的结果。引入额外参数 t后，$\mathbf{DT}_t(A_i)$现在是 t 中的一个多项式（它是多项式，是因为 t 只与 $j \notin I'$ 对应的变量X_j 一起出现在 F-多项式因子中）。令 $t = 1$ ，即可对每个 $i \in I$得到$\mathbf{DT}_{t=1}(A_i) = \mathbf{DT}_Q(A_i)$；它具有(4)式形式的分离公式。另一方面，令$t = 0$ 只会从$\mathbf{DT}_t(A_i)$中提取（关于 t的）常数项。我们观察到，一致散射图 $\mathfrak{D}_t$ 与一致散射图 $\mathfrak{D}_Q$ 相同，只需对所有 $j \notin I$，将每个 X_j替换为 tX_j 即可。因此，对于所有 $j \notin I$，$\mathbf{DT}_t(A_i)$与将 X_j 替换为 tX_j 后的$\mathbf{DT}_Q(A_i)$相同。由此，令 $t = 0$ 等同于在$\mathbf{DT}_Q(A_i)$的分离公式中令 $X_j = 0$ ，因此我们可以得出，对于 $i \in I$，对所有 $_{j \notin I'}\Big)$，$\mathbf{DT}_{Q'}(A_i) = A_i^{-1} p\left(F_i\big|_{X_j=0}\right.$。□

结合命题 4.3 和引理 2.8，我们得到以下推论，该推论在计算全子箭图的 DT 变换的 F-多项式时很有用。

推论 4.4（全子箭图的截断）。设 Q' 是箭图 Q 的一个全子箭图，且 Q 存在变红序列。假设 i 是 Q' 中的一个顶点，其 $\mathbf{DT}_Q$ 的 F- 多项式等于简单标记偏序集 $F_{(P,L)}$ 的理想函数。那么，$\mathbf{DT}_{Q'}$ 在 i 处的 F-多项式等于 $F_{(P',L')}$，其中 (P', L') 是由 (P, L) 删除 P 中由标记为 X_j 且 j 不属于 Q' 的元素生成的反理想后得到的简单标记偏序集。

最后，我们想要考虑箭图的三角扩张。设 Q_1 是顶点集为 I_1、交换矩阵为 ϵ_1 的箭图，设 Q_2 是顶点集为 I_2、交换矩阵为 ϵ_2 的箭图。由 Q_1 对 Q_2 作出的三角扩张，是一个顶点集为 $I = I_1 \sqcup I_2$、交换矩阵为 $\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \delta \\ -\delta & \epsilon_2 \end{pmatrix}$ 的箭图 Q，其中 δ 的所有元素均为非负数。下述定理描述了如何根据 Q_1 和 Q_2 的变红序列，构造三角扩张 Q 的变红序列。

定理 4.5（[CL19，定理 4.5，注 4.6]）。若 $\mathbf{k}_1$ 是 Q_1 的一个极大绿色（分别为变红）序列，且 $\mathbf{k}_2$ 是 Q_2 的一个极大绿色（分别为变红）序列，则连接 $(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$ 是由 Q_1 对 Q_2 作出的三角扩张的一个极大绿色（分别为变红）序列。

基于这一Q，我们可以将簇 DT 变换 DT$_Q$ 视为其全子箭图 DT$_{Q_2}$ ∘DT$_{Q_1}$的 DT 变换的复合。此外，我们还证明了以下关于三角扩张上簇 DT 变换的 F-多项式的结果。

命题 4.6。设 Q 是由 Q_2三角扩张得到的 Q_1。设 δ 为编码从 Q_1 的顶点指向 Q_2的顶点的箭的矩阵。假设 Q_1 和 Q_2 均具有 DT 变换，并令 F_i'为 DT$_{Q_1}$ 或 DT$_{Q_2}$ 在顶点 i 处的 F-多项式（取决于 i 是否属于 Q_1或 Q_2）。则 Q 上的 DT 变换的 F-多项式为

$$F_i = \begin{cases} F_i' & if\ i\ is\ in\ Q_1, \\ F_i'\big|_{X_j \rightsquigarrow X_j \prod_k F_k'^{\delta_{kj}}} & if\ i\ is\ in\ Q_2. \end{cases}$$

证明。设 $\mathbf{k}_1$ 是 Q_1 的一个变红序列，设 $\mathbf{k}_2$ 是 Q_2的一个变红序列。根据定理 4.5，突变序列 $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ 是三角扩张 Q的一个变红序列。由于 $(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$ 以 $\mathbf{k}_1$ 开始，并且在完成 $\mathbf{k}_1$, 后不再在 Q_1 中的任何位置进行突变，因此根据F-多项式突变公式 (5)，对于 Q_1中的所有顶点 i，有 $F_i = F_i'$。

另一方面，若我们在突变序列 $\mathbf{k}_1$, 期间将 Q_2 的顶点视为冻结顶点，那么 $\tilde{} I_1$ 与 I_2 之间的箭必须以与带主系数的箭图 Q_1 中框架箭相同的方式改变。根据符号相干定理 3.1， Q_1 中的 I_2 与框架顶点之间永远不会产生箭，因此任意顶点 $j \in I_2$ 的 C-向量始终是一个标准基向量。完成突变序列 $\mathbf{k}_1$, 后， I_1 与 I_2 之间的箭必须反向，使得有 δ_{kj} 条箭从顶点 $j \in I_2$ 指向顶点 $k \in I_1$。因此，根据定理 3.5，在突变序列 $\mathbf{k}_1$, 刚结束后，顶点 $j \in I_2$ 的簇泊松变量 X_j' 可用初始簇泊松变量表示为

$$X_j' = X_j \prod_{k \in I_1} F_k'^{\delta_{kj}}. \tag{8}$$

特别地，由于 $\delta_{kj} \geq 0$，式 (8) 的右边始终是一个多项式。最后，剩余的突变序列 $\mathbf{k}_2$ 将对每个顶点 $j \in I_2$ 产生关于这些中间簇泊松变量的 F-多项式 F_j'。要将它们重新表示为初始簇泊松变量，只需将式 (8) 代入 F_j' 的各项中，这正是本命题所述的公式。□

结合命题 4.6 与引理 2.5，我们得到如下推论；在计算三角扩张的 DT 变换的 F-多项式时，这一推论很有用。

推论 4.7. 除命题 4.6 中的假设外，进一步假设 DT$_{Q_1}$ 和 DT$_{Q_2}$ 的所有 F-多项式均等于简单标记的带基点偏序集的理想函数（$P(i)$ $L(i)$）。那么，对于 Q_2 中任意顶点 j，其 DT$_Q$ 的 F-多项式等于如下简单标记的带基点偏序集的理想函数：将 δ_{ij} 个（$P(i)$ $L(i)$）副本附加到任意一个哈斯图顶点 X_j 上；每个 $P(i)$ 的最低点到该顶点之间有一条标记为 X_j 的箭头。

5. F-Polynomials of DT on Acyclic Quivers

定义 5.1. 如果箭图中不存在有向圈，则称该箭图为无环箭图。无环箭图中的顶点i 称为源点，当且仅当 $\epsilon_{ij} \geq 0$ 对所有 $j \in I$成立。

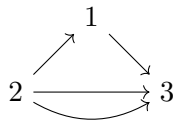
设 Q 为一个无环箭图。我们为 Q的每个顶点 i定义一个简单标记偏序集（P（i） L（i）），如下所述。 P（i）中的元素是 Q 中终止于 i的有向路径的同伦族。这里使用同伦，是因为我们希望将从 j到i 的路径 γ 与 i 处的空闲路径的复合视为与 γ 本身相同。 P（i）上的偏序由子路径的包含关系（模同伦）给出。特别地， i 处的空闲路径也被视为一条路径，并且它是 P（i）中唯一的极小元。我们称 i 的上升树为 P（i）。我们通过将每条从 j到 i的路径 γ标记为 X_j，来标记上升树 P（i）。

定理 5.2. 对于无环箭图 Q 中的每个顶点 i，在 Q 上针对顶点 i 的簇 DT 变换的 F-多项式，等于简单标记的带基点偏序集 ($P(i)$ $L(i)$) 的理想函数，即

$$F_i = F_{(P(i),L(i))}.$$

证明。我们对 Q 的顶点数进行归纳。若只有一个顶点，则簇 DT 变换由该顶点处的一次突变给出，从而得到一个 F-多项式 $F = 1 + X = [X]$。现在作归纳假设，设 i 是 Q 的一个源点。删去顶点 i 后得到的全子箭图 Q' 仍然是无环的，而整个箭图可以看作是由 Q' 对单点箭图 $\{i\}$ 作三角扩张。由命题 4.6，源点 i 对应的 F-多项式就是 $F = 1 + X_i = [X_i]$；而任何其他顶点 j 对应的 F-多项式，可以通过取 $F_{(P'(j)\ L'(j))}$（根据归纳假设，这就是 DT$_{Q'}$ 的 F-多项式），再将其中任意一个 X_k 替换为 $X_k(1 + X_i)^{\epsilon_{ik}}$ 得到。但这恰好相当于在哈斯图中标记为 X_k 的每个顶点上方添加 ϵ_{ik} 个分支，因此可见，所得替换多项式与理想函数 $F_{(P(j),L(j))}$ 一致，结论得证。□

例 5.3。考虑以下无环箭图。该箭图上的 F-DT 多项式在右侧表示为标记偏序集上的理想函数。



$$F_1 = \begin{bmatrix} X_2 \\ \downarrow \\ X_1 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = [X_2], \qquad F_3 = \begin{bmatrix} & X_2 & \\ & \downarrow & \\ X_2 & X_1 & X_2 \\ & \searrow\ \downarrow\ \swarrow & \\ & X_3 & \end{bmatrix}$$

6. F-Polynomials of DT on Quivers of Surface Type

设 S 是一个带有一组 M 标记点的定向曲面。我们将 S 内部的标记点称为穿孔点，并将沿着 ∂S 的标记点称为边界标记点。特别地，如果 $\partial S \neq \emptyset$，我们要求 ∂S 的每个连通分支上至少有一个标记点。Fomin、Shapiro 和 Thurston [FST08] 引入了“带标签三角剖分”的概念，将曲面的理想三角剖分推广了。

定义 6.1。在带标记点曲面 (S, M) 上，弧是由无向曲线组成的同伦等价族 γ，位于 S 上，连接 M 中的一个点与 M 中的另一个点（可能是同一个点），满足 γ 不是零同伦，且不存在自交。

定义 6.2。我们可以在一条弧的两端分别加上两种可能的装饰：普通或缺口。带标记弧是指在两端带有（可以不同的）装饰的弧，并满足：

- 该弧不围成一次穿孔单面体；
- 如果一条弧的端点位于边界标记点，则该端必须是普通的；
- 如果该弧是环路，则两端必须以相同的方式加以标记。

我们将弧的缺口端表示为，而普通端则不加任何装饰。

定义 6.3. 如果两个不同的带标记弧 α 和 β 满足以下条件，则称它们是相容的。

- α 和 β 的不带标记版本要么同伦，要么其内部不相交（在同伦意义下）。
- 如果 α 和 β 的不带标记版本不同伦，且它们在 p处共享一个端点，那么它们在 p附近的标记方式必须相同。
- 如果 α 和 β 的不带标记版本同伦，那么它们的一端装饰相同，另一端装饰不同。

极大两两相容带标记弧集称为带标签三角剖分。

注意，根据定义，带缺口端点只能出现在穿孔点附近；如果穿孔点附近同时存在两种装饰，那么在该穿孔点处，至多只能有两条支撑同伦且装饰相反的带标记弧。

将(S, M)的三角剖分 T转换为带标签三角剖分有一种规范方法。如果 T中不存在自折叠三角形，那么 T 自动成为一个带标签三角剖分，其所有弧的两端均带有普通装饰。对于每个自折叠三角形，我们将围成带穿孔单边形的弧替换为一条在穿孔点处带缺口的带标记弧（见图3）。



FIGURE 3. 用带有穿孔点处缺口的带标记弧替换自折叠三角形。

引入带标记弧是为了在存在自折叠三角形时对三角剖分进行突变。特别地，当某个穿孔点处同时存在两种装饰时，该穿孔点必定位于一个双边形内；对与其相接的两条带标记弧分别进行突变，将得到以下两个带标记三角剖分。

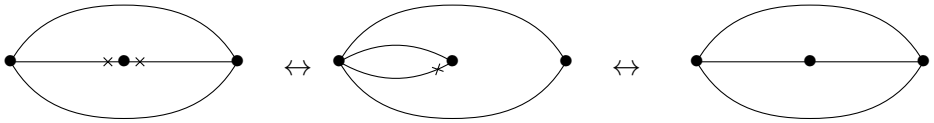


FIGURE 4. 从中间的带标记三角剖分出发，左图可通过对普通弧进行突变得到，右图则可通过对缺口弧进行突变得到。

从带标记点曲面（S, M）的带标签三角剖分 T，可以构造一个箭图Q_T。 Q_T 的顶点与 T中的非边界带标记弧（即支撑不与 ∂S上的曲线同伦的带标记弧）一一对应。要画出 Q_T中的箭，我们首先注意到T 将 S 分解为两类区域：三角形和双边形。在每个三角形区域内，我们在相应的箭图顶点之间画一个逆时针定向的 3-圈；在每个双边形内，我们在涉及的四个箭图顶点之间画出右侧所示的模式。如果某些弧是边界弧，我们就删除相应顶点及所有与之相连的箭。最后，我们删除一个极大有向 2-圈子集。由带标签三角剖分得到的箭图称为曲面型箭图。



FIGURE 5. 曲面型箭图的构件。

Goncharov 和 Shen 的以下结果表明，大多数曲面型箭图都存在簇 DT 变换。

定理6.4（[GS18，定理1.3]）。假设（S, M）满足以下条件：

- g（S）$+|M| \geq 3$ 或 S 是一个具有两个边界标记点（每个边界上各一个）的环带；
- 若 $\partial S = \emptyset$，则 $|M| > 1$。

那么，任何与（S, M）的带标签三角剖分 T相关联的箭图 Q_T都具有簇 DT 变换。特别地，任何实现以下操作的突变序列都是变红序列：

- 将带标记弧每个带标记端点处的装饰改为相反的装饰；
- 将 ∂S 的每个边界分支沿 ∂S上的诱导定向旋转一格。

在本节余下部分，我们将聚焦于一类称为“可容许”的弧，并尝试用标记偏序集的理想函数来表示它们在簇 DT 变换下的 F-多项式。

定义 6.5。设 T是 (S, M) 的一个三角剖分（可能含有自折叠三角形）。若不存在将穿孔点 p 连接回自身的弧，且至少有三条弧与 p相接，则称穿孔点可容许（相对于三角剖分 T）。若不存在将边界标记点 s 连接回自身的弧，且s 位于一个至少有两个边界标记点的边界上，则称边界标记点 s 可容许（相对于三角剖分 T）。若 T中的一条弧满足以下条件，则称其可容许（相对于三角剖分 T）：

(1) 连接两个不相邻的可容许边界标记点的唯一弧；(2) 连接一个可容许边界标记点和一个可容许穿孔的唯一弧；(3) 连接两个可容许穿孔的唯一弧。

对于这三种类型的可容许弧，我们用如下哈斯图为它们定义一个简单标记的带基点偏序集（$P(a)$ $L(a)$）。

(1) 设 a 是连接两个不相邻的可容许边界标记点 s 和 t的唯一弧。设 b_1、b_2、……、b_m 是 a 之后终止于 s 的弧（按照 ∂S上诱导定向的顺序排列），设 c_1、c_2、……、c_n 是 a 之后终止于 t 的弧（按照 ∂S上诱导定向的顺序排列）。那么，偏序集 $P(a)$由两个线性全序链 $b_m > b_{m-1} > \cdots > b_1 > a$ 和 $c_n > c_{n-1} > \cdots > c_1 > a$组成，它们都终止于同一个元素 a。我们用 $L(a)$：$i \mapsto X_i$标记 $P(a)$中的元素。哈斯图见图6左侧。

(2) 假设 a 是连接可容许边界标记点 s 与可容许穿孔 p 的唯一一条弧。设 b_1、b_2、……、b_m 是在 a 之后终止于 s 的弧（按照 ∂S 上的诱导定向排列），而 c_1、c_2、……、c_n、$c_{n+1} = a$ 是终止于 p 的弧（按逆时针方向排列）。根据假设，我们有 $n \geq 2$。若 $m \geq 1$，则标记偏序集 $(P(a)$ $L(a))$ 由图6中间所示的哈斯图定义。若 $m = 0$，则标记偏序集 $P(a)$ 是一个线性全序链$c_{n-1} > c_{n-2} > \cdots > c_1 > a$，其标记由 $L(a)$：$i \mapsto X_i$ 给出。

(3) 假设 a 是连接两个可容许穿孔 p 和 q 的唯一一条弧。设 b_1、b_2、……、b_m、$b_{m+1}=a$ 是终止于 p 的弧（按逆时针方向排列），而 c_1、c_2、……、c_n、$c_{n+1}=a$ 是终止于 q 的弧（按逆时针方向排列）。根据假设，我们有 m、$n\geq 2$。于是，标记偏序集 $(P(a),\ L(a))$ 由图6右侧所示的哈斯图定义。

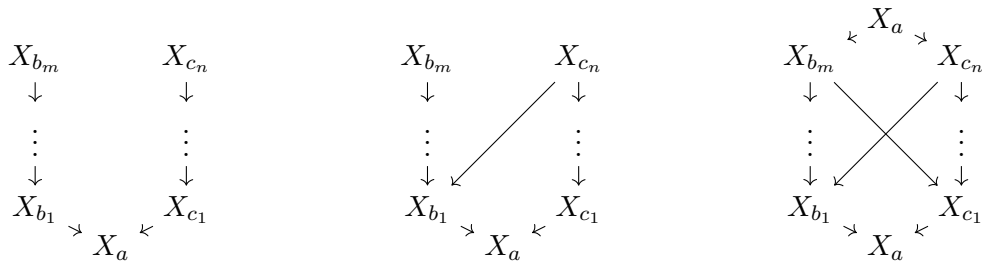


FIGURE 6. 三类弧的哈斯图。左：连接两个可容许边界标记点的唯一弧。中：连接一个可容许边界标记点和一个可容许穿孔的唯一弧。右：连接两个可容许穿孔的唯一弧。

本节的主要目标是证明以下定理。

定理6.6. 设 T 是 (S,M) 的一个三角剖分。设 a 是 T 中的一条可容许弧。那么，对于顶点 a，Q_T 上簇 DT 变换的 F-多项式等于简单标记的带基点偏序集 $(P(a),\ L(a))$ 的理想函数，即

$$F_a = F_{(P(a),L(a))}$$

证明。我们将首先证明最后一种情形（连接两个穿孔点的弧），然后利用命题 4.3 从最后一种情形推出前两种情形。

设 a 是一条连接两个可容许穿孔 p 和 q 的弧。首先假设 p 和 q 中的每一个都恰好与三条弧相接（这是定理 6.6 中的最低要求）。那么，三角剖分 T 在弧 a 附近的局部图形如图7左图所示。如果我们沿着序列 $\mathbf{k}=(a,b_1,b_2,c_1,c_2,a)$ 进行突变，局部图形就会变为图7右图所示的形式。



FIGURE 7. 突变序列 $\mu_{\mathbf{k}}$前后，三角剖分 T 的局部图示。

注意，在图7右侧的图中，所有与穿孔点 p 和 q 相连的弧，在靠近这两个穿孔点的位置都带有缺口，而弧 a 的两端都已经带有缺口。根据定理6.4，装饰的改变任务在两个穿孔点 p 和 q处完成，因此不需要再对弧 a进行突变。换言之，存在一个针对 Q_T 的变红序列，它以

突变序列 k 开始，并且在后续的变红序列中，箭图顶点 a不会再出现。现在回顾方程 5，只有在箭图顶点处发生突变时， F-多项式才会改变；因此，在突变序列 k 之后， Q_T 上针对顶点 a 的簇 DT 变换的 F-多项式 F_a ，与 a 的 F-多项式相同。

由于 k 只涉及五个箭图顶点，我们可以提取这个局部全子箭图 Q' （图 8 左图），并考虑作用于其上的突变序列 k。注意，将突变序列 k 延伸为 $\mathrm{k}' = (a, b_1, b_2, c_1, c_2, a, b_1, c_1)$并不会改变 F-多项式 F_a。但是，k′实际上是 Q'上的一个变红序列，因此 F_a 也是顶点 a对应的 $\mathrm{DT}_{Q'}$ 的 F-多项式。现在，为了计算 $\mathrm{DT}_{Q'}$的 F-多项式，我们可以利用命题 4.1 和定理 5.2。



FIGURE 8. 局部全子箭图 Q' （左）及其突变后的箭图 $\mu_a(Q')$（右）。

根据定理 5.2，我们列出 $\mathrm{DT}_{\mu_a(Q')}$ 的 F-多项式如下。这里，我们对箭图 $\mu_a(Q')$的 F-多项式和簇泊松变量采用带撇号的记法，以区别于与全子箭图 Q'相关的记法。我们还利用引理 2.5 来简化公式。

$$F'_a = 1 + X'_a(1 + X'_{b_2})(1 + X'_{c_2}), \qquad F'_{b_1} = 1 + X'_{b_1}F'_a, \qquad F'_{b_2} = 1 + X'_{b_2},$$

$$F'_{c_1} = 1 + X'_{c_1}F'_a, \qquad F'_{c_2} = 1 + X'_{c_2}.$$

根据方程 5，

$$\begin{aligned}\mu_a(F'_a) =& \frac{(1 + X'_{b_1}F'_a)(1 + X'_{c_1}F'_a) + X'_a(1 + X'_{b_2})(1 + X'_{c_2})}{F'_a} \\ =& \frac{F'_a + (X'_{b_1} + X'_{c_1})F'_a + X'_{b_1}X'_{c_1}F'^2_a}{F'_a} \\ =& 1 + X'_{b_1} + X'_{c_1} + X'_{b_1}X'_{c_1}F'_a.\end{aligned}$$

Next，根据命题 4.1，我们需要进行以下变量替换 s:

$$X'_a = X_a^{-1}, \qquad X'_{b_1} = \frac{X_aX_{b_1}}{1 + X_a}, \qquad X'_{b_2} = X_{b_2}(1+X_a), \qquad X'_{c_1} = \frac{X_aX_{c_1}}{1 + X_a}, \qquad X'_{c_2} = X_{c_2}(1+X_a),$$

然后将结果乘以 $(1 + X_a)$。可以验证，所得结果等于图 9 左侧标记偏序集的理想函数。

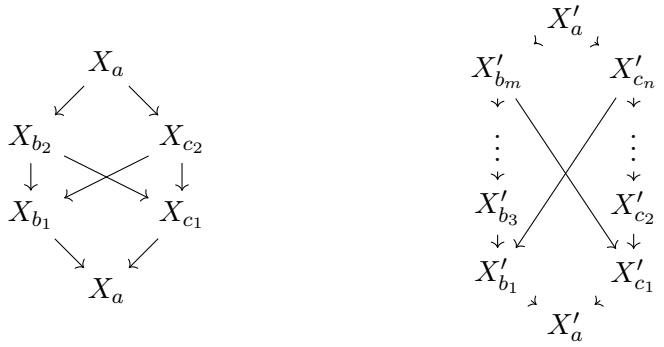


FIGURE 9. 连接两个穿孔点的可容许弧的标记偏序集：基础情形（左）和归纳假设（右）。

对于连接两个穿孔点的弧的一般情形，我们将对与可容许穿孔点 p 和 q 相接的弧的数量之和$m+n$ 进行归纳。上文已经处理了满足$m+n=3+3=6$的基础情形。设 a 是连接两个穿孔点 p 和 q 的弧，且满足 $m+n>6$。由于 $m+n>6$ 和 $m,\ n\geq 3$，不失一般性，我们可以假设 $m>3$。现在取弧 b_2 并将其翻转（突变）。新弧 b'_2 连接 b_1 和 b_3 的另外两个端点；它们不是 q，因为假设 a 是 p 和 q 共享的唯一一条弧。这样，总数 $m+n$ 减少了 1。根据归纳假设，F-多项式 F'_a 等于图 9 右侧标记偏序集的理想函数。为了得到所需的 F-多项式F_a，我们只需对 b'_2 处的突变应用命题 4.1。受影响的簇泊松变量只有

$$X'_{b_1}=X_{b_1}(1+X_{b_2}^{-1})^{-1}\qquad\text{and}\qquad X'_{b_3}=X_{b_3}(1+X_{b_2}),\tag{9}$$

而标记偏序集中的所有其他簇泊松变量则简单地代入为 $X'_i=X_i$。现在我们反向应用引理2.6，从而得出，(9) 中的变量替换等同于将 X'_{b_1} 替换为 X_{b_1}，将 X'_{b_3} 替换为 X_{b_3}，然后将 X_{b_2} 插入 X_{b_1}和 X_{b_3} 之间。归纳由此完成。

对于其余两类可容许弧，我们可以通过沿边界添加一个“领圈”，将其归约为连接两个可容许穿孔点的弧的情形。设 C 是 ∂S 的一个连通分支，其中至少有两个标记点。沿 C 对曲面 (S,M) 进行领圈扩张，即通过将 C 与 $C\times\{0\}$识别，把 $C\times[0,1]$ 的一份副本粘合到 S 上，并在 $C\times\{1\}$上放置数量相同的边界标记点。我们可以按照图 10 所示对领圈带进行三角剖分，从而将 (S,M) 的任意三角剖分 T扩展为领圈扩张的三角剖分。

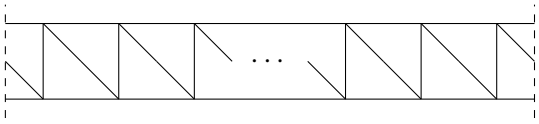


FIGURE 10. 领圈带的三角剖分

我们注意到，如果 s 是关于三角剖分 T 的可容许边界标记点，其中三角剖分作用于 (S,M)，那么在带有诱导三角剖分 T' 的领圈扩张上，它会成为一个可容许穿孔点。如果 a 是连接可容许边界标记点 s 与可容许穿孔点 p 的唯一弧，我们就在包含 s 的边界分支上添加一个领圈扩张。如果 a 是连接两个不相邻的可容许边界标记点的唯一弧，我们就在每个包含这两个边界标记点的边界分支上添加一个领圈

扩张（它们也可能位于同一个边界分支上，在这种情况下我们只添加一个领圈扩张）。此外，原始三角剖分的箭图 Q_T 现在是箭图 $Q_{T'}$ 的全子箭图： $Q_{T'}$ 中额外的顶点全部来自领圈带内部的非边界弧。根据定理6.4，如果 Q_T 具有簇 DT 变换，那么 $Q_{T'}$ 也具有簇 DT 变换。

由于 Q_T 是 Q'_T 的全子箭图，我们可以利用命题 4.3 和引理 2.8，写出 a 处 Q_T 上簇 DT 变换的 F-多项式 F_a。将 a 视为领圈扩张中连接两个可容许穿孔的唯一一条弧后，我们得到一个 F-多项式 F'_a，它等于一个标记偏序集的理想函数，该偏序集类似于图6右侧的图。为约化到 F_a，我们需要将一些簇泊松变量设为 0。具体而言， ∂S 上紧邻可容许边界标记点之后的边界弧属于要消失的簇泊松变量，它们生成一个反理想，其中包含所有将被设为 0 的标记。因此，我们可以使用引理 2.8 从哈斯图中切除反理想部分，得到 F-多项式 F_a，如图6前两幅图所示。

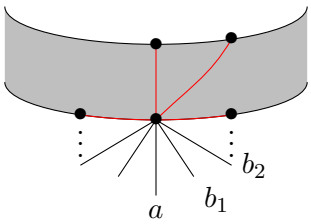


FIGURE 11. 我们用红色标出 $Q_{T'}$ 上需要置为零的簇泊松变量。

最后，如果在 a 之后（相对于∂S上的定向），没有弧与 s相接于 T，那么 b_1 本身需要置为 0。如果 a 的另一端是可容许穿孔，那么图 6 右侧的图形会塌缩成形如 $X_a \leftarrow X_{c_1} \leftarrow \cdots \leftarrow X_{c_{n-1}}$ 的线性全序链。□

注记6.7。当存在自折叠三角形时（这意味着有一条弧从某个标记点出发又回到该点，使该标记点不再是可容许的），可能会发现某些簇 DT 变换的 F-多项式不可能是简单标记的带基点偏序集的理想函数。例如，考虑图 12 所示的带标签三角剖分的双穿孔圆盘。同一图右侧给出了该箭图。可以验证，突变序列 (5, 1, 3, 4, 2, 5) 是一个极大绿色序列；沿着该序列逐步进行，可以发现顶点 2 的 DT 的F-多项式为

$$\begin{aligned} F_2 =& 1 + X_2 + X_1X_2 + X_2X_3 + X_2X_4 + X_1X_2X_3 + X_1X_2X_4 + X_2X_3X_4 + X_1X_2X_3X_4 \\ &+ X_1X_2X_3X_5 + X_1X_2X_4X_5 + X_2X_3X_4X_5 + 2X_1X_2X_3X_4X_5 + X_1X_2X_3X_4X_5^2. \end{aligned}$$

Ho然而，不存在以 F_2 为其理想函数的简单标记的带基点偏序集 .

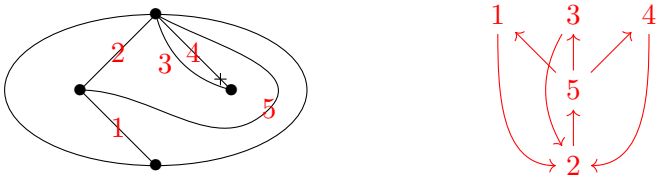


FIGURE 12. 一个不是理想函数的 DT F-多项式示例。

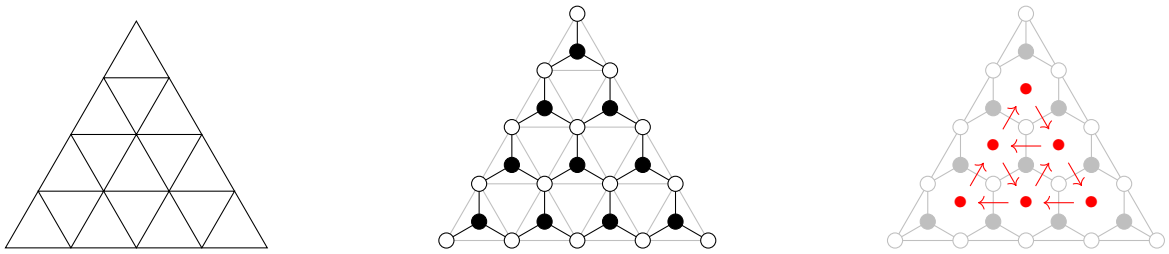
7. F-Polynomial of DT on Quivers associated with a Triple of Flags

在 [FG06b], 中，Fock 和 Goncharov 考察了 $\mathbb{C}^n$ 中三重旗的构形空间，并构造了一个箭图 Q_n，用于描述该构形空间上的簇结构。这个箭图包含许多有趣的簇簇族的箭图作为子箭图（例如双Bruhat胞腔、格拉斯曼流形）。因此，根据命题 4.3，了解 Q_n 上 DT 的 F-多项式，可以帮助我们了解更多簇簇族上的 DT F-多项式。在本节中，我们将考察箭图 Q_n，并证明其簇 DT F-多项式也可由标记偏序集的理想函数给出。

我们先描述箭图 Q_n。考虑单纯形

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0, x + y + z = n - 1\}$$

并考虑 S上的格点集合。这些格点位于与坐标超平面平行的直线上。这些直线又将 S 三角剖分成更小的三角形。在这些较小的三角形中，有些与 S指向相同方向，有些则不是。对于那些与 S 指向相同方向的三角形，我们在其中画一个如下形式的小型二分三叉图 。由此得到一个位于 $\mathbb{W}_n$ 上的二分图 S。这种对 S 进行的细化三角剖分称为 n-三角剖分，见 [FG06b, GS18]；而二分图 $\mathbb{W}_n$ 称为 nSL-理想网，见 [Gon17]。当 $n = 5$时，图 13 给出了一个示例。



单纯形的 5-三角剖分、相应的 SL_5-理想网，以及相关的箭图 Q_5。

为了得到箭图 Q_n，我们在 SL$_n$-理想网的每个有界面内放置一个箭图顶点，并在每个不位于 ∂S 上的白色顶点周围画一个顺时针 3-环。注意，箭图 Q_n 的顶点与满足 $a+b+c = n-3$ 的非负整数三元组 (a, b, c) 构成双射。当 $n = 5$ 时，图 13 给出了一个示例。

定理 7.1（[GS18，定理 1.3]）。 Q_n 箭图都存在簇 DT 变换。

在 [Wen20], Weng 中，Weng 证明了 $T\backslash \mathrm{GL}_n^{e,w_0}/T$,上的簇 DT 变换（其初始箭图为 Q_n）可以通过以下三个态射的复合，以几何方式计算：

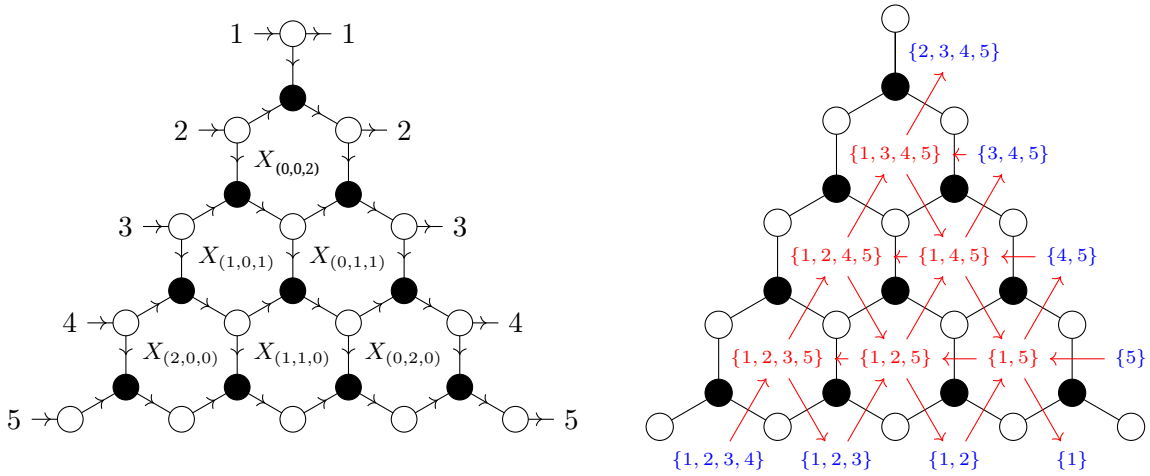
（1）由 Fock 和 Goncharov [FG06a]定义的融合态射 Spec($\mathcal{X}$) $\to \mathrm{GL}_n^{e,w_0}$,；（2）由别列津斯基、Fomin 和 Zelevinsky [BFZ05]定义的取广义子式的态射 $\mathrm{GL}_n^{e,w_0} \to$,Spec($\mathcal{A}$)；（3）由 Fock 和 Goncharov [FG09],定义的簇系综态射 Spec($\mathcal{A}$) $\to$ Spec($\mathcal{X}$)，我们已经在（3）中见过它。

利用理想网，我们可以将上述态射组合化。首先，融合态射与取广义子式的态射之复合，可以通过 Postnikov边界测量映射 [Pos06] 以组合方式计算。具体而言，我们先在理想网 $\mathbb{W}_n$ 左侧和右侧的每个白色顶点上各添加一条外部边（特别是，最上方的白色顶点在两侧各有一条外部边）。我们将这两组边

˜外部边从上到下标记为 1、2、.....、 n。在扩展后的二分图 $\mathbb{W}_n$ 内部，我们将非竖直边定向为从左向右，并将竖直边定向为从上向下。因此，我们称左侧的外部边为源点，右侧的外部边为汇点。当 $n = 5$ 时，这种定向的一个例子如图14左图所示。设 γ 是 $\mathbb{W}_n$ 中一条从源点 i 通向汇点 j 的路径 ˜ ˜。若有界面 f 位于路径 γ 按其定向的右侧，则称该有界面 f 被路径 γ 支配。我们用 $\hat{\gamma}$ 表示被 γ 支配的有界面集合。对于两个大小相同的子集 I、$J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$，我们考虑由 $|I|$ 条两两不相交路径组成的族，这些路径分别从 I 中的每个元素通向 J 中的每个元素，并将这些路径族收集为集合 $C(I, J)$；换言之， $C(I, J)$ 中的元素具有如下形式$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{|I|}\}$，其中每个 γ_i 都是一条从 I 中某个元素通向 J 中某个元素的路径。

我们为理想网 $\mathbb{W}_n$中的每个有界面 f 关联一个形式变量 X_f。Postnikov边界测量映射为每一对大小相同的子集I、$J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ [1]生成一个关于 X_f's 的多项式 M_I^J:

$$M_I^J = \sum_{\Gamma \in C(I,J)} \prod_{\gamma \in \Gamma} \prod_{f \in \hat{\gamma}} X_f. \tag{10}$$



˛FIGURE 14. 左： $\mathbb{W}_5$ 上的定向及面变量。右：与 $\mathbb{W}_5$ 中的面和扩展箭图 Q_5 相关联的子集 J_f ˜。

回忆一下，融合态射 [FG06a] 生成一个上三角矩阵 x，其元素是关于面变量 X_f's 的多项式。另一方面， x的第（I， J）个广义子式记作 $\Delta_I^J(x)$，定义为由I索引的行和由 J索引的列所构成的 M 的子矩阵的行列式。通过比较融合态射与 Postnikov 边界测量映射，不难看出

$$\Delta_I^J(x) = M_I^J.$$

因此，要计算 Q_n 上的簇 DT 变换，只需知道应取哪些广义子式的比值。按照 [Wen20]，的方法，可以如下将广义子式与理想网 $\mathbb{W}_n$ 的面关联起来。首先，将 S 底边上从左数第 k 个边界面赋予集合 $\{1, 2, \ldots, n-k\}$，并将 k 右边上

[1]一般而言，Postnikov边界测量映射会产生一个关于 X_f 的有理函数，其实际定义相比式 (10) 多出一个绕数因子；然而，由于我们赋予 $\mathbb{W}_n$ 的定向是无环的，因此可以忽略这个绕数因子，并且结果必定是一个多项式。

从上数第 S 个边界面赋予集合 $\{k+1, k+2, \ldots, n\}$。接着，将每个对应于三元组 (a, b, c) 的有界面f赋予子集

$$J_f = J_{(a,b,c)} = \{1, 2, \ldots, a+1, n-c, n-c+1, \ldots, n\}. \tag{11}$$

注意，由条件 $a+b+c = n-3$ 可推出 $|J_{(a,b,c)}| = n-b-1$。我们不改变 S 左边缘上的边界面。最后，我们通过为 S左边缘和底边上的每个边界面添加一个冻结顶点（这些边界面对应于 $\{1, 2, \ldots, n\}$的一个子集），并在这些冻结顶点与 Q_n 最右侧和最底部的箭图顶点之间画箭头，使它们与 $\mathbb{W}_n$中的最右侧和最底部黑色顶点周围形成逆时针 3-环，从而将箭图 Q_n 扩展为˜一个稍大的箭图 Q_n 。˜图 14 右侧的图描绘了 J_f的集合以及对应于$n = 5$的扩展箭图 Q_n 。

˜现在，对于扩展箭图 Q_n中的每个顶点 f，我们定义一个边界测量多项式M_f: $= M^{J_f}_{\{1,2,\ldots,|J_f|\}}$。我们还将 $\tilde{Q}_n$的交换矩阵记为 $\tilde{\epsilon}$。

定理7.2（[Wen20，定理1.1]）。 Q_n 上的簇 DT 变换对簇泊松变量的作用为

$$\mathrm{DT}(X_f) = \prod_g M_g^{\tilde{\epsilon}_{fg}}. \tag{12}$$

我们注意到，对于 $\mathbb{W}_n$中的每个边界面 f， $C(I_f, J_f)$中都存在唯一一族两两不相交的路径，因此 M_f只是一个单项式。另一方面，对于 $\mathbb{W}_n$中的每个有界面 f，我们希望将边界测量映射中的各项与六边形的菱形铺砌联系起来。

定义7.3。对于一组三个非负整数（a, b, c），我们将 $H_{(a,b,c)}$ 定义为一个六边形，其边长为（$a+1$, $b+1, c+1, a+1, b+1, c+1$），且所有内角均为 $120°$。 $H_{(a,b,c)}$ 的菱形铺砌是用标准菱形铺砖铺满 $H_{(a,b,c)}$ ；标准菱形铺砖是一个各边长均为单位长度、内角为（$60°, 120°, 60°, 120°$）的菱形。

命题7.4. 对应于三元组（a, b, c）的每个有界面 f， M_f中的项与 $H_{(a,b,c)}$的菱形铺砌构成双射。

˜证明。根据 $\mathbb{W}_n$ 的定向方式，对于终止于 $J_{(a,b,c)}$中前$a+1$ 个指标 $1, 2, \ldots, a+1$ 的路径，没有任何选择。对于剩下的 $c+1$ 个指标，记作 $b+k+1$，其中 $a+2 \le k \le a+c+2$。在 $J_{(a,b,c)}$ 中终止于汇点 $b+k+1$ 的路径必须从源点 k进入。由于源点与汇点配对所施加的限制，我们看到，选择不同的两两不相交路径族时，唯一的自由度位于理想网 $\mathbb{W}_n$的一个受限区域内。具体而言，我们将箭图 Q_n的顶点（a, b, c）的六边形跨度定义为由以下点的闭凸包内的箭图顶点所确定的全子箭图 $Q_{(a,b,c)}$

$$(a, 0, b+c), \quad (0, a, b+c), \quad (0, a+b, c), \quad (c, 0, a+b), \quad (a+c, b, 0), \quad (a+c, 0, b).$$

因此，从 $I_{(a,b,c)}$ 到 $J_{(a,b,c)}$ 的不同两两不相交路径族，仅在与 $Q_{(a,b,c)}$内部顶点所对应的面相邻的边上有所不同。图 15 突出了 Q_7 中的六边形跨度 $Q_{(2,1,1)}$， 以及 $\mathbb{W}_7$中对应的区域。

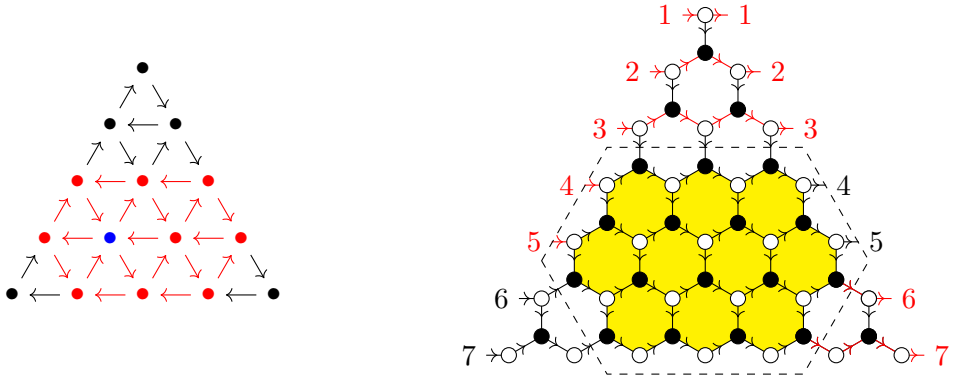


FIGURE 15. 六边形跨度 $Q_{(2,1,1)}$ 以及其中两两不相交路径族存在差异的相应区域。注意，与 (2, 1, 1) 相关联的子集为 $J_{(2,1,1)} = \{1, 2, 3, 6, 7\}$（见公式 (11)），源集合为 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$。特别地，我们在右图中用红色标出所有两两不相交路径族共有的部分。

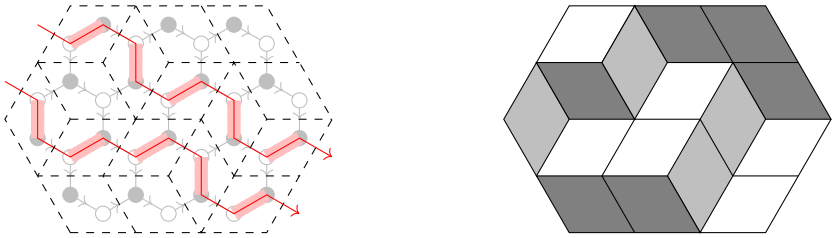


FIGURE 16. 左：与一族两两不相交路径对应的菱形铺砌示例。右：相应的三维杨图，由五个立方体组成，置于尺寸为 $3 \times 2 \times 2$ 的盒子内。

$\mathbb{W}_n$ 中的这个自由区域非常接近六边形 $H_{(a,b,c)}$ 本身。我们只需再画几个与 $\mathbb{W}_n$ 的有界面全等的六边形，将它们围绕在这个自由区域周围，然后用直线连接相邻六边形的中心即可。在图 15 中，我们用虚线画出了 $H_{(2,1,1)}$。注意，$H_{(a,b,c)}$ 的边长恰好是 $(a+1, b+1, c+1, a+1, b+1, c+1)$ 的 $\sqrt{2}$倍；为简便起见，我们可以忽略这个比例因子。

接下来，我们注意到，对于每个两两不相交路径族 Γ，恰好有 $c+1$ 条路径经过 $H_{(a,b,c)}$：它们都从 $H_{(a,b,c)}$ 的左上边进入，并从 $H_{(a,b,c)}$ 的右下边离开。要从 Γ 得到 $H_{(a,b,c)}$ 的菱形铺砌，对于 Γ 中每条经过$H_{(a,b,c)}$的路径 γ，我们取完全位于 $H_{(a,b,c)}$ 内的第一条边，然后沿 γ 每隔一条边选取一条。这样便得到 $H_{(a,b,c)}$ 内的一组边，并在每条边所在位置放置一块菱形铺砖，使其位于菱形铺砖内部、连接两个等边三角形的线段与该边重合。这些菱形铺砖进而唯一确定整个六边形$H_{(a,b,c)}$的菱形铺砌。图 16 左图给出了一个示例，展示了与一族两两不相交路径对应的菱形铺砌。反过来，给定 $H_{(a,b,c)}$ 的任意菱形铺砌，我们可以从左上边到右下边逐步查看铺砌，从而恢复路径 γ。这就证明，边界测量多项式$M_{f_{(a,b,c)}}$ 中的项与 $H_{(a,b,c)}$ 的菱形铺砌之间存在双射。□

众所周知，六边形 $H_{(a,b,c)}$ 的菱形铺砌与三维杨图（也称为平面分拆）一一对应，这些平面分拆可装入尺寸为 $(a+1) \times (b+1) \times (c+1)$ 的盒子中。

图16右侧的图展示了与该图左侧菱形铺砌对应的三维杨图。注意，盒子内的三维杨图集合按包含关系构成一个偏序，它有唯一的极小元，即空图，也有唯一的极大元，即填满整个盒子的图。考虑与空杨图相关联的两两不相交路径族可知， M_f中对应于空杨图的项包含的面最少，并且整除 M_f中的所有其他项。因此，我们可以提出这一项 N_f ，并写成

$$M_f = N_f \Phi_f$$

其中， Φ_f 是关于 X_g的多项式，且常数项为 1。按照惯例，对于边界面，我们令 $N_f = M_f$ ，因为 M_f 本身就是一个单项式。现在，方程（12）可以写成

$$\mathrm{DT}(X_f) = \left(\prod_g N_g^{\tilde{\epsilon}_{fg}}\right)\left(\prod_g \Phi_g^{\epsilon_{fg}}\right). \tag{13}$$

我们断言， Φ_f 可以视为一个简单标记的带基点偏序集上的理想函数。事实上，我们已经有一个与面 $f_{(a,b,c)}$相关联的偏序集，即尺寸为（$a+1$） $\times$（$b+1$） $\times$（$c+1$）的盒子内的三维杨图集合。但我们也可以通过对六边形跨度 $Q_{(a,b,c)}$进行“三维提升”来得到相同的偏序集。全子箭图 $Q_{(a,b,c)}$ 的三维提升是一个顶点集为

$$\{(x,y,z) \mid 0 \le x \le c, 0 \le y \le a, 0 \le z \le b\}.$$

注意，这个顶点集存在一个到 $Q_{(a,b,c)}$ b的顶点集上的满射 y

$$\pi : (x,y,z) \mapsto (a,b,c) + x(1,0,-1) + y(-1,1,0) + z(0,-1,1).$$

现在，对于三维提升中距离为 1 的每一对顶点 i 和 j ，我们定义$\epsilon_{ij} := \epsilon_{\pi\ i}^{Q_n}{}_{()\pi(j)}$。由于这个三维提升是一个无环箭图，它自然是一个哈斯图，进而定义了一个偏序集P（a， b， c）。根据这一构造，不难看出以下事实。

引理7.5. $P(a,b,c)$ 与盒子大小为$(a+1) \times (b+1) \times (c+1)$内的三维杨图偏序集同构。

我们用 $L(a,b,c)$: $X_{\pi(i)}$ 标记 $P(a,b,c)$ 中的每个元素 i。下面给出此类标记偏序集的一个例子。

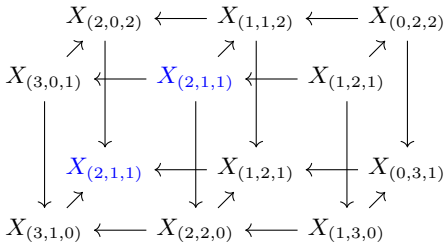


FIGURE 17. 六边形跨度 $Q_{(2,1,1)}$ 在 Q_7 中的三维提升，以及简单标记。

结合命题7.4和引理7.5，并将它们与边界测量多项式的定义进行比较，我们可以得出以下结论。

命题7.6。设 (a,b,c) 是与 $\mathbb{W}_n$ 中有界面 f 关联的三元组。那么 Φ_f 等于理想函数 $F_{(P(a,b,c),L(a,b,c))}$。

证明。三维杨图上的偏序可以解释为菱形铺砌上的以下操作：$<$ 。此操作恰好使被支配面（按重数计数）的数量增加 1，而这个新添加的面正是三维杨图中新添加立方体的标记索引。□



现在让我们将簇 DT 变换的 Φ_f F-多项式联系起来。在 [Wen20], Weng 证明了 $\prod_g N_g^{\epsilon_{fg}} = X_f^{-1}$，因此，方程（13）可简化为

$$\mathrm{DT}(X_f) = X_f^{-1} \prod_g \Phi_g^{\epsilon_{fg}}. \tag{14}$$

我们注意到，该方程与 DT 变换分离公式（4）中的第二个方程相似。这促使我们提出以下定理。

定理 7.7. 对于任意有界面 f， $\mathbb{W}_n$， $F_f = \Phi_f$。

由于 Q_n 的交换矩阵 ϵ 不一定可逆，我们无法直接得出 $F_f = \Phi_f$。

相反，我们需要利用 Q_n 上的一个具体极大绿色序列。众所周知（例如，[GS18]），可以通过以下迭代过程构造 Q_n 上的极大绿色序列。

- 若 $n = 3$，则对唯一可变顶点进行一次突变便构成一个极大绿色序列。
- 对于 $n > 3$，箭图 Q_{n-1} 在 Q_n 左下角嵌入为一个全子箭图。对于每个 $0 \le a \le n-3$，令 $\mathbf{k}_a$ 为突变序列 $((n-a-3, a, 0), (n-a-3, a-1, 1), (n-a-3, a-2, 2) \ldots, (n-a-3, 0, a))$。然后，复合 $(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_{n-3})$ 仅在绿色顶点处进行突变，并将每一行最右侧的箭图顶点变为红色。接着，我们将这一突变序列与 Q_{n-1} 的极大绿色序列归纳地进行后复合。

应用此极大绿色序列后，所得箭图实际上是 Q_n 关于竖直对称轴翻转后的镜像。因此，簇 DT 变换是此极大绿色序列与将箭图水平翻转的箭图同构的复合。

引理 7.8。定理 7.7 对三元组为 $(a, 0, n-a-3)$ 的面成立。

证明。由于水平翻转，顶点 $(a, 0, n-a-3)$ 处簇 DT 变换的 F-多项式，就是顶点 $(0, a, n-a-3)$ 处极大绿色序列的 F-多项式，也就是说，它们是 Q_n 中各行最右侧的顶点。我们接着注意到，极大绿色序列只会在每一行最右侧的顶点处突变一次，这发生在子序列 $(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_{n-3})$ 内的 $\mathbf{k}_{n-3}$ 子序列中。这说明，本引理所关注的 F-多项式在突变序列 $(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_{n-3})$ 之后就已确定。

现在让我们对 n 作归纳。对于基础情形 $n = 3$，只有一个顶点，且 $F_{(0,0,0)} = 1 + X_{(0,0,0)}$，它等于理想函数 $\Phi_{(0,0,0)} = [X_{(0,0,0)}]$。现在归纳地假设引理对 $n-1$ 成立。将 Q_{n-1} 视为位于 Q_n 左下角的全子箭图，我们归纳可知，在突变序列 $(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}1, \ldots, \mathbf{k}_{n-4})$ 之后， F-多项式 $F'_{(1,b,c)}$ 恰好是 DT 在 Q_{n-1} 上的 F-多项式 $F^{Q_{n-1}}(b,0,c)$，并且等于理想函数 $\Phi^{Q_{n-1}}(b,0,c)$（此处我们使用上标，以表示这些是与 Q_{n-1} 相关而非与 Q_n 相关的 F-多项式）。另一方面，通过直接计算也可以发现，经过突变序列 $(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}1, \ldots, \mathbf{k}_{n-4})$ 后，$(0, a, n-a-3)$ 的 C-向量在与 $(0, a, n-a-3)$ 同一行的每个位置上都是 1，其余位置都是 z0 [SW19，命题 4.3]。

现在让我们考察在下一段变异子序列 $\mathbf{k}_{n-3}$ 中，$(0, a, n-a-3)$ 处发生的情况。当 $a = n-3$ 时，在 $(0, n-3, 0)$ 处进行突变之前，箭图如图18左侧所示。注意，根据归纳假设，

$$F'_{(1,n-4,0)} = \Phi^{Q_{n-1}}_{(n-4,0,0)} = [X_{(n-3,0,0)} \leftarrow X_{(n-2,1,0)} \leftarrow \cdots \leftarrow X_{(1,n-4,0)}].$$

因此，应用 F-多项式变异公式 (5)，可得

$$\begin{aligned} F_{(n-3,0,0)} = F'_{(0,n-3,0)} =& [X_{(n-3,0,0)} \leftarrow X_{(n-2,1,0)} \leftarrow \cdots \leftarrow X_{(1,n-4,0)}] + \prod_{k=0}^{n-3} X_{(n-k-3,k,0)} \\ =& [X_{(n-3,0,0)} \leftarrow X_{(n-2,1,0)} \leftarrow \cdots \leftarrow X_{(1,n-4,0)} \leftarrow X_{(0,n-3,0)}] \\ =& \Phi_{(n-3,0,0)}. \end{aligned}$$

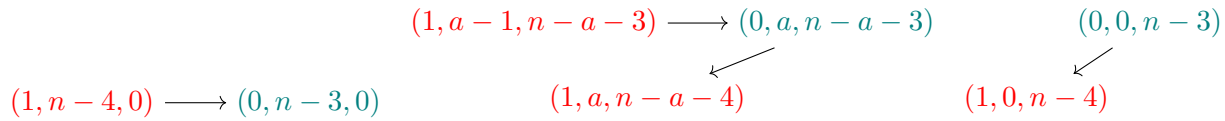


FIGURE 18. 突变发生前顶点 $(0, a, n-a-3)$ 附近的局部图形。

当 $0 < a < n-3$ 时，在 $(0, a, n-a-3)$ 处进行突变之前，箭图如图18中间的图所示。注意，根据归纳假设，我们有 $F'_{(1,a-1,n-a-3)} = \Phi^{Q_{n-1}}_{a-1\ 0}{}_{(,\ 0,\ n-a-3)}$ 以及 $F'_{(1,a,n-a-4)} = \Phi^{Q_{n-1}}_{a\ 0}{}_{(,\ ,\ n-a-4)}$。为便于比较，我们在同一张图中画出了这两个理想函数（图19）。现在应用 F-多项式变异公式 (5)，可得

$$F_{(a,0,n-a-3)} = F'_{(0,a,n-a-3)} = \Phi^{Q_{n-1}}_{(a-1,0,n-a-3)} + \Phi_{(a,0,n-a-4)} \prod_{k=0}^{a} X_{(a-k,k,n-a-3)}.$$

我们断言，右侧表达式是图 19 中整个标记偏序集的理想函数，恰好为 $\Phi_{(a,0,n-a-3)}$。注意，这个标记偏序集中的理想可以分为两类：包含标记为 $X_{(0,a,n-a-3)}$ 的顶点的理想，以及不包含该顶点的理想。包含该顶点的理想所产生的项属于求和项 $\Phi_{(a,0,n-a-4)} \prod_{k=0}^{a} X_{(a-k,k,n-a-3)}$；不包含该顶点的理想所产生的项则属于求和项 $\Phi^{Q_{n-1}}{}_{(a-1,0,n-a-3)}$。这就证明了 $0 < a < n-3$ 情形下的归纳步骤。

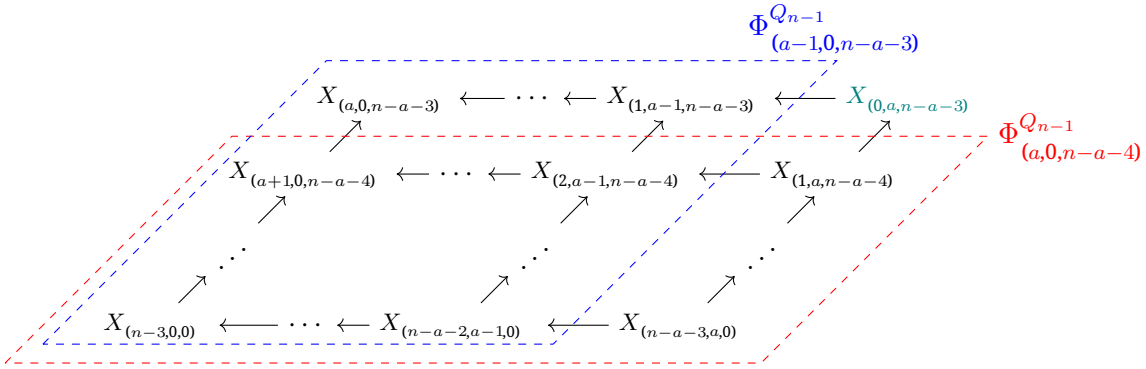


FIGURE 19. 理想函数的标记偏序集比较$\Phi^{Q_{n-1}}{}_{(a-1,0,n-a-3)}$ 与 $\Phi^{Q_{n-1}}{}_{(a,0,n-a-4)}$。顶点按照 Q_n 编号。

当 $a=0$ 时，在 $(0,0,n-3)$ 处变异之前的箭图如图 18 右图所示。注意，根据归纳假设，

$$F'_{(1,0,n-4)} = \Phi^{Q_{n-1}}_{(0,0,n-4)} = [X_{(1,0,n-4)} \leftarrow X_{(2,0,n-5)} \leftarrow \cdots \leftarrow X_{(n-3,0,0)}].$$

现在应用 F-多项式变异公式 (5)，得到

$$\begin{aligned} F_{(0,0,n-3)} =& F'_{(0,0,n-3)} = 1 + X_{(0,0,n-3)} F'_{(1,0,n-4)} \\ =& [X_{(0,0,n-3)} \leftarrow X_{(1,0,n-4)} \leftarrow X_{(2,0,n-5)} \leftarrow \cdots \leftarrow X_{(n-3,0,0)}] = \Phi_{(0,0,n-3)}. \end{aligned}$$

至此，归纳证明完成。 □

定理 7.7 的证明。现在我们可以证明，对于 Q_n 中的一般顶点 (a,b,c)，定理 7.7 成立。注意，由引理 7.8 可知，定理 7.7 对 Q_n 每一行最左侧的顶点已经成立。由 Q_n 的旋转对称性可推出，定理 7.7 对 Q_n 边上的所有顶点也成立。对于剩余的箭图顶点，我们将采用归纳证明：从下到上逐行推进，并沿每一行从左到右进行。在每一步中，对于箭图顶点 (a,b,c)，假设定理对所有满足 $z<c$ 的顶点 (x,y,z)，以及满足 $z=c$ 和 $y<b$ 的顶点均成立。现在考虑面 $f_{(a+1,b,c-1)}$ 的 (14) 式和 (4) 式中的第二个方程。这些方程中除一个因子外，其余因子都已由归纳假设确定。因此，这个剩余因子——在 (14) 式中为 $\Phi_{(a,b,c)}$，在 (4) 式的第二个方程中为 $F_{(a,b,c)}$ ——也必然相同。由此证明了定理。□

REFERENCES

[BDP14] Thomas Br ¨ ´ ´ *Int. Math. Res. Not. IMRN* 16 4547 4586, 2014 1205 2050, 10 1093 075 ustle、Gregoire Dupont 和 Matthieu Perotin。关于极大绿色序列。 , : – . arXiv: . doi: . /imrn/rnt . [BFMMNC20] Lara Bossinger、Bosco Fr´ıas-Medina、Timothy Magee 和 Alfredo N´ajera Ch´avez。簇簇的环面退化与簇对偶。 *Compos. Math.*, 156(10):2149–2206, 2020. arXiv:1809.08369, doi:10.1112/S0010437X2000740X.[BFZ05] Arkady Berenstein、Sergey Fomin 和 Andrei Zelevinsky。簇代数。III. 上界与双Bruhat胞腔。 *Duke Math. J.*, 126(1):1–52, 2005. arXiv:math/0305434, doi:10.1215/S0012-7094-04-12611-9.[BM20] Eric Bucher 和 John Machacek。Banff 箭图及其类的变红序列 $\mathcal{P}$ *SIGMA* 。 , : *Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* 16 049, 11, 2020 1807 03359, Paper No. . arXiv: . doi:10.3842/SIGMA.2020.049.[CGG+22] Roger Casals、Eugene Gorsky、Mikhail Gorsky、Ian Le、Linhui Shen 和 Jos´e Simental。辫 varieties 上的簇结构。预印本，2022。arXiv:2207.11607。

[CL19] 曹培根和李芳。一致列符号相干性与极大绿色序列的存在性。*J. Algebraic Combin.*, 50(4):403–417, 2019. arXiv:1712.00973, doi:10.1007/s10801-018-0861-z. [CW22] Roger Casals 和 Daping Weng。勒让德子流形链环与簇代数的微局部理论。预印本，2022。arXiv:2204.13244.[DWZ10] Harm Derksen、Jerzy Weyman 和 Andrei Zelevinsky。带势箭图及其表示 II：簇代数中的应用。 *J. Amer. Math. Soc.*, 23(3):749–790, 2010. arXiv:0904.0676, doi:10.1090/S0894-0347-10-00662-4.[FG06a] Vladimir Fock 和 Alexander Goncharov。簇 X-簇、融合与泊松-李群。载于 *Algebraic geometry and number theory*，第 *Progr. Math.*卷第253册，第27–68页。Birkh¨auser Boston, Boston, MA，2006年。arXiv:math/0508408, doi:10.1007/978-0-8176-4532-8_2. [FG06b] Vladimir Fock 和 Alexander Goncharov。局部系统模空间与高阶 Te- ichm¨üller 理论。 *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 103:1–211, 2006. arXiv:math/0311149, doi:10.1007/s10240-006-0039-4.[FG09] Vladimir Fock 和 Alexander Goncharov。簇系综、量子化与二对数。 *Ann.Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 42(6):865–930, 2009. arXiv:math/0311245, doi:10.24033/asens.2112. [FS18] Nicolas Ford 和 Khrystyna Serhiyenko。正拟阵的绿到红序列。 *J. Combin. Theory* , : – . *Ser. A* 159 164 182, 2018 1610 01695, 10 1016 2018 06 001 arXiv: . doi: . /j.jcta. . . . [FST08] Sergey Fomin、Michael Shapiro 和 Dylan Thurston。簇代数与三角剖分曲面。I. 簇复形。 *Acta Math.*, 201(1):83–146, 2008. arXiv:math/0608367, doi:10.1007/s11511-008-0030-7.[FZ02] Sergey Fomin 和 Andrei Zelevinsky。簇代数。I. 基础。 *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):497– 529, 2002. arXiv:math/0104151, doi:10.1090/S0894-0347-01-00385-X. [FZ07] Sergey Fomin 和 Andrei Zelevinsky。簇代数。IV. 系数。 *Compos. Math.*, 143(1):112– 164, 2007. arXiv:math/0602259, doi:10.1112/S0010437X06002521. [GHKK18] Mark Gross、Paul Hacking、Sean Keel 和 Maxim Kontsevich。簇代数的典范基。*J. Amer. Math. Soc.*, 31(2):497–608, 2018. arXiv:1411.1394, doi:10.1090/jams/890. [Gon17] A. Goncharov。理想网、局部系统模空间与三维卡拉比-丘范畴。 *Algebra,Geometry and Physics in the 21st Century Springer International Publishing* 31 97, 2017 , , , 第 – 页。arXiv:1607.05228.[GS18] Alexander Goncharov 和 Linhui Shen。G- 局部系统模空间的 Donaldson-Thomas 变换。 *Adv. Math.*, 327:225–348, 2018. arXiv:1602.06479, doi:10.1016/j.aim.2017.06.017. [GS19] Alexander Goncharov 和 Linhui Shen。局部系统模空间的量子几何与表示论。预印本，2019。arXiv:1904.10491. [Kel17] Bernhard Keller。箭图突变与组合唐纳森-托马斯不变量。 *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 2017 1709 03143 , . arXiv: . . [KS 08] Maxim Kontsevich 和 Yan Soibelman。稳定性结构、动机唐纳森-托马斯不变量与簇变换。预印本，2008。arXiv:0811.2435. [LS15] Kyungyong Lee 和 Ralf Schiffler。簇代数的正性。 *Ann. of Math. (2)*, 182 125, 2015 1 73 1306 10 4007 2015 182 1 2 ( ): – . arXiv: .2415, doi: . /annals. . . . . [Mil17] Matthew R. Mills。有限突变型箭图的极大绿色序列。 *Adv. Math.*, 319:182– 210, 2017. arXiv:1606.03799, doi:10.1016/j.aim.2017.08.019. [Mul16] Greg Muller。极大绿色序列的存在性并非箭图突变下的不变量。*Electron. J. Combin.*, 23(2):Paper 2.47, 23, 2016. arXiv:1503.04675. [NZ12] Tomoki Nakanishi 和 Andrei Zelevinsky。关于簇代数中的热带对偶。载于 *Algebraic groups and quantum groups* 565 *Contemp. Math.* 217 226 , [卷，第 – 页。

Amer. Math. Soc.，Providence, RI，2012年。arXiv:1101.3736, doi:10.1090/conm/565/11159. 06] Pos[A. Postnikov。全正性、格拉斯曼流形与网络。预印本，2006。arXiv:math/0609764. 19] SW *Forum of Mathematics Sigma* 2019 1904 07992 Linhui Shen 和

Daping Weng。双 Bott-Samelson 细胞上的簇结构。即将发表于[, , . arXiv: . . 20] Wen *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*Daping Weng。半单李群中双Bruhat胞腔的 Donaldson-Thomas 变换。[, 53(2):353–436, 2020. arXiv:1611.04186, doi:10.24033/asens.2424. 21] Wen *Adv. Math.*Daping Weng。格拉斯曼流形的 Donaldson-Thomas 变换。[, 383:Paper No. 107721, 58, 2021. arXiv:1603.00972, doi:10.1016/j.aim.2021.107721. 20] Zho*Geom. Methods Appl.* 16 013, 35, 2020 1901 04166, 10 3842 *SIGMA Symmetry Integrability* 2020 013 Yan

Zhou。散射图中的簇结构与子扇。, :Paper No. . arXiv: . doi: . /SIGMA. . .