arXiv:2303.03485v1 [math.CO] 6 Mar 2023

关于高分割秩子张量

JAN DRAISMA 和 THOMAS KARAM

Abstract. 我们证明，对于每个正整数 $d \geq 2$，都存在多项式函数 $F_d, G_d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对每个正整数 r，任意域上的每个阶数为-d、分割秩至少为 $G_d(r)$ 的张量 T，都包含一个 $F_d(r) \times \cdots \times F_d(r)$ 子张量，其分割秩至少为 r。随后，我们推导出关于零特征或高特征下多项式的施密特秩的类似结果。

Contents

1. 引言与主要结果 1 1.1. 与已有文献的关系 4 1.2. 本文结构 4 致谢 4 2. 定理 1.3 的证明 4 3. f 的次数界及定理 1.1 的证明 6 4. 阶数为 3 的张量与不变理论 8 5. 推导关于多项式秩的限制结果 9 参考文献 9

1. Introduction and main result

设 K 是一个域，n_1、n_2、r 是正整数，$A \in K^{n_1} \otimes K^{n_2}$ 是一个秩为 r 的矩阵。那么 A 包含一个秩等于 r 的 $r \times r$-子矩阵。我们希望为 d 阶张量和分割秩证明类似的结论。

设 $n_1, \ldots, n_d$ 为正整数，且 $T \in K^{n_1} \otimes \cdots \otimes K^{n_d}$ 为一个张量。由 Naslund [Nas20] 引入并记作 $\mathrm{pr}(T)$ 的 T 的分割秩，是满足以下条件的最小非负整数 r：T 可以写成 r 个形如 $A \otimes B$ 的项之和，其中 $A \in \bigotimes_{i \in I} K^{n_i}$ 且 $B \in \bigotimes_{i \notin I} K^{n_i}$，并且 I 是 $[d]$ 的一个真子集，且 $= \{1, \ldots, d\}$ 包含 1。我们强调，I 可以因 r 个项而异。不过，对于 $d = 2$，$\{1\}$ 是 I 唯一可能的取值，因此 $\mathrm{pr}(T)$ 就是 T 的矩阵秩。本文主要关注 $d \geq 3$。

JD 部分获得瑞士国家科学基金会（SNSF）项目资助 200021 191981，以及荷兰科学研究组织（NWO）的 Vici 资助 639.033.514。他感谢高等研究院提供了优良的工作条件，本项目的部分工作正是在此期间完成的。TK 获得欧洲研究理事会（ERC）资助 883810。他感谢牛津大学数学研究所提供了非常宜人的研究环境，也感谢蒙特利尔 CRM 组织了“Tensors: Quantum Information, Complexity and Combinatorics”会议；本文的若干主要思想正是在会议期间产生的。

若 T 是一个 d 阶张量，且 $X_1, \dots, X_d$ 分别是 $[n_1], \dots, [n_d]$ 的子集，则我们用 $T[X_1, \dots, X_d]$ 表示 T 的子张量，该子张量由将 T 的各项限制在乘积 $X_1 \times \cdots \times X_d$ 上得到。令 $r := \operatorname{pr}(T)$。我们希望证明，$T$ 含有一个子张量，其大小是 r 的某个（不太大的）函数，且其分割秩至少为 r 的某个（不太小的）函数。

逆否命题表明，如果 T 的所有小子张量的分割秩都有界，那么 T 本身的分割秩也有界。这正是我们要证明的。

定理 1.1. 设 $d \geq 2$ 为正整数。存在函数 $F_d, G_d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得若 $r \geq 1$ 为正整数，且 T 是任意域上的 d 阶张量，并且 T 的每个 $F_d(r) \times \cdots \times F_d(r)$ 子张量的分割秩至多为 r，则 T 的分割秩至多为 $G_d(r)$。此外，对所有 r，我们可以取界 $F_d(r) \leq (2^{d+3}r)^{2^d}$ 和 $G_d(r) \leq (2^{d+3}r)^{2d^2}$。

我们指出，定理中关于量 $F_d(r)$ 和 $G_d(r)$ 的界对任意域 K 都成立，不过“最优”函数 F_d 和 G_d 有可能确实取决于 K。此外，我们认为，Theorem 1.1 很可能仍然成立，即对于每个固定的 d，两个界 $F_d(r)$ 和 $G_d(r)$ 都可以取为随 r 线性增长，尽管我们尚无证明。第 4 节中我们将证明，可以取 $F_3(r) = O(r^{3/2})$，以及 $G_3(r) = O(r^3)$。

证明的灵感来自尝试将以下矩阵论证推广到高维张量。若 A 是一个矩阵，且 r 是满足存在一个 $r \times r$ 子矩阵 $A[X, Y]$（它属于 A）且秩为 r的最大非负整数，那么对于每个$x \in X^c$和 $y \in Y^c$，我们都有 $\det A[X, Y] \neq 0$，但 $\det A[X \cup \{x\}, Y \cup \{y\}] = 0$，因此可以用简单的方式表示所有系数 $A(x, y)$，其中 $x \in X^c$ 和 $y \in Y^c$

$$A(x, y) = A[\{x\}, Y]A[X, Y]^{-1}A[X, \{y\}] \tag{1}$$

用 r 行 $A[\{x\}, [n_2]]$（其中 $x \in X$）以及 r 列$A[[n_1], \{y\}]$（其中 $y \in Y$）中的元素表示；由此可见，矩阵 $A[X^c, Y^c]$的秩至多为 r。虽然由此得到的界并非最优，但这一论证使我们能够推断，A 的秩至多为 $3r$，因为 r 行$A[\{x\}, [n_2]]$（其中 $x \in X$）以及 r 列 $A[[n_1], \{y\}]$（其中 $y \in Y$）的秩都至多为 1。因此，我们可以尝试将这一论证用于阶为-d的张量的分割秩，并提出以下问题。

问题 1.2. 设 $d \geq 2$、$r \geq 1$ 为正整数。是否存在一个正整数 $C_d(r)$，满足以下条件？若 $T \in K^{n_1} \otimes \cdots \otimes K^{n_d}$ 是一个 d 阶张量，X_1，....., X_d 分别是 $[n_1]$，....., $[n_d]$ 的子集，且每个子集的大小均为 r，使得 $\operatorname{pr} T[X_1, \dots, X_d] = r$ 且

$$\operatorname{pr} T[X_1 \cup \{x_1\}, \dots, X_d \cup \{x_d\}] = r$$

对所有 $x_1 \in [n_1] \setminus X_1$，....., $x_d \in [n_d] \setminus X_d$ 均成立，则有

$$\operatorname{pr} T[[n_1] \setminus X_1, \dots, [n_d] \setminus X_d] \leq C_d(r).$$

与矩阵论证类似，由于 T 的每个 $d-1$ 阶切片的分割秩至多为 1，因此，若问题 1.2 的答案为肯定，则定理 1.1 对 $F_d(r) = r$ 和 $G_d(r) = C_d(r) + dr$ 成立。特别地，只需 C_d 关于 r 为线性，就能保证 G_d 关于 r 为线性。

然而，我们并不确定问题 1.2 是否有肯定的答案。与矩阵的情形不同，对于满秩矩阵，所有长度最小的秩分解都可以通过基变换彼此推导出来，而分割

秩分解通常更加丰富，即使在$d = 3$ 的情形下也是如此；这使得获得表达式 (1) 的类似形式更加困难。

由于无法直接写出 $T(x_1, \dots, x_d)$ 的表达式，我们可以寻求一种较弱的描述：给出一个方程，使得 $T(x_1, \dots, x_d)$ 是它的解，这也为我们证明中将采用的论证指明了方向。我们需要克服的第二个困难是，我们不知道 $K^{n_1} \otimes$ 中分割秩不超过 $\cdots \otimes K^{n_d}$ r 的张量集合通常是否为扎里斯基闭集：尽管当域 K 和 $d = 3$ 为代数闭域时确实如此（Sawin 和 Tao[TS16] 已证明这一点），但即使在代数闭域 K 上，这通常也很可能不成立。（事实上，四次齐次多项式的有界强度这一对应概念并非闭集 [BBOV22]。）不过，这不会妨碍我们的论证，因为我们只需找到一个多项式，使其零点集包含 $K^{n_1} \otimes$ 中的张量集合即可。
$\cdots \otimes K^{n_d}$ 的分割秩至多为 r，而不是恰好等于该值。事实上，证明定理 1.1 的关键一步将是以下命题。

定理 1.3. 设 $d \geq 2$, $r \geq 1$ 为正整数。设 $m \geq 1$ 为一个正整数，使得存在正整数 n_1, $\dots, n_d$，以及一个次数为 m 的非零多项式 f，其定义在 $\mathbb{C}[x_{i_1,\dots,i_d} \mid i_j \in [n_j]]$ 上，并且在 $\mathbb{C}^{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{n_d}$中所有分割秩至多为 r的张量上都取值为零。

那么，对于任意域 K、任意正整数 $n_1, \dots, n_d \geq m$以及任意张量$T \in K^{n_1} \otimes \cdots \otimes K^{n_d}$, 如果 T的所有 $m \times \cdots \times m$-子张量的分割秩都至多为 r，那么 T 的分割秩至多为

$$d(m-1) + \sum_{s=1}^{\lfloor d/2 \rfloor} \binom{d}{s} (m-1)^{d-s},$$

对于 $d \geq 3$，其不超过 m^d。

我们注意到，对于矩阵，左上子矩阵的行列式就是这样一个多项式，因此我们可以取 $m = r + 1$。由此得到 $4r$，几乎恢复了前面讨论的界 $3r$。

对于高特征域，我们可以从定理 1.1 推导出多项式的一个类比结果。若 P 是域 K 上多个变量的一个齐次多项式，且次数至少为 2，则令 $\operatorname{rk} P$ 为满足下述条件的最小正整数 k

$$P = Q_1 R_1 + \cdots + Q_k R_k$$

对于某些齐次多项式 Q_i、R_i，满足 $\deg P_i$、$\deg Q_i < \deg P$，且 $\deg Q_i + \deg R_i = \deg P$ 对每个 $i \in [k]$ 都成立。这种秩的概念称为 P 的施密特秩或强度。

对于每个子集 $U \subset [n]$，我们用 $P[U]$ 表示通过在多项式 P 中将 $[n] \setminus U$ 中的所有变量替换为 0 而得到的 $K[x_u | u \in U]$ 中的多项式。

定理 1.4. 设 K 为一个域，设 $d \geq 2$、$r \geq 1$ 为正整数，并令$D := \binom{d}{\lfloor d/2 \rfloor} \leq 2^d$。假设 $\operatorname{char} K = 0$ 或 $\operatorname{char} K > d$。若 P是变量 x_1、.....、x_n上的齐次多项式，定义在 K上，且 $\deg P = d$，并满足：对于任意大小至多为 $dF_d(r \cdot D)$ 的子集 $U \subset [n]$，都有 $\operatorname{rk} P[U] \leq r$，则

$$\operatorname{rk} P \leq G_d(r \cdot D).$$

1.1. 与文献的关系。本文的主要结果和技术可与现有文献中的相关工作进行比较。Dra19], 中的 [已经开始建立研究限制封闭性质的一般框架，但该文中的技术假设该性质是扎里斯基闭的；正如我们所解释的，对于 $K^{n_1} \otimes \cdots \otimes K^{n_d}$中分割秩至多为 r的张量集合而言，情况似乎并非如此。较新的工作 [BDR22] 假设域是有限的。

高秩子张量也曾在 [Kar22]，中研究过，但采用了截然不同的论证：该论文的定理 4.1 与（我们的）定理 1.1 类似，但假设域是有限域；这一假设在证明中被大量使用，因为分割秩与解析秩之间存在联系。尽管定理 1.1 的定性部分可作为该论文引言中陈述的第一个主要定理的特例推出，但本文在函数F_d 和 G_d 方面给出了多项式界，这是一项新进展。

暂且不论界的问题，根据 Kazhdan 和 Ziegler [KZ20] 的一个普适性定理，可以推出定理 1.4 的一个定性版本，其中假设被替换为以下要求：在任意 d 元线性变换组作用下， T 的每个像$T' \in K^{F_d(r)} \otimes \cdots \otimes K^{F_d(r)}$ 的分割秩至多为 r。这一条件远强于我们对子张量的要求。 [BDR22] 描述了一种从关于线性映射的结果推广到关于子张量的结果的一般方法，其中涉及有限生成 FI-模的基本结果。

最后，我们提及 Bri¨et 和 Castro-Silva [BCS22] 关于张量和多项式随机限制的一篇论文，它为当前这项研究提供了额外的动机。尽管他们的结果既不能推出我们的结果，我们的结果也不能推出他们的结果，但他们指出，定理 1.1 和定理 1.4 中的线性界分别为恢复张量和多项式的随机限制定理提供了一条自然途径。我们对定理 1.4 的证明表明，定理 1.1 中的线性界足以推出定理 1.4 中的线性界。

1.2. 本文结构。第 2 节证明定理 1.3；第 3 节根据 r 找出定理 1.3 中 m 的一个界，并推导出定理 1.1。第 4 节运用经典不变量理论，在 $d = 3$ 的特殊情形下推导出 m 的一个稍优界；第 5 节则由定理 1.1 推出定理 1.4。

Acknowledgements

感谢 Jop Bri¨et的宝贵讨论，并感谢 Harm Derksen 向我们建议了第 4 节中的论证。

2. Proof of Theorem 1.3

我们先给出以下初等观察；这一观察受到 Snow- den 在 [Sno21] 中对 [BDES23] 中许多结果所作的另一种证明的启发，该证明通过处理权为 (1, . . . , 1) 的权重方程来展开。

引理2.1. 我们可以假设定理 1.3 中的多项式 f 属于

$$\mathbb{C}[x_{i_1,\ldots,i_d} \mid i_j \in [m]],$$

在 $\mathbb{Z}$ 中具有最大公因数为 1 的系数，并且对于环面 $((\mathbb{C}^*)^m)^d$，其权为 $(1^m, \ldots, 1^m)$。

证明。由于分割秩至多为 r 的张量是一个定义在 $\mathbb{Z}$ 上的映射的像，我们可以假设 f 具有整数系数。由于它们在坐标缩放下保持不变，我们还可以假设 f 是一个权向量，即当张量受到 $(\mathrm{diag}(t_1)\ldots,\mathrm{diag}(t_d)) \in \prod_{i=1}^{d}\mathrm{GL}^{n_i}(\mathbb{C})$ 的作用时，f 会被缩放为 $(t_1^{\alpha_1},\ldots,t_d^{\alpha_d})$，其中 $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n_i}$ 为某些数值。现在，如果 α_i 的第 j 个分量严格大于 1，那么用李代数元素 $E_{j,\ n_i+1}$ 作用于 f，我们会得到另一个在分割秩为 r 的张量上消失的多项式，其权为 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_i',\ldots,\alpha_d)$，其中

$$\alpha_i' = (\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{ij}-1,\ldots,\alpha_{in_i},1) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n_i+1}.$$

我们将 n_i 替换为 n_i+1，并将 α_i 替换为 α_i'。以此类推，直到所有 α_i 的元素都只有 1 和 0。0 对应于不出现在 f中的变量切片。移除这些切片后，f的权为（$1^{n_1},\ldots,1^{n_d}$），注意到 n_i 可能已经改变。每个变量的权为（$e_{j_1},\ldots,e_{j_d}$），其中 $j_i \in [n_i]$取某个值，由此可知所有 n_i 都等于同一个数 m。最后，将所得的f 除以一个整数，以确保系数的最大公因数为 1。□

现在考虑 f在 $K[x_{i_1,\ldots,i_d} \mid i_1,\ldots,i_d \in [m]]$中的像。它非零，因为 f 的系数的最大公因数为 1，而且它仍是一个权为（$1^m,\ldots,1^m$）的权向量。从现在起，我们用 f表示这个像。注意，f在 $K^m \otimes \ldots \otimes K^m$ 中分割秩至多为 r的张量上取值为零。

由于 f的权为（$1^m,\ldots,1^m$），在沿 d方向进行置换后，我们可以写成

$$f =: h_0 = x_{m,\ldots,m}h_1 + r_1$$

其中，h_1是一个权为（$1^{m-1}0,\ldots,1^{m-1}0$）的非零权向量，而 r_1是一个权为（$1^m,\ldots,1^m$）且不涉及 $x_{m,\ldots,m}$ 的权向量。注意，h_1 中的变量的指标都不超过 $m-1$，而 r_1 中的所有变量至少有一个指标不超过 $m-1$。

类似地，在对前（$m-1$）个指标进一步置换后，对于 $k=1,\ldots,m-1$，我们有

$$h_k = x_{m-k,\ldots,m-k}h_{k+1} + r_{k+1}$$

其中，h_{k+1}是一个权为（$1^{m-k-1}0^{k+1},\ldots,1^{m-k-1}0^{k+1}$）的非零权向量，而 r_{k+1}是一个权为（$1^{m-k}0^k,\ldots,1^{m-k}0^k$）且不涉及$x_{m-k,\ldots,m-k}$的权向量。注意，$h_m$是一个非零常数，且 $r_m=0$。此外，对于每个 $i=1,\ldots,d$，r_{k+1}的每一项都恰好含有一个指标在位置 i上的变量。这些 d指标 $m-k$ 分布在该项中至少两个且至多 d 个变量上。因此，r 是以下形式各项的线性组合（以 $d=4$为例）：

$$x_{m-k,i_2,i_3,i_4}\cdot x_{j_1,m-k,m-k,j_4}\cdot x_{l_1,l_2,l_3,m-k}$$

其中 i_2、.....、$l_3 \in [m-k-1]$，且系数是变量的多项式，其所有指标均属于 $[m-k-1]$。

命题 2.2. 设 n_1、…、$n_d \geq m$ 为正整数，且令 $T \in K^{n_1}\otimes\cdots\otimes K^{n_d}$。假设对于某些 $k=0$、…、$m-1$，h_k 的整个 $G:=\prod_i$ 对称群 $([n_i])$- 轨道在 T 处消失，但 h_{k+1} 的整个 G-轨道并非在 T 处消失。那么 T 的

分割秩至多

$$d(m-k-1)+\sum_{s=1}^{\lfloor d/2\rfloor}\binom{d}{s}(m-k-1)^{d-s}. \tag{2}$$

证明。不失一般性，我们可以假设 $h_{k+1}(T)$ 非零，而 h_k 的整个 G-轨道在 T 上为零。于是我们有

$$t_{m-k,\dots,m-k}=-r_{k+1}(T)/h_{k+1}(T). \tag{3}$$

例如，若 $d=4$，则 $t_{m-k,\dots,m-k}$ 是如下各项的线性组合：

$$t_{m-k,i_2,i_3,i_4}\cdot t_{j_1,m-k,m-k,j_4}\cdot t_{l_1,l_2,l_3,m-k}$$

其中系数仅取决于子张量 $T[[m-k-1],\dots,[m-k-1]]$。由于 h_k 的整个 G-轨道在 T 上消失，我们可以将 G 中子群 $G':=\prod_{i=1}^d\mathsf{Sym}([n_i]\setminus[m-k-1])$ 的任意元素作用于 (3)。注意，这会固定除 $m-k-1$ 之外的所有指标。因此，我们得到子张量

$$T[[n_1]\setminus[m-k-1],\dots,[n_d]\setminus[m-k-1]]$$

T 可分解为若干张量积之和，其中每一项都可被某个类似于（对 $d=4$）的张量整除

$$(t_{j_1,a_2,a_3,j_4})_{a_2\in[n_2]\setminus[m-k-1],a_3\in[n_3]\setminus[m-k-1]}.$$

对于某种 $(j_1,j_4)\in[m-k-1]^2$ 的选择。在此分解的每一项中，至少有一个因子是阶数至多为 $\lfloor d/2\rfloor$ 的张量。这些张量的数量等于

$$\sum_{s=1}^{\lfloor d/2\rfloor}\binom{d}{s}(m-k-1)^{d-s}.$$

其中，$\binom{d}{s}$ 统计了位置的选择数 i，在这些位置上放置在 $[n_i]\setminus[m-k-1]$ 中变化的指标（例子中的位置 2、3）；因子 $(m-k-1)^{d-s}$ 统计其余指标的选择数（例子中的 j_1,j_4）。

最后，T 的余项存在一个切片秩分解，其中每一项都能被 K^{m-k-1} 中某个标准基向量整除，该向量位于 d 个因子之一。这由 (2) 中的第一项计入。□

定理 1.3 的证明。根据 $f=h_0$ 的构造，它的整个 G-轨道在给定张量 T 上消失。另一方面，h_m 是一个非零常数。因此存在一个 $k\in\{0,\dots,m-1\}$，使得 h_k 的整个 G-轨道在 T 处消失，但 h_{k+1} 的整个 G'-轨道并非都在 T 处消失。因此，命题 2.2 可应用于此 k。现在，取最坏的 k，即 $k=0$，由 (2) 中的界即可得到定理 1.3 中的界。□

3. A degree bound for f and proof of Theorem 1.1

定理 3.1. 令 $d\geq 2$ 为正整数。那么对于每个正整数 $r\geq 1$ 以及 $n=8r$，存在一个多项式 f，其次数至多为 $m\leq(2^{d+3}r)^{2d}$，属于 $\mathbb{C}[x_{i_1,\dots,i_d}\mid i_j\in[n]]$，并且在 $\mathbb{C}^n\otimes\cdots\otimes\mathbb{C}^n$ (d 个因子) 中所有分割秩至多为 r 的张量上都取值为零。

证明. 我们用 $X_{n,\ r}$ 表示 $\mathbb{C}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^n$ 中分割秩至多为 r 的 d 阶张量集合。集合 $X_{n,\ r}$ 包含于集合 $X'_{n,\ r}$，后者由具有如下类型的秩分解的 d 阶张量 T 构成

$$T = \sum_{I \in \mathcal{P}([d]) \setminus \{\emptyset, [d]\}} \sum_{i=1}^{r} A_{I,i} \otimes B_{I^c,i} \tag{4}$$

对于某些张量 $A_{I,\ i} \in \bigotimes_{j \in I} \mathbb{C}^n$ 以及 $B_{I^c,\ i} \in \bigotimes_{j \in I^c} \mathbb{C}^n$。

请注意，我们本可以对这些 I 中的一半求和，但为简单起见，此处不这样做。今后，除非另有说明，求和、指标化等中 I 的取值范围始终取为 $\mathcal{P}([d])$ $\setminus \{\emptyset, [d]\}$，其中$\mathcal{P}([d])$ 是 $[d]$ 的幂集。

Let $\pi_r = \prod_I (\mathbb{C}^{n^I} \times \mathbb{C}^{n^{I^c}})^r$ be the 参数空间 for decomposition 为 in (4)。我们令 $P_{2m}(\pi_r)$ 表示由变量 $A_{I,\ i}, B_{I,\ i}$ 中次数为 $2m$ 的齐次多项式构成的向量空间，并令 $P_m(\mathbb{C}^{[n]^d})$ 表示由 $\mathbb{C}^{[n]^d}$ 阶张量的 n^d 个分量中次数为 m 的齐次多项式构成的线性空间。令 $\varphi\colon \pi_r \to \mathbb{C}^{[n]^d}$ 为如下参数化：取

$$\varphi(A_{I,i}, B_{I,i} : I, 1 \le i \le r)$$

为 (4) 的右端，则拉回 $\varphi^{\#}\colon P_m(\mathbb{C}^{[n]^d}) \to P_{2m}(\pi_r)$ 在 $\varphi^{\#}(f) = f \circ \varphi$ 时是良定义的。

若 f 是 $\ker \varphi^{\#}$ 中的一个元素，则 f 在 φ 的像 $X'_{n,\ r}$ 上消失，因此现在只需验证 $\ker \varphi^{\#} \neq \{0\}$。进而，要证明这一点，只需证明

$$\dim P_{2m}(\pi_r) < \dim P_m(\mathbb{C}^{[n]^d}).$$

定义 $S_{n,\ r} = \sum_I r(n^{|I|} + n^{d-|I|}) = \dim \pi_r$，我们可以写成

$$\begin{aligned} \dim P_{2m}(\pi_r) &= \binom{2m + S_{n,r} - 1}{2m} \\ &= \binom{2m + S_{n,r} - 1}{S_{n,r} - 1} \\ &\le (2m + S_{n,r})^{S_{n,r}-1}/(S_{n,r} - 1)!. \end{aligned}$$

与此同时

$$\begin{aligned} \dim P_m(\mathbb{C}^{[n]^d}) &= \binom{m + n^d - 1}{m} \\ &= \binom{m + n^d - 1}{n^d - 1} \\ &\ge m^{n^d - 1}/(n^d - 1)!. \end{aligned}$$

因此，只需证明

$$m^{n^d-1}/(2m + S_{n,r})^{S_{n,r}-1} > (n^d - 1)!/(S_{n,r} - 1)!. \tag{5}$$

对于每个 $1 \le |I| \le d-1$，都有 $n^{|I|} + n^{d-|I|} \le 2n^{d-1}$，因此 $S_{n,\ r} \le 2^{d+1} r n^{d-1}$。假设 $m \ge n^d/4 \ge 3$ 且 $n = 2^{d+3} r$，那么 (5) 的左边因此至少为

至少

$$\begin{aligned} m^{n^d-1}/(2m+2^{d+1}rn^{d-1})^{2^{d+1}rn^{d-1}-1} &\geq m^{n^d-1}/(2m+n^d/4)^{n^d/4-1} \\ &\geq m^{n^d-1}/(3m)^{n^d/4-1} \\ &\geq m^{n^d/2}. \end{aligned}$$

与此同时，(5) 的右边至多为其分子，因此至多为 $(n^d)^{n^d}$。所以，要使 (5) 成立，只需

$$m^{n^d/2} > (n^d)^{n^d},$$

这可简化为 $m \geq n^{2d}$。由于 $n = 2^{d+3}r$，只需满足 $m \geq (2^{d+3}r)^{2d}$，即可存在一个多项式 f，它在$X'_{n,\ r}$ 上为零，因而在 $X_{n,\ r}$上也为零。

□

定理 1.1 的证明。取 $F_d(r) = m := (2^{d+3}r)^{2d}$。由定理 3.1，存在一个非零多项式 f，其次数为 m，并且在分割秩为 r 的阶数为 d 的张量上取零；由定理 1.3，任何一个 $n_1 \times \cdots \times n_d$-张量，只要其所有 $m \times \cdots \times m$-子张量的分割秩至多为 r，其自身的分割秩就至多为 $m^d = (2^{d+3}r)^{2d^2} =: G_d(r)$，如所需。最后一步我们用到了 $d \geq 3$，但正如本文开头所讨论的，对于 $d = 2$，即使采用好得多的界也成立。

最后请注意，如果某个 n_i 小于 m，那么该张量的分割秩至多为 $m < G_d$（r）。□

4. Order-3 tensors and invariant theory

本节中，我们聚焦于 $d = 3$，并采用 Harm Derksen 向我们提出的一种构造。在这种情况下，分割秩等于切片秩。以下结论广为人知，不过我们仍简要给出证明。

引理 4.1. 切片秩严格小于 n 的张量 $T \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ 包含在群 $G := \mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_n$ 作用下的零锥中。

这里，零锥是所有使 G-不变量多项式均为零的向量组成的集合。

证明. 对于这样的张量，存在如下线性子空间 V_1、V_2、$V_3 \subseteq \mathbb{C}^n$，使得 $\dim(V_1) + \dim(V_2) + \dim(V_3) < n$：

$$T \in V_1 \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n + \mathbb{C}^n \otimes V_2 \otimes \mathbb{C}^n + \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes V_3.$$

对各个张量因子分别进行线性坐标变换后，我们可以假设V_i 由前 n_i 个基向量张成。现在考虑由下式定义的 SL_n 中的单参数子群三元组 $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$$\lambda_i(t) = \mathrm{diag}(t^{(n-n_i)}, \ldots, t^{(n-n_i)}, t^{-n_i}, \ldots, t^{-n_i})$$

其中有 n_i 个 $t^{(n-n_i)}$，以及 $n-n_i$ 个 t^{n_i}，因此 $\det(\lambda_i(t)) = 1$，如所需。于是可以看出，$\lambda(t)$ 在 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ 的每个标准基向量上都按某个幂 t^a 作用；而对于 T 中系数非零的所有基向量，$a \geq n - n_1 - n_2 - n_3 > 0$。因此，对于 $t \to 0$，有 $\lambda(t)T \to 0$，且所有 G-不变多项式在 T 上都为零。□

对于以下结果，我们参见 [BI17], ，其中该不变量称为 F_k。

命题 4.2。如果 $n = k^2$，则在 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ 上存在一个非零的、齐次的 G-不变量多项式，其次数为 k^3。□

推论 4.3。对于 $d = 3$，在定理 1.3 中，我们可以将 $r \to \infty$ 取为 $m = O(r\sqrt{r})$。

证明。令 k 为满足 $k^2 \geq r + 1$ 的最小正整数，并设 $n := k^2$。根据命题 4.2，存在一个次数为 k^3、定义在 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ 上的非零 G-不变多项式 f。根据引理 4.1，该多项式在切片秩至多为 $n - 1$ 的张量上消失，因此特别地，在切片秩至多为 r 的张量上也消失。显然，$\deg(f) = O(r\sqrt{r})$。□

5. Deduction of the restriction result for the rank of polynomials

本节中，我们从定理 1.1 推导出定理 1.4。首先，我们证明可以根据多项式施密特秩的界推导出张量分割秩的界，反过来也成立。这一对应关系早已为人所知，见 Kazhdan 和 Ziegler 的工作 [KZ20]；为方便读者，我们在此列出。与定理 1.4 的陈述一样，我们假设 $\operatorname{char} K = 0$ 或 $\operatorname{char} K > d$。回顾一下，$x_1$ 中次数为 d 的齐次多项式空间与对称幂 $S^d K^n$ 自然同构，并考虑由下式确定的自然线性映射

$$\varphi : K^n \otimes \cdots \otimes K^n \to S^d K^n,\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \mapsto v_1 \cdots v_d.$$

显然，它将任何分割秩至多为 1 的张量映射为施密特秩至多为 1 的多项式，因此，由线性性可知，分割秩至多为 r 的张量被映射为施密特秩至多为 r的多项式。反过来，我们有一个由下式确定的线性映射

$$\psi : S^d K^n \to K^n \otimes \cdots \otimes K^n,\ v_1 \cdots v_d \mapsto \sum_{\pi \in S_d} v_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi(d)},$$

它是到 $K^n \otimes \cdots \otimes K^n$ 中的对称张量空间的线性同构，其逆映射为 $\varphi/d!$ 并限制在该对称张量空间上。该映射将一个施密特秩至多为 1 的多项式（表示为 $Q \cdot R$，其中 Q 的次数为 e， R 的次数为 $d-e$）映射为一个分割秩至多为 $\binom{d}{e} \leq \binom{d}{\lfloor d/2 \rfloor} =$ 的张量： D。同样由线性性可知，该映射将施密特秩至多为 r 的多项式映射为分割秩至多为 $r \cdot D$的张量。

定理 1.4 的证明。设 P 是 x_1中的次数为 d的齐次多项式，且对于所有大小至多为 dF_d（rD）的 $U \subseteq [n]$，都有 $\operatorname{rk}(P[U]) \leq r$。则$\psi(P) =: T$是一个（对称）张量。任取 d-元组 $U_1, \ldots, U_d$，其中各项均为$[n]$的子集，且大小至多为 F_d（rD），并令 $U := U_1 \cup \cdots \cup U_d$为一个大小至多为$dF_d$（$rD$）的集合。根据我们的假设， $\varphi(T[U, \ldots, U]) = d!\ P[U]$ 的施密特秩至多为 r。因此， $T[U, \ldots, U] = \psi(P[U])$ 的分割秩至多为 rD，从而 $T[U_1, \ldots, U_d]$的分割秩也至多为 rD。我们得出， T本身的分割秩至多为 G_d（rD），因此 $P = \varphi(T)/d!$ 的施密特秩至多为 G_d（rD）。□

References

[BBOV22] Edoardo Ballico、Arthur Bik、Alessandro Oneto 和 Emanuele Ventura。有界强度形式集并非闭集。 *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 360:371– 380, 2022.[BCS22] Jop Bri¨et 和 Davi Castro-Silva。高秩张量的随机限制与多项式映射。2022。预印本， arXiv:2212.13728。

[BDES23] Arthur Bik、Jan Draisma、Rob H. Eggermont 和 Andrew Snowden。多项式表示的几何。 *Int. Math. Res. Not.*，2023。即将出版， arXiv:2105.12621。[BDR22] Andreas Blatter、Jan Draisma 和 Filip Rupniewksi。有限域上的张量限制定理。2022。预印本， arXiv:2211.12319。[BI 17] Peter B ¨ *J. Algebra* 477 390 434, 2017 urgisser 和 Christian Ikenmeyer。轨道闭包的基本不变量。，：–。[Dra19] Jan Draisma。多项式函子的拓扑诺特性。 *J. Am. Math. Soc.*，32 691:–707, 2019。[Kar22] Thomas Karam。高秩张量的高秩子张量。2022。预印本， arXiv:2207.08030。[KZ20] David Kazhdan 和 Tamar Ziegler。仿射空间中高秩子簇的性质。*Geom. Funct. Anal.*，30(4):1063–1096, 2020。[Nas20] Eric Naslund。张量的分割秩与 k $\mathbb{F}_q^n$ *J. Comb.* -右 *Theory Ser. A* 174 24, 2020 105190 角在中的情形。，，：。编号/文章号。[Sno21] Andrew Snowden。稳定表示论：超越经典群。2021。预印本， arXiv:2109.11702。[TS16] Terence Tao 和 Will Sawin。关于张量“切片秩”的笔记。2016。 https://terrytao.wordpress.com/2016/08/24/notes-on-the-slice-rank-of-tensors/

.

Mathematical Institute, University of Bern, Sidlerstrasse 5, 3012 Bern, Switzer-land; and Department of Mathematics and Computer Science, P.O. Box 513, 5600 MB,Eindhoven, the Netherlands*Email address*: jan.draisma@unibe.ch

Mathematical Institute、 University of Oxford、 Andrew Wiles Building、 Radcliffe Observatory Quarter、 Woodstock Road、 Oxford、 OX2 6GG、 United Kingdom*Email address*: thomas.karam@maths.ox.ac.uk