arXiv:2303.03495v1 [math.AP] 6 Mar 2023

实现时间稀疏连续数据同化的次优方法：提高二维和三维纳维–斯托克斯方程的收敛速率

ADAM LARIOS、YUAN PEI 和 COLLIN VICTOR

Abstract. 我们研究了将时间稀疏观测应用于 Azouani-Olson-Titi 数据同化算法的不同方法。我们提出了一种新方法，在观测时间间隔之外另设一个“数据同化窗口”。我们证明，将该窗口尽可能缩短，可以大幅增强 nudging 参数，而不会损害稳定性。以往的方法会使用旧数据持续 nudging 解，直到获得新的观测。相比之下，我们的方法在观测完成后几乎立即停止对系统进行 nudging，使系统得以松弛并回归正确的物理状态。我们证明，这使我们的三维纳维–斯托克斯模拟达到收敛所需的时间缩短了一个数量级。此外，模拟结果表明，我们的方法的收敛速率几乎与 Hayden、Olson 和 Titi（HOT）提出的理想化低阶傅里叶模态直接替换方法相同。然而，我们的方法很容易适用于有限元方法、有限差分方法等非理想化情形，因为它无需访问傅里叶模态，适用于一般插值算子。正因如此，我们将这种方法称为“次优方法”：也就是说，“最优”方法是像 HOT 那样直接替换傅里叶模态，但在符合物理现实的场景中，这种理想化方法通常并不可行。虽然与理想化方法相比，我们的方法收敛速率略微次优，但它能够直接用于实际应用。

此外，我们从解析上证明，这些新算法整体适定，并且会随时间指数快速收敛到真实解。此外，我们首次对 HOT算法进行了三维计算验证。

1. Introduction

如果希望将低频观测数据纳入物理模型（例如天气模型），一个直接的问题便是：在没有数据的这段时间里，应该对模型做些什么？如果采用某种数据同化方案，一个自然的回答是，数据同化的校正应利用最新数据，继续引导模拟朝观测数据靠拢。事实上，[31]正是提出并研究了这一做法。然而，在本文中，我们表明，另一种方法似乎效果更好。粗略地说，对上述问题，我们的回答是：什么也不做。更确切地说，我们通过纳维–斯托克斯方程三维模拟的计算表明，采用 Azouani-Olson-Titi (AOT) 式数据同化时，先以极短时间将解强力牵引至最新的插值数据，然后让解逐渐恢复至符合正确的物理规律，这样能使收敛时间缩短一个数量级。

数学物理中的动力系统建模面临的一个问题是初始化。也就是说，即使能够完美地向前演化系统，仍然需要一个准确的初始状态作为演化起点。数据同化 是一类

Date：2023年3月8日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：34D06、35Q30、35Q35、37C50；次要分类：35Q93。*Key words and phrases.* 连续数据同化、Azouani-Olson-Titi、纳维–斯托克斯方程、时间稀疏观测。

通过将动力系统的数据与其底层物理模型相结合，从而更准确地模拟动力学的技术，可缓解这一问题。近年来，一种新的数据同化方法应运而生，称为 Azouani-Olson-Titi（AOT）算法 [3, 4]。自问世以来，AOT 算法在分析研究 [1, 5–11, 13, 15, 23–29, 31, 32, 34–36, 38, 41–44, 46, 48, 51, 52, 54–56, 61] 和计算研究 [2, 12, 16, 22, 33, 37, 45, 47, 49, 50]中均受到广泛关注。

本文研究了对 AOT 算法的一种改进，该算法使用离散时间观测数据，与 [31] 类似。我们注意到，[31] 中引入的反馈控制项在两次观测之间保持不变，但在生成新的观测数据之前，反馈仍会持续施加。实际上，这意味着反馈项会在某一状态已成为过去很久之后，仍然迫使解趋向该状态。对于高度湍流，在采集观测数据后，数据很快就会过时，因此松弛项与流动的当前状态之间会越来越不同步。为此，我们提出对该格式进行改进，引入一个新参数 τ，表示同化窗口的长度，即将观测数据同化到模型方程中的时间区间。同化窗口结束后，观测数据将被丢弃，系统在获得新观测之前不受外部反馈控制，自行演化。

我们采用与 [31] 类似的方法，从解析上证明了所提出的数据同化方案适定，并且以指数速度收敛到真实解。此外，我们证明，在某些参数取值下，该方案的收敛速率与 [31] 中给出的算法相当。我们还将分析扩展到某些显式时间外推的情形，证明其整体适定性以及对真实解的指数收敛。通过计算我们发现，该算法在参数选择方面具有更大的灵活性。当反馈控制参数 μ 取较大值时，将该算法应用于三维不可压缩纳维-斯托克斯方程，可使收敛至真实解所需的时间缩短一个数量级。

本文结构安排如下。第2节概述纳维–斯托克斯方程的函数空间框架、数据同化方程的形式，以及我们将在分析中用到的标准结果。第3节证明有关同化方程适定性和收敛性的分析结果。第4节讨论将该算法应用于三维纳维–斯托克斯方程时的计算结果。

注 1.1。 在本文定稿期间，我们得知近期有一项研究[39], 提出并通过计算考察了一种方法，作者称之为离散数据同化（DDA）。该方法与本文提出的方法十分相似，研究对象是二维瑞利–贝纳德对流系统。本文的工作与 [39] 不同之处在于，我们进行了分析，证明所提出的格式整体适定且收敛；给出了参数的解析界；最后，我们的模拟针对的是三维纳维–斯托克斯方程。

2. Preliminaries

本文研究二维空间中的以下不可压缩纳维–斯托克斯方程：

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u = \nabla p + f, & \text{(2.1a)} \\ \nabla \cdot u = 0. & \text{(2.1b)} \end{cases}$$

其中，$u(x,\ t) = (u_1(x_1,\ x_2,\ t)\ u_2(x_1,\ x_2,\ t))$ 是速度，$\nu > 0$ 是黏度，p 是压力，f 是强迫项。将连续数据同化算法应用于该方程可得到

以下方程：

$$\begin{cases} v_t + v\cdot\nabla v - \nu\Delta v = \nabla p + f + \mu I_{h,\kappa}(u-v), & \text{(2.2a)} \\ \nabla\cdot v = 0. & \text{(2.2b)} \end{cases}$$

这里$I_{h,\kappa}$是一个线性插值项，其对应的空间尺度为 h，时间尺度为 κ。受 [31],本文的启发，我们提出以下数据同化算法：

$$\begin{cases} v_t + v\cdot\nabla v - \nu\Delta v = \nabla p + f + \sum_{n=0}^{\infty} \mu I_{h,\kappa}[u-v]\chi_{n,\tau}, & \text{(2.3a)} \\ \nabla\cdot v = 0. & \text{(2.3b)} \end{cases}$$

这里 $\chi_{n,\tau}$是时间区间 $[t_n, t_n+\tau)$ 的示性函数，其中 $t_{n+1}-t_n=\kappa\geq\tau$。令$\kappa=\tau$，即可得到 [31], 中的算法；而这里我们允许 $\tau<\kappa$。

我们要求上述插值算子 $I_{h,\kappa}$ 满足以下条件 ：

$$\|\xi(t)-I_{h,\kappa}\xi(t)\|_{L^2}^2 \leq c_0 h^2 \|\xi(t)\|_{H^1}^2 + c_1(t-t_n)\int_{t_n}^{t}\left\|\frac{\mathrm{d}\xi(s)}{\mathrm{d}s}\right\|_{L^2}^2 ds, \quad \text{for all } \xi\in H^1. \tag{2.4}$$

上文中，我们有 $\kappa=t_{n+1}-t_n$，因此可以使用 $t-t_n\leq\kappa$ 作为上界。不过，对于 t 的受限取值，我们通常在2.4 中使用 $t-t_n\leq\tau$ 作为上界，因为式（2.3a）中的示性函数会在 t 取较大值时去除插值项。本文中，我们均使用 t_n表示进行式（2.1a）观测的时刻，其观测频率为 κ 。另外值得注意的是， t_0 与定理2.3中给出的值一致。我们注意到，上文选择使用满足式（2.4）的任意插值函数，这对应于采用零阶显式时间外推的插值函数，例如分段常数时间外推。也可以考虑更高阶的时间外推项，它们满足含有更高阶时间导数组分的类似不等式。

注 2.1。 请注意，在某些实际应用中，观测之间的时间间隔 $\kappa>0$ 可能并非固定。为简便起见，本文假设 κ 固定。不过，我们的结果很容易推广到时变的 κ ，因为我们只使用更一般的界，即式（2.4），而不假设例如采用固定的分段常数时间外推。原则上，可以允许 $I_{h,\kappa}$ 依赖于 t_n。

2.1. 纳维–斯托克斯方程的函数空间框架。 本文中，我们用 L^p 表示勒贝格空间和索伯列夫空间，其中 $0\leq p\leq\infty$ 和 $H^s=W^{s,2}$ 分别对应 $s>0$。设 $\mathcal{V}$ 为所有从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的 L-周期三角多项式构成的集合，这些多项式均为无散且零平均。我们分别用 H、V 和 V' 表示 $\mathcal{V}$ 在 $L^2(\Omega)^2$ 范数和 $H^1(\Omega)^2$ 范数下的闭包，以及 V 的对偶空间； H 和 V 上的内积定义为

$$(u,v)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\mathbb{T}^2} u_i v_i\,dx \quad\text{and}\quad (\nabla u,\nabla v)=\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\mathbb{T}^2}\partial_j u_i\partial_j v_i\,dx, \tag{2.5}$$

分别对应于范数 $\|u\|_H=(u,u)^{1/2}$ 和 $\|u\|_V=(\nabla u,\nabla u)^{1/2}$，其中 $u(x)=u(x_1,x_2)=(u_1(x_1,x_2)\ u_2(x_1,x_2))$，以及 $v(x)=v(x_1,x_2)=(v_1(x_1,x_2)\ v_2(x_1,x_2))$。为方便起见，我们分别使用 $\|u\|_{L^2}$ 和 $\|u\|_{H^1}$ 表示上述在 H 和 V 中的范数。

对方程 P_σ（2.1a）和（2.3a）应用正交 Leray-Helmholtz 投影算子，可形式上得到以下关于 u 和 v的方程，分别为：

$$u_t+\nu Au+B(u,u)=f, \tag{2.6}$$

$$v_t+\nu Av+B(v,v)=f+\sum_{n=0}^{\infty}\mu P_\sigma I_{h,\kappa}[u-v]\chi_{n,\tau}. \tag{2.7}$$

Here $A := -P_\sigma\Delta$ 和 $B(u,\ v) := P_\sigma((u\cdot\nabla)v)$，我们将在下文深入讨论 .

Stokes算子 A 的定义域为 $\mathcal{D}(A)$: $= H^2\cap V$，并且可以扩展为从 V 到 V' 的线性算子，形式如下

$$\langle Au, v\rangle = (\nabla u, \nabla v) \text{ for all } v\in V. \tag{2.8}$$

注意，在我们的区域 Ω 上，$= \mathbb{T}^2$、$A = -\Delta P_\sigma$。众所周知，A 具有非递减的特征值 λ_k。由此，以下 Poincaré 不等式成立:

$$\lambda_1\|u\|_{L^2}^2 \le \|u\|_{H^1}^2 \text{ for } u\in V; \quad \lambda_1\|u\|_{H^1}^2 \le \|Au\|_{L^2}^2 \text{ for } u\in D(A). \tag{2.9}$$

因此，$\|u\|_{L^2}$ 等价于 $\|u\|_{H^1}$。有关 A 各种性质的更深入讨论，参见例如 [17, 57, 58]。

本文经常使用以下 Ladyzhenskaya不等式

$$\|u\|_{L^4}^2 \le c\|u\|_{L^2}\|u\|_{H^1}, \quad \text{for all } u\in V, \tag{2.10}$$

它是以下插值结果的一种变体（详细证明参见例如 [53]）。假设$1\le q,\ r\le\infty$，且 $0<\gamma<1$。对于 $v\in L^q(\mathbb{T}^n)$，满足 $\partial^\alpha v\in L^r(\mathbb{T}^n)$，若 $|\alpha|=m$，则

$$\|\partial_s v\|_{L^p} \le C\|\partial^\alpha v\|_{L^r}^{\gamma}\|v\|_{L^q}^{1-\gamma}, \quad \text{where} \quad \frac{1}{p}-\frac{s}{n} = \left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)\gamma + \frac{1}{q}(1-\gamma). \tag{2.11}$$

我们注意到，双线性项

$$B(u,v) := P_\sigma((u\cdot\nabla)v), \quad (u,v\in\mathcal{V}), \tag{2.12}$$

可以扩展为一个连续映射 $B\colon V\times V\to V'$,

$$\langle B(u,v), w\rangle = \int_{\mathbb{T}^2}(u\cdot\nabla v)\cdot w\,dx, \quad (u,v,w\in\mathcal{V}). \tag{2.13}$$

在本文中，我们将频繁使用双线性项的若干性质。为简洁起见，这些性质列于以下引理中（详情参见 [17, 30, 59] ）。

引理2.2。

$$\langle B(u,v),w\rangle_{V'} = -\langle B(u,w),v\rangle_{V'}, \quad \textit{for all } u,v,w\in V, \tag{2.14a}$$

$$\langle B(u,v),v\rangle_{V'} = 0, \quad \textit{for all } u,v,w\in V. \tag{2.14b}$$

$$|\langle B(u,v),w\rangle_{V'}| \le C\|u\|_{L^2}^{1/2}\|u\|_{H^1}^{1/2}\|v\|_{H^1}\|w\|_{L^2}^{1/2}\|w\|_{H^1}^{1/2}, \tag{2.15a}$$

$$|\langle B(u,v),w\rangle_{V'}| \le C\|u\|_{L^2}^{1/2}\|u\|_{H^1}^{1/2}\|u\|_{H^1}^{1/2}\|Av\|_{L^2}^{1/2}\|w\|_{L^2}, \tag{2.15b}$$

$$|\langle B(u,v),w\rangle_{V'}| \le C\|u\|_{L^2}^{1/2}\|Au\|_{L^2}^{1/2}\|v\|_{H^1}\|w\|_{L^2}, \tag{2.15c}$$

对最大空间 H、V 或 $D(A)$ 中的所有 u、v、w，只要不等式右端有限，均成立。

$$\langle B(w,w), Aw\rangle = 0, \quad \textit{for all } w\in D(A), \tag{2.16}$$

以及雅可比恒等式

$$\langle B(u,w),Aw\rangle + \langle B(w,u),Aw\rangle + \langle B(w,w),Au\rangle = 0. \tag{2.17}$$

接下来，我们在下一个定理中总结关于方程（2.1a）的一系列众所周知的结果，并请读者参阅 [17–21, 59] 以了解更多详情。我们回顾一下无量纲格拉晓夫数 G，其定义为

$$G := \frac{\|f\|_{L^2}}{\nu^2\lambda_1}, \tag{2.18}$$

其中 λ_1 是 Stokes算子 A 的第一特征值。

定理 2.3。 设初始数据 $u_0 \in V$和外部强迫 $f \in L^2_{loc}(0,T;H)$，则二维 *Navier-Stokes* 系统方程 (2.1a) 存在唯一全局解

$$u \in C(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A)), \tag{2.19}$$

对于任意正的 $T < \infty$。

此外，对于 $f \in H$，经过一段时间 $t > t_0$ 后，

$$\|u\|_{L^2} \le 2\nu^2 G^2 := M_0, \quad \|u\|_{H^1} \le 2\nu^2\lambda_1 G^2 := M_1, \ and \ \|\Delta u\|_{L^2} \le C\nu^2\lambda_1^2 G^4 := M_2. \tag{2.20}$$

3. Main Results

本节概述本文的主要结果。我们首先证明，对于充分正则的初始数据和外部强迫，方程（ v 2.3a）的解具有整体适定性，其正则性与观测方程（2.1a）的解等价。接下来，我们证明同化系统在时间上指数收敛，在 L^2 和 H^1 中均收敛至观测系统。在证明 L^2 中的指数收敛时，我们仅考虑以傅里叶模态投影作为空间插值算子、并采用分段常数时间外推的情形。这样做是为了先明确思路，再在定理 3.4 中考虑一般插值算子的情形。

现在我们开始证明方程（2.3a）的整体适定性。对于满足方程（2.4）的插值函数，该证明几乎可直接由定理2.3 得出。由于按假设时间外推是显式的，在任意时刻 t，反馈控制项都可视为一个不依赖于 $v(t)$ 的外部力。需要指出的是，我们的收敛结果仅适用于满足方程（2.4）的插值函数；不过，只要 $I_{h,\kappa}(u-v)$ 始终属于 H，对于具有显式时间外推分量的任意插值函数，整体适定性均成立。

为简化符号，在下文的定理及其后续证明中，我们使用 $I^n_{h,\kappa} := I_{h,\kappa}\,|_{t_n \le t < t_1}$，即 $I^n_{h,\kappa}(f)$ 在空间上插值 f，并在时间上外推至时间 t_{n+1}。我们注意到，也可以使用随 n 的取值而变化的 $I_{h,\kappa}$，例如，可以选用此前所有的 n 个观测来构造 $n-1$ 阶外推。这类外推函数不会对整体适定性造成问题，只要所得函数仍属于 $L^2(t_n,t_{n+1};H)$。我们还注意到，对于显式插值函数 $I^n_{h,\kappa}$，尤其是那些时间外推分量阶数较高的插值函数，可以将 $I^n_{h,\kappa}(f)$ 视为 f 的 m 个先前观测值的函数，即 $I^n_{h,\kappa}(f) := I^n_{h,\kappa}(f(t_0)\ f(t_1)\ ...,\ f(t_m))$，其中 $m \in \mathbb{N}$ 为某个值。为简化符号，我们记作$I^n_{h,\kappa}$: $X \to L^2(t_n,t_{n+1};H)$，并约定 X 是若干 V 的笛卡尔积，这些集合可能随 n 变化。

定理 3.1。 设初始数据 $v_0 \in V$ 和外部强迫 $f \in H$，则二维同化纳维–斯托克斯方程 ((2.3a) 存在唯一全局解

$$v \in C(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A)), \tag{3.1}$$

对于任意正的 $T < \infty$ 以及任意具有显式[1] 时间外推 $I^n_{h,\kappa}$ ： $X \to L^2(t_n,t_{n+1};H)$ 且满足 $t \in [t_n,t_{n+1})$ 的每个 $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$，其中 X 是由 V 的多个副本构成的笛卡尔积[2]。

证明。 这可由二维不可压缩 Navier–Stokes 方程的整体适定性推出。具体而言，根据定理 2.3，我们知道，对于 $u_0 \in V$满足 $u \in L^\infty(0,\ T;\ V) \cap$

[1]这里，显式是指 $I_{h,\kappa}v$ 对于给定的任意 $v \in V$ 都可以计算；也就是说，不依赖未来时刻 $t > t_n$。[2]表示先前时刻的观测

$L^2(0,\ T;\ D(A))$. 我们先考虑一个固定时刻 $t \in [t_0, t_0+\tau]$。根据假设，我们知道$v_0 \in V$，因此 $v_0 \in H$。现在我们设

$$f_0 := f + \mu I^0_{h,\kappa}(u-v). \tag{3.2}$$

应用定理 2.3 需要满足 $f_0 \in L^2(t_0, t_0+\tau;\ H)$，而对于 $I^0_{h,\kappa}(u-v) \in L^2(t_0, t_0+\tau;\ H)$，这一条件成立。这里需要注意，对于 $I^0_{h,\kappa}$ 显式时间外推量 $I^0_{h,\kappa}(u-v)$ 仅依赖于 $u-v$ 的先前状态，而这些状态已知属于 H。特别地，我们注意到 $I^0_{h,\kappa}(u-v)$ 不依赖于 $v(t)$ 或 $v(t_1)$（$t_0 < t \le t_0+\tau$）。因此，$I^0_{h,\kappa}(u-v)$ 仅是先前时刻的函数。不失一般性，我们假设 $I^0_{h,\kappa}(u-v)$ 仅依赖于 u_0 和 v_0；不过在实际应用中，也可以为 u 设置多个初始状态，对应于 t_0 之前的时刻，并选取一些状态来初始化 v。根据假设，对于正则数据 u_0 和 v_0，我们有 $I^0_{h,\kappa}(u-v) \in L^2(t_0, t_0+\tau;\ H)$。因此，我们有 $f_0 \in L^2(t_0, t_0+\tau;\ H)$。

现在，根据定理 2.3，$v \in C(t_0, t_0+\tau;\ V) \cap L^2(t_0, t_0+\tau;\ D(A))$。此外，在时间区间$t \in [t_0+\tau, t_1]$ 上，我们注意到反馈控制项为零。因此，我们可以从时间 $t_0+\tau$继续求解，直到时间 t_1，此时 $v \in C(t_0, t_1; V) \cap L^2(t_0, t_1; D(A))$。

按照这一流程反复迭代$f_i = f + I^i_{h,\ \kappa}(u-v)$，我们得到 $v \in C(t_0,\ T;\ V) \cap L^2(0,\ T;\ D(A))$。此外，我们还注意到，根据定理 2.3 ，按照此流程将 v 延拓至时间 t_i 所得的所有解都是唯一的。

□

为证明 v 在 u 中指数收敛到 L^2，我们先考虑$I_{h,\ \kappa}(f(t))$的情形：$=P_m(f(t_n))$，其中 $t \in [t_n, t_{n+1})$，即投影到前 m 个傅里叶模态，并在时间上采用分段常数外推。这一特例曾在 [31] 针对 $\tau = \kappa$单独研究过，因此，为了明确思路，我们也先考察这一简化的插值函数选择，再处理一般情形。在一般设定下，我们将结果推广到满足式（2.4）的一般插值算子。值得注意的是，对插值算子的条件将我们限制为只能使用零阶时间外推量，即分段常数外推。我们的结果可以推广到采用更高阶时间外推的插值函数，包括分段线性外推；这需要对 u 和 v的高阶时间导数的范数进行估计。我们指出，这种推广并无必要，因为在计算中，我们只需将 τ 的值减小到足够小，使外推近似为常数，同时增大 μ 以作补偿。

我们注意到，定理3.2 对 [31] 中无噪声观测数据的要求与此类似，但我们还需要额外假设式（3.5）。要在 L^2中获得指数衰减，似乎有必要作出这一估计。我们注意到，在 $\tau = \kappa$的情况下，式（3.5）对于足够大的常数 $C > 0$会自动满足。值得一提的是，可以放宽式（3.6）中对 κ 的条件，转而只要求 τ满足这样的界。我们选择对 κ 施加这一限制，因为我们希望该条件对 $\tau \le \kappa$的任意取值都成立。

定理 3.2。设 u 和 v 分别是方程 (2.1a) 和方程 (2.3a)的解，具有定义在 $[t_0, \infty)$上的初始数据u_0、$v_0 \in V$和 v。假设 $I_{h,\kappa}(f(t)) := P_m(f(t_n))$，对于 $t \in [t_n, t_{n+1})$，且满足以下条件，其中 $0 < \tau \le \kappa$，

$$\lambda_{m+1} \ge 6\frac{\mu}{\nu}, \tag{3.3}$$

$$\mu \ge C\frac{M_1^2}{\nu}, \tag{3.4}$$

$$\left(e^{-\frac{\mu}{2}\tau} + K\mu\tau(1-e^{-\frac{\mu}{2}\tau})\right) e^{\frac{cM_1^2}{\nu}\kappa} < 1, \tag{3.5}$$

$$\kappa \le \frac{C}{\mu}\min\left\{1, \frac{\nu}{R}, \frac{\nu^2}{R^2}, \frac{\nu^{3/2}\mu^{1/2}}{M_0M_1}, \frac{\nu^2\lambda_1^{1/2}}{M_0M_1}, \frac{\nu^{1/2}\lambda_1^{1/2}}{\mu^{1/2}}, \frac{\nu^2\lambda_1^2}{\mu^2}, \frac{\nu\mu}{M_1^2}\right\}, \tag{3.6}$$

那么 $\|u-v\|_{L^2}$ 会随时间以指数速度衰减至零。

这里 $C>0$ 是一个绝对常数，且 $K>0$仅依赖于 ν， λ_1， M_0， M_1 以及绝对常数，其具体定义见公式(3.40)。

注释3.3。 我们注意到，上述条件并非空洞条件，尽管对 μ，τ和 κ 的要求彼此相关。公式（3.5）中的条件通过固定 $\mu\tau$的取值，可得出对 κ 的显式界。例如，令$\mu\tau = \frac{1}{2K}$，则有

$$e^{-\frac{\mu}{2}\tau} + K\mu\tau(1-e^{-\frac{\mu}{2}\tau}) = \frac{1}{2}\left(1+e^{-\frac{\mu}{2}\tau}\right). \tag{3.7}$$

这进而给出了关于 κ的以下小量条件：

$$\kappa < -\frac{\nu}{cM_1^2}\ln\left(\frac{1}{2}\left(1+e^{-\frac{1}{4K}}\right)\right). \tag{3.8}$$

我们注意到，只要公式（3.7）的具体取值与 1 保持一定距离，其数值并不重要。值得注意的是，公式（3.7）的最小值可以用朗伯 W 函数表示；选择 $\mu\tau$ 使其达到该最小值，将带来最快的衰减。不过，这也要求 κ满足最严格的小量条件。

证明。 该证明与无随机噪声时的情形类似， $\tau=\kappa$ 如 [31] 所述，尽管在区间 $[t_n, t_n+\tau)$ 和 $[t_n+\tau, t_{n+1})$ 上需要采用不同的处理方式。记 $w=v-u$，将方程(2.1a)减去方程(2.3a)，得到关于 w的以下方程：

$$\frac{dw}{dt} + \nu Aw + B(w,u) + B(u,w) + B(w,w) = -\mu\sum_{n=0}^{\infty} P_m w(t_n)\chi_{n,\tau}. \tag{3.9}$$

将方程(3.9)乘以 w 并在 Ω 上积分，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{L^2}^2 + \nu\|w\|_{H^1}^2 =& -\langle B(w,u),w\rangle_{V',V} - \mu\sum_{n=0}^{\infty}\|P_m w\|_{L^2}^2\chi_{n,\tau} \\ & - \mu\sum_{n=0}^{\infty}(P_m(w(t_n)-w),w)_{L^2}\chi_{n,\tau}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

现在我们来估计上述方程右侧的各项。为了对第一项进行估计，我们使用索伯列夫不等式、杨氏不等式以及定理2.3

$$\left|\langle B(w,u),w\rangle_{V',V}\right| \le c\|u\|_{H^1}\|w\|_{L^2}\|w\|_{H^1} \tag{3.11}$$

$$\le \tfrac{\nu}{6}\|w\|_{H^1}^2 + \tfrac{c}{\nu}\|u\|_{H^1}^2\|w\|_{L^2}^2 \tag{3.12}$$

$$\le \tfrac{\nu}{6}\|w\|_{H^1}^2 + c\tfrac{M_1^2}{\nu}\|w\|_{L^2}^2. \tag{3.13}$$

在此及下文中， c 表示一个绝对常数，该常数可能在不同推导步骤中发生变化，且仅依赖于问题的维数和区域。

对于第二项，我们发现

$$-\mu\|P_m w\|_{L^2}^2 = -\mu\Big(\|w\|_{L^2}^2 - \|Q_m w\|_{L^2}^2\Big) \tag{3.14}$$

$$= -\mu\|w\|_{L^2}^2 + \mu\|Q_m w\|_{L^2}^2 \tag{3.15}$$

$$\le -\mu\|w\|_{L^2}^2 + \tfrac{\mu}{\lambda_{m+1}}\|Q_m w\|_{H^1}^2 \tag{3.16}$$

$$\le -\mu\|w\|_{L^2}^2 + \tfrac{\nu}{6}\|w\|_{H^1}^2. \tag{3.17}$$

这里 $Q_m u = u - P_m u$ 是对所有大于 m的傅里叶模态进行的投影。这又意味着

$$-\mu\sum_{n=0}^{\infty}\|P_m w\|_{L^2}^2\chi_{n,\tau} \le \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\mu\|w\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{6}\|w\|_{H^1}^2\right)\chi_{n,\tau}. \tag{3.18}$$

至于最后一项，我们估计

$$\begin{aligned}
\mu\,|(P_m(w(t_n)-w(t),w(t))_{L^2}| &= \mu\,|(w(t_n)-w(t),P_m w(t))_{L^2}| \\
&= \mu\left|\left(\int_{t_n}^{t}\frac{\partial w}{\partial s}ds, P_m w(t)\right)_{L^2}\right| \\
&\le \mu\left(\int_{t_n}^{t}\left\|\frac{\partial w}{\partial s}(s)\right\|_{V'}ds\right)\|w(t)\|_{H^1} \\
&\le \frac{\nu}{6}\|w(t)\|_{H^1}^2 + \frac{c\mu^2}{\nu}\left(\int_{t_n}^{t}\left\|\frac{\partial w}{\partial s}(s)\right\|_{V'}ds\right)^2. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

为了界定这一项，我们现在需要对时间导数 $\|\frac{\partial w}{\partial s}\|_{V'}$进行估计；为此，我们现在直接利用式（3.9）来得到。对固定的 $t\in[t_n,t_n+\tau)$，可推出

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial w}{\partial s}(t)\right\|_{V'} &\le \nu\|w\|_{H^1} + \|B(w,u)\|_{V'} + \|B(u,w)\|_{V'} \\
&\quad + \|B(w,w)\|_{V'} + \mu\sum_{n=0}^{\infty}\|P_m w(t_n)\|_{V'}\chi_{n,\tau} \\
&\le \nu\|w\|_{H^1} + cM_0^{1/2}M_1^{1/2}\|w\|_{L^2}^{1/2}\|w\|_{H^1}^{1/2} + c\|w\|_{L^2}\|w\|_{H^1} \\
&\quad + \mu\int_{t_n}^{t}\left\|\frac{\partial w}{\partial s}(s)\right\|_{V'}ds + \frac{\mu}{\lambda_1^{1/2}}\|w\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

从 t_n 积分到 $t\in[t_n,t_n+\tau]$ 可得

$$\begin{aligned}
\int_{t_n}^{t}\left\|\frac{\partial w}{\partial s}(t)\right\|_{V'}ds \le \int_{t_n}^{t}\Big(&\nu\|w\|_{H^1} + cM_0^{1/2}M_1^{1/2}\|w\|_{L^2}^{1/2}\|w\|_{H^1}^{1/2} + \\
&c\|w\|_{L^2}\|w\|_{H^1} + \frac{\mu}{\lambda_1^{1/2}}\|w\|_{L^2}\Big)ds + \mu\tau\int_{t_n}^{t}\left\|\frac{\partial w}{\partial s}(s)\right\|_{V'}ds,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

这里我们用到了以下事实

$$\int_{t_n}^{t}\int_{t_n}^{s}\left\|\frac{dw}{dz}(z)\right\|dzds \le \int_{t_n}^{t}\int_{t_n}^{t}\left\|\frac{dw}{dz}(z)\right\|_{V'}dzds \le \tau\int_{t_n}^{t}\left\|\frac{\partial w}{\partial s}(s)\right\|_{V'}ds. \tag{3.22}$$

由我们的假设 $\tau \le \kappa \le \frac{c}{\mu}$ 可得以下估计：

$$\int_{t_n}^{t} \left\| \frac{\partial w}{\partial s} \right\|_{V'} ds \le c \int_{t_n}^{t} \nu \|w\|_{H^1} + cM_0^{1/2} M_1^{1/2} \|w\|_{L^2}^{1/2} \|w\|_{H^1}^{1/2} + \|w\|_{L^2} \|w\|_{H^1} + \frac{\mu}{\lambda_1^{1/2}} \|w\|_{L^2} ds. \tag{3.23}$$

将两边平方并应用 H¨older 不等式，现在即可得到方程（3.19）所需的估计：

$$\left(\int_{t_n}^{t} \left\| \frac{\partial w}{\partial s} \right\|_{V'} ds \right)^2 \le c\tau^2 \int_{t_n}^{t} \phi(s) ds, \tag{3.24}$$

其中

$$\phi(s) := \nu^2 \|w\|_{H^1}^2 + M_0 M_1 \|w\|_{L^2} \|w\|_{H^1} + \|w\|_{L^2}^2 \|w\|_{H^1}^2 + \frac{\mu^2}{\lambda_1} \|w\|_{L^2}^2. \tag{3.25}$$

将上述所有估计代入方程（3.10），得到

$$\frac{d}{dt} \|w\|_{L^2}^2 + \nu \|w\|_{H^1}^2 \le -\mu \sum_{n=0}^{\infty} \|w\|_{L^2}^2 \chi_{n,\tau} + \frac{cM_1^2}{\nu} \|w\|_{L^2}^2 + \frac{c\mu^2\tau^2}{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{n,\tau}(t) \int_{t_n}^{t} \phi(s) ds. \tag{3.26}$$

现在注意，根据定理 2.3，以下结论必然成立：

$$\|w(t_0)\|_{L^2} \le \|u(t_0)\|_{L^2} + \|v(t_0)\|_{L^2} \le 2M_0 := R. \tag{3.27}$$

此处不失一般性地假设 $\|v(t_0)\|_{L^2} \le M_0$。由于 $w \in C([t_0, \infty); H)$，必定存在一个 $s \in [t_0, \infty)$，使得 $\|w(t)\|_{L^2} \le 2R$，对所有 $t \in [t_0, s]$ 均成立。

记

$$\widetilde{t} := \sup\{ s \in [t_0, \infty) : \sup_{t \in [t_0, s]} \|w(t)\|_{L^2} < 2R \}. \tag{3.28}$$

~ ~现在我们证明 $t > t_0 + \tau$。假设 $t \le t_0 + \tau$ 我们将方程（3.26）在时间上从 t_0~积分到 $t \le t$:

$$\begin{aligned} &\|w(t)\|_{L^2}^2 - \|w(t_0)\|_{L^2}^2 + \nu \int_{t_0}^{t} \|w(s)\|_{H^1}^2 ds \\ &\le -\left(\mu - \frac{cM_1^2}{\nu} \right) \int_{t_0}^{t} \|w(s)\|_{L^2}^2 ds + \frac{c\mu^2\tau^2}{\nu} \int_{t_0}^{t} \phi(s) ds. \end{aligned} \tag{3.29}$$

于是，根据杨氏不等式和假设 $\|w(s)\|_{L^2} \le 2R$ 对所有 $s \in [t_0, t]$，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{c\mu^2\tau^2}{\nu} \int_{t_0}^{t} \phi(s) ds &= \frac{c\mu^2\tau^2}{\nu} \int_{t_0}^{t} \nu^2 \|w\|_{H^1}^2 + M_0 M_1 \|w\|_{L^2} \|w\|_{H^1} \\ &\quad + \|w\|_{L^2}^2 \|w\|_{H^1}^2 + \frac{\mu^2}{\lambda_1} \|w\|_{L^2}^2 ds \\ &\le \frac{c\mu^2\tau^2}{\nu} \int_{t_0}^{t} \nu^2 \|w\|_{H^1}^2 + \frac{M_0 M_1}{\nu^2} \|w\|_{L^2} \\ &\quad + R^2 \|w\|_{H^1}^2 + \frac{\mu^2}{\lambda_1} \|w\|_{L^2}^2 ds. \end{aligned} \tag{3.30}$$

重新排列后，我们得到

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 - \|w(t_0)\|_{L^2}^2 + \nu\Big(1 - c\mu^2\tau^2(1+\frac{R^2}{\nu^2})\Big)\int_{t_0}^t \|w(s)\|_{H^1}^2 ds \tag{3.31}$$
$$\leq -\left(\mu - \frac{cM_1^2}{\nu} - \frac{c\mu^2\tau^2 M_0^2 M_1^2}{\nu^3} - \frac{c\mu^4\tau^2}{\lambda_1\nu}\right)\int_{t_0}^t \|w\|_{L^2}^2 ds.$$

接下来，当 τ 足够小时且 μ 足够大时

$$1 - c\mu^2\tau^2(1+\frac{R^2}{\nu^2}) \geq \frac{1}{2} \tag{3.32}$$

and

$$-\left(\mu - \frac{cM_1^2}{\nu} - \frac{c\mu^2\tau^2 M_0^2 M_1^2}{\nu^3} - \frac{c\mu^4\tau^2}{\lambda_1\nu}\right) \leq -\frac{\mu}{2}, \tag{3.33}$$

这进一步意味着

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 - \|w(t_0)\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2}\int_{t_0}^t \|w(s)\|_{H^1} ds \leq -\frac{\mu}{2}\int_{t_0}^t \|w\|_{L^2}^2 ds. \tag{3.34}$$

注意，由上述不等式可得，

$$\int_{t_0}^t \|w(s)\|_{H^1}^2 ds \leq \frac{2}{\nu}\|w(t_0)\|_{L^2}^2. \tag{3.35}$$

然后我们回到方程 (3.26)，并应用庞加莱~不等式，将定义 ϕ 中的所有项都用 $\|w\|_{H^1}^2$表示。具体而言，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2 \leq -\Big(\mu - \frac{cM_1^2}{\nu}\Big)\|w\|_{L^2}^2 + \frac{c\mu^2\tau}{\nu}\left(\nu^2 + \frac{M_0M_1}{\lambda_1^{1/2}} + R^2\frac{\mu^2}{\lambda_1^2}\right)\int_{t_0}^t \|w\|_{H^1}^2. \tag{3.36}$$

再次利用关于 μ 的小量条件，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2 \leq -\frac{\mu}{2}\|w\|_{L^2}^2 + \frac{c\mu^2\tau}{\nu}\left(\nu^2 + \frac{M_0M_1}{\lambda_1^{1/2}} + R^2\frac{\mu^2}{\lambda_1^2}\right)\int_{t_0}^t \|w\|_{H^1}^2. \tag{3.37}$$

~注意，上述方程仅在 $t \in [t_0, t]$ 时成立。现在，利用方程 (3.35)，我们得到以下不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2 \leq -\frac{\mu}{2}\|w\|_{L^2}^2 + \frac{c\mu^2\tau}{\nu}\left(\nu^2 + \frac{M_0M_1}{\lambda_1^{1/2}} + R^2\frac{\mu^2}{\lambda_1^2}\right)\int_{t_0}^t \frac{2}{\nu}\|w(t_0)\|_{L^2}^2. \tag{3.38}$$

再次，我们将该方程从时间 t_0 积分到 t，得到

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 \leq \|w(t_0)\|_{L^2}^2 \Big(e^{-\frac{\mu}{2}(t-t_0)} \tag{3.39}$$
$$+c\mu\tau\Big(1 + \frac{M_0M_1}{\nu^2\lambda_1^{1/2}} + \frac{R^2}{\nu^2} + \frac{\mu^2}{\nu^2\lambda_1^2}\Big)\Big(1 - e^{-\frac{\mu}{2}(t-t_0)}\Big)\Big)$$
$$\leq R^2\left(e^{-\frac{\mu}{2}(t-t_0)} + K\mu\tau(1 - e^{-\frac{\mu}{2}(t-t_0)})\right),$$

其中

$$K := c\Big(1 + \frac{M_0M_1}{\nu^2\lambda_1^{1/2}} + \frac{R^2}{\nu^2} + \frac{\mu^2}{\nu^2\lambda_1^2}\Big). \tag{3.40}$$

我们还注意到

$$\left(e^{-\frac{\mu}{2}(t-t_0)}+K\mu\tau(1-e^{-(\frac{\mu}{2})(t-t_0)})\right)<1, \tag{3.41}$$

只要满足条件，对任意选择的 $t\leq\tau$ 均成立

$$\mu\tau<\frac{1}{K}, \tag{3.42}$$

成立。这由等式 (3.5) 得出，因此我们证明了

$$\|w(t)\|_{L^2}\leq R \text{ for all } t\in[t_0,\widetilde{t}], \tag{3.43}$$

~这意味着 $t>t_0+\tau$。特别地，我们得到

$$\|w(t_0+\tau)\|_{L^2}^2\leq\|w(t_0)\|_{L^2}^2\theta, \tag{3.44}$$

其中

$$\theta:=\left(e^{-\frac{\mu}{2}\tau}+K\mu\tau(1-e^{-\frac{\mu}{2}\tau})\right)<1. \tag{3.45}$$

~接下来，我们对 t 在时间区间 $[t_0+\tau,t_1)$ 内采用类似的论证。我们首先考虑~等式 (3.26) 在时间区间 $[t_0+\tau,t]$内，其中 $t\in[t_0+\tau,t]$，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2\leq\frac{cM_1^2}{\nu}\|w\|_{L^2}^2-\nu\|w\|_{H^1}^2\leq\frac{cM_1^2}{\nu}\|w\|_{L^2}^2. \tag{3.46}$$

将上述不等式在时间上从 $t_0+\tau$ 积分到 t，得到:

$$\begin{aligned}\|w(t)\|_{L^2}^2&\leq\|w(t_0+\tau)\|_{L^2}e^{\frac{cM_1^2}{\nu}(t-(t_0+\tau))}\\&\leq\|w(t_0)\|_{L^2}^2\theta e^{\frac{cM_1^2}{\nu}(t-(t_0+\tau))}\\&\leq\|w(t_0)\|_{L^2}^2\theta e^{\frac{cM_1^2}{\nu}(\kappa-\tau)}\\&\leq R^2\theta e^{\frac{cM_1^2}{\nu}\kappa}\end{aligned} \tag{3.47}$$

现在我们注意到，为了获得指数衰减，需要满足

$$\theta e^{\frac{cM_1^2}{\nu}\kappa}<1, \tag{3.48}$$

这由方程（3.5）成立。

因此，对于任意时刻 $t\leq t_0+\kappa$，$\|w(t)\|_{L^2}^2\leq R^2$，从而 $\widetilde{t}>t_0+\kappa$。重复上述论证可得

$$\|w(t_n)\|_{L^2}^2\leq\|w(t_0)\|_{L^2}^2\sigma^n \tag{3.49}$$

其中

$$\sigma:=\theta e^{\frac{cM_1^2}{\nu}\kappa}<1. \tag{3.50}$$

因此，我们得到 v 在 L^2中指数收敛到 u。

□

现在考虑满足式（$I_{h,\kappa}$）的一般插值算子情形，并采用一阶显式时间外推。我们注意到，虽然定理陈述中似乎遗漏了不等式（2.4）（3.5），但仍需有类似的陈述（见式（3.80））。对于一般插值算子的情形，我们选择通过纳入关于 μ、κ和 $\mu\tau$的显式界来满足式（3.80）。

定理 3.4。设 u 和 v 分别是式(2.1a) 和式(2.3a)的解，其初始数据为u_0、 $v_0 \in V$，并且 v 定义在 $[t_0, \infty)$上。设I_h, κ满足式(2.4)，且以下条件对 $0 < \tau \leq \kappa$均成立，

$$\mu > \max\left\{\frac{CM_1M_2}{\nu\lambda_1^{1/2}}, \frac{CM_0^2M_1^2}{\nu^3}, \frac{CM_1M_2}{\nu\lambda_1^{1/2}} + \frac{CM_1^4}{\nu^3\lambda_1}, 4K_2\right\}, \tag{3.51}$$

$$h < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{c_0\mu}}, \tag{3.52}$$

$$\kappa < \min\left\{\frac{e^{-K_2}}{4C\mu^2K_1}, \frac{C\lambda_1^{1/2}\nu^{1/2}}{\mu^{3/2}}, \frac{\frac{3K_2^2}{2} + \mu^2K_1 - \sqrt{D}}{K_2^3}\right\}, \tag{3.53}$$

$$where\ D = \left(\frac{3K_2^2}{2} + \mu^2K_1\right)^2 - 2K_2^4 > 0,$$

$$and \quad \mu\tau \geq 4K_2\kappa, \tag{3.54}$$

则 $\|u - v\|_{H^1}$ 随时间呈指数级快速衰减至零。

这里 C 表示一个绝对常数，而 K_1, $K_2 > 0$, 仅取决于 ν, λ_1, M_0, M_1, M_2 以及一些绝对常数，均在公式 (3.73) 和公式 (3.78)中给出。

证明。 将公式 (2.1a) 从公式 (2.3a) 中相减，并记 $w := v - u$，可得

$$\frac{dw}{dt} + \nu Aw + B(w,u) + B(u,w) + B(w,w) = -\mu\sum_{n=0}^{\infty} P_\sigma I_{h,\kappa}(w(t_n))\chi_{n,\tau}. \tag{3.55}$$

将公式 (3.55) 乘以 $Aw = -\Delta w$，并在 Ω 上分部积分，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{H^1}^2 + \nu\|\Delta w\|_{L^2}^2 + \mu\sum_{n=0}^{\infty}\|w\|_{H^1}^2\chi_{n,\tau} \\ &= (B(w,u),\Delta w)_{L^2} + (B(u,w),\Delta w)_{L^2} - \mu\sum_{n=0}^{\infty}(w - I_{h,\kappa}(w),\Delta w)_{L^2}\chi_{S_\tau}\end{aligned} \tag{3.56}$$

其中使用了公式 (2.15c)。注意，对于 t 的任意给定值，反馈控制项的求和中至多只有一项非零，因此为简化后续记号，我们省略这些项的求和。

接下来，我们估计公式 (3.56) 右侧给出的两个非线性项。对于第一项，利用 H¨older 不等式和 Poincar´e 不等式，以及定理 2.3，可估计得

$$\begin{aligned}|(B(w,u),\Delta w)_{L^2}| &\leq \|w\|_{L^4}\|\nabla u\|_{L^4}\|\Delta w\|_{L^2} \leq \|w\|_{L^2}^{1/2}\|w\|_{H^1}^{1/2}\|u\|_{H^1}^{1/2}\|\Delta u\|_{L^2}^{1/2}\|\Delta w\|_{L^2} \\ &\leq \sqrt{M_1M_2}\frac{\|w\|_{H^1}}{\lambda_1^{1/4}}\|\Delta w\|_{L^2} \leq \frac{cM_1M_2}{\nu\lambda_1^{1/2}}\|w\|_{H^1}^2 + \frac{\nu}{16}\|\Delta w\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{3.57}$$

为 对第二项进行类似的处理，我们得到以下估计 :

$$\begin{aligned}|(B(u,w),\Delta w)_{L^2}| &\leq \|u\|_{L^4}\|\nabla w\|_{L^4}\|\Delta w\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}^{1/2}\|u\|_{H^1}^{1/2}\|w\|_{H^1}^{1/2}\|\Delta w\|_{L^2}^{3/2} \\ &\leq \sqrt{M_0M_1}\|w\|_{H^1}^{1/2}\|\Delta w\|_{L^2}^{3/2} \leq \frac{cM_0^2M_1^2}{\nu^3}\|w\|_{H^1}^2 + \frac{\nu}{16}\|\Delta w\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{3.58}$$

为了估计其余各项，我们应用 H¨older不等式、杨氏不等式以及公式（2.4）。由此得到以下结果

$$
\begin{aligned}
-\mu(w - I_{h,\kappa}w, \Delta w) &\le \frac{\mu^2 c_0 h^2}{\nu}\|w\|_{H^1}^2 + \frac{c\mu^2\tau}{\nu}\int_{t_n}^{t}\left\|\frac{dw(s)}{ds}\right\|_{L^2}^2 ds + \frac{\nu}{4}\|\Delta w\|_{L^2}^2 \\
&\le \frac{\mu}{4}\|w\|_{H^1}^2 + \frac{c\mu^2\tau}{\nu}\int_{t_n}^{t}\left\|\frac{dw(s)}{ds}\right\|_{L^2}^2 ds + \frac{\nu}{4}\|\Delta w\|_{L^2}^2 .
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

因此，我们需要估计上述时间导数。对于固定的 $t \in [t_n, t_n + \tau)$ ，利用式（3.55），我们估计

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{dw}{ds}\right\|_{L^2} \\
&\le \nu\|\Delta w\|_{L^2} + \|B(w,u)\|_{L^2} + \|B(u,w)\|_{L^2} + \|B(w,w)\|_{L^2} \\
&\quad + \mu\|I_{h,\kappa}(w) - w\|_{L^2} + \mu\|w\|_{L^2} \\
&\le \nu\|\Delta w(s)\|_{L^2} + \|B(w(s),u(s))\|_{L^2} + \|B(u(s),w(s))\|_{L^2} + \|B(w(s),w(s))\|_{L^2} \\
&\quad + \mu\|I_{h,\kappa}(w) - w\|_{L^2} + \mu\|w\|_{L^2} \\
&\le \nu\|\Delta w(s)\|_{L^2} + c\|w(s)\|_{L^2}^{1/2}\|w(s)\|_{H^1}^{1/2}\|u(s)\|_{H^1}^{1/2}\|\Delta u(s)\|_{L^2}^{1/2} \\
&\quad + c\|u(s)\|_{L^2}^{1/2}\|u(s)\|_{H^1}^{1/2}\|w(s)\|_{H^1}^{1/2}\|\Delta w(s)\|_{L^2}^{1/2} + c\|w(s)\|_{L^2}^{1/2}\|w(s)\|_{H^1}\|\Delta w(s)\|_{L^2}^{1/2} \\
&\quad + \mu\|I_{h,\kappa}(w) - w\|_{L^2} + \mu\|w\|_{L^2} \\
&\le \nu\|\Delta w(s)\|_{L^2} + \frac{c\sqrt{M_1 M_2}}{\lambda_1^{1/4}}\|w(s)\|_{H^1} + c\sqrt{M_0 M_1}\|w(s)\|_{H^1}^{1/2}\|\Delta w(s)\|_{L^2}^{1/2} \\
&\quad + \frac{c}{\lambda_1^{1/4}}\|w(s)\|_{H^1}^{3/2}\|\Delta w(s)\|_{L^2}^{1/2} + \mu\|I_{h,\kappa}(w) - w\|_{L^2} + \mu\|w\|_{L^2} \\
&\le \nu\|\Delta w(s)\|_{L^2} + \frac{c\sqrt{M_1 M_2}}{\lambda_1^{1/4}}\|w(s)\|_{H^1} + c\sqrt{M_0 M_1}\|w(s)\|_{H^1}^{1/2}\|\Delta w(s)\|_{L^2}^{1/2} \\
&\quad + \frac{c}{\lambda_1^{1/2}\nu}\|w\|_{H^1}^3 + \nu\|\Delta w\|_{L^2} + \mu\|I_{h,\kappa}(w) - w\|_{L^2} + \mu\|w\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{3.60}
$$

现在，将上述不等式两边平方，可得：

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{dw}{ds}\right\|_{L^2}^2 &\le 4\nu^2\|\Delta w(s)\|_{L^2}^2 + \frac{cM_1M_2}{\lambda_1^{1/2}}\|w(s)\|_{H^1}^2 + cM_0M_1\|w(s)\|_{H^1}\|\Delta w(s)\|_{L^2} \\
&\quad + \frac{c}{\lambda_1\nu^2}\|w\|_{H^1}^6 + \mu^2\|I_{h,\kappa}(w) - w\|_{L^2}^2 + \mu^2\|w\|_{L^2}^2 \\
&\le 5\nu^2\|\Delta w(s)\|_{L^2}^2 + \left(\frac{cM_1M_2}{\lambda_1^{1/2}} + \frac{cM_0^2M_1^2}{\nu^2} + \frac{\mu\nu}{4} + \frac{\mu^2}{\lambda_1} + \frac{c}{\lambda_1\nu^2}\|w\|_{H^1}^4\right)\|w(s)\|_{H^1}^2 \\
&\quad + c\mu^2\tau\int_{t_n}^{t}\left\|\frac{dw(s)}{ds}\right\|_{L^2}^2 ds,
\end{aligned} \tag{3.61}
$$

在上面的第二个不等式中，我们使用了插值不等式2.4 以及杨氏不等式和庞加莱´不等式。

积分　对上述方程关于时间在 s 从 t_n 到 $t \in [t_n, t_n+\tau)$ 进行积分，得到　s

$$\begin{aligned}(3.62)\qquad &\int_{t_n}^{t}\left\|\frac{dw}{ds}\right\|_{L^2}^2 ds\\ &\le \int_{t_n}^{t}\left(5\nu^2\|\Delta w(s)\|_{L^2}^2+\left(\frac{cM_1M_2}{\lambda_1^{1/2}}+\frac{cM_0^2M_1^2}{\nu^2}+\frac{\mu\nu}{4}+\frac{\mu^2}{\lambda_1}+\frac{c}{\lambda_1\nu^2}\|w\|_{H^1}^4\right)\|w(s)\|_{H^1}^2\right)ds\\ &\quad + c\mu^2\tau^2\int_{t_n}^{t}\left\|\frac{dw(s)}{ds}\right\|_{L^2}^2 ds.\end{aligned}$$

观察到涉及 μ, τ 和 κ, $c\mu^2\tau^2 < \frac{1}{2}$ 的条件成立。因此　-

$$(3.63)\qquad \int_{t_n}^{t}\left\|\frac{dw(s)}{ds}\right\|_{L^2}^2 ds \le c\int_{t_n}^{t}\psi(s)\,ds,$$

其中

$$(3.64)\qquad \psi(s)=5\nu^2\|\Delta w(s)\|_{L^2}^2+\left(\frac{cM_1M_2}{\lambda_1^{1/2}}+\frac{cM_0^2M_1^2}{\nu^2}+\frac{\mu\nu}{4}+\frac{\mu^2}{\lambda_1}+\frac{c}{\lambda_1\nu^2}\|w\|_{H^1}^4\right)\|w(s)\|_{H^1}^2.$$

将上述所有估计代入式 (3.56)，可得对所有 $t \in [t_n, t_n+\tau$　　),

$$\begin{aligned}(3.65)\qquad \frac{d}{dt}\|w(t)\|_{H^1}^2+\nu\|Aw(t)\|_{L^2}^2 &\le \left(-\mu+\frac{cM_1M_2}{\nu\lambda_1^{1/2}}+\frac{cM_0^2M_1^2}{\nu^3}+\frac{\mu}{4}\right)\|w(t)\|_{H^1}^2\chi_{n,\tau}\\ &\quad+\frac{c\mu^2\tau}{\nu}\left(\int_{t_n}^{t}\psi(s)\,ds\right)\chi_{n,\tau},\end{aligned}$$

该不等式可进一步简化为

$$(3.66)\qquad \frac{d}{dt}\|w(t)\|_{H^1}^2+\nu\|Aw(t)\|_{L^2}^2 \le -\frac{\mu}{2}\|w(t)\|_{H^1}^2\chi_{n,\tau}+\frac{c\mu^2\tau}{\nu}\int_{t_n}^{t}\psi(s)\,ds\chi_{n,\tau},$$

其中我们用到了关于 μ 的条件。

现在我们来论证

$$(3.67)\qquad \|w(t)\|_{H^1} \le 2M_1 =: R_1 \text{ for all } t \ge t_0.$$

~为此，我们首先定义如下的 t ：

$$(3.68)\qquad \widetilde{t} := \sup\{\widetilde{s} \in [t_0, t_0+\tau) : \sup_{t\in[t_0,\widetilde{s}]}\|w(t)\|_{H^1} \le R_1\}.$$

~为证明这一点，我们将使用自举论证。具体而言，我们将证明 $t \ge t_0+\tau$，因此也可以对下一个时间区间 $[t_0+\tau, t_1)$应用类似的论证。随后可以通过归纳重复这些论证，从而得到所需的结论。

首先，我们得到：　　$\widetilde{t} \in [t_0, t_0+\tau]$。对式（3.66）在时间区间 t_0 到 $t \in$ （t_0, ~

$$\begin{aligned}&\|w(t)\|_{H^1}^2-\|w(t_0)\|_{H^1}^2+\nu\int_{t_0}^{t}\|\Delta w(s)\|_{L^2}^2\,ds \le -\frac{\mu}{2}\int_{t_0}^{t}\|w(s)\|_{H^1}^2\\ &\quad+\frac{c\mu^2\tau^2}{\nu}\int_{t_0}^{t}\left(5\nu^2\|\Delta w(s)\|_{L^2}^2+\left(\frac{cM_1M_2}{\lambda_1^{1/2}}+\frac{cM_0^2M_1^2}{\nu^2}+\frac{\mu\nu}{4}+\frac{\mu^2}{\lambda_1}+\frac{cR_1^4}{\lambda_1\nu^2}\right)\|w(s)\|_{H^1}^2\right)ds.\end{aligned}$$

合并同类项可得如下结果

$$\|w(t)\|_{H^1}^2 - \|w(t_0)\|_{H^1}^2 + \nu\left(1 - 5c\mu^2\tau^2\right)\int_{t_0}^t \|\Delta w(s)\|^2\, ds \tag{3.69}$$
$$\leq -\left(\frac{\mu}{2} - \frac{c\mu^2\tau^2 M_1 M_2}{\lambda_1^{1/2}\nu} - \frac{c\mu^2\tau^2 M_0^2 M_1^2}{\nu^3} - \frac{c\mu^3\tau^2}{4} - \frac{c\mu^4\tau^2}{\lambda_1\nu} - \frac{c\mu^2\tau^2 R_1^4}{\lambda_1\nu^3}\right)\int_{t_0}^t \|w\|_{H^1}^2 ds.$$

我们现在使 用关于参数 μ 和 τ 的假设，得到以下不等式 y

$$\|w(t)\|_{H^1}^2 - \|w(t_0)\|_{H^1}^2 + \frac{\nu}{4}\int_{t_0}^t \|\Delta w(s)\|_{L^2}^2\, ds \leq -\frac{\mu}{8}\int_{t_0}^t \|w(s)\|_{H^1}^2\, ds. \tag{3.70}$$

请注意，这现在特别意味着

$$\int_{t_0}^t \|\Delta w(s)\|_{L^2}^2\, ds \leq \frac{c}{\nu}\|w(t_0)\|_{H^1}^2. \tag{3.71}$$

将上述界代入式（3.66），得到如下结果:

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|_{H^1}^2 \tag{3.72}$$
$$\leq -\frac{\mu}{2}\|w(t)\|_{H^1}^2 + \frac{c\mu^2\tau}{\nu}\Big(5\nu^2 + \frac{M_1M_2}{\lambda_1^{3/2}} + \frac{M_0^2M_1^2}{\nu^2\lambda_1} + \frac{R_1^4}{\nu^2\lambda_1^2} + \frac{\mu^2}{\lambda_1^2} + \frac{\mu\nu}{4\lambda_1}\Big)\int_{t_0}^t \|\Delta w(s)\|_{L^2}^2\, ds$$
$$\leq -\frac{\mu}{2}\|w(t)\|_{H^1}^2 + c\mu^2\tau\Big(5\nu + \frac{M_1M_2}{\nu\lambda_1^{3/2}} + \frac{M_0^2M_1^2}{\nu^3\lambda_1^{1/2}} + \frac{R_1^4}{\nu^3\lambda_1^{3/2}} + \frac{\mu^2}{\nu\lambda_1^2} + \frac{\mu}{4\lambda_1}\Big)\|w(t_0)\|_{H^1}^2.$$

~现在对上述不等式在时间上从 t_0 到 $t \in [t_0, t)$ 积分，并记

$$K_1 := c\left(5\nu + \frac{M_1M_2}{\nu\lambda_1^{3/2}} + \frac{M_0^2M_1^2}{\nu^3\lambda_1^{1/2}} + \frac{R_1^4}{\nu^3\lambda_1^{3/2}} + \frac{\mu^2}{\nu\lambda_1^2} + \frac{\mu}{4\lambda_1}\right), \tag{3.73}$$

我们得到

$$\|w(t)\|_{H^1}^2 \leq \|w(t_0)\|_{H^1}^2 e^{-\frac{\mu}{2}(t-t_0)} + 2\mu\tau K_1\big(1 - e^{-\frac{\mu}{2}(t-t_0)}\big)\|w(t_0)\|_{H^1}^2, \tag{3.74}$$

这进而意味着

$$\|w(t)\|_{H^1}^2 \leq R_1^2 e^{-\frac{\mu}{2}(t-t_0)} + 2\mu\tau K_1 R_1^2\big(1 - e^{-\frac{\mu}{2}(t-t_0)}\big). \tag{3.75}$$

注意，只要 τ 足够小且满足 $\mu\tau K_1 \leq \frac{1}{4}$，我们也有-$2\mu\tau K_1 R_1^2 < R_1^2$。因此可得

$$\|w(t)\|_{H^1}^2 \leq R_1^2, \quad \text{for all } t \in [t_0, \widetilde{t}], \tag{3.76}$$

成立，因此界 $\|w(t)\|_{H^1} \leq R_1$ 可以推广到 $t_0 + \tau$ 之外。

剩下需要证明的是，界 $\|w(t)\|_{H^1} \leq R_1$ 在 $t_0 + \tau$之外仍然成立。为此，我们沿用上述论证的方法；将式 (3.56) 从 $t_0+\tau$到 $t \in [t_0+\tau, t_1$对时间积分。由于积分区间 $\chi_{n上,\ \tau}(t) = 0$，并根据式 (3.66)，可得

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|_{H^1}^2 + \nu\|\Delta w(t)\|_{L^2}^2 \leq K_2\|w(t)\|_{H^1}^2 \tag{3.77}$$

其中

$$K_2 := \frac{cM_1M_2}{\nu\lambda_1^{1/2}} + \frac{cM_0^2M_1^2}{\nu^3}. \tag{3.78}$$

现在舍去上述不等式左侧的第二项，并利用格隆沃尔不等式、方程（¨3.74），以及条件 $0<\tau=t-t_0\le\kappa$，我们得到估计

$$\|w(t)\|_{H^1}^2 \le \|w(t_0+\tau)\|_{H^1}^2\Big(e^{K_2(t-(t_0+\tau))}\Big) \le \|w(t_0)\|_{H^1}^2\Big(e^{-\frac{\mu}{2}\tau}+2\mu\tau K_1(1-e^{-\frac{\mu}{2}\tau})\Big)e^{K_2(\kappa-\tau)}. \tag{3.79}$$

为了得到 $\|w(t)\|_{H^1}^2$ 的衰减，我们现在证明以下不等式成立：

$$\theta := \Big(e^{-\frac{\mu}{2}\tau}+2\mu\tau K_1(1-e^{-\frac{\mu}{2}\tau})\Big)e^{K_2\kappa}<1. \tag{3.80}$$

只需证明以下两个不等式同时成立：

$$e^{-\frac{\mu}{2}\tau}\le e^{-2K_2\kappa} \tag{3.81}$$

以及

$$2\mu\kappa K_1(1-e^{-\frac{\mu}{2}\kappa})\le e^{-K_2\kappa}-e^{-2K_2\kappa}. \tag{3.82}$$

鉴于我们对 $\mu\tau$ 下界的条件，式（3.81）确实成立，并且注意到对 μ 的最后一个界保证了

$$\frac{\mu}{4K_2}\tau<\tau<\kappa \tag{3.83}$$

仍然成立。我们注意到，如果希望在 κ 固定时使 μ 增大，以获得 τ 的特定值，也可以这样选择。为确保式（3.82），我们将左侧估计为

$$2\mu\kappa K_1(1-e^{-\frac{\mu}{2}\kappa})\le 2\mu\kappa K_1\Big(\frac{\mu}{2}\kappa\Big)=\mu^2K_1\kappa^2 \tag{3.84}$$

右侧估计为

$$e^{-K_2\kappa}-e^{-2K_2\kappa}=e^{-K_2\kappa}\big(1-e^{-K_2\kappa}\big)\ge(1-K_2\kappa)\Big(K_2\kappa-\frac{K_2^2}{2}\kappa^2\Big). \tag{3.85}$$

根据 对 κ 在式 (3.53) 中的最后一个界，可得关于 κ 的以下二次不等式：

$$\frac{K_2^3}{2}\kappa^2-\Big(\frac{3K_2^2}{2}+\mu^2K_1\Big)\kappa+K_2\ge 0, \tag{3.86}$$

事实上，这等价于

$$\mu^2K_1\kappa\le K_2(1-K_2\kappa)\Big(1-\frac{K_2}{2}\kappa\Big). \tag{3.87}$$

因此，式 (3.82) 得证，从而可知 $\theta<1$。

通过归纳，将 $\|w(t)\|_{H^1}$ 在 $[t_n,t_n+\tau)$ 上的界与在 $[t_n+\tau,t_{n+1})$ 上的界结合起来，对于 n =0、1、2、$\cdots$，可得

$$\|w(t)\|_{H^1}\le\theta^nR_1 \quad \text{where} \quad 0\le\theta<1, \tag{3.88}$$

这意味着，当 $t\to\infty$ 时，$\|v(t)-u(t)\|_{H^1}=\|w(t)\|_{H^1}\to 0$。

□

注3.5。上述定理可以推广并应用于具有高阶显式时间外推分量的插值函数 $I_{h,\kappa}$。需要指出的是，在上述定理中，我们选择的时间外推方式仅限于显式一阶时间外推项，因为我们要求对 $\int_{t_n}^t\big\|\frac{\partial w}{\partial s}(s)\big\|_{V'}^2ds$ 有界。高阶时间外推项需要对高阶时间导数进行估计，而这些估计可以通过归纳法建立。证明这一关于高阶方法的结论超出了本文的范围，但我们将在后续工作中探讨。

4. Numerical Results

本节将探讨，我们对 AOT 算法所做的修改应用于三维不可压缩纳维－斯托克斯方程时的表现。

4.1. **数值格式与技术细节。** 为了测试 AOT 算法，我们采用了“相同孪生”实验设计。这是一种用于测试数据同化方法的标准实验，涉及运行两个独立的模拟。首先运行的模拟作为参考解，用于生成观测数据，同时也是我们尝试通过 AOT 算法恢复的解。接下来，我们启动孪生模拟，即从另一组初始数据开始的第二个模拟；在本例中，我们将孪生模拟的初始值设为恒等于 0。我们使用 AOT 算法，将参考解中的观测数据同化到孪生模拟中，并计算两者之间的误差。这里的“相同孪生”是指，尽管两个模拟的初始数据不同，但它们采用相同的底层物理过程。关于孪生实验的详细介绍，参见例如[60]。

3D 纳维–斯托克斯方程的模拟使用完全去混叠的伪谱代码在区域 $\mathbb{T}^3 = [0,1]^3$ 上进行。具体而言，导数在傅里叶空间中计算，乘积则在物理空间中计算，并采用 2/3 去混叠规则。对于空间分辨率$N = 512^3$，我们采用黏度 $\nu = 3.58979 \times 10^{-4}$；我们发现，对于这一分辨率，该黏度处于临界区间。时间推进采用完全显式的四阶龙格–库塔格式，时间步长受到对流 CFL 条件的限制，AOT 项则按显式方式处理。AOT 项的空间插值算子采用对前 N 个波数进行傅里叶投影，时间外推算子采用分段常数插值。

对于我们的模拟，我们首先从随机初始状态出发，将其重新缩放，使其符合谱的指定能量分布，并逐渐增大 u 。强迫项采用泰勒–格林形式，其各分量明确写为：

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) &= \sin(2\pi x)\cos(2\pi y)\cos(2\pi z), \\ f_2(x,y,z) &= -\cos(2\pi x)\sin(2\pi y)\cos(2\pi z) \\ f_3(x,y,z) &= 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

我们模拟该方程的演化，直至时间 $t = 15$；此时，解的谱似乎趋于稳定。

除了我们提出的数据同化方案以及 [31]，中给出的方案外，我们还考虑了 [40] 提出的、并在 [14]，中进一步扩展的方案，称之为海登–奥尔森–蒂蒂（HOT）算法。HOT算法不使用反馈控制项，而是在每个观测时刻 t_n，直接用 u 的低阶傅里叶模态替换 v 的低阶傅里叶模态。更具体地说，该方案为：

$$\begin{cases} v_t &= F(v), \text{ for } t \in (t_n, t_{n+1}) \\ P_N v(t_n) &= P_N u(t_n), \end{cases} \tag{4.2}$$

其中， P_N 是投影到前 N 个傅里叶模态上的投影。

我们从启发式角度将其视为设定 $\tau = 0$ 的一个例子：当 τ 减小到 0 时， μ 成比例增大，因此施加于低阶傅里叶模态上的强迫项强度也随之增大。我们从启发式角度将直接用 u 的低阶傅里叶模态替换 v 的低阶傅里叶模态，视为反馈控制项强迫作用的一种极限情形。

为了检验这些数据同化方法，我们首先进行参数搜索，以确定截断数 N 和 μ的最优选择。首先，为了确定 N的值，我们使用 HOT算法找出使得在 κ 固定时，能够在合理的模拟时间内实现收敛的最小 N 值。我们使用 HOT算法优化 N

其自身，因为该格式中没有 μ。然后，选定 N 后，我们使用带有 $\tau = \kappa$ 的 AOT 变体，并进行参数搜索，以找到 μ的最优选择。为了节省高分辨率模拟的计算时间和资源，我们采用截断数 $N = 100$。我们承认这一选择并非最优；不过，为了减少 AOT 算法的计算时间，我们仍然选择了它。对于空间分辨率 512^3，当 $\tau = \kappa$ 且截断数为 $N = 100$时，我们发现 $\mu = 5$ 是最优选择。

结果。选定截断数和 μ 用于 $\tau = \kappa$的情形后，我们便针对 μ 的情形运行不同 $\tau = \frac{\kappa}{10} = \Delta t$的模拟。这里，$\Delta t = 0.0001$ 设为我们的时间步，其中$\neg\kappa = 0.001 = 10 \cdot \Delta t$。模拟结果见图 4.1 和 4.2。

在图 4.2 中，我们展示了 u、v和 $u - v$在不同时间点的涡量归一化幅值快照。从图中可以看出，我们的 v 从初始状态迅速演变，呈现出 u中所见的涡管形态。我们注意到，图中 u 和 v 的涡量经过了归一化处理，以便在多个时间步的所有图中使用一致的配色。我们注意到，图 4.2 未缩放版本在定性上呈现相同的图像，因为 u 和 v 的涡量差异足够小，以至于在时间 $t = 0.11$ 时，若不进行大幅重新缩放，便无法看出这种差异。此外，可以看出，涡量差异在整个区域内似乎基本保持恒定，仅在涡管周围略有增大。

在图 4.1 中，我们可以看到，随着 τ 和 μ 取值的变化，我们算法的 L^2 误差如何变化。具体而言，我们选择 $\tau = \kappa$，并以 $\mu = 5$ 作为比较基准。对于这一 τ 取值，我们的算法简化为 [31]，中给出的算法，而对于这一特定的 τ 值，$\mu = 5$ 被发现近似为最优值。在其余测试中，我们采用 $\tau = \kappa/10 = \Delta t$，并改变 μ 的取值。我们发现，当选择 μ 以保持强迫项的冲量不变，即 $\mu = 5\frac{\kappa}{\tau} = 50$ 时，得到的收敛结果与 $\mu = 5$ 和 $\tau = \kappa$ 的情形相近。不过，我们还发现，当 $\tau < \kappa$ 时，采用较大的 μ 可以加快收敛。增大 μ 的值也会带来收益递减。可以看到，随着 μ 增大，误差逐渐接近标记为 $\mu \to \infty$ 的格式，该格式见 [40]。值得注意的是，尽管这种方法的性能似乎最佳，但在实践中并不可行，因为它需要特定类型的插值函数，例如投影到低阶傅里叶模态上。相比之下，AOT 算法支持一般类别的插值算子。

此外，在图 4.1 中，可以看到我们的算法在短期内的表现。我们观察到，正如分析所预测的那样，在 L^2 应用 AOT 反馈控制项的所有时间步上，误差均呈指数衰减，也就是说，这些时间步紧接在测得新的观测数据之后。随后误差会呈指数增长，但只要 μ 指数衰减足够强，就会压制这种增长，从而使误差随时间指数快速收敛。

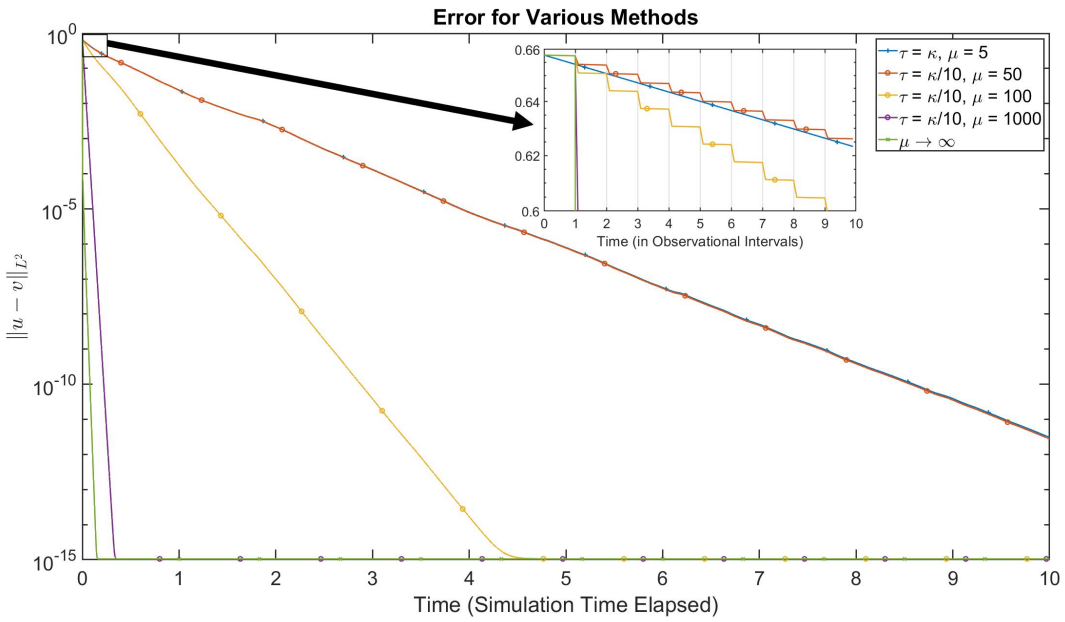


FIGURE 4.1. 采用不同 τ 值进行时间稀疏观测时 L^2 误差的双对数图， $\kappa = 0.001$ 和 $\Delta t = 0.0001$ 的空间分辨率为 512^3。插图：时间区间 $[0, 0.1]$ 内误差的放大图（方框未按比例绘制），显示误差衰减呈阶梯状。

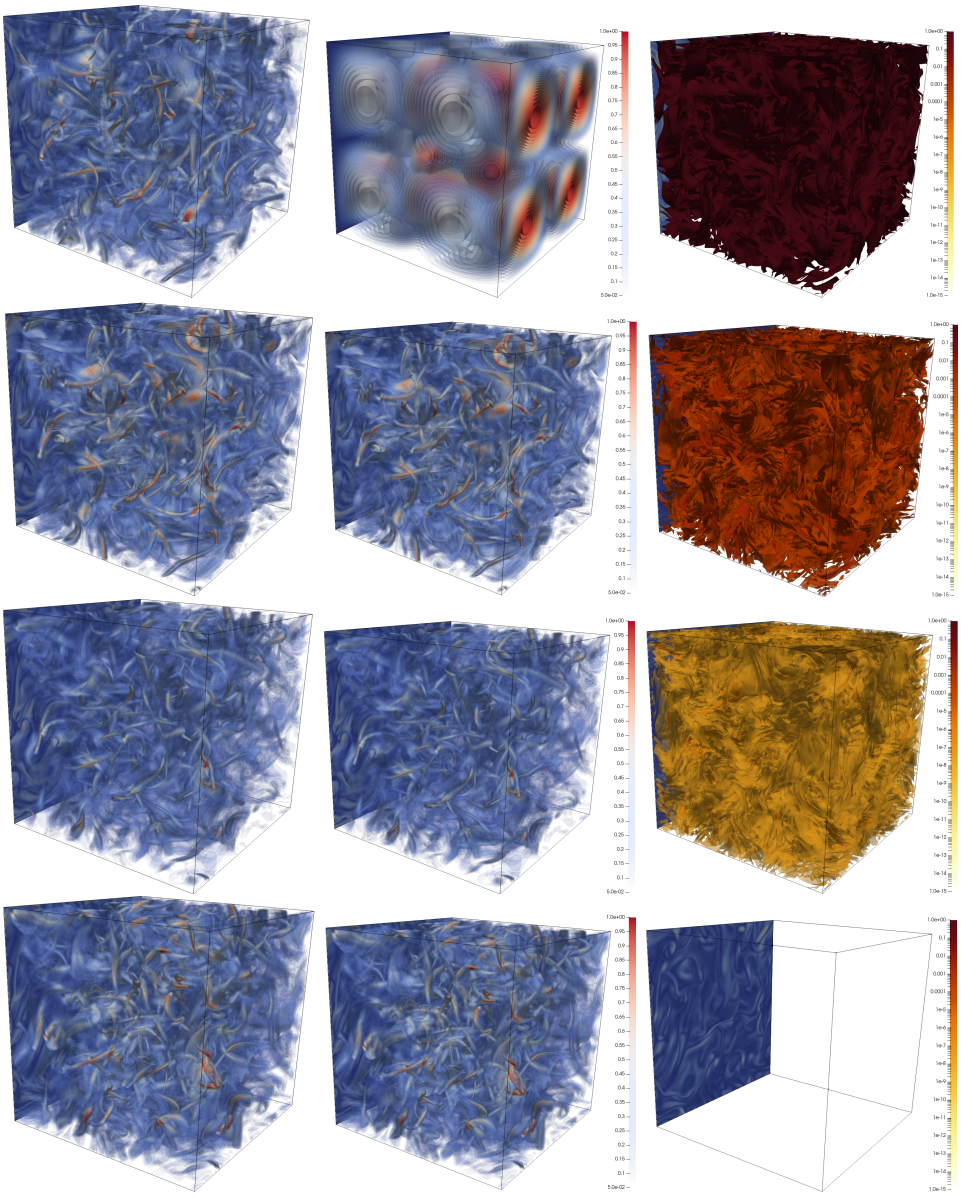


FIGURE 4.2. u 和 v 的涡管（分别显示在左列和中列）根据归一化涡量的大小着色，涡量差（右列）则根据其大小着色。图中每一行都是在时间 $t = 0.001$，0。11，0。21，和 0。31 时截取的涡量大小快照。本次模拟使用了 $\tau = \kappa/10$ ，其中 $\mu = 1000$。

5. Conclusions

我们在本文中发现，不仅从理论上可以证明[3] 在小于观测时间间隔的“数据同化窗口”内应用 AOT 控制是合理的，而且从计算结果来看，这种格式能够显著提高收敛速率，且不增加额外成本。原因很简单：通过限制数据同化窗口，可以采用大得多的 nudging 参数 μ。因此，模拟解会迅速而有力地趋近观测数据，但这种强迫会很快停止，从而避免不稳定，并让解有时间逐渐恢复到系统的真实物理规律。此外，这种快速而强力的驱动意味着，解不再被 nudging 到系统中较早的状态。我们还提出了一种新算法，可以对观测数据进行时间线性外推。

总之，我们发现，通过以下方式可以大幅加快收敛速率：*(i)* 在收到观测数据后立即在极短的时间区间内处理这些数据，*(ii)* 赋予其较高优先级（较大的 μ），以及*(iii)* 尽可能早地停止使用这些观测数据（以避免不稳定，并避免将解驱动至已过时的数据）。

人们或许会思考这样一个极限情形：在将数据同化窗口缩短至零的同时，将推 nudging 强度 $\mu \to \infty$ 以某种适当的方式增大。从本质上说，实现这一目标的“最佳”方式是直接用观测到的傅里叶模态替换低阶傅里叶模态（如[14, 40]中所示），但这在实际模拟中是不可能的，因此我们将这种替换策略视为一种理想化处理。相比之下，尽管我们在此提出的方法比理想化的替换方法略慢（正如图 4.1所示，不过它仍比以往方法快一个数量级），但该方法可以直接应用于各种实际应用。

Acknowledgments

作者 A.L. 谨向艾萨克·牛顿数学科学研究所和剑桥致谢，感谢其在“湍流的数学问题：我们处于什么位置？”项目期间提供的支持与热情周到的接待，本文的相关工作正是在此期间开展的。本研究得到英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号为 EP/R014604/1。作者 C.V. 谨向洛斯阿拉莫斯国家实验室致谢，感谢其在本研究完成期间提供的热情接待。A.L. 的研究部分得到了美国国家科学基金会项目 DMS-2206762 和 CMMI-1953346 的资助。C.V. 的研究部分得到了美国国家科学基金会研究生研究奖学金计划项目 DMS-1610400 的资助。

References

[1] D. A. Albanez、H. J. Nussenzveig Lopes 和 E. S. Titi。三维纳维–斯托克斯-α 模型的连续数据同化。《渐近分析》，97(1-2):139–164，2016年。[2] M. U. Altaf、E. S. Titi、O. M. Knio、L. Zhao、M. F. McCabe 和 I. Hoteit。利用连续数据同化对二维贝纳德对流方程进行降尺度。《计算地球科学》，21(3):393–410，2017年。[3] A. Azouani、E. Olson 和 E. S. Titi。利用一般插值观测量进行连续数据同化。《非线性科学杂志》，24(2):277–304，2014。[4] A. Azouani 和 E. S. Titi。通过有限个确定参数对非线性耗散系统进行反馈控制——反应扩散范式。《演化方程与控制理论》，3(4):579–594，2014。[5] H. Bessaih、E. Olson 和 E. S. Titi。利用随机噪声数据进行连续数据同化。《非线性》，28(3):729–753，2015年。

[3]也就是说，至少在二维情形下，整体适定性成立，并且仍会指数快速收敛至真实解

[6] A. Biswas、Z. Bradshaw 和 M. S. Jolly。利用局部观测量对纳维–斯托克斯方程进行数据同化。SIAM 应用动力系统杂志，20(4):2174–2203，2021年。[7] A. Biswas、C. Foias、C. F. Mondaini 和 E. S. Titi。具有纳维–斯托克斯方程统计解应用的降尺度数据同化算法。载于《亨利·庞加莱研究所年刊 C辑：非线性分析》，第295–326页。爱思唯尔，2019年。[8] A. Biswas 和 V. R. Martinez。二维纳维–斯托克斯方程数据同化算法的高阶同步。非线性分析：现实世界应用，35:132–157，2017年。[9] A. Biswas 和 R. Price。三维纳维–斯托克斯方程的连续数据同化。（已投稿）arXiv 2003.01329。[10] E. Carlson、J. Hudson 和 A. Larios。通过连续数据同化恢复二维纳维–斯托克斯方程的参数。SIAM 科学计算杂志，42(1):A250–A270，2020年。[11] E. Carlson 和 A. Larios。二维纳维–斯托克斯方程的敏感性分析及其在连续数据同化中的应用。（已投稿），2021年。[12] E. Carlson、. Van Roekel、Luke、M. Petersen、H. C. Godinez 和 A. Larios。在 MPAS-O 中实现连续数据同化算法，以改善中尺度模拟中的涡旋效应。2021年。（已投稿）。[13] E. Celik 和 E. Olson。在高斯噪声条件下使用时滞松弛进行数据同化。arXiv:2108.03631，2022年。（预印本）。[14] E. Celik、E. Olson 和 E. S. Titi。对离散时间降尺度数据同化算法中的插值观测量进行谱滤波。SIAM 应用动力系统杂志，18(2):1118–1142，2019年。[15] N. Chen、Y. Li 和 E. Lunasin。湍流 Sabra 壳模型的高效连续数据同化算法。（已投稿）arXiv 2105.10020。[16]P. Clark Di Leoni、A. Mazzino 和 L. Biferale。利用物理信息数据同化和谱松弛推断流动参数与湍流构型。《物理评论：流体》，3(10):104604，2018年。[17] P. Constantin 和 C. Foias。《纳维–斯托克斯方程》。芝加哥数学讲座。芝加哥大学出版社，美国伊利诺伊州芝加哥，1988年。[18] R. Dascaliuc、C. Foias 和 M. S. Jolly。二维纳维–斯托克斯方程全局吸引子上能量与涡量平方积分之间的关系。动力系统与微分方程杂志，17(4):643–736，2005年。[19] R. Dascaliuc、C. Foias 和 M. S. Jolly。纳维–斯托克斯方程吸引子在能量—涡量平方积分平面上的通用界。《数学物理杂志》，48(6):065201，33，2007年。[20] R. Dascaliuc、C. Foias 和 M. S. Jolly。二维湍流的一些特定数学约束。《物理学D辑》，237(23):3020–3029，2008年。[21] R. Dascaliuc、C. Foias 和 M. S. Jolly。二维湍流的涡量平方积分、拟涡量平方积分和不变测度估计。微分方程杂志，248(4):792–819，2010年。[22] S. Desamsetti、H. Dasari、S. Langodan、O. Knio、I. Hoteit 和 E. S. Titi。利用连续数据同化对全球大气环流模式进行高效动力降尺度。英国皇家气象学会季刊，2019年。[23] A. E. Diegel 和 L. G. Rebholz。Cahn–Hilliard 方程的 c^0内罚方法中的连续数据同化与长时间精度。应用数学与计算，424:论文编号127042，22，2022年。[24] Y. J. Du 和 M.-C. Shiue。基于非线性松弛技术的 Lorenz 63 系统连续数据同化算法分析与计算。计算与应用数学杂志，386:113246，2021年。[25]A. Farhat、M. S. Jolly 和 E. S. Titi。仅通过速度测量对二维贝纳德对流进行连续数据同化。《物理学D辑》，303:59–66，2015年。´A. Farhat、E. Lunasin 和 E. S. Titi。利用速度场单一分量的测量，对二维纳维–斯托克斯方程进行简化连续数据同化。

《数学流体力学杂志》，18(1):1–23，2016年。[27] A. Farhat、E. Lunasin 和 E. S. Titi。仅使用温度测量的多孔介质三维 B´énard 对流数据同化算法。《数学分析及其应用杂志》，438(1):492–506，2016年。[28] A. Farhat、E. Lunasin 和 E. S. Titi。仅使用温度测量进行数据同化的查尼猜想：三维行星地转模型范式。《气候与天气预报数学》，2(1)，2016年。[29] A. Farhat、E. Lunasin 和 E. S. Titi。仅通过水平速度测量对二维 B´énard 对流系统进行连续数据同化。《非线性科学杂志》，第1–23页，2017年。[30]C. Foias、O. Manley、R. Rosa 和 R. Temam。《纳维–斯托克斯方程与湍流》，《数学及其应用百科全书》第83卷。剑桥大学出版社，剑桥，2001年。[31] C. Foias、C. F. Mondaini 和 E. S. Titi。针对二维纳维–斯托克斯方程解及其统计特征的离散数据同化方案。SIAM 应用动力系统杂志，15(4):2109–2142，2016年。[32] K. Foyash、M. S. Dzholli、R. Kravchenko 和 `E. S. Titi。构造二维纳维–斯托克斯方程系统决定形式的统一方法：一般插值算子的情形。《数学科学进展》，69(2(416)):177–200，2014年。[33] T. Franz、A. Larios 和 C. Victor。妙语、横扫与缓慢爬行：通过数据同化实现观测器模式的收敛速率——二维纳维–斯托克斯方程的情形。《计算方法与应用力学和工程》，392:论文编号114673，共19页，2022年。[34] B. Garc´ía-Archilla 和 J. Novo。纳维–斯托克斯方程全离散混合有限元数据同化格式的误差分析。《计算数学进展》，46(4):论文编号61，共33页，2020年。[35] B. Garc´ía-Archilla、J. Novo 和 E. S. Titi。有限元方法应用于纳维–斯托克斯方程降尺度数据同化算法的一致时间误差估计。《SIAM数值分析杂志》，58(1):410–429，2020年。[36] M. Gardner、A. Larios、L. G. Rebholz、D. Vargun 和 C. Zerfas。将连续数据同化应用于二维纳维–斯托克斯方程的速度–涡量形式。《电子研究档案》，29(3):2223–2247，2021年。[37] M. Gesho、E. Olson 和 E. S. Titi。二维纳维–斯托克斯方程数据同化算法的计算研究。《计算物理通讯》，19(4):1094–1110，2016年。[38] N. Glatt-Holtz、I. Kukavica、V. Vicol 和 M. Ziane。三维随机原始方程不变测度的存在性与正则性。《数学物理杂志》，55(5):051504，共34页，2014年。[39] M. A. E. R. Hammoud、O. Le Maˆıtre、E. S. Titi、I. Hoteit 和 O. Knio。针对瑞利–B´énard 对流的含噪观测连续与离散数据同化：一项计算研究。《计算地球科学》，27:63–79，2023年。[40] K. Hayden、E. Olson 和 E. S. Titi。Lorenz 方程和二维纳维–斯托克斯方程的离散数据同化。《物理学D辑》，240(18):1416–1425，2011年。[41]H. A. Ibdah、C. F. Mondaini 和 E. S. Titi。数据同化算法的全离散数值格式：一致时间误差估计。《IMA数值分析杂志》，40(4):2584–2625，2020年。[42] M. S. Jolly、V. R. Martinez、E. J. Olson 和 E. S. Titi。使用表面准地转方程时间模糊测量的连续数据同化。《中国数学年刊B辑》，40(5):721–764，2019年。[43] M. S. Jolly、V. R. Martinez 和 E. S. Titi。亚临界表面准地转方程的数据同化算法。《非线性研究进展》，17(1):167–192，2017年。

[44] M. S. Jolly、T. Sadigov 和 E. S. Titi。阻尼受迫非线性薛定谔方程的决定形式——傅里叶模态情形。微分方程杂志，258(8):2711–2744，2015年。[45] A. Larios 和 Y. Pei。非线性连续数据同化。（已投稿）arXiv:1703.03546。[46] A. Larios 和 Y. Pei。利用可观测数据，通过 Voigt正则化对二维纳维–斯托克斯方程进行近似连续数据同化。演化方程与控制理论，9(3):733–751，2020年。[47] A. Larios、L. G. Rebholz 和 C. Zerfas。纳维–斯托克斯方程 IMEX-FEM 数据同化格式的全时稳定性与精度。计算方法与应用力学和工程，2018年。[48] A. Larios 和 C. Victor。利用时空稀疏观测提高二维纳维–斯托克斯方程连续数据同化的收敛速率。（预印本）。[49] A. Larios 和 C. Victor。采用移动数据点簇对反应扩散方程进行连续数据同化：一项计算研究。《计算物理通讯》，29:1273–1298，2021年。[50] E. Lunasin 和 E. S. Titi。分布式非线性耗散系统的有限决定参数反馈控制——一项计算研究。演化方程与控制理论，6(4):535–557，2017年。[51] P. A. Markowich、E. S. Titi 和 S. Trabelsi。三维 Brinkman-Forchheimer 扩展 Darcy 模型的连续数据同化。《非线性》，29(4):1292–1328，2016年。[52] C. F. Mondaini 和 E. S. Titi。应用于数据同化算法的后处理Galerkin方法的一致时间误差估计。《*SIAM*数值分析杂志》，56(1):78–110，2018年。[53] L. Nirenberg。关于椭圆型偏微分方程。《比萨高等师范学院年刊》（第三辑），13:115–162，1959年。[54]B. Pachev、J. P. Whitehead 和 S. A. McQuarrie。Kuramoto–Sivashinsky方程上的并行多参数学习示例。*SIAM* 科学计算杂志，44(5):A2974–A2990，2022年。[55] Y. Pei。海洋三维原始方程的连续数据同化。《纯粹与应用数学通讯》，18(2):643，2019年。[56] L. G. Rebholz 和 C. Zerfas。通过代数松弛对演化方程进行简单高效的连续数据同化。《数值方法与偏微分方程》，第1–25页，2021年。[57] J. C. Robinson。无穷维动力系统。《剑桥应用数学丛书》。剑桥大学出版社，剑桥，2001年。《耗散型抛物偏微分方程与全局吸引子理论导论》。[58] R. Temam。力学与物理中的无穷维动力系统，《应用数学科学》第68卷。施普林格出版社，纽约，第二版，1997年。[59] R. Temam。纳维–斯托克斯方程：理论与数值分析。AMS Chelsea 出版社，普罗维登斯，罗得岛州，2001年。理论与数值分析，1984年版重印。[60] L. Yu、K. Fennel、B. Wang、A. Laurent、K. R. Thompson 和 L. K. Shay。评估非同一孪生方法与同一孪生方法在观测影响评估中的表现：基于集合卡尔曼滤波的墨西哥湾海洋同化应用。《海洋科学》，15(6):1801–1814，2019年。[61] C. Zerfas、L. G. Rebholz、M. Schneier 和 T. Iliescu。流体流动的连续数据同化降阶模型。《计算方法与应用力学和工程》，357:112596，共18页，2019年。

(Adam Larios) Department of Mathematics, University of Nebraska–Lincoln, Lincoln, NE 68588-0130, USA*Email address*, Adam Larios: alarios@unl.edu (Yuan Pei) Department of Mathematics, Western Washington University, Bellingham, WA 98225-9063, USA *Email address*, Yuan Pei: peiy@wwu.edu (Collin Victor) Department of Mathematics, University of Nebraska–Lincoln, Lincoln, NE 68588-0130, USA*Email address*, Collin Victor: collin.victor@huskers.unl.edu