arXiv:2303.03498v1 [stat.CO] 6 Mar 2023

边缘序贯蒙特卡罗方法的性质

Francesca R. Crucinio*[2] 和 Adam M. Johansen[2, 3]

[2]华威大学统计系[3]艾伦·图灵研究所

摘要

我们提出了一个框架，涵盖若干“边缘化”序贯蒙特卡罗（SMC）算法作为特例，包括边缘粒子滤波器 [Klaas 等人，2005年，载于《人工智能中的不确定性》，第308–315], 页；独立粒子滤波器 [Lin 等人，2005年，《美国统计学会杂志》100卷，第1412–1421] 页；以及线性计算成本的近似贝叶斯计算序贯蒙特卡罗 [Sisson 等人，2007年，《美国国家科学院院刊》（美国）104卷，第1760–1765页。]。我们给出了此类算法满足大数定律和中心极限定理的条件，并进一步提供了一些渐近性质的刻画。最后，我们证明，与某些边缘序贯蒙特卡罗算法相关的一类估计量，其渐近方差始终不大于采用相同提议分布的标准SMC算法所给出的估计量的渐近方差。

1 引言

序贯蒙特卡罗（SMC）方法是一类蒙特卡罗方法，它们利用一组加权样本（或粒子），通过变异与选择动力学相结合的方式使其演化，从而近似分布序列及相对于这些分布的积分。在工程学和统计学文献中，此类方法在 Gordon 等人 (1993) 的开创性研究之后，因其在状态空间模型滤波中的应用而广受欢迎；自 DelMoral (1996) 以来，研究者也从理论角度将其作为费曼–卡茨流的平均场近似进行了广泛研究。序贯蒙特卡罗方法日益普及，并已成功应用于众多问题，包括后验近似（Chopin，2002；Del Moral 等人，2006年）、近似贝叶斯计算（Sisson 等人，2007年；Didelot 等人，2011年）、贝叶斯模型比较（Zhou 等人，2016）、参数估计（Poyiadjis 等人，2011年）。Chopin 和 Papaspiliopoulos(2020年) 提供了一部篇幅较长的序贯蒙特卡罗入门著作。

序贯蒙特卡罗方法用于近似定义在波兰空间 $(E^n, \mathcal{E}^n)$ 上的分布序列 $(\eta_n)_{n\geq 0}$，这些空间的维度不断增加，其中$\mathcal{E}$ 表示与 E相关的 σ域，其关系为

$$\hat{\eta}_n(\mathrm{d}x_{1:n}) \propto U_n(x_{n-1}, x_n) K_n(x_{n-1}, \mathrm{d}x_n) \hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{1:n-1})$$

其中， K_n 为马尔可夫核： $E \times \mathcal{E} \to [0,1]$， U_n 为非负函数： $E \times E \to \mathbb{R}$。

本文聚焦于一类特殊的序贯蒙特卡罗方法，在这类方法中，过程过去的演化会被边缘化处理。边际序贯蒙特卡罗（MSMC）方法由Klaas 等人(2005年) 引入；Lin 等人(2005年) 的实证结果表明，与标准SMC相比，这类方法能够降低未归一化重要性权重的条件方差。

尽管这是一类颇受欢迎、在实践中效果良好的算法（例如 Sisson 等人(2007年)；Didelot 等人(2011年)；Everitt等人(2017)；Poyiadjis 等人(2011年)），对 MSMC 理论性质的研究却较少。本文旨在弥补这一不足。我们全面分析了 MSMC 的极限行为，并表明它具有标准序贯蒙特卡罗方法的许多关键性质（参见例如 Del Moral (2004年年)。特别是，我们证明，MSMC 方法给出的估计满足大数定律（命题 1 和 3）、中心极限定理（命题 6），并表明其 $\mathbb{L}_p$ 误差

*通讯作者：francesca.crucinio@gmail.co m

以通常的 $N^{-1/2}$速率衰减（命题 2），且偏差以 N^{-1}(命题5)的速率衰减。最后，我们推导出若干常见类别的 MSMC 方法的渐近方差的显式表达式，并将其与非边缘化对应算法进行比较，结果表明，使用边缘序贯蒙特卡洛获得的估计，其渐近方差绝不会大于使用相同提议分布的标准 SMC 所得到的方差。

我们的证明将用于获得标准SMC类似结果的众所周知技术，与控制边缘化效应的新结果相结合。将这一结果嵌入通常用于建立标准SMC结果的归纳方法中，我们获得了对MSMC的完整刻画。

我们在第2节中介绍了描述边缘序贯蒙特卡罗方法的框架，并在其中给出了若干特别值得关注的特殊情形。我们的主要贡献见于第3节，其中我们阐述了这些算法的理论性质，并证明其渐近方差绝不会大于标准SMC的渐近方差。结果的证明推迟至C 至G。最后，我们在第4节中进行讨论。

2 边缘序贯蒙特卡罗方法

边缘序贯蒙特卡罗方法（MSMC）是一类序贯蒙特卡洛算法，由Klaas 等人于2005年提出，用于近似定义在可测空间$(\hat{\eta}_n)_{n\geq 0}$ 上的分布序列$(E,\mathcal{E})$，其中 $\mathcal{E}$ 表示与 σ相关联的 E-域。对于某些马尔可夫核 K_n：$E\times\mathcal{E}\to[0,1]$ 和非负函数 U_n： $E\times E\to\mathbb{R}$，该分布序列满足如下递推关系

$$\hat{\eta}_n(\mathrm{d}x_n)\propto\int U_n(x_{n-1},x_n)K_n(x_{n-1},\mathrm{d}x_n)\hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1}) \tag{1}$$

with $\hat{\eta}_0(\mathrm{d}x_0)\propto U_0(x_0)K_0(\mathrm{d}x_0)$.

与标准SMC算法不同，标准SMC算法使用粒子云来近似定义在（E^n， $\mathcal{E}^n$）上的测度值递推关系，并通过舍弃部分采样路径来获得时间边缘分布的近似；MSMC算法直接处理边缘递推关系，而积分相对于 $\hat{\eta}_{n-1}$ 在（1）中的存在则需要额外的近似。因此，如下文所述，在MSMC中，使用关于 $\hat{\eta}_{n-1}$ 的积分的样本近似来定义替代目标序列。

在介绍MSMC算法之前，我们先描述以（1）为目标的理想化算法中的一个步骤，而MSMC正是对该算法进行近似。在时刻 n，我们从一组等权粒子开始 $\{\widetilde{X}^i_{n-1},1/N\}_{i=1}^N$，用于近似 $\hat{\eta}_{n-1}$。在理想化算法中，使用提议分布将粒子沿时间向前传播

$$\eta_n(\mathrm{d}x_n)=\hat{\eta}_{n-1}M_n(\mathrm{d}x_n):=\int M_n(x_{n-1},\mathrm{d}x_n)\hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1}) \tag{2}$$

对于 $n\geq 1$ 和某些马尔可夫核 M_n： $E\times\mathcal{E}\to[0,1]$，以获得一组新的粒子云 $\{X^i_n,1/N\}_{i=1}^N$。这组新的粒子云被用作重要性采样步骤中的提议分布，该步骤以 $\hat{\eta}_n$ 为目标，其重要性权重与 Radon-Nikodym导数 $\mathrm{d}\hat{\eta}_n/\mathrm{d}\eta_n$ 成正比

$$G_n(x_n)=\frac{\mathrm{d}\hat{\eta}_{n-1}(U_n\cdot K_n)}{\mathrm{d}\hat{\eta}_{n-1}M_n}(x_n)=\frac{\mathrm{d}\left(\int U_n(x_{n-1},\cdot)K_n(x_{n-1},\cdot)\hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1})\right)}{\mathrm{d}\left(\int M_n(x_{n-1},\cdot)\hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1})\right)}(x_n), \tag{3}$$

其中（$U_n\cdot K_n$）（x_{n-1}，$\mathrm{d}x_n$）：$=U_n$（x_{n-1}，x_n）K_n（x_{n-1}，$\mathrm{d}x_n$），以获得一组带权粒子云 $\{X^i_n,W^i_n\}_{i=1}^N$，其中 $W^i_n\propto G_n$（X^i_n），该粒子云近似于 $\hat{\eta}_n$。近似于 $\hat{\eta}_n$ 的等权总体 $\{\widetilde{X}^i_n,\frac{1}{N}\}_{i=1}^N$，可通过从 $\{X^i_n,W^i_n\}_{i=1}^N$ 中进行重采样获得；关于近期流行重采样方案的综述，参见 Gerber 等人 （2019年）。

目标分布（1）涉及关于 $\hat{\eta}_{n-1}$的不可解积分。对于任意概率测度，η以及非负可积函数 G，我们可以定义 $\Psi_G(\eta)(\mathrm{d}x):=G(x)\eta(\mathrm{d}x)/\eta(G)$。给定一组加权粒子 $\{X^i_{n-1},W^i_{n-1}\}_{i=1}^N$ 近似 $\hat{\eta}_{n-1}=\Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})$，我们用$\eta_{n-1}$近似 $\hat{}$

$$\Psi_{G^N_{n-1}}(\eta^N_{n-1})(\mathrm{d}x_{n-1}):=\sum_{i=1}^N W^i_{n-1}\delta_{X^i_{n-1}}(\mathrm{d}x_{n-1}) \tag{4}$$

并定义近似目标

$$\Psi_{G_{n-i}^N}(\eta_{n-1}^N)(U_n \cdot K_n)(\mathrm{d}x_n) \propto \sum_{i=1}^N W_{n-1}^i U_n(X_{n-1}^i, x_n) K_n(X_{n-1}^i, \mathrm{d}x_n).$$

随后我们按照理想化算法继续进行。由于关于 $\hat{}\eta_{n-1}$ 的积分难以计算，因此将 $\hat{}\eta_{n-1}$ 替换为在时刻 $n-1$获得的粒子近似。因此，粒子通过使用式（2）中提议分布的近似来随时间向前传播，$\eta_n(\mathrm{d}x_n)$，并使用近似权重进行重采样

$$G_n^N(x_n) = \frac{\mathrm{d}\Psi_{G_{n-i}^N}(\eta_{n-1}^N)(U_n \cdot K_n)}{\mathrm{d}\Psi_{G_{n-i}^N}(\eta_{n-1}^N)M_n}(x_n) = \frac{\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^N W_{n-1}^i U_n(X_{n-1}^i, \cdot) K_n(X_{n-1}^i, \cdot)\right)}{\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^N W_{n-1}^i M_n(X_{n-1}^i, \cdot)\right)}(x_n). \tag{5}$$

所得的MSMC方法总结于算法1中。为方便起见，我们将算法1的三个基本步骤分别称为变异步骤（第7行）、重新加权步骤（第8行和第9行）以及重采样步骤（第10行）。对于每个步骤，我们都关联一个测度及其相应的粒子近似：式（2）中的变异测度 η_n 由 $\eta_n^N := N^{-1}\sum_{i=1}^N \delta_{X_n^i}$ 近似，该近似是在第7行之后获得的；第8行和第9行给出了重新加权测度 $\hat{}\eta_n = \Psi_{G_n}(\eta_n)$ 的粒子近似（4）；重采样后，我们得到式（1）中 $\hat{}\eta_n$的另一种近似，即 $\hat{}\eta_n^N := N^{-1}\sum_{i=1}^N \delta_{\tilde{X}_n^i}$。

算法1 边际序贯蒙特卡罗（MSMC）

1: 设置 $n=0$。2: 对 $i=1, \ldots, N$，采样 $X_0^i \sim M_0$。3: 计算 $G_0(X_0^i) = \mathrm{d}\hat{\eta}_0\mathrm{d}M_0(X_0^i)$ $i=1, \ldots, N$。4: 计算 $W_0^i = G_0(X_0^i)/\sum_{j=1}^N G_0(X_0^j)$。5: 对 $\{X_0^i, W_0^i\}_{i=1}^N$ 进行重采样，以获得 $\{\tilde{X}_0^i, \frac{1}{N}\}_{i=1}^N$。

6: Update $n \leftarrow n+1$.
7: Sample $X_n^i \sim M_n\left(\tilde{X}_{n-1}^i, \cdot\right)$ for $i=1, \ldots, N$.
8: Compute $G_n^N(X_n^i)$ in (5) for $i=1, \ldots, N$.
9: Compute $W_n^i = G_n^N(X_n^i)/\sum_{j=1}^N G_n^N(X_n^j)$.
10: Resample $\{X_n^i, W_n^i\}_{i=1}^N$ to obtain $\{\tilde{X}_n^i, \frac{1}{N}\}_{i=1}^N$.
11: Go to Line 6.

2.1 边际序贯蒙特卡罗示例

上一节介绍了边缘序贯蒙特卡罗方法的一般类别。该类别涵盖了许多知名算法，下面我们简要讨论其中的一些示例。

2.1.1 边际粒子滤波器

边际粒子滤波器（MPF；Klaas 等人 （2005年））是一类用于对状态空间模型（SSM）进行推断的算法。状态空间模型是一类由两个离散时间过程组成的时间序列模型：潜在过程 $(X_n)_{n\geq 0}$ 以及条件独立的观测值 $(Y_n)_{n\geq 1}$。这样的 SSM $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ 由潜在过程的转移密度 $f_n(x_n|x_{n-1})$ 定义，其中约定 $f_0(x_0|x_{-1}) \equiv f_0(x_0)$，以及观测似然 $g_n(y_n|x_n)$。

在这种情况下，目标分布就是滤波分布

$$\hat{\eta}_n(\mathrm{d}x_n) \equiv p(x_n|y_{1:n})\mathrm{d}x_n \propto g_n(y_n|x_n)\int f_n(x_n|x_{n-1})\hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1})\mathrm{d}x_n, \tag{6}$$

其中 $\hat{}\eta_0(\mathrm{d}x_0) = f_0(x_0)\mathrm{d}x_0$，$K_n(x_{n-1}, \mathrm{d}x_n) = f_n(x_n|x_{n-1})\mathrm{d}x_n$ 和 $U_n(x_{n-1}, x_n) \equiv U_n(x_n) = g_n(y_n|x_n)$，以及可纳入观测 y_n 的提议密度 $M_n(x_{n-1}, \mathrm{d}x_n) = q_n(x_n|y_n, x_{n-1})\mathrm{d}x_n$。相应的权重为

$$G_n(x_n) = g_n(y_n|x_n)\frac{\int f_n(x_n|x_{n-1})\hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1})}{\int q_n(x_n|y_n, x_{n-1})\hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1})}; \quad G_n^N(x_n) = g_n(y_n|x_n)\frac{\sum_{i=1}^N W_{n-1}^i f_n(x_n|X_{n-1}^i)}{\sum_{i=1}^N W_{n-1}^i q_n(x_n|y_n, X_{n-1}^i)}.$$

在对 SSM 进行参数估计时，类似的算法也被用于近似得分函数（Poyiadjis 等人，2011年）。

2.1.2 边际辅助粒子滤波器

边际辅助粒子滤波器（MAPFs）是 MPF 的一种变体，由 Klaas 等人 (2005年，第 3.1 节）提出，是标准辅助粒子滤波器的边际化版本（Pitt 和 Shephard，1999；Carpenter 等人，1999）。MAPF 可描述为将标准 MPF 应用于 $\hat{}\eta_0(\mathrm{d}x_0) \propto f_0(x_0)\tilde{p}(y_1|x_0)\mathrm{d}x_0$ 和

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_n(\mathrm{d}x_n) \propto \tilde{p}(y_{n+1}|x_n)p(x_n|y_{1:n})\mathrm{d}x_n \propto & \tilde{p}(y_{n+1}|x_n)g(y_n|x_n)\left(\int f_n(x_n|x_{n-1})p(x_{n-1}|y_{1:n-1})\mathrm{d}x_{n-1}\right)\mathrm{d}x_n \quad (7)\\ \propto & \tilde{p}(y_{n+1}|x_n)g(y_n|x_n)\left(\int \frac{f_n(x_n|x_{n-1})}{\tilde{p}(y_n|x_{n-1})}\hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1})\right)\mathrm{d}x_n,\end{aligned}$$

其中 $\tilde{p}(y_{n+1}|x_n)$ 是 $p(y_{n+1}|x_n)$ 的近似：$= \int g_{n+1}(y_{n+1}|x_{n+1})f_{n+1}(x_{n+1}|x_n)\mathrm{d}x_{n+1}$，并在此基础上加入重要性采样步骤，以确保目标分布正确 $p(x_n|y_{1:n})$（Johansen 和 Doucet，2008）。

令 $K_n(x_{n-1}, \mathrm{d}x_n) = f_n(x_n|x_{n-1})\mathrm{d}x_n$ 和 $U_n(x_{n-1}, x_n) = g_n(y_n|x_n)\tilde{p}(y_{n+1}|x_n)/\tilde{p}(y_n|x_{n-1})$，即可使用提议核为 $M_n(x_{n-1}, \mathrm{d}x_n) = q_n(x_n|x_{n-1}, y_n)\mathrm{d}x_n$ 的算法1，该提议核纳入当前观测，因此权重为

$$\begin{aligned}G_n(x_n) &= g_n(y_n|x_n)\frac{\tilde{p}(y_{n+1}|x_n)\int f_n(x_n|x_{n-1})/\tilde{p}(y_n|x_{n-1})\hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1})}{\int q_n(x_n|x_{n-1}, y_n)\hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1})},\\ G_n^N(x_n) &= g_n(y_n|x_n)\frac{\tilde{p}(y_{n+1}|x_n)\sum_{i=1}^N W_{n-1}^i f_n(x_n|X_{n-1}^i)/\tilde{p}(y_n|X_{n-1}^i)}{\sum_{i=1}^N W_{n-1}^i q_n(x_n|X_{n-1}^i, y_n)}.\end{aligned}$$

为了获得一个以 $\pi_n(\mathrm{d}x_n) := p(x_n|y_{1:n})\mathrm{d}x_n$ 为目标的算法，需要额外进行一步重要性采样，以重采样前对 $\hat{}\eta_n$ 的近似 $\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)$ 作为提议分布，并采用重要性权重

$$\widetilde{w}_n(x_n) = \frac{\mathrm{d}\pi_n}{\mathrm{d}\hat{\eta}_n}(x_n) \propto \frac{1}{\tilde{p}(y_{n+1}|x_n)}. \quad (8)$$

我们指出，这里给出的 MAPF 描述便于获得下文的理论刻画；但在实践中，通常会将 η_n^N 作为重要性采样步骤中的提议分布，并采用权重

$$G_n^N(x_n)\cdot\widetilde{w}_n(x_n) = g_n(y_n|x_n)\frac{\sum_{i=1}^N W_{n-1}^i f_n(x_n|X_{n-1}^i)/\tilde{p}(y_n|X_{n-1}^i)}{\sum_{i=1}^N W_{n-1}^i q_n(x_n|X_{n-1}^i, y_n)},$$

其中，W_{n-1}^i 表示模拟（或辅助）权重，其定义见 Klaas 等人（2005年，第3.1节）；而$W_{n-1}^i/\tilde{p}(y_n|X_{n-1}^i)$ 表示推断权重（另见 Chopin 和 Papaspiliopoulos（2020年，第10.3.3节））。

2.1.3 独立粒子滤波器

独立粒子滤波器（IPF）是 Lin 等人（2005年）提出的一类粒子滤波器，旨在处理这样一类 SSM：当前观测能够为当前状态提供显著信息，但转移动力学较弱。在这些情形下，自然会考虑提议核 M_n，其产生的 x_n 抽样在给定条件下相对于各个过去粒子彼此独立，即 $M_n(x_{n-1},\mathrm{d}x_n) = q_n(x_n|y_n)\mathrm{d}x_n$。将 g_n 和 f_n 取为第 2.1.1 节中的定义，可得到作为边缘序贯蒙特卡洛特例的基本独立粒子滤波器（另见 Lai 等人（2022年，附录C））， 其中 $U_n(x_{n-1}, x_n) = g_n(y_n|x_n)$,$K_n(x_{n-1}, \mathrm{d}x_n) = f_n(x_n|x_{n-1})\mathrm{d}x_n$。

2.1.4 用于近似贝叶斯计算的序贯蒙特卡洛

基于序贯蒙特卡洛的近似贝叶斯计算是序贯蒙特卡洛采样器的一种（Del Moral 等人，2006年），由Sisson 等人(2007年)研究；Didelot 等人(2011年)研究了这种方法。该方法用于近似参数 θ 的后验分布，其中似然函数 $p(y_{obs}|\theta)$

难以处理，但可以从中采样。在这种情况下，分布序列定义在参数与数据的空间上，即 $x_n = (\theta_n, y_n)$，并由 $\hat{}\eta_n(\mathrm{d}(\theta_n, y_n)) \propto p(\mathrm{d}\theta_n)p(\mathrm{d}y_n|\theta_n)\pi_{\epsilon_n}(y_{obs}|y_n)$ 给出，其中 $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ 是某个递减序列，$p(\mathrm{d}\theta)$ 是参数 θ 的先验分布，$p(\cdot|\theta)$ 表示难以处理的似然，而 π_{ϵ_n} 是归一化核的密度，其集中程度由 ϵ_n 决定；ϵ_n 衡量 y_n 与观测数据 y_{obs} 的接近程度。

Sisson 等人（2007年）提出的基于序贯蒙特卡洛的近似贝叶斯计算算法是边缘序贯蒙特卡洛的一个实例，其具有

$$\begin{aligned} K_n((\theta_{n-1}, y_{n-1}), \mathrm{d}(\theta_n, y_n)) &= p(\mathrm{d}\theta_n)p(\mathrm{d}y_n|\theta_n) \\ U_n((\theta_{n-1}, y_{n-1}), (\theta_n, y_n)) &= U_n((\theta_n, y_n)) = \pi_{\epsilon_n}(y_{obs}|y_n) \\ M_n((\theta_{n-1}, y_{n-1}), \mathrm{d}(\theta_n, y_n)) &= q_n(\mathrm{d}\theta_n|\theta_{n-1})p(\mathrm{d}y_n|\theta_n), \end{aligned}$$

对于某个提议分布 q_n （为简洁起见，我们假设使用观测值本身，而非某个汇总统计量，但使用此类统计量并不会带来任何实质性困难）。Everitt等人（2017）也针对双重不可处理模型考虑了一种类似的边缘序贯蒙特卡洛算法。

3 收敛结果

现陈述我们的主要结果，这些结果表明，边际SMC方法与标准SMC方法在性质上具有相同的收敛性质。我们在第3.1节概述这些结果的证明，完整细节见附录C至F。为简单起见，我们聚焦于可测有界测试函数$\varphi : E \to \mathbb{R}$，其中 $||\varphi||_\infty := \sup_{x\in E} |\varphi(x)| < \infty$，我们将该集合记为 $\mathcal{B}_b(E)$。对于任意分布 η 以及任意$\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$，我们记 $\eta(\varphi) := \int \varphi(x)\eta(\mathrm{d}x)$；类似地，对于所有经验分布 $\eta^N := N^{-1}\sum_{i=1}^N \delta_{X^i}$，我们将相应的平均值记为 $\eta^N(\varphi) := N^{-1}\sum_{i=1}^N \varphi(X^i)$。

为简洁起见，这些结果是在相当强的假设下给出的，这些假设在相关文献中也颇为常见。通常情况下，用于放宽这些假设的技术在这里同样适用，但采用这些技术会使论述复杂得多。类似地，在我们的论证中只考虑多项式重采样（Gordon 等人，1993）。可以采用低方差重采样方案，但这会大大增加理论分析的复杂度（Gerber 等人，2019年）。

假设1. 势函数 G_n 处处为正，$G_n(x_n) > 0$ 对于每个 $x_n \in E$均成立。

假设 2. 对所有 $n \geq 0$，函数 U_n 均有上界，即 $U_n(x_{n-1}, x_n) \leq ||U_n||_\infty < \infty$；且对于所有 x_{n-1}，Radon-Nikodym导数 $\mathrm{d}K_n(x_{n-1}, \cdot)/\mathrm{d}M_n(x_{n-1}, \cdot)$ 有上界，即存在某个 $\alpha > 0$，使得对每个 $x_{n-1} \in E$, $||\mathrm{d}K_n(x_{n-1}, \cdot)/\mathrm{d}M_n(x_{n-1}, \cdot)||_\infty \leq \alpha < \infty$。

假设 3。对于所有 $n \geq 0$，函数 U_n 有下界，且 Radon-Nykodim 导数 $\mathrm{d}K_n(x_{n-1}, \cdot)/\mathrm{d}M_n(x_{n-1}, \cdot)$ 对所有 x_{n-1}都有下界；也就是说，存在 $\beta > 0$，使得 $0 < \beta \leq U_n(x_{n-1}, x_n)$，并且 $0 < \beta \leq \mathrm{d}K_n(x_{n-1}, \cdot)/\mathrm{d}M_n(x_{n-1}, \cdot)$ 在 x_{n-1} 上一致成立。

这些假设在序贯蒙特卡洛文献中很常见（Del Moral，2004年，2013年），尤其是假设1（及其更强版本假设 3）可确保系统不会灭绝（即权重不会同时全部取零），并且可以通过多种方式放宽这些假设，包括引入停时（Del Moral，2004年）或考虑局部有界性（Whiteley，2013年）。

假设 2 确保对于任意的 $x \in E$，$G_n(x) \leq m_g$，$G_n^N(x) \leq m_g$；而 假设 3进一步保证 $G_n(x) \geq m_g^{-1}$，$G_n^N(x) \geq m_g^{-1}$，其中 $m_g := \max\{||U_n||_\infty \alpha, \beta^{-2}\} < \infty$。为说明这一点，注意到

$$G_n(x_n) = \nu_{x_n}\left(U_n(\cdot, x_n)\frac{\mathrm{d}K_n}{\mathrm{d}M_n}(\cdot, x_n)\right) \qquad \text{with } \nu_{x_n}(\mathrm{d}x_{n-1}) := \hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1})\frac{\mathrm{d}M_n(x_{n-1}, \cdot)}{\mathrm{d}\hat{\eta}_{n-1}M_n}(x_n),$$

对于 G_n^N，将定义中的 $\hat{}\eta_{n-1}$ 替换为 $\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)$ 也同样成立，定义见 ν。 假设 1 和 2 使我们能够得到如下弱大数定律（WLLN），其证明见附录D:

命题 1 （弱大数定律）。 在 假设 1 和 2下，对于所有 $n \geq 0$ 以及每个$\varphi \in \mathcal{B}_b$（$E$），有 $\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi) \xrightarrow{p} \Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)$ 以及 $\hat{}\eta_n^N(\varphi) \xrightarrow{p} \hat{}\eta_n(\varphi)$。

假设 3　　用于获得更强的结果，例如有限的N 误差界，其证明见附录D　　：

命题 2（$\mathbb{L}_p$-不等式）。在假设 1 至3下，对于任意时刻 $n \geq 0$、任意 $p \geq 1$ 和 $N \geq 1$¯，都存在有限常数 $C_{p,\ n}$，$C_{p,\ n}$，使得对于任意可测有界函数 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$

(a) $\mathbb{E}\left[\left|\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi) - \Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)\right|^p\right]^{1/p} \leq \bar{C}_{p,n}\frac{||\varphi||_\infty}{\sqrt{N}}$,

(b) $\mathbb{E}\left[\left|\hat{\eta}_n^N(\varphi) - \hat{\eta}_n(\varphi)\right|^p\right]^{1/p} \leq C_{p,n}\frac{||\varphi||_\infty}{\sqrt{N}}$,

其中，期望是相对于序贯蒙特卡洛算法中生成的所有随机变量的联合分布计算的。

强大数定律所需的假设比命题 1 中的弱大数定律更强，并且可以通过 $\mathbb{L}_p$ 不等式得到，该不等式见命题 2。利用马尔可夫不等式进行博雷尔–坎特利论证即可得到该定律，例如参见Boustati 等人（2020年，附录 D）。

命题 3 （强大数定律）。在假设 1 至3下，对于所有 $n \geq 0$ 以及每个$\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$，有 $\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi) \xrightarrow{a.s.} \Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)$ 且$\hat{}\eta_n^N(\varphi) \xrightarrow{a.s.} \hat{}\eta_n(\varphi)$。

使用标准技术（例如 Berti 等人 （2006年）中针对相关背景详细给出的技术，见 Schmon 等人（2021年，补充材料，定理 1），命题 3 的结果可以加强为测度在弱拓扑下的收敛：

命题 4。 在 假设 1 至 3下，对所有 $n \geq 0$， $\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)$ 在弱拓扑下几乎必然收敛于 $\Psi_{G_n}(\eta_n)$， $\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N) \rightharpoonup \Psi_{G_n}(\eta_n)$，并且 $\hat{}\eta_n^N$以类似方式收敛于 $\hat{}\eta_n$， $\hat{}\hat{}\eta_n$。

与标准SMC算法的情形一样，重新加权步骤会在归一化量的估计中引入偏差，然而，正如 N^{-1} 中所证明的，该偏差以 E的速率衰减：

命题　　5 （偏差估计）。 在 假设 1 至 3下，对所有 $n \geq 0$ 以及任意 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$ 我们有　　e

(a) $\left|\mathbb{E}\left[\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)\right] - \Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)\right| \leq \bar{C}_n\frac{||\varphi||_\infty}{N}$,

(b) $\left|\mathbb{E}\left[\hat{\eta}_n^N(\varphi)\right] - \hat{\eta}_n(\varphi)\right| \leq C_n\frac{||\varphi||_\infty}{N}$,

¯对于某个有限的 C_n, C_n。期望是针对序贯蒙特卡洛算法中生成的所有随机变量的联合分布计算的。

以下结果在附录F中得到证明，它量化了使用多项式重采样的算法1所提供估计的渐近方差。我们关注这一重采样方案，是因为它简单，而且正如Gerber 等人 (2019年，定理7）所示，它为采用更复杂重采样方案得到的渐近方差提供了一个上界。

命题 6 （中心极限定理）。 在假设 1 至3的条件下，对每个 $n \geq 1$ 以及每个 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$:

(a) $\sqrt{N}\left[\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi) - \Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)\right] \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \bar{V}_n(\varphi)\right)$,

(b) $\sqrt{N}\left[\hat{\eta}_n^N(\varphi) - \hat{\eta}_n(\varphi)\right] \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, V_n(\varphi)\right)$,

¯其中 $V_n(\varphi)$ $V_n(\varphi)$ 由以下递推关系给出，

$$\begin{aligned}
\widehat{V}_n(\varphi) &= \mathrm{var}_{\eta_n}(G_n\varphi) + \bar{V}_{n-1}(K_n(U_n\varphi)); \\
\bar{V}_n(\varphi) &= \frac{1}{\eta_n(G_n)^2}\widehat{V}_n\left(\varphi - \Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)\right); \\
V_n(\varphi) &= \mathrm{var}_{\hat{\eta}_n}(\varphi) + \bar{V}_n(\varphi),
\end{aligned}$$

初始条件为 $\bar{V}_0(\varphi)$ $=$ 方差$_{M_0}\left({}_{\eta_0}^{G_0(G_0)}(\varphi - \hat{}\eta_0(\varphi))\right)$。

3.1 证明方法

我们强调，所用的证明技巧只是对标准SMC情形下所用技巧的小幅扩展；这些结果的主要意义在于，它们表明该算法的边际版本继承了标准算法的许多优良性质，并且可以通过渐近方差比较这两种算法。证明的细节将在附录C 至附录G 中给出；届时我们将提供完整的论证，将本节讨论的新颖要素与用于获得标准SMC类似结果的成熟技巧结合起来。

标准序贯蒙特卡罗方法与边际序贯蒙特卡洛方法之间的主要区别在于，权重中存在额外的近似5；如果我们能够使用理想化算法，精确计算其中的 G_n （3），就可以应用标准SMC的理论结果（例如，Del Moral (2013年)）。因此，要获得边际序贯蒙特卡洛的收敛结果，我们需要控制非标准权重 G_n^N的行为。我们指出，由于权重 G_n^N 是 G_n的有偏近似，因此无法采用基于状态空间扩展的论证（如使用势函数无偏估计的粒子滤波器中的论证；Fearnhead等人(2008）来为MSMC提供理论保证。

为了控制 G_n^N的影响，我们在命题 7 中确定了 $\eta_n^N(G_n^N\varphi)$的Proposition 7 条件期望，并将Branchini和Elvira (2021年，引理 1）的结果加以推广。命题 7的简洁证明见附录D。结合附录中提出的一系列结果——这些结果在对抽样误差的各个方面进行展开时运用了该条件期望——我们得以在较一般的情形下获得关于MSMC算法的结果。

命题 7. 令 $\mathcal{F}_{n-1}^N$ 表示由截至（包括）时间 $n-1$ 的加权样本生成的 σ-域。对于所有 $n \geq 1$ 以及所有 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$，我们有 $\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi) \mid \mathcal{F}_{n-1}^N\right] = \Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(K_n(\varphi U_n))$。

为证明 $\mathbb{L}_p$-不等式，我们结合了 Crisan 和 Doucet（2002年）的结果；M´ıguez 等人（2013年）的结果控制了变异步骤、重新加权步骤和重采样步骤所引入的近似误差；以及 C 中的引理 3，该引理控制了使用近似权重（5）所引入的误差。引理 3 的证明基于对 $\eta_n^N(G_n^N\varphi)$ 及其在命题 7 中给出的条件期望的比较，并结合归纳假设和命题 7。类似地，命题 5 中偏差估计的证明将 Olsson 和 Ryd´en（2004年）的归纳方法与命题 7 相结合，说明近似权重不会加剧偏差随 N 的衰减率。

关于弱大数定律的证明，我们再次采用与 Douc和Moulines (2008年，定理 1) 以及 Capp´e 等人 (2005年，定理9.4.5) 类似的归纳策略，将针对变异步骤、重新加权和重采样步骤建立弱大数定律的标准论证，与 引理 7（见附录D）结合起来；该引理为 $\eta_n^N(G_n^N\varphi)$ 建立了弱大数定律。

中心极限定理可采用 Chopin (2004年) 的归纳方法，并结合一个额外结果（引理12），该结果表明 $\eta_n^N(G_n^N\varphi)$ 满足中心极限定理。

3.2 方差比较

命题 6 给出了一个类似于 Chopin (2004) 中的渐近方差递推公式。比较命题 6 与 Chopin (2004，第2.3节)，我们发现方差表达式的主要差异出现在 $\widehat{V}_n(\varphi)$ 中：对于标准SMC，我们有 $\widehat{V}\mathrm{SMC}_n(\varphi) = \mathrm{var}_{\eta_n}(G_n\varphi) + \bar{V}_{n-1}(M_n(G_n\varphi))$。这并不令人意外，因为 SMC 与 MSMC 之间的主要差异在于重要性权重 (3)，其 ˆ表达式已在 $V_n(\varphi)$ 中得到考虑。

利用归纳论证（其详细过程见G.1；另见Chopin （2004年，公式9）以及Johansen 和 Doucet¯（2007年，附录A）），我们可以得到 V_n（φ）的闭式表达。为此，我们定义如下算子，其形式类似于Chopin （2004年，公式10）和Del Moral（2004年，第2.7.2节）中的算子：

$$\forall q \in \mathbb{N}: \qquad \Gamma_q(\varphi)(x_{q-1}) := \int K_q(x_{q-1}, \mathrm{d}x_q) U_q(x_{q-1}, x_q)\varphi(x_q),$$

以及双参数半群 $\Gamma_{p:q}(\varphi) = \Gamma_{p+1}(\varphi) \circ \cdots \circ \Gamma_q(\varphi)$，对所有 $p < q$，约定 $\Gamma_{q:q} = \mathrm{Id}$。我们关注重采样步骤之前估计量的方差；由于 Rao-Blackwell 定理的缘故，其有限η_n^N方差小于由 ˆ$-N$ 给出的方差（Blackwell, 1947年；Rao, 1945年）。G.1 给出了方差的显式刻画：

¯命题 8。 命题 6 $V_n(\varphi)$ 中的方差 可以等价地写为

$$\bar{V}_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}_{\eta_k}\left[\left(G_k\left[\Gamma_{k:n}(\varphi) - \hat{\eta}_n(\varphi)\Gamma_{k:n}(1)\right]\right)^2\right] \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{\eta_j(G_j)^2}, \tag{9}$$

对于所有 $n \geq 0$ 以及所有 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$。

现在我们讨论边缘化序贯蒙特卡洛算法的一些特殊情形，求出它们的渐近方差，并将其与非边缘化对应算法的渐近方差进行比较。此处所考虑特殊情形的方差可以通过简单的代数运算从（9）得到，相关运算留待附录D。有关以下推论所依据的计算，请参见附录D.2 和 附录D.4:

推论 1（边际粒子滤波器的方差）。对于所有 $n \geq 0$ 以及所有 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$，有

$$\begin{aligned} V_n^{MPF}(\varphi) = &\int \frac{p(x_0|y_{1:n})^2}{q_0(x_0)} \left(\int p(x_n|y_{1:n}, x_0)\left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right] \mathrm{d}x_n\right)^2 \mathrm{d}x_0 \\ &+ \int \frac{p(x_k|y_{1:n})^2}{\int q_k(x_k|x_{k-1}, y_k) p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) \mathrm{d}x_{k-1}} \left(\int p(x_n|y_{k+1:n}, x_k)\left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right] \mathrm{d}x_n\right)^2 \mathrm{d}x_k \\ &+ \int \frac{p(x_n|y_{1:n})^2}{\int q_n(x_n|x_{n-1}, y_n) p(x_{n-1}|y_{1:n-1}) \mathrm{d}x_{n-1}} (\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n)^2 \mathrm{d}x_n, \end{aligned}$$

其中 $\bar{\varphi}_n := \int \varphi(x_n)\, p(x_n|y_{1:n})\, \mathrm{d}x_n$。此外，$V_n^{MPF}(\varphi) \leq V_n^{PF}(\varphi)$，其中 $V_n^{PF}(\varphi)$ 表示采用 Johansen 和 Doucet（*2008*，第2.4节）中给出的相同提议分布的粒子滤波器的渐近方差。

利用 Walker （2014）的结果可以证明，仅当 $q_k \equiv f_k$ 时等号成立，此时 MPF 与 Gordon 等人 （1993）的自举粒子滤波相同；此时，推论 1中的方差表达式与 Johansen 和 Doucet （2008，第2.4节）中明确给出的 BPF 方差一致——参见附录D.2.1。在其他所有情形下，均可利用例如 Walker （2014，定理 3.1）对方差缩减进行量化。

¯MAPF 的方差可通过额外的 V_n（φ）中的命题 8所示、使用权重进行的一步重要性采样获得 $\tilde{w}_n$ （8），如G.3 所示（并在G.4中与标准情形进行了比较）。

推论 2（MAPF 的方差）。对于所有 $n \geq 0$ 以及所有 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$，我们有

$$\begin{aligned} V_n^{MAPF}(\varphi) = &\int \frac{p(x_0|y_{1:n})^2}{q_0(x_0)} \left(\int p(x_n|x_0, y_{1:n})\left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right] \mathrm{d}x_n\right)^2 \mathrm{d}x_0 \\ &+ \int \frac{p(x_k|y_{1:n})^2}{\int q_k(x_k|x'_{k-1}, y_k) \hat{\eta}_{k-1}(\mathrm{d}x'_{k-1})} \left(\int p(x_n|x_k, y_{1:n})\left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right] \mathrm{d}x_n\right)^2 \mathrm{d}x_k \\ &+ \int \frac{p(x_n|y_{1:n})^2\left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right]^2}{\int q_n(x_n|x'_{n-1}, y_n) \hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x'_{n-1})} \mathrm{d}x_n. \end{aligned}$$

其中 $\bar{\varphi}_n := \int \varphi(x_n)\, p(x_n|y_{1:n})\, \mathrm{d}x_n$。此外，$V_n^{MAPF}(\varphi) \leq V_n^{APF}(\varphi)$，其中 $V_n^{APF}(\varphi)$ 表示具有相同提议分布的辅助粒子滤波的渐近方差，该提议分布见Johansen 和 Doucet（*2008*，第2节 2.4）。

利用Walker （2014）中的结果，我们可以证明，等号仅在 $q_k \propto C_k f_k$ 时成立，其中 C_k是一个仅依赖于 x_k 和 $\tilde{p}(y_k|x_{k-1}) = \int C_k(x_k)\, f_k(x_k|x_{k-1})\, \mathrm{d}x_k$的正函数。一种特殊情形是$C_k(x_k) = g_k(y_k|x_k)$，此时 MAPF 退化为完全适配辅助粒子滤波（FA-APF），因此具有相同的渐近方差（见Johansen 和 Doucet（2008，推论）；G.3.1）。

4 讨论

在这项工作中，我们证明了一类边缘序贯蒙特卡罗（MSMC）算法具有标准序贯蒙特卡洛方法的许多关键性质。该类算法涵盖了边际粒子滤波器以及文献中的其他常用算法。第3节的结果保证了

MSMC提供的估计是一致且渐近正态的，其偏差以 N^{-1} 的速率衰减，$\mathbb{L}_p$ 误差以 $N^{-1/2}$的速率衰减。

比较命题 6 中的渐近方差与例如Chopin (2004年)；DelMoral (2004年)所得标准SMC的渐近方差后，我们发现，边际粒子滤波器的渐近方差不大于相应非边际粒子滤波器的渐近方差（推论 1 和2），这一现象已在实证研究中有所发现（例如Klaas 等人 (2005年)；Xu 和 Jasra (2019年)）。推论 2 补充了Klaas 等人 (2005年，命题 1) 的结论，后者表明辅助边际粒子滤波的重要性采样权重具有更低的（条件）方差。

归一化常数估计的无偏性已由Branchini和Elvira (2021年，定理 2) 证明。结合命题 7 与Branchini和Elvira (2021年的引理2，还可以证明，未归一化流提供无偏估计。

量化采用边际粒子滤波器而非标准粒子滤波所带来的方差缩减，是一个更具挑战性的问题，其答案很可能取决于具体的状态空间模型和提议分布 q_k。使用MPF而非PF所实现的方差缩减，需要与MPF相对于PF的 $O(N)$计算成本增加相权衡。在最简单的实现中，MPF的计算成本为 $O(N^2)$，不过，借助 N体学习技术（例如 Gray 和 Moore（2000）；Lang 等人（2005）），可将其降至 $O(N\log\ N)$；这一点已由Klaas 等人（2005）证明。另一种方法是采用图形处理器进行高效实现，如 Charlier 等人（2021）所示。Clart´e 等人（2022，第4节）针对形式如式（5）的求和展示了这种方法。

最后，我们预计，类似的思想也可应用于采用边缘化技术的更复杂序贯蒙特卡洛算法（例如 Xu 和 Jasra （2019年）；Crucinio 和 Johansen （2023）。

致谢

FRC 和 AMJ 感谢英国工程与自然科学研究委员会（资助编号：EP/R034710/1）的支持。AMJ 进一步感谢英国工程与自然科学研究委员会（资助编号：EP/T004134/1）以及艾伦·图灵研究所劳氏船级社基金会数据中心工程项目的支持。为实现开放获取，作者已就本次投稿产生的任何作者接收稿版本采用知识共享署名（CC BY）许可。本文研究未创建或分析新数据。本文不适用数据共享。

参考文献

Patrizia Berti、Luca Pratelli 和 Pietro Rigo. 随机概率测度的几乎必然弱收敛。Stochastics and Stochastics Reports，78(2):91–97，2006年。P. Billingsley.《概率与测度》。约翰·威立父子出版公司，1995年。D. Blackwell. 条件期望与无偏序贯估计。Annals of Mathematical Statistics，18(1):105–110，1947年。¨A. Boustati、O. D. Akylid`ız、T. Damoulas 和 A. M. Johansen. 通过序贯蒙特卡罗进行广义贝叶斯滤波。载于 H. Larochelle、M. Ranzato、R. Hadsell、M. F. Balcan 和 H. Lin（编），《神经信息处理系统进展》，第33卷，第418–429页。Curran Associates, Inc.，2020年。N. Branchini 和 V. Elvira. 优化的辅助粒子滤波器：通过凸优化调整混合提议分布。载于第37届人工智能中的不确定性会议，第1289–1299页。Proceedings of Machine Learning Research，2021年。O. Capp´e、E. Moulines 和 T. Ryd´en. 隐马尔可夫模型中的推断。施普林格，2005年。J. Carpenter、P. Clifford 和 P. Fearnhead. 一种用于非线性问题的改进粒子滤波器。IEE Proceedings on Radar, Sonar and Navigation，146(1):2–7，1999年。Benjamin Charlier、Jean Feydy、Joan Alexis Glaunes、Fran¸cois-David Collin 和 Ghislain Durif. 在图形处理器上进行核运算：具备自动微分，且不会发生内存溢出。Journal of Machine Learning Research，22(74):1–6，2021年。

N. Chopin. 一种用于静态模型的序贯粒子滤波方法。Biometrika，89(3):539–552，2002。N. Chopin. 序贯蒙特卡罗方法的中心极限定理及其在贝叶斯推断中的应用。Annals of Statistics，32(6):2385–2411，2004年。N. Chopin 和 O. Papaspiliopoulos.《序贯蒙特卡罗导论》。施普林格，Cham，2020年。Gr´egoire Clart´e、Antoine Diez 和 Jean Feydy. 用于非线性马尔可夫链蒙特卡罗采样器的集体提议分布：平均场理论与快速实现。Electronic Journal of Statistics，22(2):6395–6460，2022年。D. Crisan 和 A. Doucet. 面向实践者的粒子滤波方法收敛结果综述。IEEE Transactions on Signal Processing，50(3):736–746，2002年3月。F. R. Crucinio 和 A. M. Johansen. 一种用于高维滤波的分治序贯蒙特卡罗方法。Statistica Sinica，2023年。doi: 10.5705/ss.202022.0243。待刊。P. Del Moral. 非线性滤波：相互作用粒子分辨率。Markov Processes and Related Fields，2(4):555–580，1996年。P. Del Moral. 费曼-卡茨公式：具有应用的谱系与相互作用粒子系统。Prob- ability and Its Applications。施普林格出版社，纽约，2004年。P. Del Moral. 用于蒙特卡罗积分的平均场模拟。Chapman and Hall/CRC，纽约，2013年。P. Del Moral、A. Doucet 和 A. Jasra. 序贯蒙特卡罗采样器。Journal of the Royal Statistical Society B，63(3):411–436，2006年。X. Didelot、R. G. Everitt、A. M. Johansen 和 D. J. Lawson. 模型证据的无似然估计。Bayesian Analysis，6(1):49–76，2011年。R. Douc 和 R. Moulines. 加权样本的极限定理及其在序贯蒙特卡罗方法中的应用。Annals of Statistics，36(5):2344–2376，2008。R. G. Everitt、D. Prangle、P. Maybank 和 M. Bell. 用于双重不可处理模型的边缘序贯蒙特卡罗。arXiv 预印本 arXiv:1710.04382，2017年。Paul Fearnhead、Omiros Papaspiliopoulos 和 Gareth O Roberts. 用于部分观测扩散过程的粒子滤波器。Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)，70(4):755–777，2008。M. Gerber、N. Chopin 和 N. Whiteley. 负关联、排序与重采样方法的收敛性。Annals of Statistics，47(4):2236–2260，2019年。N. J. Gordon、S. J. Salmond 和 A. F. M. Smith. 一种用于非线性/非高斯贝叶斯状态估计的新方法。IEE Proceedings-F，140(2):107–113，1993年。Alexander Gray 和 Andrew Moore. 统计学习中的“N-体”问题。载于《神经信息处理系统进展》，第521–527页，2000年。A. M. Johansen 和 A. Doucet. 辅助变量序贯蒙特卡罗方法。研究报告07:09，布里斯托大学，数学系 – 统计学组，University Walk，布里斯托，BS8 1TW，英国，2007年7月。Adam M Johansen 和 Arnaud Doucet. 关于辅助粒子滤波器的注记。Statistics & Probability Letters，78(12):1498–1504，2008。M. Klaas、N. de Freitas 和 A. Doucet. 迈向实用的 N^2 蒙特卡罗：边缘粒子滤波器。载于人工智能中的不确定性会议论文集，第308–315页，2005年。J. Lai、J. Domke 和 D. Sheldon. 变分边缘粒子滤波器。载于人工智能与统计国际会议，第875–895页。PMLR，2022年。

Dustin Lang、Mike Klaas 和 Nando de Freitas。快速核密度估计算法的实证测试。技术报告 TR2005-03，英属哥伦比亚大学计算机科学系，2005年。M. T. Lin、J. L. Zhang、Q. Cheng 和 R. Chen。独立粒子滤波器。美国统计学会会刊，100(472):1412–1421，2005年。J. S. Liu。《科学计算中的蒙特卡罗策略》。施普林格，纽约，2001年。J. M´ıguez、D. Crisan 和 P. M. Djuri´c。关于用于最大后验序列估计和随机全局优化的两种序贯蒙特卡罗方法的收敛性。统计学与计算，23 (1):91–107，2013年。J. Olsson 和 T. Ryd´en。自助粒子滤波偏差。隆德大学，技术报告 929081，2004年。M. K. Pitt 和 N. Shephard。通过模拟进行滤波：辅助粒子滤波器。美国统计学会会刊，94(446):590–599，1999年。G. Poyiadjis、A. Doucet 和 S. S. Singh。状态空间模型中得分函数和观测信息矩阵的粒子近似及其在参数估计中的应用。Biometrika，98(1):65–80，2011年。C. R. Rao。统计参数估计中可达到的信息量和精度。加尔各答数学会通报，37(3):81–91，1945年。Sebastian M Schmon、George Deligiannidis、Arnaud Doucet 和 Michael K Pitt。伪边际方法的大样本渐近性质。Biometrika，108(1):37–51，2021年。A. N. Shiryaev。《概率论》，数学研究生教材第25卷。施普林格，纽约，1996年。S. A. Sisson、Y. Fan 和 M. M. Tanaka。无需似然函数的序贯蒙特卡罗。美国国家科学院院刊，美国，104(4):1760–1765，2007年2月。Stephen G. Walker。关于詹森不等式的一个下界。《SIAM数学分析杂志》，46(5):3151–3157，2014。N. Whiteley。若干粒子滤波器的稳定性性质。《应用概率年刊》，23(6):2500–2537，2013年。Yaxian Xu 和 Ajay Jasra。用于推断具有交叉杠杆效应的高维多元随机波动率模型的粒子滤波器。《数据科学基础》，1(1):61–85，2019年。D.-M. Yuan 和 S.-J. Li。将若干独立同分布随机变量的经典结果推广至条件情形。《韩国数学会杂志》，52(2):431–445，2015年。Y. Zhou、A. M. Johansen 和 J. A. D. Aston。迈向自动化模型比较：一种自适应序贯蒙特卡罗方法。《计算与图形统计学杂志》，25(3):701–726，2016年。

A 记号

在着手证明正文中陈述的结果之前，我们先在此总结附录中证明所涉及的所有量的定义。

在时间 n，我们将（1）中的目标分布（也称为更新后的分布）记为 $\hat{}\eta_n$，将提议核 M_n 与 $\hat{}\eta_{n-1}$ 卷积后，得到（也称为预测分布的）变异分布η_n （2）中的分布。我们注意到，目标分布可以由变异分布按如下方式得到:

$$\hat{\eta}_n(\varphi) = \frac{\eta_n(G_n\varphi)}{\eta_n(G_n)} = \Psi_{G_n}(\eta_n).$$

通过 MSMC 得到的上述量的粒子近似如下： η_n的粒子近似记为 $\eta_n^N = N^{-1}\sum_{i=1}^N \delta_{X_n^i}$， $\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N) = \sum_{i=1}^N W_n^i \delta_{X_n^i}$，而 $\hat{}\eta_n^N = N^{-1}\sum_{i=1}^N \delta_{\widetilde{X}_n^i}$ 均近似于 $\Psi_{G_n}(\eta_n) = \hat{}\eta_n$。

我们注意到，精确权重也可以等价地写为

$$\begin{aligned}
G_n(x_n) &= \frac{\mathrm{d}\hat{\eta}_{n-1}(U_n \cdot K_n)}{\mathrm{d}\hat{\eta}_{n-1}M_n}(x_n) \\
&= \frac{\mathrm{d}\left(\int U_n(x_{n-1},\cdot)K_n(x_{n-1},\cdot)\hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1})\right)}{\mathrm{d}\left(\int M_n(x_{n-1},\cdot)\hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1})\right)}(x_n) \\
&= \frac{\mathrm{d}\left(\int U_n(x_{n-1},\cdot)K_n(x_{n-1},\cdot)\Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})(\mathrm{d}x_{n-1})\right)}{\mathrm{d}\left(\int M_n(x_{n-1},\cdot)\Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})(\mathrm{d}x_{n-1})\right)}(x_n) \\
&= \frac{\mathrm{d}\left(\int U_n(x_{n-1},\cdot)K_n(x_{n-1},\cdot)G_{n-1}(x_{n-1})\eta_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1})\right)}{\mathrm{d}\left(\int M_n(x_{n-1},\cdot)G_{n-1}(x_{n-1})\eta_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1})\right)}(x_n),
\end{aligned}$$

而近似权重则为

$$\begin{aligned}
G_n^N(x_n) &= \frac{\mathrm{d}\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(U_n \cdot K_n)}{\mathrm{d}\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)M_n}(x_n) \\
&= \frac{\mathrm{d}\left(\int U_n(x_{n-1},\cdot)K_n(x_{n-1},\cdot)\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(\mathrm{d}x_{n-1})\right)}{\mathrm{d}\left(\int M_n(x_{n-1},\cdot)\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(\mathrm{d}x_{n-1})\right)}(x_n) \\
&= \frac{\mathrm{d}\left(\int U_n(x_{n-1},\cdot)K_n(x_{n-1},\cdot)G_{n-1}^N(x_{n-1})\eta_{n-1}^N(\mathrm{d}x_{n-1})\right)}{\mathrm{d}\left(\int M_n(x_{n-1},\cdot)G_{n-1}^N(x_{n-1})\eta_{n-1}^N(\mathrm{d}x_{n-1})\right)}(x_n).
\end{aligned} \tag{10}$$

我们还定义以下 σ-域，后文将频繁用到： $\mathcal{F}_0^N := \sigma\left(X_0^i : i \in \{1,\dots,N\}\right)$，以及 $\mathcal{G}_0^N := \sigma\left(\widetilde{X}_0^i : i \in \{1,\dots,N\}\right) \vee \mathcal{F}_0^N$。更一般地，我们递归定义由加权样本生成的 σ-域，该样本包含截至时间 n 的变异步骤： $\mathcal{F}_n^N := \sigma\left(X_n^i : i \in \{1,\dots,N\}\right) \vee \mathcal{G}_{n-1}^N$；以及由粒子系统生成的$\sigma$-域，该系统截至时间 n（包括该时刻），且尚未执行时间 $n+1$ 的变异步骤：$\mathcal{G}_n^N := \sigma\left(\widetilde{X}_n^i : i \in \{1,\dots,N\}\right) \vee \mathcal{F}_n^N$。

B 命题 7 的证明命题 7

命题 7 的证明。令 $\mathcal{F}_{n-1}^N$ 表示由截至（并包括）时刻 σ的加权样本所生成的 $n-1$，并令 $\mathcal{G}_{n-1}^N$ 表示在时刻 σ的变异步骤之前，由截至（并包括）时刻 n 的粒子系统所生成的 n，因此 $\mathcal{F}_{n-1}^N \subset \mathcal{G}_{n-1}^N$。考虑条件期望 $\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi) \mid \mathcal{F}_{n-1}^N\right]$,

应用塔式性质，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\mid\mathcal{F}_{n-1}^N\right]&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\mathbb{E}\left[G_n^N(X_n^i)\varphi(X_n^i)|\mathcal{F}_{n-1}^N\right]\\&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[G_n^N(X_n^i)\varphi(X_n^i)|\mathcal{G}_{n-1}^N\right]|\mathcal{F}_{n-1}^N\right]\\&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\mathbb{E}\left[\int M_n(\widetilde{X}_{n-1}^i,\mathrm{d}x_n)G_n^N(x_n)\varphi(x_n)|\mathcal{F}_{n-1}^N\right]\\&=\sum_{j=1}^N\frac{G_{n-1}^N(X_{n-1}^j)}{\sum_{k=1}^N G_{n-1}^N(X_{n-1}^k)}\int M_n(X_{n-1}^j,\mathrm{d}x_n)G_n^N(x_n)\varphi(x_n),\end{aligned}\tag{11}$$

其中，第三个等式根据以下事实得出： $X_n^i|\mathcal{G}_{n-1}^N\sim M_n(\widetilde{X}_{n-1}^i,\cdot)$ 对每个 $i=1,\ldots\ldots,N$ 而第四个等式则根据以下事实得出：$\{X_{n-1}^j\}_{j=1}^N$ 和 G_{n-1}^N 是 $\mathcal{F}_{n-1}^N$ 可测的，并且在给定条件下，每个 $\widetilde{X}_{n-1}^i$ 均独立地从以权重为概率的分类分布中抽取。将（G_n^N）中5的定义代入上式，得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\mid\mathcal{F}_{n-1}^N\right]\\&=\int\int M_n(x_{n-1},\mathrm{d}x_n)\frac{\mathrm{d}\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(U_n\cdot K_n)}{\mathrm{d}\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)M_n}(x_n)\varphi(x_n)\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(\mathrm{d}x_{n-1})\\&=\int U_n(x_{n-1},x_n)K_n(x_{n-1},\mathrm{d}x_n)\varphi(x_n)\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(\mathrm{d}x_{n-1})\\&=\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(K_n(\varphi U_n)),\end{aligned}$$

如所需。 □

此外，对于所有 $n\geq 1$ 和所有 $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$，我们有：

$$\begin{aligned}\eta_n(G_n\varphi)&=\int\varphi(x_n)G_n(x_n)\eta_n(\mathrm{d}x_n)\\&=\int\int M_n(x_{n-1},\mathrm{d}x_n)\varphi(x_n)\frac{\mathrm{d}\hat{\eta}_{n-1}(U_n\cdot K_n)}{\mathrm{d}\hat{\eta}_{n-1}M_n}(x_n)\hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1})\\&=\int\int\varphi(x_n)U_n(x_{n-1},x_n)K_n(x_{n-1},\mathrm{d}x_n)\hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1})\\&=\hat{\eta}_{n-1}(K_n(\varphi U_n))\\&=\Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})(K_n(\varphi U_n)).\end{aligned}\tag{12}$$

C 附录D中 $\mathbb{L}_p$-不等式命题 2

首先，我们重述DelMoral（2004年，引理 7.3.3）中的一部分内容：一个 Marcinkiewicz-Zygmund 型不等式，我们将广泛使用该不等式。

引理 1（Del Moral，2004年）。给定定义在可测空间 $(E,\mathcal{E})$ 上的一列概率测度 $(\mu_i)_{i\geq 1}$，以及一组相互独立的随机变量，其中每个随机变量分别服从这些概率测度之一，$(X_i)_{i\geq 1}$，其中 $\forall i, X_i\sim\mu_i$，再结合任意一列可测函数 $(h_i)_{i\geq 1}$，使得 $\mu_i(h_i)=0$对所有 $i\geq 1$均成立，我们对任意 $N\in\mathbb{N}$ 定义：

$$m_N(X)(h)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N h_i(X_i)\quad and\quad\sigma_N^2(h)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(\sup(h_i)-\inf(h_i)\right)^2.$$

如果这些 h_i 具有有限振荡（即，$\sup(h_i) - \inf(h_i) < \infty \ \forall i \geq 1$），则有：

$$\sqrt{N}\,\mathbb{E}\left[|m_N(X)(h)|^p\right]^{1/p} \leq b(p)^{1/p}\sigma_N(h),$$

其中，对于满足 $q \geq p \geq 1$ 的任意一对整数 q、p，记 $(q)_p = q!/(q-p)!$：

$$b(2q) = (2q)_q 2^{-q} \quad and \quad b(2q-1) = \frac{(2q-1)_q}{\sqrt{q-\frac{1}{2}}} 2^{-(q-\frac{1}{2})}. \tag{13}$$

现在我们准备证明命题 2：

命题 2 的证明命题 2。我们采用归纳法，并取 $n=0$ 作为基础情形。在时刻 $n=0$，粒子 $(X_0^i)_{i=1}^N$ 从 $\eta_0 \equiv M_0$中独立同分布地抽样，因此 $\mathbb{E}\left[\varphi\left(X_0^i\right)\right] = \eta_0(\varphi)$，其中 $i = 1, \ldots\ldots, N$。我们可以定义函数序列 Δ_0^i： $E \mapsto \mathbb{R}$ 其中 $i = 1, \ldots\ldots, N$

$$\Delta_0^i(x) := \varphi(x) - \mathbb{E}\left[\varphi(X_0^i)\right]$$

从而，

$$\eta_0^N(\varphi) - \eta_0(\varphi) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \Delta_0^i(X_0^i),$$

并应用引理 1 可得，对每个 $p \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|\eta_0^N(\varphi) - \eta_0(\varphi)|^p\right]^{1/p} &\leq b(p)^{1/p}\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{i=1}^N \left(\sup(\Delta_0^i) - \inf(\Delta_0^i)\right)^2\right)^{1/2} \\
&\leq b(p)^{1/p}\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{i=1}^N 4\left(\sup|\Delta_0^i|\right)^2\right)^{1/2} \\
&\leq b(p)^{1/p}\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{i=1}^N 16\,||\varphi||_\infty^2\right)^{1/2} \\
&\leq 4b(p)^{1/p}\,||\varphi||_\infty .
\end{aligned} \tag{14}$$

为证明（a），注意到 $\Psi_{G_0^N}\left(\eta_0^N\right)(\varphi) = \Psi_{G_0}\left(\eta_0^N\right)(\varphi)$，因为 $G_0^N \equiv G_0 \equiv \mathrm{d}K_0/\mathrm{d}M_0$。利用三角不等式可得

$$\begin{aligned}
|\Psi_{G_0^N}(\eta_0^N)(\varphi) - \Psi_{G_0}(\eta_0)(\varphi)| &= \left|\frac{\eta_0^N(G_0\varphi)}{\eta_0^N(G_0)} - \frac{\eta_0(G_0\varphi)}{\eta_0(G_0)}\right| \\
&\leq \frac{|\eta_0^N(G_0\varphi) - \eta_0(G_0\varphi)|}{|\eta_0^N(G_0)|} + \left|\frac{\eta_0(G_0\varphi)}{\eta_0^N(G_0)\eta_0(G_0)}\right| |\eta_0^N(G_0) - \eta_0(G_0)|.
\end{aligned}$$

利用闵　可夫斯基不等式和假设 3，该假设保证 $G_0 \geq m_g^{-1} > 0$，我们便有　　e

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|\Psi_{G_0^N}(\eta_0^N)(\varphi) - \Psi_{G_0}(\eta_0)(\varphi)|^p\right]^{1/p} \leq & m_g\,\mathbb{E}\left[|\eta_0^N(G_0\varphi) - \eta_0(G_0\varphi)|^p\right]^{1/p} \\
& + ||\varphi||_\infty\, m_g\,\mathbb{E}\left[|\eta_0^N(G_0) - \eta_0(G_0)|^p\right]^{1/p} \\
\leq & 8m_g^2 b(p)^{1/p}\frac{||\varphi||_\infty}{N^{1/2}},
\end{aligned}$$

其中我们使用了（14）和假设 2 来保证 $G_0 \leq m_g < \infty$ 并得到最后一个不等式。因此，$\bar{C}_{0,\ p} = 8m_g^2 b\ (p)^{1/p}$。为从（b）得到（a），考虑如下分解

$$\begin{aligned}
\hat{\eta}_0^N(\varphi) - \hat{\eta}_0(\varphi) &= \hat{\eta}_0^N(\varphi) - \Psi_{G_0^N}(\eta_0^N)(\varphi) + \Psi_{G_0^N}(\eta_0^N)(\varphi) - \hat{\eta}_0(\varphi) \\
&= \hat{\eta}_0^N(\varphi) - \mathbb{E}\left[\hat{\eta}_0^N(\varphi) \mid \mathcal{F}_0^N\right] + \Psi_{G_0^N}(\eta_0^N)(\varphi) - \hat{\eta}_0(\varphi),
\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{F}_0^N := \sigma\left(X_0^i : \ i \in \{1, \ldots, N\}\right)$ 表示 σ-由时刻 0 的加权样本生成的域。利用（a），我们有

$$\mathbb{E}\left[|\Psi_{G_0^N}(\eta_0^N)(\varphi) - \hat{\eta}_0(\varphi)|^p\right]^{1/p} \leq \bar{C}_{0,p}\frac{||\varphi||_\infty}{N^{1/2}}$$

因为 $\hat{\eta}_0(\varphi) = \Psi_{G_0}(\eta_0)(\varphi)$。对于剩余项，考虑函数序列 $\Delta_0^i : E \mapsto \mathbb{R}$，其中$i = 1, \ldots\ldots, N$

$$\Delta_0^i(x) := \varphi(x) - \mathbb{E}\left[\varphi(\widetilde{X}_0^i) \mid \mathcal{F}_0^N\right].$$

在给定 $\mathcal{F}_0^N$ 的条件下， $\Delta_0^i(\widetilde{X}_0^i)$ $i = 1, \ldots\ldots, N$ 相互独立，且其期望为 0。此外，

$$\hat{\eta}_0^N(\varphi) - \mathbb{E}\left[\hat{\eta}_0^N(\varphi) \mid \mathcal{F}_0^N\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(\varphi(\widetilde{X}_0^i) - \mathbb{E}\left[\varphi(\widetilde{X}_0^i) \mid \mathcal{F}_0^N\right]\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \Delta_0^i(\widetilde{X}_0^i).$$

再次利用引理 1（另见Yuan and Li （2015，定理 3.3，其中对这类结果的条件形式给出了明确表述），对于所有 $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[|\hat{\eta}_0^N(\varphi) - \Psi_{G_0^N}(\eta_0^N)(\varphi)|^p\right]^{1/p} \leq 4b(p)^{1/p}\frac{||\varphi||_\infty}{N^{1/2}}, \tag{15}$$

由此可得 $n = 0$ 处的结果，并证明了基础情形。

接下来，假设在时刻 $n-1$ 对某个 n结果成立：我们将证明它在时刻 n也成立。变异步骤引入的误差可由引理2控制：

$$\mathbb{E}\left[|\eta_n^N(\varphi) - \eta_n(\varphi)|^p\right]^{1/p} \leq \widetilde{C}_{p,n}\frac{||\varphi||_\infty}{N^{1/2}}. \tag{16}$$

利用引理 3和4 ，我们可以控制重新加权所引入的误差

$$\mathbb{E}\left[|\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi) - \Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)|^p\right]^{1/p} \leq \bar{C}_{p,n}\frac{||\varphi||_\infty}{N^{1/2}}.$$

最后，引理5 控制了重采样步骤引入的误差

$$\mathbb{E}\left[|\hat{\eta}_n^N(\varphi) - \hat{\eta}_n(\varphi)|^p\right]^{1/p} \leq C_{p,n}\frac{||\varphi||_\infty}{N^{1/2}}.$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$，结论均可通过归纳法得出。 □

C.1 命题 2 证明所需的辅助结果命题 2

这里汇总命题 2 的 $\mathbb{L}_p$-不等式证明所需的四个辅助结果命题 2。引理2、4 和5是标准SMC方法中的已知结果；为完整起见，我们将其列出，而引理 3则控制了使用近似权重所引入的额外误差。

首先，我们证明变异步骤能够保持误差界；本质上，这一结果可见于Crisan和 Doucet (2002，引理 3)。

引理2 （变异步骤）。在命题 2的条件下，假设对于任意 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$，存在某个$p \geq 1$ 以及某个有限常数$C_{p,n-1}$

$$\mathbb{E}\left[|\hat{\eta}_{n-1}^N(\varphi) - \hat{\eta}_{n-1}(\varphi)|^p\right]^{1/p} \leq C_{p,n-1}\frac{||\varphi||_\infty}{N^{1/2}}$$

然后，在变异步骤之后

$$\mathbb{E}\left[|\eta_n^N(\varphi) - \eta_n(\varphi)|^p\right]^{1/p} \leq \widetilde{C}_{p,n}\frac{||\varphi||_\infty}{N^{1/2}}$$

~对于任意 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$，存在某个有限常数 $C_{p,\ n}$。

证明。 证明过程与 Crisan和Doucet (2002，引理 3) 的证明相同。将其分为两项，并应用闵可夫斯基不等式

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|\eta_n^N(\varphi)-\eta_n(\varphi)|^p\right]^{1/p} &= \mathbb{E}\left[|\eta_n^N(\varphi)-\hat{\eta}_{n-1}M_n(\varphi)|^p\right]^{1/p}\\ &\le \mathbb{E}\left[|\eta_n^N(\varphi)-\hat{\eta}_{n-1}^N M_n(\varphi)|^p\right]^{1/p}\\ &+\mathbb{E}\left[|\hat{\eta}_{n-1}^N M_n(\varphi)-\hat{\eta}_{n-1}M_n(\varphi)|^p\right]^{1/p}.\end{aligned}$$

令 $\mathcal{G}_{n-1}^N$ 表示在时刻 n 的变异步骤之前，由截至（含）时刻 $n-1$ 的粒子系统生成的 σ-域，$\mathcal{G}_{n-1}^N = \sigma\left(\widetilde{X}_p^i:\ i\in\{1,\ldots,N\}\right)\vee\mathcal{F}_{n-1}^N$，并考虑函数序列$\Delta_n^i:\ E\mapsto\mathbb{R}$，其中 $i=1$，……，N

$$\Delta_n^i(x) := \varphi(x)-\mathbb{E}\left[\varphi(X_n^i)\mid\mathcal{G}_{n-1}^N\right] = \varphi(x)-M_n\varphi(\widetilde{X}_{n-1}^i).$$

在给定 $\mathcal{G}_{n-1}^N$ 的条件下，$\Delta_n^i(X_n^i)$ $i=1$，……，N 相互独立，且期望均为 0；此外

$$\eta_n^N(\varphi)-\hat{\eta}_{n-1}^N M_n(\varphi) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left[\varphi(X_n^i)-M_n\varphi(\widetilde{X}_{n-1}^i)\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\Delta_n^i(X_n^i).$$

在 $\mathcal{G}_{n-1}^N$ 条件下，并应用 引理 1 可得，对所有 $p\ge 1$，

$$\begin{aligned}\sqrt{N}\,\mathbb{E}\left[|\eta_n^N(\varphi)-\hat{\eta}_{n-1}^N M_n(\varphi)|^p\mid\mathcal{G}_{n-1}^N\right]^{1/p} &\le b(p)^{1/p}\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{i=1}^N\left(\sup(\Delta_n^i)-\inf(\Delta_n^i)\right)^2\right)^{1/2}\\ &\le b(p)^{1/p}\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{i=1}^N 4\left(\sup|\Delta_n^i|\right)^2\right)^{1/2}\\ &\le b(p)^{1/p}\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{i=1}^N 16\,||\varphi||_\infty^2\right)^{1/2}\\ &\le 4b(p)^{1/p}\,||\varphi||_\infty\end{aligned}\tag{17}$$

其中 $b(p)$ 如 (13) 所示。将此结果与假设结合可得

$$\mathbb{E}\left[|\eta_n^N(\varphi)-\eta_n(\varphi)|^p\right]^{1/p}\le(4b(p)^{1/p}+C_{p,n-1})\frac{||\varphi||_\infty}{N^{1/2}},$$

且该结果对 $\widetilde{C}_{p,\ n} = 4b(p)^{1/p}+C_{p,\ n-1}$ 也成立。 □

接下来我们证明，使用近似权重 G_n^N 不会降低误差衰减的速率：

引理 3 (权重比较)。 在满足命题 2的条件下，假设对于 $p\ge 1$ 以及某些有限常数和 $C_{p,\ n-1}$

$$\mathbb{E}\left[\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(\varphi)-\Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})(\varphi)|^p\right]^{1/p}\le\bar{C}_{p,n-1}\frac{||\varphi||_\infty}{N^{1/2}},$$

then

$$\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)-\eta_n(G_n\varphi)|^p\right]^{1/p}\le D_{p,n}\frac{1}{N^{1/2}},$$

对于任意 $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$，以及某个有限常数 $D_{p,n}$。

证明。 根据假设，假设 2、命题 7 和（12），可得

$$\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\mid\mathcal{F}_{n-1}^N\right]-\eta_n(G_n\varphi)\right|^p\right]^{1/p}=\mathbb{E}\left[\left|\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(K_n(\varphi U_n))-\Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})(K_n(\varphi U_n))\right|^p\right]^{1/p}$$
$$\leq \bar{C}_{p,n-1}\left|\left|U_n\right|\right|_\infty\frac{\left|\left|\varphi\right|\right|_\infty}{N^{1/2}}.$$

由此可知，为了得到该结果，只需对.....进行界定

$$\mathbb{E}\left[\left|\eta_n^N(G_n^N\varphi)-\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\mid\mathcal{F}_{n-1}^N\right]\right|^p\right]^{1/p}.$$

考虑函数序列 Δ_n^i： $E\mapsto\mathbb{R}$，其中 $i=1$，.....， N

$$\Delta_n^i(x):=G_n^N(x)\varphi(x)-\mathbb{E}\left[G_n^N(X_n^i)\varphi(X_n^i)\mid\mathcal{F}_{n-1}^N\right].$$

给定 $\mathcal{F}_{n-1}^N$， $\Delta_n^i(X_n^i)$ $i=1$，.....， N 相互独立且期望为 0，此外

$$\eta_n^N(G_n^N\varphi)-\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\mid\mathcal{F}_{n-1}^N\right]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\Delta_n^i(X_n^i).$$

根据引理 1，几乎必然有

$$\begin{aligned}\sqrt{N}\,\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)-\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\mid\mathcal{F}_{n-1}^N\right]\right|^p\mid\mathcal{F}_{n-1}^N\Big]^{1/p}&\leq b(p)^{1/p}\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{i=1}^N\left(\sup(\Delta_n^i)-\inf(\Delta_n^i)\right)^2\right)^{1/2}\\&\leq b(p)^{1/p}\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{i=1}^N4\left(\sup|\Delta_n^i|\right)^2\right)^{1/2}\\&\leq b(p)^{1/p}\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{i=1}^N16m_g^2\left|\left|\varphi\right|\right|_\infty^2\right)^{1/2}\\&\leq 4b(p)^{1/p}m_g\left|\left|\varphi\right|\right|_\infty\end{aligned}$$

其中 $b(p)$ 由（13）给出，结论由此得证。 □

利用上述引理 3 并沿用Crisan和Doucet (2002，引理 4) 的方法，可得近似重新加权的误差界。

引理 4 (近似重加权)。 在满足 命题 2 的条件下，假设对于 $p\geq1$ 以及某些有限常数和 $D_{p,\ n}$

$$\mathbb{E}\left[\left|\eta_n^N(G_n^N\varphi)-\eta_n(G_n\varphi)\right|^p\right]^{1/p}\leq D_{p,n}\frac{\left|\left|\varphi\right|\right|_\infty}{N^{1/2}},$$

then

$$\mathbb{E}\left[\left|\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)-\Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)\right|^p\right]^{1/p}\leq\bar{C}_{p,n}\frac{\left|\left|\varphi\right|\right|_\infty}{N^{1/2}}$$

¯对于任意 $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$，以及某个有限常数 $C_{p,\ n}$。

证明。应用 Ψ_{G_n} 和 $\Psi_{G_n^N}$ 的定义，并考虑以下分解

$$\begin{aligned}\left|\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)-\Psi_{G_n}(\eta_n^N)(\varphi)\right|&=\left|\frac{\eta_n^N(G_n^N\varphi)}{\eta_n^N(G_n^N)}-\frac{\eta_n(G_n\varphi)}{\eta_n(G_n)}\right|\\&\leq\left|\frac{\eta_n^N(G_n^N\varphi)}{\eta_n^N(G_n^N)}-\frac{\eta_n^N(G_n^N\varphi)}{\eta_n(G_n)}\right|\\&+\left|\frac{\eta_n^N(G_n^N\varphi)}{\eta_n(G_n)}-\frac{\eta_n(G_n\varphi)}{\eta_n(G_n)}\right|.\end{aligned}$$

那么，对于第一项

$$\left|\frac{\eta_n^N(G_n^N\varphi)}{\eta_n^N(G_n^N)}-\frac{\eta_n^N(G_n^N\varphi)}{\eta_n(G_n)}\right|=\left|\frac{\eta_n^N(G_n^N\varphi)}{\eta_n^N(G_n^N)}\right|\left|\frac{\eta_n(G_n)-\eta_n^N(G_n^N)}{\eta_n(G_n)}\right|$$
$$\leq\frac{||\varphi||_\infty}{|\eta_n(G_n)|}|\eta_n(G_n)-\eta_n^N(G_n^N)|.$$

对于第二项

$$\left|\frac{\eta_n^N(G_n^N\varphi)}{\eta_n(G_n)}-\frac{\eta_n(G_n\varphi)}{\eta_n(G_n)}\right|=\frac{1}{|\eta_n(G_n)|}|\eta_n^N(G_n^N\varphi)-\eta_n(G_n\varphi)|.$$

因此，利用 假设 3 来保证 $G_n\geq m_g^{-1}>0$ 以及该假设，我们得到

$$\mathbb{E}\left[|\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)-\Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)|^p\right]^{1/p}\leq||\varphi||_\infty m_g\,\mathbb{E}\left[|\eta_n(G_n)-\eta_n^N(G_n^N)|^p\right]^{1/p}$$
$$+m_g\,\mathbb{E}\left[|\eta_n(G_n\varphi)-\eta_n^N(G_n^N\varphi)|^p\right]^{1/p}$$
$$\leq 2\,||\varphi||_\infty m_g^2\frac{D_{p,n}}{N^{1/2}}.$$

□

最后，我们使用与 Crisan和Doucet(2002, 引理5 中相同的论证来控制重采样步骤引入的误差。

引理5 (多项式重采样)。 在 命题 2的条件下，假设对任意 $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$，¯对于某个 $p\geq 1$ 以及某个有限常数 $C_{p,\ n}$

$$\mathbb{E}\left[|\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)-\hat{\eta}_n(\varphi)|^p\right]^{1/p}\leq\bar{C}_{p,n}\frac{||\varphi||_\infty}{N^{1/2}},$$

那么，经过多项式重采样执行的重采样步骤之后

$$\mathbb{E}\left[|\hat{\eta}_n^N(\varphi)-\hat{\eta}_n(\varphi)|^p\right]^{1/p}\leq C_{p,n}\frac{||\varphi||_\infty}{N^{1/2}}$$

对于任意 $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$，以及某个有限常数 $C_{p,\ n}$。

证明。证明沿用Crisan和Doucet(2002，引理5）。将其分为两项，并应用闵可夫斯基不等式

$$\mathbb{E}\left[|\hat{\eta}_n^N(\varphi)-\hat{\eta}_n(\varphi)|^p\right]^{1/p}\leq\mathbb{E}\left[|\hat{\eta}_n^N(\varphi)-\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)|^p\right]^{1/p}$$
$$+\mathbb{E}\left[|\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)-\hat{\eta}_n(\varphi)|^p\right]^{1/p}.$$

用 $\mathcal{F}_n^N$ σ $\mathcal{G}_{n-1}^N$ 域，并考虑函数序列： 对于， ， Δ_n^i $E\mapsto\mathbb{R}$ $i=1\ \ldots\ N$ n $\mathcal{F}_n^N=\sigma\left(X_n^i\ \ i\in\{1,\ldots,N\}\right)\vee$ 表示由截至（并包括）时刻 的加权样本生成的 -

$$\Delta_n^i(x):=\varphi(x)-\mathbb{E}\left[\varphi(\widetilde{X}_n^i)\mid\mathcal{F}_n^N\right].$$

在给定 $\mathcal{F}$ 的条件下 $_n^N$, $\Delta_n^i(\widetilde{X}_n^i)$ $i=1,\ldots,N$ 相互独立且期望均为 0，此外

$$\hat{\eta}_n^N(\varphi)-\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(\varphi(\widetilde{X}_n^i)-\mathbb{E}\left[\varphi(\widetilde{X}_n^i)\mid\mathcal{F}_n^N\right]\right)$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\Delta_n^i(\widetilde{X}_n^i).$$

根据引理 1,

$$\sqrt{N}\,\mathbb{E}\left[|\hat{\eta}_n^N(\varphi)-\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)|^p \mid \mathcal{F}_n^N\right]^{1/p} \leq b(p)^{1/p}\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sup(\Delta_n^i)-\inf(\Delta_n^i)\right)^2\right)^{1/2} \tag{18}$$

$$\leq b(p)^{1/p}\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{i=1}^{N}4\left(\sup|\Delta_n^i|\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\leq b(p)^{1/p}\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{i=1}^{N}16\,||\varphi||_\infty^2\right)^{1/2}$$

$$\leq 4b(p)^{1/p}\,||\varphi||_\infty\,,$$

其中 $b(p)$ 与式 (13) 中相同。由于 $\hat{}\eta_n(\varphi) \equiv \Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)$，该结果结合假设可得

$$\mathbb{E}\left[|\hat{\eta}_n^N(\varphi)-\hat{\eta}_n(\varphi)|^p\right]^{1/p} \leq 4b(p)^{1/p}\frac{||\varphi||_\infty}{N^{1/2}}+\bar{C}_{p,n}\frac{||\varphi||_\infty}{N^{1/2}}$$

$$\leq (4b(p)^{1/p}+\bar{C}_{p,n})\frac{||\varphi||_\infty}{N^{1/2}}.$$

因此，$C_{p,\ n}=4b(p)^{1/p}+\bar{C}_{p,\ n}$。 □

附录D 弱大数定律的证明：命题 1

弱大数定律的证明采用了与命题 2 类似的策略，并使用了引理 1中的 Marcinkiewicz-Zygmund 型不等式。需要强调的是，弱大数定律是在比命题 2 所用条件更弱的条件下得到的，因为引理 1 仅用于界定一些不需要假设 3 的量。

命题 1的证明。 证明采用归纳论证，其思路与 $\mathbb{L}_p$不等式类似。对于 $n=0$ 的情况，我们利用 $G_0^N \equiv G_0$ 这一事实，以及自归一化重要性抽样的弱大数定律（例如，Capp´e 等人（(2005年，定理 9.1.8））来证明 $\Psi_{G_0^N}(\eta_0^N)(\varphi) \xrightarrow{p} \Psi_{G_0}(\eta_0)(\varphi)$。利用这一结果，分解

$$\hat{\eta}_0^N(\varphi)-\hat{\eta}_0(\varphi)=\hat{\eta}_0^N(\varphi)-\Psi_{G_0^N}(\eta_0^N)(\varphi)+\Psi_{G_0^N}(\eta_0^N)(\varphi)-\hat{\eta}_0(\varphi),$$

由 (15) 和马尔可夫不等式，我们可以得出 $\hat{}\eta_0^N(\varphi)-\Psi_{G_0^N}(\eta_0^N)(\varphi) \xrightarrow{p} 0$。利用假设可知，$\hat{}\eta_0^N(\varphi)-\hat{}\eta_0(\varphi) \xrightarrow{p} 0$ 也随之收敛，因为 $\Psi_{G_0}(\eta_0)(\varphi)=\hat{}\eta_0(\varphi)$。下面的引理 6 至 9 表明，如果结果在时刻 $n-1$ 成立，那么在时刻 n 也成立。最后，我们通过归纳法完成证明。 □

附录D.1 命题1的证明所需辅助结果

与 $\mathbb{L}_p$ 不等式的证明类似，我们将众所周知的论证与一个结果（此处为引理 7）结合起来，该结果控制权重 G_n^N的贡献。特别是，引理 6、8 和9 可见于Capp´e 等人（(2005年，第 9.3 节）。

引理 6（变异步骤）。假设对于任意 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$，$\hat{}\eta_{n-1}^N(\varphi) \xrightarrow{p} \hat{}\eta_{n-1}(\varphi)$，那么在变异步骤之后，$\eta_n^N(\varphi) \xrightarrow{p} \eta_n(\varphi)$ 对任意 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$ 均成立。

证明。利用（17）和马尔可夫不等式，可得 $\eta_n^N(\varphi)-\hat{}\eta_{n-1}^N M_n(\varphi) \xrightarrow{p} 0$。利用假设可得

$$\hat{\eta}_{n-1}^N M_n(\varphi) \xrightarrow{p} \hat{\eta}_{n-1}M_n(\varphi).$$

结合上述两个结果并使用 Slutsky引理，我们得到 $\eta_n^N(\varphi) \xrightarrow{p} \eta_n(\varphi)$. □

引理 7（权重比较）。假设，对于任意 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$，$\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(\varphi) \xrightarrow{p} \Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})(\varphi)$，则对于任意 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$，$\eta_n^N(G_n^N\varphi) \xrightarrow{p} \eta_n(G_n\varphi)$。

证明。考虑如下分解

$$\eta_n^N(G_n^N\varphi) - \eta_n(G_n\varphi) = \eta_n^N(G_n^N\varphi) - \mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi) \mid \mathcal{F}_{n-1}^N\right] + \mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)|\mathcal{F}_{n-1}^N\right] - \eta_n(G_n\varphi).$$

根据假设，命题 7 和（12），我们有 $\mathbb{E}\left[\eta_n^N\left(G_n^N\varphi\right) \mid \mathcal{F}_{n-1}^N\right] \xrightarrow{p} \eta_n\left(G_n\varphi\right)$。此外，几乎必然有：

$$\mathbb{E}\left[|\eta_n^N(G_n^N\varphi) - \mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi) \mid \mathcal{F}_{n-1}^N\right]|^p \mid \mathcal{F}_{n-1}^N\right]^{1/p} \leq 4b(p)^{1/p} m_g \frac{||\varphi||_\infty}{N^{1/2}},$$

如引理 3所示。因此，根据马尔可夫不等式，$\eta_n^N\left(G_n^N\varphi\right) - \mathbb{E}\left[\eta_n^N\left(G_n^N\varphi\right) \mid \mathcal{F}_{n-1}^N\right] \xrightarrow{p} 0$。因此，$\eta_n^N\left(G_n^N\varphi\right) \xrightarrow{p} \eta_n\left(G_n\varphi\right)$。

□

引理 8（近似重加权）。假设对于任意 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$，$\eta_n^N(G_n^N\varphi) \xrightarrow{p} \eta_n(G_n\varphi)$，则$\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi) \xrightarrow{p} \Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)$ 对任意 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$ 均成立。

证明。根据 Ψ_{G_n} 和 $\Psi_{G_n^N}$ 的定义

$$\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi) - \Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi) = \frac{\eta_n^N(G_n^N\varphi)}{\eta_n^N(G_n^N)} - \frac{\eta_n(G_n\varphi)}{\eta_n(G_n)}.$$

将连续映射定理简单应用于该假设，可得

$$\frac{\eta_n^N(G_n^N\varphi)}{\eta_n^N(G_n^N)} \xrightarrow{p} \frac{\eta_n(G_n\varphi)}{\eta_n(G_n)},$$

结论随即成立。 □

引理 9（多项式重采样）。假设对任意 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$，$\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi) \xrightarrow{p} \hat{}\eta_n(\varphi)$，那么经过多项式重采样执行重采样步骤后，对任意 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$，有 $\hat{}\eta_n^N(\varphi) \xrightarrow{p} \hat{}\eta_n(\varphi)$。

证明。考虑分解

$$\hat{\eta}_n^N(\varphi) - \hat{\eta}_n(\varphi) = \hat{\eta}_n^N(\varphi) - \Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi) + \Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi) - \hat{\eta}_n(\varphi).$$

利用（18）和马尔可夫不等式，可得 $\hat{}\eta_n^N(\varphi) - \Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi) \xrightarrow{p} 0$。由于 $\hat{}\eta_n(\varphi) \equiv \Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)$，结合该假设即可得到

$$\hat{\eta}_n^N(\varphi) \xrightarrow{p} \hat{\eta}_n(\varphi).$$

□

E 命题5中偏差估计的证明命题5

命题5中偏差估计的证明命题5 采用了与以下证明相似的归纳方法命题 2，并遵循Olsson 和 Rydén (2004年)。

命题5的证明。 在时刻 $n = 0$，粒子 $\left(X_0^i\right)_{i=1}^N$ 是来自 $\eta_0 \equiv M_0$ 、根据 $G_0^N \equiv G_0 \equiv \mathrm{d}K_0/\mathrm{d}M_0$重新加权的独立同分布样本。因此，利用自归一化重要性抽样的标准结果（例如Liu (2001，第35页）可得

$$\left|\mathbb{E}\left[\Psi_{G_0^N}(\eta_0)(\varphi)\right] - \Psi_{G_0}(\eta_0)(\varphi)\right| \leq \bar{C}_0 \frac{||\varphi||_\infty}{N}.$$

为证明(b)，考虑 $\mathcal{F}_0^N := \sigma\left(X_0^i : \text{由 } i \in \{1,\ldots,N\}\right)$ 时刻 σ的加权粒子生成的$n=0$-场。于是，

$$\mathbb{E}\left[\hat{\eta}_0(\varphi)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\hat{\eta}_0(\varphi) \mid \mathcal{F}_0^N\right]\right] = \mathbb{E}\left[\Psi_{G_0^N}(\eta_0)(\varphi)\right],$$

结论由（a）即可推出。至于 $\mathbb{L}_p$-不等式的证明，假设结论在时刻 $n-1$成立。考虑（a）并使用三角不等式：

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)\right] - \Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)\right| &= \left|\mathbb{E}\left[\frac{\eta_n^N(G_n^N\varphi)}{\eta_n^N(G_n^N)}\right] - \Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)\right| \\ &\leq \left|\mathbb{E}\left[\frac{\eta_n^N(G_n^N\varphi)}{\eta_n^N(G_n^N)}\right] - \frac{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]}{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]}\right| + \left|\frac{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]}{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]} - \frac{\eta_n(G_n\varphi)}{\eta_n(G_n)}\right|.\end{aligned} \tag{19}$$

为控制重新加权步骤的偏差，我们对（19）进行估计。根据三角不等式，并像假设 3 中那样应用Olsson andRyd´en （2004年，引理2.3），可得第二项的上界

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]}{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]} - \frac{\eta_n(G_n\varphi)}{\eta_n(G_n)}\right| &\leq \left|\frac{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]}{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]} - \frac{\eta_n(G_n\varphi)}{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]}\right| + \left|\frac{\eta_n(G_n\varphi)}{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]} - \frac{\eta_n(G_n\varphi)}{\eta_n(G_n)}\right| \\ &= \left|\frac{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right] - \eta_n(G_n\varphi)}{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]}\right| + \left|\eta_n(G_n\varphi)\frac{\eta_n(G_n) - \mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]}{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]\eta_n(G_n)}\right| \\ &\leq m_g\left|\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right] - \eta_n(G_n\varphi)\right| + m_g\left|\left|\varphi\right|\right|_\infty\left|\eta_n(G_n) - \mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]\right|.\end{aligned}$$

然后，利用命题 7 和（12），可得

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right] - \eta_n(G_n\varphi)\right| &= \left|\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi) \mid \mathcal{F}_{n-1}^N\right]\right] - \eta_n(G_n\varphi)\right| \\ &= \left|\mathbb{E}\left[\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(K_n(U_n\varphi))\right] - \Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})(K_n(U_n\varphi))\right| \\ &\leq \frac{\bar{C}_{n-1}\left|\left|U_n\right|\right|_\infty\left|\left|\varphi\right|\right|_\infty}{N}\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由归纳假设得出。因此，

$$\left|\frac{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]}{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]} - \frac{\eta_n(G_n\varphi)}{\eta_n(G_n)}\right| \leq 2m_g\frac{\bar{C}_{n-1}\left|\left|U_n\right|\right|_\infty\left|\left|\varphi\right|\right|_\infty}{N}. \tag{20}$$

对于（19）中的第一项，考虑函数（u， v）在点（$\mapsto u/v$，u_0， v_0）附近的二维泰勒展开，其二阶余项采用拉格朗日形式

$$\frac{u}{v} = \frac{u_0}{v_0} + \frac{1}{v_0}(u-u_0) - \frac{u_0}{v_0^2}(v-v_0) + \frac{\theta_u}{\theta_v^3}(v-v_0)^2 - \frac{1}{\theta_v^2}(v-v_0)(u-u_0)$$

其中（θ_u， θ_v）是连接（u， v）和（u_0， v_0）的线段上的一点。将此泰勒展开应用于$\eta_n^N\left(G_n^N\varphi\right)/\eta_n^N\left(G_n^N\right)$，并在点（$\mathbb{E}\left[\eta_n^N\left(G_n^N\varphi\right)\right]$，$\mathbb{E}\left[\eta_n^N\left(G_n^N\right)\right]$）附近进行展开，如Olsson and Ryd´en （2004年，引理2.4）所示，可得

$$\begin{aligned}\frac{\eta_n^N(G_n^N\varphi)}{\eta_n^N(G_n^N)} =& \frac{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]}{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]} + \frac{1}{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]}\left(\eta_n^N(G_n^N\varphi) - \mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]\right) \\ &- \frac{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]}{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]^2}\left(\eta_n^N(G_n^N) - \mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]\right) + R_n^N(\theta_u,\theta_v)\end{aligned} \tag{21}$$

其中余项是 (θ_u,θ_v) 的函数，$(\eta_n^N(G_n^N\varphi)\ \eta_n^N(G_n^N))$ 与$(\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]$ 之间线段上的一点$\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right])$

$$\begin{aligned}R_n^N(\theta_u,\theta_v) :=& \frac{\theta_u}{\theta_v^3}\left(\eta_n^N(G_n^N) - \mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]\right)^2 \\ &- \frac{1}{\theta_v^2}\left(\eta_n^N(G_n^N\varphi) - \mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]\right)\left(\eta_n^N(G_n^N) - \mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]\right).\end{aligned}$$

对式（21）两边取期望可得

$$\mathbb{E}\left[\frac{\eta_n^N(G_n^N\varphi)}{\eta_n^N(G_n^N)}\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]}{\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]}+\mathbb{E}\left[R_n^N(\theta_u,\theta_v)\right].$$

由于线段的一个端点是随机的，(θ_u,θ_v) 也具有随机性；因为我们有 $0<m_g^{-1}\le G_n^N\le m_g$，由此可得 $\eta_n^N(G_n^N\varphi)\le m_g\|\varphi\|_\infty$、$\eta_n^N(G_n^N)\ge m_g^{-1}>0$，因此 $|\theta_u|\le m_g\|\varphi\|_\infty$，$|\theta_v^{-1}|\ge m_g^{-1}$ 几乎必然成立。因此，

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[R_n^N(\theta_u,\theta_v)\right]\right|&\le m_g^4\|\varphi\|_\infty\mathbb{E}\left[\left|\eta_n^N(G_n^N)-\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]\right|^2\right]\\&\quad+m_g^2\left|\mathbb{E}\left[\left|\eta_n^N(G_n^N\varphi)-\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]\right|\left|\eta_n^N(G_n^N)-\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N)\right]\right|\right]\right|.\end{aligned}$$

根据引理10，下面取 $l=m=1$，于是有

$$\left|\mathbb{E}\left[R_n^N(\theta_u,\theta_v)\right]\right|\le m_g^4A_{2,n}^2\frac{\|\varphi\|_\infty}{N}+m_g^2A_{2,n}^2\frac{\|\varphi\|_\infty}{N}.\tag{22}$$

结合（19）与（20）和（22），即可得到所需结果。

在（a）中得到偏差估计后，我们可以通过对 $\mathcal{F}_n^N$进行条件化来得到（b），其中 σ是由截至（并包括）时间 n的重采样步骤所生成的粒子系统的滤子，

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[\hat{\eta}_n^N(\varphi)\right]-\hat{\eta}_n(\varphi)\right|&=\left|\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\hat{\eta}_n^N(\varphi)\mid\mathcal{F}_n^N\right]\right]-\hat{\eta}_n(\varphi)\right|=\left|\mathbb{E}\left[\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)\right]-\hat{\eta}_n(\varphi)\right|\\&\le\frac{\bar{C}_n\|\varphi\|_\infty}{N},\end{aligned}$$

因为 $\hat{\eta}_n(\varphi)=\Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)$。 □

E.1 偏差估计证明的辅助结果

以下辅助结果可直接由 $\mathbb{L}_p$不等式、命题 2 和引理 3 推出；其证明与 Olsson and Ryd´en(2004年, 引理 2.2) 中的证明一样，应用詹森不等式和柯西-施瓦茨不等式即可。

引理10。 在假设 1 至 3下，对于任意 $n\ge0$ 以及任意 $p\ge1$，存在有限常数 $A_{p,n}$，使得对于任意可测有界函数 $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$

$$\mathbb{E}\left[\left|\eta_n^N(G_n^N\varphi)-\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]\right|^p\right]^{1/p}\le A_{p,n}\frac{\|\varphi\|_\infty}{\sqrt{N}}.$$

此外，对于所有 $\varphi,\psi\in\mathcal{B}_b(E)$，以及整数 $0\le l,m<\infty$

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}\left[\left|\eta_n^N(G_n^N\varphi)-\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]\right|^l\left|\eta_n^N(G_n^N\psi)-\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\psi)\right]\right|^m\right]\right|\\&\qquad\le\|\varphi\|_\infty^l\|\psi\|_\infty^m\frac{A_{p,n}^{l+m}}{N^{(l+m)/2}}.\end{aligned}$$

证明。为证明第一个断言，应用闵可夫斯基不等式

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\eta_n^N(G_n^N\varphi)-\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]\right|^p\right]^{1/p}&\le\mathbb{E}\left[\left|\eta_n^N(G_n^N\varphi)-\eta_n(G_n\varphi)\right|^p\right]^{1/p}\\&\quad+\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[\eta_n(G_n\varphi)-\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]\right|^p\right]^{1/p}\\&\le2\,\mathbb{E}\left[\left|\eta_n^N(G_n^N\varphi)-\eta_n(G_n\varphi)\right|^p\right]^{1/p},\end{aligned}$$

其中，第二个不等式是对第 1 行中的第二个期望应用詹森不等式得到的。我们可以应用 命题 2 和 引理 3，从而得到第一个结果。由第一个结果和柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left[\left|\eta_n^N(G_n^N\varphi)-\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]\right|^l\left|\eta_n^N(G_n^N\psi)-\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\psi)\right]\right|^m\right]\right| \\
&\quad\leq \mathbb{E}\left[\left|\eta_n^N(G_n^N\varphi)-\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\right]\right|^{2l}\right]^{1/2}\mathbb{E}\left[\left|\eta_n^N(G_n^N\psi)-\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\psi)\right]\right|^{2m}\right]^{1/2} \\
&\quad\leq ||\varphi||_\infty^l\,||\psi||_\infty^m\,\frac{A_{2l,n}^l A_{2m,n}^m}{N^{(l+m)/2}}.
\end{aligned}$$

□

F 命题 6 中中心极限定理的证明

命题 6 中中心极限定理的证明 沿用 Chopin (2004年) 的证明（另见 Douc和Moulines (2008）的方法；与 $\mathbb{L}_p$不等式的证明类似，该证明由三个引理组成，分别证明变异步骤、近似重加权步骤和多项式重采样步骤依分布收敛于一个正态随机变量，并给出一个控制近似权重行为的结果。

命题 6 的证明。 在时刻 $n=0$，我们有一个提议分布为 M_0、重要性权重为 $G_0^N\equiv G_0$ 的自归一化重要性采样估计量（例如参见 Chopin 和 Papaspiliopoulos (2020年，第 8.5 节）

$$\sqrt{N}\left[\Psi_{G_0^N}(\eta_0^N)(\varphi)-\Psi_{G_0}(\eta_0)(\varphi)\right]\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\bar{V}_0(\varphi)\right),$$

其中 $\bar{V}_0(\varphi)=\eta_0(G_0)^{-2}$方差$_{M_0}\left(G_0(\varphi-\hat{}\eta_0(\varphi))\right)$，该值有限，因为 $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$。为得到重采样后的结果，我们应用下文的 引理 14 并得到

$$\sqrt{N}\left[\hat{\eta}_0^N(\varphi)-\hat{\eta}_0(\varphi)\right]\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,V_0(\varphi)\right),$$

¯其中 $V_0(\varphi)=V_0(\varphi)+\text{var}_{\hat{\eta}_0}(\varphi)$，由于 $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$，因此它是有限的。

接着，假设该结果在时刻 $n-1$ 成立。 引理 11 对每个 $\varphi\in\mathcal{B}_b(E$)

$$\sqrt{N}\left[\eta_n^N(\varphi)-\eta_n(\varphi)\right]\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\widetilde{V}_n(\varphi)\right)$$

其中

$$\widetilde{V}_n(\varphi)=\hat{\eta}_{n-1}\left(\text{var}_{M_n}(\varphi)\right)+V_{n-1}(M_n\varphi)$$

是有限的，因为 $\hat{\eta}_{n-1}\left(\text{var}_{M_n}(\varphi)\right)\leq||\varphi||_\infty^2$。 引理12 表明

$$\sqrt{N}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)-\eta_n(G_n\varphi)\right]\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\widehat{V}_n(\varphi)\right)$$

^ ¯对任意 $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$，其中 $V_n(\varphi)=\text{var}_{\eta_n}(G_n\varphi)+V_{n-1}(K_n(U_n\varphi))$ 是有限的，因为函数 $G_n\varphi$ 有界。接着，引理 13 对每个 $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$

$$\sqrt{N}\left[\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)-\hat{\eta}_n(\varphi)\right]\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\bar{V}_n(\varphi)\right)$$

其中

$$\bar{V}_n(\varphi)=\frac{1}{\eta_n(G_n)^2}\widehat{V}_n\left(\varphi-\Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)\right).$$

最后，通过应用 引理 14 我们得出，对于每个 $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$

$$\sqrt{N}\left[\hat{\eta}_n^N(\varphi)-\hat{\eta}_n(\varphi)\right]\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,V_n(\varphi)\right)$$

其中

$$V_n(\varphi)=\text{var}_{\hat{\eta}_n}(\varphi)+\bar{V}_n(\varphi)$$

$\text{var}_{\hat{\eta}_n}(\varphi)\leq||\varphi||_\infty^2$为有限值。因此，通过归纳法，该结果对所有 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。

□

命题 6 的证明之辅助结果

我们在此汇总用于证明命题 6中中心极限定理的四个辅助结果。引理 11、13 和14 在序贯蒙特卡洛文献中广为人知，可见于Chopin（2004年），并在我们的情形下与引理12 结合使用，该引理控制了重要性权重中近似的影响。

关于变异步骤的第一个结果见 Chopin（2004年，引理 A.1）。

引理 11（变异步骤）。假设对于任意 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$，存在某个有限的 $V_{n-1}(\varphi)$

$$\sqrt{N}\left[\hat{\eta}_{n-1}^N(\varphi) - \hat{\eta}_{n-1}(\varphi)\right] \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, V_{n-1}(\varphi)\right) \tag{23}$$

那么，经过变异步骤后

$$\sqrt{N}\left[\eta_n^N(\varphi) - \eta_n(\varphi)\right] \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \widetilde{V}_n(\varphi)\right)$$

对于任意 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$，其中 $V_n(\varphi) = \hat{\eta}_{n-1}\left(\mathrm{var}_{M_n}(\varphi)\right) + V_{n-1}(M_n\varphi)$。

证明。A 为证明 p 阶的均值收敛，考虑以下分解

$$T_N := \sqrt{N}\left[\eta_n^N(\varphi) - \eta_n(\varphi)\right] = \sqrt{N}\left[\eta_n^N(\varphi) - \hat{\eta}_{n-1}^N M_n(\varphi)\right] + \sqrt{N}\left[\hat{\eta}_{n-1}^N M_n(\varphi) - \eta_n(\varphi)\right] = U_N + R_N$$

其中 $U_N := \sqrt{N}\left[\eta_n^N(\varphi) - \hat{\eta}_{n-1}^N M_n(\varphi)\right]$ 且 $R_N := \sqrt{N}\left[\hat{\eta}_{n-1}^N M_n(\varphi) - \eta_n(\varphi)\right]$。

考虑 $i = 1, \ldots, N$ 的函数 $\Delta_n^i \colon E \mapsto \mathbb{R}$

$$\Delta_n^i(x) := \frac{1}{\sqrt{N}}\left[\varphi(x) - \mathbb{E}\left[\varphi(X_n^i) \mid \mathcal{G}_{n-1}^N\right]\right],$$

使得

$$\begin{aligned} U_N &= \sqrt{N}\left[\eta_n^N(\varphi) - \hat{\eta}_{n-1}^N M_n(\varphi)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \varphi(X_n^i) - \mathbb{E}\left[\varphi(X_n^i) \mid \mathcal{G}_{n-1}^N\right] \\ &= \sum_{i=1}^N \Delta_n^i(X_n^i). \end{aligned}$$

记为 $\mathcal{H}_{n,\,i}^N := \mathcal{G}_{n-1}^N \vee \sigma\left(\left(X_n^j\right)_{j=1}^i\right)$。给定 $\mathcal{G}_{n-1}^N$，$\Delta_n^i(X_n^i)$ $i = 1, \ldots, N$ 相互独立；此外，由于 φ 的有界性，$(\Delta_n^i(X_n^i)\mathcal{H}_{n,\,i}^N)_{i=1}^N$ 是一个满足林德伯格条件的平方可积鞅差序列，并且

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mathrm{var}\left(\Delta_n^i(X_n^i) \mid \mathcal{H}_{n,i-1}^N\right) &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\left[\Delta_n^i(X_n^i)^2 \mid \mathcal{G}_{n-1}^N\right] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \mathbb{E}\left[\left(\varphi(X_n^i) - \mathbb{E}\left[\varphi(X_n^i) \mid \mathcal{G}_{n-1}^N\right]\right)^2 \mid \mathcal{G}_{n-1}^N\right] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \left(\mathbb{E}\left[\varphi(X_n^i)^2 \mid \mathcal{G}_{n-1}^N\right] - \mathbb{E}\left[\varphi(X_n^i) \mid \mathcal{G}_{n-1}^N\right]^2\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \left(M_n\varphi^2(\widetilde{X}_{n-1}^i) - \left(M_n\varphi(\widetilde{X}_{n-1}^i)\right)^2\right) \\ &= \hat{\eta}_{n-1}^N\left(\mathrm{var}_{M_n}(\varphi)\right) \to \hat{\eta}_{n-1}\left(\mathrm{var}_{M_n}(\varphi)\right) \end{aligned}$$

依概率收敛于 $N \to \infty$（命题 1）。因此，适用于三角阵的某个合适的中心极限定理的条件（例如Douc和Moulines（2008，定理A.3）均已满足，从而有 $\mathbb{E}\left[\exp\left(iuU_N\right) \mid \mathcal{G}_{n-1}^N\right] \xrightarrow{p} \exp\left(-\hat{\eta}_{n-1}\left(\mathrm{var}_{M_n}(\varphi)\right) u^2/2\right)$。直接应用该假设可得

$$R_N = \sqrt{N}\left[\hat{\eta}_{n-1}^N M_n(\varphi) - \eta_n(\varphi)\right] = \sqrt{N}\left[\hat{\eta}_{n-1}^N M_n(\varphi) - \hat{\eta}_{n-1} M_n(\varphi)\right] \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, V_{n-1}(M_n\varphi)\right).$$

T_N 的特征函数为

$$\Phi_{T_N}(u) = \mathbb{E}\left[\exp\left(iuT_N\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(iuR_N\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(iuU_N\right) \mid \mathcal{G}_{n-1}^N\right]\right].$$

因此，根据连续映射定理和 Slutsky引理，

$$\exp\left(iuR_N\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(iuU_N\right) \mid \mathcal{G}_{n-1}^N\right] \xrightarrow{d} \exp\left(-\hat{\eta}_{n-1}\left(\mathrm{var}_{M_n}\left(\varphi\right)\right)u^2/2 + iuZ\right)$$

其中 $Z \sim \mathcal{N}(0, V_{n-1}(M_n\varphi))$。因此，根据控制收敛定理，对于任意实数 u ，

$$\Phi_{T_N}(u) = \mathbb{E}\left[\exp\left(iuR_N\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(iuU_N\right) \mid \mathcal{G}_{n-1}^N\right]\right] \to \exp\left(-(\hat{\eta}_{n-1}\left(\mathrm{var}_{M_n}\left(\varphi\right)\right) + V_{n-1}(M_n\varphi))u^2/2\right)$$

和 L´évy 连续性定理（例如 Shiryaev (1996，定理 1，第 322 页）表明 T_N 服从均值为 0、方差为 ~的正态 $V_n(\varphi)$ = ^η_{n-1} (方差$_{M_n}(\varphi)$) + $V_{n-1}(M_n\varphi)$。 □

接下来我们证明，近似权重也会产生一个收敛于正态分布的随机变量：

引理 12（权重比较）。假设对于任意 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$ 以及某个有限的 $V_{n-1}(\varphi$)

$$\sqrt{N}\left[\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(\varphi) - \Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})(\varphi)\right] \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \bar{V}_{n-1}(\varphi)\right)$$

那么，

$$\sqrt{N}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi) - \eta_n(G_n\varphi)\right] \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \widehat{V}_n(\varphi)\right)$$

^ ¯对于任意 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$，其中 $V_n(\varphi) = \mathrm{var}_{\eta_n}(G_n\varphi) + V_{n-1}(K_n(U_n\varphi))$。

证明。考虑以下分解

$$\begin{aligned} T_N &:= \sqrt{N}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi) - \eta_n(G_n\varphi)\right] \\ &= \sqrt{N}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi) - \mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi) \mid \mathcal{F}_{n-1}^N\right]\right] + \sqrt{N}\left[\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi) \mid \mathcal{F}_{n-1}^N\right] - \eta_n(G_n\varphi)\right] \\ &= U_N + R_N \end{aligned}$$

其中 $U_N := \sqrt{N}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi) - \mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi) \mid \mathcal{F}_{n-1}^N\right]\right]$ 以及 $R_N := \sqrt{N}\left[\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi) \mid \mathcal{F}_{n-1}^N\right] - \eta_n(G_n\varphi)\right]$。为了控制 U_N，我们来考虑函数序列 Δ_n^i: $E \mapsto \mathbb{R}$，其中 $i = 1, \ldots, N$

$$\Delta_n^i(x) := \frac{1}{\sqrt{N}}\left[G_n^N(x)\varphi(x) - \mathbb{E}\left[G_n^N(X_n^i)\varphi(X_n^i) \mid \mathcal{F}_{n-1}^N\right]\right].$$

因此

$$\begin{aligned} U_N &= \sqrt{N}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi) - \mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi) \mid \mathcal{F}_{n-1}^N\right]\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N G_n^N(X_n^i)\varphi(X_n^i) - \mathbb{E}\left[G_n^N(X_n^i)\varphi(X_n^i) \mid \mathcal{F}_{n-1}^N\right] \\ &= \sum_{i=1}^N \Delta_n^i(X_n^i). \end{aligned}$$

记$\mathcal{H}_{n,\,i}^N := \mathcal{F}_{n-1}^N \vee \sigma\left(\left(X_n^j\right)_{j=1}^i\right)$。在给定 $\mathcal{F}_{n-1}^N$的条件下， $\Delta_n^i(X_n^i)$ $i = 1$，……， N彼此独立；此外，由于 φ 和 G_n^N具有有界性，$(\Delta_n^i(X_n^i)\mathcal{H}_{n,\,i}^N)_{i=1}^N$ 是一个平方可积鞅

满足林德伯格条件的序列，并且满足

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{var}\left(\Delta_n^i(X_n^i)\mid\mathcal{H}_{n,i-1}^N\right)&=\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left[\Delta_n^i(X_n^i)^2\mid\mathcal{F}_{n-1}^N\right]\\&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left[\left(G_n^N(X_n^i)\varphi(X_n^i)-\mathbb{E}\left[G_n^N(X_n^i)\varphi(X_n^i)\mid\mathcal{F}_{n-1}^N\right]\right)^2\mid\mathcal{F}_{n-1}^N\right]\\&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbb{E}\left[\left(G_n^N(X_n^i)\varphi(X_n^i)\right)^2\mid\mathcal{F}_{n-1}^N\right]-\mathbb{E}\left[G_n^N(X_n^i)\varphi(X_n^i)\mid\mathcal{F}_{n-1}^N\right]^2\right)\\&=\sum_{j=1}^{N}W_{n-1}^jM_n\left((G_n^N\varphi)^2\right)(X_{n-1}^j)-\left(\sum_{j=1}^{N}W_{n-1}^jM_n\left(G_n^N\varphi\right)(X_{n-1}^j)\right)^2\\&=\operatorname{var}_{\nu_{n-1}^N}\left(G_n^N\varphi\right)\end{aligned}$$

其中 la st 等式利用（11），并结合 $\nu_{n-1}^N:=\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)M_n$。利用 引理15，我们有 e

$$\operatorname{var}_{\nu_{n-1}^N}\left(G_n^N\varphi\right)\xrightarrow{p}\operatorname{var}_{\eta_n}\left(G_n\varphi\right).$$

因此，我们可以应用三角阵的中心极限定理（参见 Douc和Moulines (2008，定理A.3）得到$\mathbb{E}\left[\exp\left(iuU_N\right)\mid\mathcal{F}_{n-1}^N\right]\xrightarrow{p}\exp\left(-\operatorname{var}\eta_n(\varphi)u^2/2\right)$。

如引理 11的证明所示，直接应用假设可得

$$\begin{aligned}R_N&=\sqrt{N}\left[\mathbb{E}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)\mid\mathcal{F}_{n-1}^N\right]-\eta_n(G_n\varphi)\right]\\&=\sqrt{N}\left[\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(K_n(U_n\varphi))-\Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})(K_n(U_n\varphi))\right]\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\bar{V}_{n-1}(K_n(U_n\varphi))\right).\end{aligned}$$

T_N 的特征函数为

$$\Phi_{T_N}(u)=\mathbb{E}\left[\exp\left(iuT_N\right)\right]=\mathbb{E}\left[\exp\left(iuR_N\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(iuU_N\right)\mid\mathcal{F}_{n-1}^N\right]\right].$$

根据连续映射定理和Slutsky引理,

$$\exp\left(iuR_N\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(iuU_N\right)\mid\mathcal{F}_{n-1}^N\right]\xrightarrow{d}\exp\left(-\operatorname{var}_{\eta_n}(G_n\varphi)u^2/2+iuZ\right)$$

其中 $Z\sim\mathcal{N}(0,\bar{V}_{n-1}(K_n(U_n\varphi)$ ）。因此，根据 引理 11 中使用的相同论证， T_N 服从均值为 0、方差为 $\widehat{\ }$ $\bar{}$的正态 $V_n(\varphi)$ = 方差$_{\eta_n}(G_n\varphi)$ + $V_{n-1}(K_n(U_n\varphi)$ 。 □

将上面的引理12与Chopin (2004年，引理A.2) 中的论证相结合，可得到近似重新加权步骤的等价结果:

$\widehat{\ }$引理 13（近似重加权）。假设对于任意 $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$，存在某个有限的 $V_n(\varphi)$

$$\sqrt{N}\left[\eta_n^N(G_n^N\varphi)-\eta_n(G_n\varphi)\right]\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\widehat{V}_n(\varphi)\right)$$

then

$$\sqrt{N}\left[\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)-\Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)\right]\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\bar{V}_n(\varphi)\right)$$

对于任意 $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$，其中 $\bar{V}_n(\varphi)=\frac{1}{\eta_n\quad(U_n)_2}\widehat{V}_n\left(\varphi-\Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)\right)$ 。

证明。令 $\bar{\varphi}:=\varphi-\Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)$，并考虑向量函数

$$\psi(x)=\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\\psi_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{\varphi}(x)\\1\end{pmatrix}$$

具有有界分量 ψ_1 和 ψ_2。

将该假设与克拉默´-沃尔德定理（例如 Billingsley （1995，第29.4定理，第383页）结合可得

$$\sqrt{N}\begin{bmatrix}\eta_n^N(G_n^N\bar{\varphi})-\eta_n(G_n\bar{\varphi})\\ \eta_n^N(G_n^N)-\eta_n(G_n)\end{bmatrix}\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\Sigma_n(\psi)\right),\qquad \Sigma_n(\psi):=\begin{pmatrix}\widehat{V}_n(\psi_1) & \mathrm{cov}_n(\psi_1,\psi_2)\\ \mathrm{cov}_n(\psi_1,\psi_2) & \widehat{V}_n(\psi_2)\end{pmatrix},$$

^其中，$\mathrm{cov}_n(\psi_1,\psi_2)$ 表示由 V_n 导出的协方差算子。
应用带函数 $s(u,v)=u/v$ 的 δ-方法，并注意到 $\eta_n(G_n\bar{\varphi})=0$ 和 $\eta_n(G_n)>0$，可得

$$\begin{aligned}\sqrt{N}\left[\frac{\eta_n^N(G_n^N\bar{\varphi})}{\eta_n^N(G_n^N)}-\frac{0}{\eta_n(G_n)}\right]&=\sqrt{N}\left[\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)-\Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)\right]\\ &\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\nabla^T s(0,\eta_n(G_n))\Sigma_n(\psi)\nabla s(0,\eta_n(G_n))\right).\end{aligned}$$

s 在 $(0,\eta_n(G_n))$ 处的梯度为

$$\nabla^T s(u,v)\,|_{(u,v)=(0,\eta_n(G_n))}=\left(\frac{1}{v},-\frac{u}{v^2}\right)|_{(u,v)=(0,\eta_n(G_n))}=\left(\frac{1}{\eta_n(G_n)},0\right),$$

因此

$$\begin{aligned}\sqrt{N}\left[\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)-\Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)\right]&\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{\eta_n(G_n)^2}\widehat{V}_n(\psi_1)\right)\\ &\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{\eta_n(G_n)^2}\widehat{V}_n\left(\varphi-\Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)\right)\right),\end{aligned}$$

从而得到 $\bar{V}_n(\varphi)=\frac{1}{\eta_n(G_n)^2}\widehat{V}_n\left(\varphi-\Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)\right)$. □

最后，依据 Chopin (2004年，引理 A.3) 我们证明了多项式重采样步骤的收敛性。正如 Gerber 等人 (2019年，定理7) 所示，多项式重采样情形下的渐近方差为采用更复杂重采样方案所得到的渐近方差提供了一个上界。

¯引理 14（多项式重采样）。假设对于任意 $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$，且存在某个有限的 $V_n(\varphi)$

$$\sqrt{N}\left[\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)-\hat{\eta}_n(\varphi)\right]=\sqrt{N}\left[\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)-\Psi_{G_n}(\eta_n)(\varphi)\right]\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\bar{V}_n(\varphi)\right)\tag{24}$$

那么，在多项式重采样步骤之后

$$\sqrt{N}\left[\hat{\eta}_n^N(\varphi)-\hat{\eta}_n(\varphi)\right]\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,V_n(\varphi))$$

¯对于任意 $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$，其中 $V_n(\varphi)=$方差$_{\hat{\eta}_n}(\varphi)+V_n(\varphi)$。

证明。A s 为了证明 p 阶的均值收敛，考虑以下分解

$$T_N:=\sqrt{N}\left[\hat{}\eta_n^N(\varphi)-\hat{}\eta_n(\varphi)\right]=\sqrt{N}\left[\hat{}\eta_n^N(\varphi)-\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)\right]+\sqrt{N}\left[\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)-\hat{}\eta_n(\varphi)\right]=U_N+R_N$$

其中 $U_N:=\sqrt{N}\left[\hat{}\eta_n^N(\varphi)-\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)\right]$ 以及 $R_N:=\sqrt{N}\left[\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)-\hat{}\eta_n(\varphi)\right]$。

考虑对于 $i=1,\ldots,N$，函数 $\Delta_n^i($ $\widetilde{X}_n^i):E\mapsto\mathbb{R}$，定义在重采样后的粒子上

$$\Delta_n^i(\widetilde{X}_n^i):=\frac{1}{\sqrt{N}}\left[\varphi(\widetilde{X}_n^i)-\mathbb{E}\left[\varphi(\widetilde{X}_n^i)\mid\mathcal{F}_n^N\right]\right]=\frac{1}{\sqrt{N}}\left[\varphi(\widetilde{X}_n^i)-NW_n^i\varphi(X_n^i)\right],$$

以便

$$\begin{aligned}U_N&=\sqrt{N}\left[\hat{\eta}_n^N(\varphi)-\Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi)\right]\\ &=\frac{1}{\sqrt{N}}\left[\sum_{i=1}^N\left(\varphi(\widetilde{X}_n^i)-NW_n^i\varphi(X_n^i)\right)\right]\\ &=\sum_{i=1}^N\Delta_n^i(\widetilde{X}_n^i).\end{aligned}$$

记作 $\mathcal{H}_{n,\,i}^{N} := \mathcal{F}_n^N \vee \sigma\left(\left(X_n^j\right)_{j=1}^{i}\right)$。给定 $\mathcal{F}_n^N$，$\varphi(\widetilde{X}_n^i)$ $i=1$、…、N 是从分类分布中独立抽取的样本，其结果为 $\varphi(X_n^i)$ 的概率由 W_n^i 给出，其中 $i=1$、…、N。因此，对于 $i=1$、…、N，$\Delta_n^i(\widetilde{X}_n^i)$ 是条件独立且均值为 0 的随机变量。由于 φ 有界，$(\Delta_n^i(X_n^i)\mathcal{H}_{n,\,i}^{N})_{i=1}^{N}$ 是一个满足林德伯格条件的平方可积鞅差序列，并且

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \operatorname{var}\left(\Delta_n^i(\widetilde{X}_n^i) \mid \mathcal{H}_{n,i-1}^{N}\right) &= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[\Delta_n^i(\widetilde{X}_n^i)^2 \mid \mathcal{F}_n^N\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[\left(\varphi(\widetilde{X}_n^i) - \mathbb{E}\left[\varphi(\widetilde{X}_n^i) \mid \mathcal{F}_n^N\right]\right)^2 \mid \mathcal{F}_n^N\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(\mathbb{E}\left[\varphi(\widetilde{X}_n^i)^2 \mid \mathcal{F}_n^N\right] - \mathbb{E}\left[\varphi(\widetilde{X}_n^i) \mid \mathcal{F}_n^N\right]^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} W_n^i \varphi^2(X_n^i) - \left(\sum_{i=1}^{N} W_n^i \varphi(X_n^i)\right)^2 \\
&= \operatorname{var}_{\nu_n^N}(\varphi),
\end{aligned}$$

其中倒数第二个等式是多项分布的方差，且 $\nu_n^N := \Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)$。根据弱大数定律（命题 1），我们有

$$\nu_n^N(\varphi) = \Psi_{G_n^N}(\eta_n^N)(\varphi) = \frac{\eta_n^N(G_n^N\varphi)}{\eta_n^N(G_n^N)} \longrightarrow \frac{\eta_n(G_n\varphi)}{\eta_n(G_n)} = \hat{\eta}_n(\varphi)$$

依概率收敛。因此，

$$\operatorname{var}_{\nu_n^N}(\varphi) = \nu_n^N(\varphi^2) - \nu_n^N(\varphi)^2 \longrightarrow \hat{\eta}_n(\varphi^2) - \hat{\eta}_n(\varphi)^2 = \operatorname{var}_{\hat{\eta}_n}(\varphi) \qquad \text{in probability as } N \to \infty.$$

我们可以应用三角阵的中心极限定理（Douc和Moulines (2008，定理A.3）来证明 $\mathbb{E}\left[\exp\left(iuU_N\right) \mid \mathcal{F}_n^N\right] \xrightarrow{p} \exp\left(-\right.$ 方差$_{\hat{\eta}_n}(\varphi)u^2/2\left.\right)$。

将假设应用于 R_N

$$R_N = \sqrt{N}\left[\Psi_{G_n^N}(\hat{\eta}_n^N)(\varphi) - \hat{\eta}_n(\varphi)\right] \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \bar{V}_n(\varphi)\right).$$

T_N 的特征函数为

$$\Phi_{T_N}(u) = \mathbb{E}\left[\exp\left(iuT_N\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(iuR_N\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(iuU_N\right) \mid \mathcal{F}_n^N\right]\right],$$

根据连续映射定理和Slutsky引理，

$$\exp\left(iuR_N\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(iuU_N\right) \mid \mathcal{F}_n^N\right] \xrightarrow{d} \exp\left(-\operatorname{var}_{\hat{\eta}_n}(\varphi)u^2/2 + iuZ\right)$$

其中 $Z \sim \mathcal{N}(0,\ \bar{V}_n(\varphi))$。然后，根据引理 11中使用的相同论证，$T_N$ 服从正态分布$^{-}$，其均值为 0，方差为 $V_n(\varphi)$ $= \operatorname{var}^{\hat{\eta}_n}(\varphi) + V_n(\varphi)$。 □

F.2 辅助结果，用于引理12的证明

引理15。 在 假设 1 至 3下，对所有 $n \geq 0$ 以及每个 $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$，有

$$\operatorname{var}_{\nu_{n-1}^N}\left(G_n^N\varphi\right) \xrightarrow{p} \operatorname{var}_{\eta_n}\left(G_n\varphi\right),$$

其中 $\nu_{n-1}^N = \Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)M_n$。

证明。根据方差的定义，我们有

$$\mathrm{var}_{\nu_{n-1}^N}\left(G_n^N\varphi\right)=\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)\left(M_n((G_n^N\varphi)^2)\right)-\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)\left(M_n(G_n^N\varphi)\right)^2. \tag{25}$$

对于（25）中的第二项，我们可以按照 命题 7 的证明进行处理，并得到

$$\begin{aligned}\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)\left(M_n(G_n^N\varphi)\right)&=\sum_{j=1}^N\frac{G_{n-1}^N(X_{n-1}^j)}{\sum_{k=1}^N G_{n-1}^N(X_{n-1}^k)}\int M_n(X_{n-1}^j,\mathrm{d}x_n)G_n^N(x_n)\varphi(x_n)\\&=\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(K_n(\varphi U_n))\xrightarrow{p}\Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})(K_n(\varphi U_n))\end{aligned}$$

其中，收敛性由 命题1中的弱大数定律保证。连续映射定理随后保证 $\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)\left(M_n\left(G_n^N\varphi\right)\right)^2\xrightarrow{p}\Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})\left(K_n\left(\varphi U_n\right)\right)^2$。

为了控制（25）中的第一项，使用 $\mathbb{L}_p$ 在 命题 2中建立的不等式。首先，注- 意到，按照 命题 7 证明中的相同步骤，我们有 $\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)\left(M_n\left([G_n^N\varphi]^2\right)\right)=\mathbb{E}\left[\eta_n^N\left([G_n^N\varphi]^2\right)|\mathcal{F}_{n-1}^N\right]$。因此可以写成

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left|\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)\left(M_n((G_n^N\varphi)^2)\right)-\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)\left(M_n((G_n\varphi)^2)\right)\right|^p\right]^{1/p}\\&\quad=\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\mathbb{E}\left[\varphi(X_n^i)^2[G_n^N(X_n^i)^2-G_n(X_n^i)^2]|\mathcal{F}_{n-1}^N\right]\right|^p\right]^{1/p}\\&\quad\le\frac{2\left|\left|\varphi\right|\right|_\infty^2 m_g}{N}\sum_{i=1}^N\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[G_n^N(X_n^i)-G_n(X_n^i)|\mathcal{F}_{n-1}^N\right]\right|^p\right]^{1/p}.\end{aligned}$$

计算上述条件期望，我们得到

$$\mathbb{E}\left[G_n^N(X_n^i)-G_n(X_n^i)|\mathcal{F}_{n-1}^N\right]=\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(K_n(U_n))-\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(M_n(G_n)),$$

从而得到以下界

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[G_n^N(X_n^i)-G_n(X_n^i)|\mathcal{F}_{n-1}^N\right]\right|^p\right]^{1/p}&\le\mathbb{E}\left[\left|\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(K_n(U_n))-\Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})(M_n(G_n))\right|^p\right]^{1/p}\\&\quad+\mathbb{E}\left[\left|\Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})(M_n(G_n))-\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)(M_n(G_n))\right|^p\right]^{1/p}\\&\le\bar{C}_{p,n-1}\frac{||U_n||_\infty}{N^{1/2}}+\bar{C}_{p,n-1}\frac{m_g}{N^{1/2}}\end{aligned}$$

其中我们在第一个期望中用到了以下事实： $G_n=\mathrm{d}\hat{}\eta_{n-1}(U_n\cdot K_n)/\mathrm{d}\hat{}\eta_{n-1}M_n$，并利用 命题 2 得到了这些界。因此

$$\mathbb{E}\left[\left|\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)\left(M_n((G_n^N\varphi)^2)\right)-\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)\left(M_n((G_n\varphi)^2)\right)\right|^p\right]^{1/p}\le\bar{C}_{p,n-1}\frac{2\left|\left|\varphi\right|\right|_\infty^2 m_g}{N^{1/2}}(||U_n||_\infty+m_g),$$

因此 $\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)\left(M_n((G_n^N\varphi)^2)\right)-\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)\left(M_n((G_n\varphi)^2)\right)\xrightarrow{p}0$。命题 1 中的弱大数定律保证 $\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)\left(M_n((G_n\varphi)^2)\right)\xrightarrow{p}\Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})\left(M_n((G_n\varphi)^2)\right)$，并且根据连续映射定理，我们有

$$\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)\left(M_n((G_n^N\varphi)^2)\right)\xrightarrow{p}\Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})\left(M_n((G_n\varphi)^2)\right).$$

连续映射定理的进一步应用表明

$$\begin{aligned}\mathrm{var}_{\nu_{n-1}^N}\left(G_n^N\varphi\right)&=\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)\left(M_n((G_n^N\varphi)^2)\right)-\Psi_{G_{n-1}^N}(\eta_{n-1}^N)\left(M_n(G_n^N\varphi)\right)^2\\&\xrightarrow{p}\Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})\left(M_n((G_n\varphi)^2)\right)-\Psi_{G_{n-1}}(\eta_{n-1})\left(M_n(G_n\varphi)\right)^2\\&=\eta_n((G_n\varphi)^2)-\eta_n(G_n\varphi)^2=\mathrm{var}_{\eta_n}(G_n\varphi).\end{aligned}$$

□

G 方差表达式

G.1 闭式表达式

为了得到 中的方差表达式命题 8 引入未归一化测度是有益的 es

$$\hat{\gamma}_n(\mathrm{d}x_n) = \int U_n(x_{n-1}, x_n) K_n(x_{n-1}, \mathrm{d}x_n) \hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1}),$$

从而 $\hat{\eta}_n = \hat{\gamma}_n / \hat{\gamma}_n(1)$，其中 1 表示单位函数 $x \in E \mapsto 1$。我们强调，在标准SMC方法的文献中，未归一化测度 $\hat{\gamma}_n$ 通常具有满足 $\hat{\gamma}_n(1) = \prod_{p=0}^{n} \eta_p(G_p)$ 的总质量。在我们的情形下，当前对 $\hat{\gamma}_n$ 的定义更为方便，因为我们更直接地在边缘空间 E上进行处理。

采用上文引入的记号，我们有

$$G_n(x_n) = \frac{\mathrm{d}\hat{\eta}_{n-1}(U_n \cdot K_n)}{\mathrm{d}\hat{\eta}_{n-1} M_n}(x_n) = \frac{\mathrm{d}\hat{\eta}_{n-1}(U_n \cdot K_n)}{\mathrm{d}\eta_n}(x_n) = \frac{\mathrm{d}\hat{\gamma}_n}{\mathrm{d}\eta_n}(x_n),$$

由此容易看出， $\eta_n(G_n) = \hat{\gamma}_n(1)$，并且

$$\frac{G_n(x_n)}{\eta_n(G_n)} = \frac{\mathrm{d}\hat{\eta}_n}{\mathrm{d}\eta_n}(x_n) \tag{26}$$

对于所有 $n \geq 0$。

命题 8 的证明。 我们通过归纳法证明该结果。在 $n = 0$ 时有

$$\bar{V}_0(\varphi) = \eta_0 \left[\left(\frac{G_0}{\eta_0(G_0)} \left[\varphi - \hat{\eta}_0(\varphi) \right] \right)^2 \right].$$

在 $n = 1$时，根据 命题 6，有

$$\begin{aligned}
\bar{V}_1(\varphi) &= \frac{1}{\eta_1(G_1)^2} \hat{V}_1 \left(\varphi - \hat{\eta}_1(\varphi) \right) = \frac{1}{\eta_1(G_1)^2} \mathrm{var}_{\eta_1}(G_1 \left[\varphi - \hat{\eta}_1(\varphi) \right]) + \frac{1}{\eta_1(G_1)^2} \bar{V}_0 \left(K_1(U_1\varphi) - \hat{\eta}_1(\varphi) K_1(U_1) \right) \\
&= \frac{1}{\eta_1(G_1)^2} \eta_1 \left[\left(G_1 \left[\varphi - \hat{\eta}_1(\varphi) \right] \right)^2 \right] + \frac{1}{\eta_1(G_1)^2} \bar{V}_0 \left(K_1(U_1\varphi) - \hat{\eta}_1(\varphi) K_1(U_1) \right),
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由使用（26）得到。对于第二项，有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\eta_1(G_1)^2} \bar{V}_0 \left(K_1(U_1\varphi) - \hat{\eta}_1(\varphi) K_1(U_1) \right) \\
&\quad = \frac{1}{\eta_1(G_1)^2} \frac{1}{\eta_0(G_0)^2} \eta_0 \left[G_0^2 \left[K_1(U_1\varphi) - \hat{\eta}_1(\varphi) K_1(U_1) - \hat{\eta}_0(K_1(U_1\varphi) - \hat{\eta}_1(\varphi) K_1(U_1)) \right]^2 \right] \\
&\quad = \frac{1}{\eta_1(G_1)^2} \frac{1}{\eta_0(G_0)^2} \eta_0 \left[G_0^2 \left[K_1(U_1\varphi) - \hat{\eta}_1(\varphi) K_1(U_1) \right]^2 \right],
\end{aligned}$$

因为 $\hat{\eta}_0(K_1(U_1\varphi) - \hat{\eta}_1(\varphi) K_1(U_1)) = \hat{\gamma}_1(\varphi) - \hat{\eta}_1(\varphi)\hat{\gamma}_1(1) = 0$。因此

$$\bar{V}_1(\varphi) = \frac{1}{\eta_1(G_1)^2} \eta_1 \left[\left(G_1 \left[\varphi - \hat{\eta}_1(\varphi) \right] \right)^2 \right] + \frac{1}{\eta_1(G_1)^2} \frac{1}{\eta_0(G_0)^2} \eta_0 \left[G_0^2 \left[K_1(U_1\varphi) - \hat{\eta}_1(\varphi) K_1(U_1) \right]^2 \right],$$

如需证明。

现在我们建立归纳步骤：假设（9）对 $n - 1$成立，那么利用（26），

$$\begin{aligned}
\bar{V}_n(\varphi) &= \frac{1}{\eta_n(G_n)^2} \widehat{V}_n \left(\varphi - \hat{\eta}_n(\varphi) \right) \\
&= \frac{1}{\eta_n(G_n)^2} \mathrm{var}_{\eta_n}(G_n \left[\varphi - \hat{\eta}_n(\varphi) \right]) + \frac{1}{\eta_n(G_n)^2} \bar{V}_{n-1} \left(K_n(U_n \left[\varphi - \hat{\eta}_n(\varphi) \right]) \right) \\
&= \frac{1}{\eta_n(G_n)^2} \mathrm{var}_{\eta_n}(G_n \left[\varphi - \hat{\eta}_n(\varphi) \right]) + \frac{1}{\eta_n(G_n)^2} \bar{V}_{n-1} \left(K_n(U_n\varphi) - \hat{\eta}_n(\varphi) K_n(U_n) \right) \\
&= \frac{1}{\eta_n(G_n)^2} \eta_n \left[\left(G_n \left[\varphi - \hat{\eta}_n(\varphi) \right] \right)^2 \right] + \frac{1}{\eta_n(G_n)^2} \bar{V}_{n-1} \left(K_n(U_n\varphi) - \hat{\eta}_n(\varphi) K_n(U_n) \right).
\end{aligned} \tag{27}$$

令我们记 对 ψ_n ： $= K_n\left(U_n\varphi\right) - \hat{}\eta_n\left(\varphi\right) K_n\left(U_n\right)$ ，利用（9），根据归纳假设，我们有 ：

$$\bar{V}_{n-1}\left(\psi_n\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\prod_{j=k}^{n-1}\frac{1}{\eta_j(G_j)^2}\eta_k\left[\left(G_k\left[\Gamma_{k:n-1}\left(\psi_n\right) - \hat{\eta}_{n-1}(\psi_n)\Gamma_{k:n-1}(1)\right]\right)^2\right]. \tag{28}$$

现在，注意到

$$\hat{\eta}_{n-1}(\psi_n) = \hat{\eta}_{n-1}\left(K_n(U_n\varphi) - \hat{\eta}_n(\varphi)K_n(U_n)\right) = \hat{\gamma}_n(\varphi) - \hat{\eta}_n(\varphi)\hat{\gamma}_n(1) = 0,$$

并且 $\Gamma_{k:n-1}(K_n(U_n\varphi)) = \Gamma_{k:n-1}\circ\Gamma_n(\varphi) = \Gamma_{k:n}(\varphi)$。因此，我们可以将式（28）简化为

$$\bar{V}_{n-1}\left(K_n(U_n\varphi) - \hat{\eta}_n(\varphi)K_n(U_n)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\prod_{j=k}^{n-1}\frac{1}{\eta_j(G_j)^2}\eta_k\left[\left(G_k\left[\Gamma_{k:n}\left(\varphi\right) - \hat{\eta}_n(\varphi)\Gamma_{k:n}(1)\right]\right)^2\right]. \tag{29}$$

将式（29）代入式（27），得到

$$\begin{aligned}\bar{V}_n(\varphi) &= \frac{1}{\eta_n(G_n)^2}\eta_n\left[\left(G_n\left[\varphi - \hat{\eta}_n(\varphi)\right]\right)^2\right] + \frac{1}{\eta_n(G_n)^2}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{j=k}^{n-1}\frac{1}{\eta_j(G_j)^2}\eta_k\left[\left(G_k\left[\Gamma_{k:n}\left(\varphi\right) - \hat{\eta}_n(\varphi)\Gamma_{k:n}(1)\right]\right)^2\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n}\prod_{j=k}^{n}\frac{1}{\eta_j(G_j)^2}\eta_k\left[\left(G_k\left[\Gamma_{k:n}\left(\varphi\right) - \hat{\eta}_n(\varphi)\Gamma_{k:n}(1)\right]\right)^2\right]\end{aligned}$$

由归纳法可得该结果。 □

G.2 MPF 的方差

为了得到 第 2.1.1 节 中讨论的边缘粒子滤波器的方差表达式，我们只需将相应的 U_n、 K_n、 M_n 代入（9）即可。

根据 命题 8 可得

$$\bar{V}_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{n}\eta_k\left[\left(G_k\left[\Gamma_{k:n}\left[\varphi - \hat{\eta}_n(\varphi)\right]\right]\right)^2\right]\prod_{j=k}^{n}\frac{1}{\eta_j(G_j)^2}.$$

这个和式中的最后一项为

$$\begin{aligned}\eta_n\left[\left(\frac{G_n}{\eta_n(G_n)}\left[\Gamma_{n:n}\left[\varphi - \hat{\eta}_n(\varphi)\right]\right]\right)^2\right] &= \eta_n\left(\left(\frac{\mathrm{d}\hat{\eta}_n}{\mathrm{d}\eta_n}\right)^2\left[\varphi - \hat{\eta}_n(\varphi)\right]^2\right) \\ &= \int\frac{p(x_n|y_{1:n})^2\left[\varphi(x_n) - \hat{\eta}_n(\varphi)\right]^2}{\int q_n(x_n|x'_{n-1},y_n)p(x'_{n-1}|y_{n-1})\mathrm{d}x'_{n-1}}\mathrm{d}x_n.\end{aligned}$$

利用 U_n、 K_n、 M_n 在 第 2.1.1 节 中的表达式，可得

$$\eta_j(G_j) = \int g_j(y_j|x_j)f_j(x_j|x_{j-1})p(x_{j-1}|y_{1:j-1})\mathrm{d}x_{j-1:j} = p(y_j|y_{1:j-1}),$$

并且，对于任意 $\varphi\in\mathcal{B}_b(E)$，我们有

$$\begin{aligned}\left(\prod_{j=k+1}^{n}\frac{1}{\eta_j(G_j)}\right)\Gamma_{k:n}(\varphi)(x_k) &= \int\prod_{j=k+1}^{n}\frac{g_j(y_j|x_j)f_j(x_j|x_{j-1})}{p(y_j|y_{1:j-1})}\varphi(x_n)\mathrm{d}x_{k+1:n} \\ &= \int\frac{p(x_{k:n}|y_{1:n})}{p(x_k|y_{1:k})}\varphi(x_n)\mathrm{d}x_{k+1:n} \\ &= \int\frac{p(x_{k+1:n}|y_{k+1:n},x_k)p(x_k|y_{1:n})}{p(x_k|y_{1:k})}\varphi(x_n)\mathrm{d}x_{k+1:n} \\ &= \frac{p(x_k|y_{1:n})}{p(x_k|y_{1:k})}\int p(x_n|y_{k+1:n},x_k)\varphi(x_n)\mathrm{d}x_n,\end{aligned}$$

其中我们用到了这一事实:

$$\frac{p(x_{k:n}|y_{1:n})}{p(x_k|y_{1:k})} = \prod_{j=k+1}^{n} \frac{g_j(y_j|x_j)f_j(x_j|x_{j-1})}{p(y_j|y_{1:j-1})}. \tag{30}$$

对于所有 $k \neq 0$，我们有

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=k}^{n} \frac{1}{\eta_j(G_j)^2} \eta_k \left[\left(G_k \left[\Gamma_{k:n}(\varphi) - \hat{\eta}_n(\varphi)\Gamma_{k:n}(1) \right] \right)^2 \right] \\
&\quad = \int \frac{p(x_k|y_{1:k})^2}{\int q_k(x_k|x_{k-1}, y_k)p(x_{k-1}|y_{1:k-1})\mathrm{d}x_{k-1}} \frac{p(x_k|y_{1:n})^2}{p(x_k|y_{1:k})^2} \left(\int p(x_n|y_{k+1:n}, x_k) \left[\varphi(x_n) - \hat{\eta}_n(\varphi) \right] \mathrm{d}x_n \right)^2 \mathrm{d}x_k \\
&\quad = \int \frac{p(x_k|y_{1:n})^2}{\int q_k(x_k|x_{k-1}, y_k)p(x_{k-1}|y_{1:k-1})\mathrm{d}x_{k-1}} \left(\int p(x_n|y_{k+1:n}, x_k) \left[\varphi(x_n) - \hat{\eta}_n(\varphi) \right] \mathrm{d}x_n \right)^2 \mathrm{d}x_k,
\end{aligned}$$

并且，对于 $k = 0$

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=0}^{n} \frac{1}{\eta_j(G_j)^2} \eta_0 \left[\left(G_0 \left[\Gamma_{0:n}(\varphi) - \hat{\eta}_n(\varphi)\Gamma_{0:n}(1) \right] \right)^2 \right] \\
&\qquad = \int \frac{p(x_0|y_{1:n})^2}{q_0(x_0)} \left(\int p(x_n|y_{1:n}, x_0) \left[\varphi(x_n) - \hat{\eta}_n(\varphi) \right] \mathrm{d}x_n \right)^2 \mathrm{d}x_0,
\end{aligned}$$

由上式可得

$$\begin{aligned}
V_n^{\mathrm{MPF}}(\varphi) = &\int \frac{p(x_0|y_{1:n})^2}{q_0(x_0)} \left(\int p(x_n|y_{1:n}, x_0) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n \right] \mathrm{d}x_n \right)^2 \mathrm{d}x_0 \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \int \frac{p(x_k|y_{1:n})^2}{\int q_k(x_k|x_{k-1}, y_k)p(x_{k-1}|y_{1:k-1})\mathrm{d}x_{k-1}} \left(\int p(x_n|y_{k+1:n}, x_k) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n \right] \mathrm{d}x_n \right)^2 \mathrm{d}x_k \\
&+ \int \frac{p(x_n|y_{1:n})^2}{\int q_n(x_n|x_{n-1}, y_n)p(x_{n-1}|y_{1:n-1})\mathrm{d}x_{n-1}} (\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n)^2 \mathrm{d}x_n,
\end{aligned}$$

因为 $\hat{\eta}_n(\varphi) = \bar{\varphi}_n = \int \varphi(x_n)p(x_n|y_{1:n})\mathrm{d}x_n$。

G.2.1 自举粒子滤波的方差

自举粒子滤波是 MPF 的一个特例，其中 $q_n = K_n \equiv f_n$。将其代入 推论1 中的表达式，我们得到

$$\begin{aligned}
V_n^{\mathrm{BPF}}(\varphi) = &\int \frac{p(x_0|y_{1:n})^2}{f_0(x_0)} \left(\int p(x_n|y_{1:n}, x_0) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n \right] \mathrm{d}x_n \right)^2 \mathrm{d}x_0 \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \int \frac{p(x_k|y_{1:n})^2}{\int f_k(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|y_{1:k-1})\mathrm{d}x_{k-1}} \left(\int p(x_n|y_{k+1:n}, x_k) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n \right] \mathrm{d}x_n \right)^2 \mathrm{d}x_k \\
&+ \int \frac{p(x_n|y_{1:n})^2}{\int f_n(x_n|x_{n-1})p(x_{n-1}|y_{1:n-1})\mathrm{d}x_{n-1}} \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n \right]^2 \mathrm{d}x_n.
\end{aligned}$$

由于 $p(x_k|y_{1:n}) = \int p(x_{0:k}|y_{1:n})\mathrm{d}x_{0:k-1}$，并且

$$\frac{p(x_k|y_{1:n})^2}{\int f_k(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|y_{1:k-1})\mathrm{d}x_{k-1}} = \frac{p(x_{0:k}|y_{1:n})^2}{p(x_{0:k-1}|y_{1:k-1})f_k(x_k|x_{k-1})},$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
V_n^{\mathrm{BPF}}(\varphi) = & \int \frac{p(x_0|y_{1:n})^2}{f_0(x_0)} \left(\int p(x_n|y_{1:n}, x_0) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right] \mathrm{d}x_n \right)^2 \mathrm{d}x_0 \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \int \frac{p(x_{0:k}|y_{1:n})^2}{p(x_{0:k-1}|y_{1:k-1}) f_k(x_k|x_{k-1})} \left(\int p(x_n|y_{k+1:n}, x_k) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right] \mathrm{d}x_n \right)^2 \mathrm{d}x_{0:k} \\
& + \int \frac{p(x_{0:n}|y_{1:n})^2}{p(x_{0:n-1}|y_{1:n-1}) f_n(x_n|x_{n-1})} \int \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right]^2 \mathrm{d}x_{0:n},
\end{aligned} \tag{31}
$$

这与Johansen 和 Doucet (2008)，第2节 2.4节中的方差表达式一致。

G.3 MAPF 的方差

要得到第2节 2.1.2节 中讨论的边缘粒子滤波器的方差表达式，只需将相应的 U_n， K_n， M_n 代入（9）即可。

由命题 8 可得

$$
\bar{V}_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \eta_k \left[\left(G_k \left[\Gamma_{k:n}(\varphi) - \hat{\eta}_n(\varphi) \Gamma_{k:n}(1) \right] \right)^2 \right] \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{\eta_j(G_j)^2}.
$$

由于 MAPF 估计是通过对 $\hat{}\eta_n$ 执行额外的、权重为$\tilde{w}_n$的重要性采样步骤得到的，按照引理 13 的推导过程可得，MAPF 的方差为 $V_{\mathrm{MAPF}n}(\varphi) = \bar{V}_n(\tilde{w}_n \left[\varphi - \bar{\varphi}_n\right])$，其中$\bar{\varphi}_n := \int \varphi(x_n) p(x_n|y_{1:n}) \mathrm{d}x_n$。注意到

$$
\hat{\eta}_n(\tilde{w}_n \left[\varphi - \bar{\varphi}_n\right]) = \hat{\eta}_n \left(\frac{\mathrm{d}\pi_n}{\mathrm{d}\hat{\eta}_n} \left[\varphi - \bar{\varphi}_n\right] \right) = 0,
$$

其中 $\pi_n(\mathrm{d}x_n) := p(x_n|y_{1:n})\mathrm{d}x_n$，MAPF 的方差为

$$
V_n^{\mathrm{MAPF}}(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \eta_k \left[\frac{G_k^2}{\eta_k(G_k)^2} \Gamma_{k:n} \left(\tilde{w}_n \left[\varphi - \bar{\varphi}_n\right] \right)^2 \right] \prod_{j=k+1}^{n} \frac{1}{\eta_j(G_j)^2}.
$$

该求和中的最后一项为

$$
\eta_n \left[\frac{G_n^2}{\eta_n(G_n)^2} \Gamma_{n:n} \left(\tilde{w}_n \left[\varphi - \bar{\varphi}_n\right] \right)^2 \right] = \int \frac{p(x_n|y_{1:n})^2 \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right]^2}{\int q_n(x_n|x'_{n-1}, y_n) \hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x'_{n-1})} \mathrm{d}x_n.
$$

使用 e　　关于 $\tilde{w}_n$ （8）中的表达式以及 K_n， U_n 见第2节.1.2 和（30），我们发现

$$
\begin{aligned}
& \prod_{j=k+1}^{n} \frac{1}{\eta_j(G_j)} \Gamma_{k:n} \left(\tilde{w}_n \left[\varphi - \bar{\varphi}_n\right] \right)(x_k) \\
& = \prod_{j=k+1}^{n} \frac{1}{\eta_j(G_j)} \int \frac{g_{k+1}(y_{k+1}|x_{k+1}) \tilde{p}(y_{k+2}|x_{k+1})}{\tilde{p}(y_{k+1}|x_k)} f_{k+1}(x_{k+1}|x_k) \int \cdots \\
& \quad \cdots \int \frac{g_n(y_n|x_n) \tilde{p}(y_{n+1}|x_n)}{\tilde{p}(y_n|x_{n-1})} f_n(x_n|x_{n-1}) \frac{\mathrm{d}\pi_n}{\mathrm{d}\hat{\eta}_n}(x_n) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right] \mathrm{d}x_{k+1:n} \\
& = \int \left(\prod_{j=k+1}^{n} \frac{g_j(y_j|x_j) f_j(x_j|x_{j-1})}{\eta_j(G_j)} \right) \frac{\tilde{p}(y_{n+1}|x_n)}{\tilde{p}(y_{k+1}|x_k)} \frac{\mathrm{d}\pi_n}{\mathrm{d}\hat{\eta}_n}(x_n) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right] \mathrm{d}x_{k+1:n} \\
& = \left(\prod_{j=k+1}^{n} \frac{p(y_j|y_{1:j-1})}{\eta_j(G_j)} \right) \int \frac{p(x_{k:n}|y_{1:n})}{p(x_k|y_{1:k})} \frac{\tilde{p}(y_{n+1}|x_n)}{\tilde{p}(y_{k+1}|x_k)} \frac{\mathrm{d}\pi_n}{\mathrm{d}\hat{\eta}_n}(x_n) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right] \mathrm{d}x_{k+1:n} \\
& = \left(\prod_{j=k+1}^{n} \frac{p(y_j|y_{1:j-1})}{\eta_j(G_j)} \right) \frac{p(x_k|y_{1:n})}{p(x_k|y_{1:k})} \int p(x_{k+1:n}|x_k, y_{1:n}) \frac{\tilde{p}(y_{n+1}|x_n)}{\tilde{p}(y_{k+1}|x_k)} \frac{\mathrm{d}\pi_n}{\mathrm{d}\hat{\eta}_n}(x_n) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right] \mathrm{d}x_{k+1:n}.
\end{aligned} \tag{32}
$$

由于 $\hat{}\eta_n(\mathrm{d}x_n) = \tilde{p}(y_n$ $_{+1}|x_n)\pi_n(\mathrm{d}x_n)/\int \tilde{p}(y_{n+1}|x'_n)\pi_n(\mathrm{d}x'_n)$ 和 $\pi_n(\mathrm{d}x_n) = p(x_n|y_{1:n})\mathrm{d}x_n$，我们还有 tha t

$$\tilde{p}(y_{n+1}|x_n)\frac{\mathrm{d}\pi_n}{\mathrm{d}\hat{\eta}_n}(x_n) = \int \tilde{p}(y_{n+1}|x'_n)p(x'_n|y_{1:n})\mathrm{d}x'_n := \tilde{p}(y_{n+1}|y_{1:n})$$

and

$$\eta_j(G_j) = p(y_j|y_{1:j-1})\frac{\int p(x_j|y_{1:j})\tilde{p}(y_{j+1}|x_j)\mathrm{d}x_j}{\int p(x_{j-1}|y_{1:j-1})\tilde{p}(y_j|x_{j-1})\mathrm{d}x_{j-1}} = p(y_j|y_{1:j-1})\frac{\tilde{p}(y_{j+1}|y_{1:j})}{\tilde{p}(y_j|y_{1:j-1})},$$

由此可得

$$\prod_{j=k+1}^{n}\frac{p(y_j|y_{1:j-1})}{\eta_j(G_j)} = \frac{\tilde{p}(y_{k+1}|y_{1:k})}{\tilde{p}(y_{n+1}|y_{1:n})}.$$

利用上述结果，我们可以将（32）简化为

$$\begin{aligned}&\prod_{j=k+1}^{n}\frac{1}{\eta_j(G_j)}\Gamma_{k:n}\left(\tilde{w}_n\left[\varphi-\bar{\varphi}_n\right]\right)(x_k)\\&\quad=\frac{p(x_k|y_{1:n})}{p(x_k|y_{1:k})}\frac{\tilde{p}(y_{k+1}|y_{1:k})}{\tilde{p}(y_{k+1}|x_k)}\int p(x_n|y_{k+1:n},x_k)\left[\varphi(x_n)-\bar{\varphi}_n\right]\mathrm{d}x_n,\end{aligned}$$

因此，对于 $k\neq 0$，我们有

$$\begin{aligned}&\eta_k\left[\frac{G_k^2}{\eta_k(G_k)^2}\Gamma_{k:n}\left(\tilde{w}_n\left[\varphi-\bar{\varphi}_n\right]\right)^2\right]\prod_{j=k+1}^{n}\frac{1}{\eta_j(G_j)^2}\\&\quad=\int\frac{p(x_k|y_{1:n})^2}{\int q_k(x_k|x'_{k-1},y_k)\hat{\eta}_{k-1}(\mathrm{d}x'_{k-1})}\left(\int p(x_n|y_{k+1:n},x_k)\left[\varphi(x_n)-\bar{\varphi}_n\right]\mathrm{d}x_n\right)^2\mathrm{d}x_k,\end{aligned}$$

并且，对于 $k=0$,

$$\begin{aligned}&\eta_0\left[\frac{G_0^2}{\eta_0(G_0)^2}\Gamma_{0:n}\left(\tilde{w}_n\left[\varphi-\bar{\varphi}_n\right]\right)^2\right]\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\eta_j(G_j)^2}\\&\quad=\int\frac{p(x_0|y_{1:n})^2}{q_0(x_0)}\left(\int p(x_n|y_{1:n},x_0)\left[\varphi(x_n)-\bar{\varphi}_n\right]\mathrm{d}x_n\right)^2\mathrm{d}x_0,\end{aligned}$$

结合上述表达式，我们得到

$$\begin{aligned}V_n^{\mathrm{MAPF}}(\varphi)=&\int\frac{p(x_0|y_{1:n})^2}{q_0(x_0)}\left(\int p(x_n|y_{1:n},x_0)\left[\varphi(x_n)-\bar{\varphi}_n\right]\mathrm{d}x_n\right)^2\mathrm{d}x_0\\&+\int\frac{p(x_k|y_{1:n})^2}{\int q_k(x_k|x'_{k-1},y_k)\hat{\eta}_{k-1}(\mathrm{d}x'_{k-1})}\left(\int p(x_n|y_{k+1:n},x_k)\left[\varphi(x_n)-\bar{\varphi}_n\right]\mathrm{d}x_n\right)^2\mathrm{d}x_k\\&+\int\frac{p(x_n|y_{1:n})^2\left[\varphi(x_n)-\bar{\varphi}_n\right]^2}{\int q_n(x_n|x'_{n-1},y_n)\hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x'_{n-1})}\mathrm{d}x_n.\end{aligned}$$

G.3.1 FA-MAPF 的方差

FA-MAPF 的方差表达式可通过代入上述 $M_0 = q_0 = f_0$, $\tilde{p}(y_n|x_{n-1})$ $=p(y_n|x_{n-1})$ 和 $q_n(x_n|x_{n-1},y_n) = {}^{g_n}$ $_{(y_n|x_n)f_n(x_n|x_{n-1})\ p(y_n|x_{n-1})}$ 得出。注意到

$$\begin{aligned}\int q_n(x_n|x_{n-1},y_n)\hat{\eta}_{n-1}(\mathrm{d}x_{n-1}) &= \int\frac{g_n(y_n|x_n)f_n(x_{n-1},x_n)}{p(y_n|x_{n-1})}\frac{p(x_{n-1}|y_{1:n-1})p(y_n|x_{n-1})}{\int p(x'_{n-1}|y_{1:n-1})p(y_n|x'_{n-1})\mathrm{d}x'_{n-1}}\mathrm{d}x'_{n-1}\\&=\frac{g_n(y_n|x_n)\int f_n(x_{n-1},x_n)p(x_{n-1}|y_{1:n-1})\mathrm{d}x_{n-1}}{\int\int g_n(y_n|x_n)f_n(x'_{n-1},x_n)\mathrm{d}x_n p(x'_{n-1}|y_{1:n-1})\mathrm{d}x'_{n-1}} = p(x_n|y_{1:n})\end{aligned}$$

对于所有 $n \geq 1$，我们有

$$
\begin{aligned}
V_n^{\text{FA-MAPF}}(\varphi) = & \int \frac{p(x_0|y_{1:n})^2}{f_0(x_0)} \left(\int p(x_n|y_{1:n}, x_0) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right] \mathrm{d}x_n \right)^2 \mathrm{d}x_0 \\
& + \int \frac{p(x_k|y_{1:n})^2}{p(x_k|y_{1:k})} \left(\int p(x_n|y_{k+1:n}, x_k) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right] \mathrm{d}x_n \right)^2 \mathrm{d}x_k \\
& + \int p(x_n|y_{1:n}) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right]^2 \mathrm{d}x_n,
\end{aligned}
$$

这与以下文献中的方差表达式一致：Johansen 和 Doucet （2008，第 2.4 节）。

G.4 方差比较

现在，我们将推论 1 和2 中的方差表达式与以下文献中相应非边际算法的方差表达式进行比较：Johansen 和 Doucet （2008）。

G.4.1 边际粒子滤波器

推论 1 中的边际粒子滤波器方差可以分解为 $V_n^{\text{MPF}}(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_{n\,k}^{\text{MPF}},\ (\varphi)$ 其中

$$
\begin{aligned}
\sigma_{n,0}^{\text{MPF}}(\varphi) &= \int \frac{p(x_0|y_{1:n})^2}{q_0(x_0)} \left(\int p(x_n|y_{1:n}, x_0) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right] \mathrm{d}x_n \right)^2 \mathrm{d}x_0, \\
\sigma_{n,k}^{\text{MPF}}(\varphi) &= \int \frac{p(x_k|y_{1:n})^2}{\int q_k(x_k|x_{k-1}, y_k) p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) \mathrm{d}x_{k-1}} \left(\int p(x_n|y_{k+1:n}, x_k) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right] \mathrm{d}x_n \right)^2 \mathrm{d}x_k
\end{aligned}
$$

对于 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$，并且

$$
\sigma_{n,n}^{\text{MPF}}(\varphi) = \int \frac{p(x_n|y_{1:n})^2}{\int q_n(x_n|x_{n-1}, y_n) p(x_{n-1}|y_{1:n-1}) \mathrm{d}x_{n-1}} (\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n)^2 \mathrm{d}x_n,
$$

而 Johansen 和 Doucet 所给出的标准（即非边际）粒子滤波的方差 (2008</style, 第2节.4) 为 () ，$_k(\varphi)$，其中

$$
\begin{aligned}
\sigma_{n,0}^{\text{PF}}(\varphi) &= \int \frac{p(x_0|y_{1:n})^2}{q_0(x_0)} \left(\int p(x_n|y_{1:n}, x_0) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right] \mathrm{d}x_n \right)^2 \mathrm{d}x_0, \\
\sigma_{n,k}^{\text{PF}}(\varphi) &= \int \frac{p(x_{0:k}|y_{1:n})^2}{q_k(x_k|x_{k-1}, y_k) p(x_{0:k-1}|y_{1:k-1})} \left(\int p(x_n|y_{k+1:n}, x_k) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right] \mathrm{d}x_n \right)^2 \mathrm{d}x_{0:k}
\end{aligned}
$$

对于 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$，并且

$$
\sigma_{n,n}^{\text{PF}}(\varphi) = \int \frac{p(x_{0:n}|y_{1:n})^2}{q_n(x_n|x_{n-1}, y_n) p(x_{0:n-1}|y_{1:n-1})} (\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n)^2 \mathrm{d}x_{0:n}.
$$

由上文易知 $\sigma_{n\,0}^{\text{MPF}},\ (\varphi) = \sigma_{n\,0,}^{\text{PF}}\ (\varphi)$。利用 (30) 可得

$$
\begin{aligned}
p(x_k|y_{1:n}) &= \frac{\int p(x_{0:n}, y_{1:n}) \mathrm{d}x_{0:k-1} \mathrm{d}x_{k+1:n}}{p(y_{1:n})} \\
&= \frac{g_k(y_k|x_k)}{p(y_k|y_{1:k-1})} \int f_k(x_k|x_{k-1}) p(x_{0:k-1}|y_{1:k-1}) \mathrm{d}x_{0:k-1} \int \frac{p(x_{k:n}|y_{1:n})}{p(x_k|y_{1:k})} \mathrm{d}x_{k+1:n}
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
p(x_{0:k}|y_{1:n}) &= \frac{\int p(x_{0:n}, y_{1:n}) \mathrm{d}x_{k+1:n}}{p(y_{1:n})} \\
&= \frac{g_k(y_k|x_k)}{p(y_k|y_{1:k-1})} f_k(x_k|x_{k-1}) p(x_{0:k-1}|y_{1:k-1}) \int \frac{p(x_{k:n}|y_{1:n})}{p(x_k|y_{1:k})} \mathrm{d}x_{k+1:n},
\end{aligned}
$$

并且对于所有 $k \geq 1$，我们可以写成

$$\begin{aligned}
&\sigma_{n,k}^{\mathrm{PF}}(\varphi) - \sigma_{n,k}^{\mathrm{MPF}}(\varphi) \\
&\quad = \int g_k(y_k|x_k)^2 \left(\int \frac{f_k(x_k|x_{k-1})^2 p(x_{k-1}|y_{1:k-1})}{q_k(x_k|x_{k-1}, y_k)} \mathrm{d}x_{k-1} - \frac{\left(\int f_k(x_k|x_{k-1}) p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) \mathrm{d}x_{k-1}\right)^2}{\int q_k(x_k|x_{k-1}, y_k) p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) \mathrm{d}x_{k-1}} \right) \\
&\qquad \times \psi_k(x_k) \mathrm{d}x_k
\end{aligned}$$

其中我们定义了

$$\psi_k(x_k) := \frac{1}{p(y_k|y_{1:k-1})^2} \left(\int \frac{p(x_{k:n}|y_{1:n})}{p(x_k|y_{1:k})} \mathrm{d}x_{k+1:n} \right)^2 \left(\int p(x_n|y_{k+1:n}, x_k) \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right] \mathrm{d}x_n \right)^2$$

对于 $1 \leq k < n$ 和 $\psi_n(x_n) := \left[\varphi(x_n) - \bar{\varphi}_n\right]^2 / p(y_n|y_{1:n-1})^2$ 对于 $k = n$。由于 ψ_k 始终为正，因此若对所有 $x_k \in E$ 均有 $\sigma_{n,k}^{\mathrm{PF}}(\varphi) \geq \sigma_{n,k}^{\mathrm{MPF}}(\varphi)$，则

$$g_k(y_k|x_k)^2 \int \frac{f_k(x_k|x_{k-1})^2 p(x_{k-1}|y_{1:k-1})}{q_k(x_k|x_{k-1}, y_k)} \mathrm{d}x_{k-1} \geq g_k(y_k|x_k)^2 \frac{\left(\int f_k(x_k|x_{k-1}) p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) \mathrm{d}x_{k-1}\right)^2}{\int q_k(x_k|x_{k-1}, y_k) p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) \mathrm{d}x_{k-1}}. \quad (33)$$

(33) 中的条件等价于

$$\begin{aligned}
&\int \left[G_k^{\mathrm{PF}}(x_{k-1}, x_k)\right]^2 q_k(x_k|x_{k-1}, y_k) p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) \mathrm{d}x_{k-1} \\
&\qquad \geq \left[G_k^{\mathrm{MPF}}(x_k)\right]^2 \int q_k(x_k|x_{k-1}, y_k) p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) \mathrm{d}x_{k-1}
\end{aligned}$$

其中

$$G_k^{\mathrm{PF}}(x_{k-1}, x_k) = \frac{g_k(y_k|x_k) f_k(x_k|x_{k-1})}{q_k(x_k|x_{k-1}, y_k)}$$

且 $G_k^{\mathrm{MPF}}(x_k)$ 见 第 2.1.1 节。对于任意固定的 $x_k \in E$，我们将 $\nu_k(\mathrm{d}x_{k-1}, x_k)$ 表示为如下得到的概率分布

$$\nu_k(\mathrm{d}x_{k-1}, x_k) = \frac{q_k(x_k|x_{k-1}, y_k) p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) \mathrm{d}x_{k-1}}{\int q_k(x_k|x'_{k-1}, y_k) p(x'_{k-1}|y_{1:k-1}) \mathrm{d}x'_{k-1}},$$

那么上述条件等价于

$$\mathbb{E}_{\nu_k(\cdot, x_k)} \left[\left[G_k^{\mathrm{PF}}(\cdot, x_k)\right]^2 \right] \geq \left[G_k^{\mathrm{MPF}}(x_k)\right]^2.$$

由詹森不等式的一个简单应用可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\nu_k(\cdot, x_k)} \left[\left[G_k^{\mathrm{PF}}(\cdot, x_k)\right]^2 \right] &\geq \mathbb{E}_{\nu_k(\cdot, x_k)} \left[G_k^{\mathrm{PF}}(\cdot, x_k)\right]^2 \\
&= \left(\int \frac{q_k(x_k|x_{k-1}, y_k) p(x_{k-1}|y_{1:k-1})}{\int q_k(x_k|x'_{k-1}, y_k) p(x'_{k-1}|y_{1:k-1}) \mathrm{d}x'_{k-1}} \frac{g_k(y_k|x_k) f_k(x_k|x_{k-1})}{q_k(x_k|x_{k-1}, y_k)} \mathrm{d}x_{k-1} \right)^2 \\
&= g_k(y_k|x_k)^2 \frac{\left(\int f_k(x_k|x'_{k-1}) p(x'_{k-1}|y_{1:k-1}) \mathrm{d}x'_{k-1}\right)^2}{\left(\int q_k(x_k|x'_{k-1}, y_k) p(x'_{k-1}|y_{1:k-1}) \mathrm{d}x'_{k-1}\right)^2} \\
&= \left[G_k^{\mathrm{MPF}}(x_k)\right]^2,
\end{aligned}$$

这表明（33）成立，因此对所有 $1 \leq k \leq n$，$\sigma_{n,k}^{\mathrm{PF}}(\varphi) \geq \sigma_{n,k}^{\mathrm{MPF}}(\varphi)$。由此可直接推出 $V_n^{\mathrm{MPF}}(\varphi) \leq V_{\text{粒子滤波}n}(\varphi)$。

由于函数 $t \mapsto t^2$ 不是仿射函数，只有当 $G_k^{\mathrm{PF}}(\cdot, x_k)$ 关于 x_{k-1} 几乎必然为常数时，等号才成立（例如参见 Walker (2014)），即 $G_k^{\mathrm{PF}}(\cdot, x_k) = G_k^{\mathrm{PF}}(x_k)$ 几乎处处成立；这要求 $q_k \equiv f_k$，对应于自举粒子滤波。在其他所有情况下，边缘化带来的方差缩减可以通过例如 Walker(2014，定理 3.1）进行量化。

G.4.2 边缘辅助粒子滤波器

边缘辅助推论 2 中粒子滤波的方差可分解为 $V_n^{\mathrm{MAPF}}(\varphi)=\sum_{k=0}^{n}\sigma_{n,k}^{\mathrm{MAPF}}(\varphi)$，其中

$$\sigma_{n,0}^{\mathrm{MAPF}}(\varphi)=\int\frac{p(x_0|y_{1:n})^2}{q_0(x_0)}\left(\int p(x_n|y_{1:n},x_0)\left[\varphi(x_n)-\bar{\varphi}_n\right]\mathrm{d}x_n\right)^2\mathrm{d}x_0$$

$$\sigma_{n,k}^{\mathrm{MAPF}}(\varphi)=\int\frac{p(x_k|y_{1:n})^2}{\int q_k(x_k|x_{k-1},y_k)\tilde{p}(x_{k-1}|y_{1:k})\mathrm{d}x_{k-1}}\left(\int p(x_n|y_{k+1:n},x_k)\left[\varphi(x_n)-\bar{\varphi}_n\right]\mathrm{d}x_n\right)^2\mathrm{d}x_k$$

$$\sigma_{n,n}^{\mathrm{MAPF}}(\varphi)=\int\frac{p(x_n|y_{1:n})^2}{\int q_n(x_n|x_{n-1},y_n)\tilde{p}(x_{n-1}|y_{1:n})\mathrm{d}x_{n-1}}(\varphi(x_n)-\bar{\varphi}_n)^2\mathrm{d}x_n,$$

其中我们记 $\hat{\eta}_{k-1}(\mathrm{d}x_{k-1})=\tilde{p}(x_{k-1}|y_{1:k})\mathrm{d}x_{k-1}\propto p(x_{k-1}|y_{1:k-1})\tilde{p}(y_k|x_{k-1})\mathrm{d}x_{k-1}$。Johansen 和 Doucet (2008, 第2节 2.4) 中给出的标准（即非边缘）辅助粒子滤波的方差为 $V_{\text{辅助粒子滤波}n}(\varphi)=\sum_{k=0}^{n}\sigma_{n,k}^{\mathrm{APF}}(\varphi)$，其中

$$\sigma_{n,0}^{\mathrm{APF}}(\varphi)=\int\frac{p(x_0|y_{1:n})^2}{q_0(x_0)}\left(\int p(x_n|y_{1:n},x_0)\left[\varphi(x_n)-\bar{\varphi}_n\right]\mathrm{d}x_n\right)^2\mathrm{d}x_0$$

$$\sigma_{n,k}^{\mathrm{APF}}(\varphi)=\int\frac{p(x_{0:k}|y_{1:n})^2}{q_k(x_k|x_{k-1},y_k)\tilde{p}(x_{0:k-1}|y_{1:k})}\left(\int p(x_n|y_{k+1:n},x_k)\left[\varphi(x_n)-\bar{\varphi}_n\right]\mathrm{d}x_n\right)^2\mathrm{d}x_{0:k}$$

$$\sigma_{n,n}^{\mathrm{APF}}(\varphi)=\int\frac{p(x_{0:n}|y_{1:n})^2}{q_n(x_n|x_{n-1},y_n)\tilde{p}(x_{0:n-1}|y_{1:n})}(\varphi(x_n)-\bar{\varphi}_n)^2\mathrm{d}x_{0:n}.$$

由上可知，很容易看出 $\sigma_{n,0}^{\mathrm{MAPF}}(\varphi)=\sigma_{n,0}^{\mathrm{APF}}(\varphi)$。此外，按照G.4.1中的相同步骤，我们有

$$\begin{aligned}&\sigma_{n,k}^{\mathrm{APF}}(\varphi)-\sigma_{n,k}^{\mathrm{MAPF}}(\varphi)\\&=\int g_k(y_k|x_k)^2\left(\int\frac{f_k(x_k|x_{k-1})^2p(x_{k-1}|y_{1:k-1})}{q_k(x_k|x_{k-1},y_k)\tilde{p}(y_k|x_{k-1})}\mathrm{d}x_{k-1}-\frac{\left(\int f_k(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|y_{1:k-1})\mathrm{d}x_{k-1}\right)^2}{\int q_k(x_k|x_{k-1},y_k)\tilde{p}(x_{k-1}|y_{1:k})\mathrm{d}x_{k-1}}\right)\\&\quad\times\tilde{p}(y_k|y_{1:k-1})\psi(x_k)\mathrm{d}x_k\end{aligned}$$

其中 ψ_k 见G.4.1，且 $\tilde{p}(y_k|y_{1:k-1}):=\int\tilde{p}(y_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|y_{1:k-1})\mathrm{d}x_{k-1}$。按照 G.4.1中的方法，我们有 $\sigma_{n,k}^{\mathrm{APF}}(\varphi)\geq\sigma_{n,k}^{\mathrm{MAPF}}(\varphi)$，若

$$\mathbb{E}_{\nu_k(\cdot,x_k)}\left[\left[G_k^{\mathrm{APF}}(\cdot,x_k)\right]^2\right]\geq\left[G_k^{\mathrm{MAPF}}(x_k)\right]^2.$$

其中 $\nu_k(\cdot,x_k)$ 是针对所有 $x_k\in E$ 得到的概率分布，定义为

$$\nu_k(\mathrm{d}x_{k-1},x_k)=\frac{\tilde{p}(y_k|x_{k-1})q_k(x_k|\cdot,y_k)p(x_{k-1}|y_{1:k-1})\mathrm{d}x_{k-1}}{\int\tilde{p}(y_k|x'_{k-1})q_k(x_k|x'_{k-1},y_k)p(x'_{k-1}|y_{1:k-1})\mathrm{d}x'_{k-1}},$$

权重为

$$G_k^{\mathrm{APF}}(x_{k-1},x_k)=\frac{g_k(y_k|x_k)f_k(x_k|x_{k-1})}{\tilde{p}(y_k|x_{k-1})q_k(x_k|x_{k-1},y_k)}$$

且 $G_k^{\mathrm{MAPF}}(x_k)$ 在 第2.1.2节中给出。随后，简单应用詹森不等式可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\nu_k(\cdot,x_k)}\left[\left[G_k^{\mathrm{APF}}(\cdot,x_k)\right]^2\right]\\&\quad\geq\mathbb{E}_{\nu_k(\cdot,x_k)}\left[G_k^{\mathrm{APF}}(\cdot,x_k)\right]^2\\&\quad=\left(\int\frac{\tilde{p}(y_k|x_{k-1})q_k(x_k|x_{k-1},y_k)p(x_{k-1}|y_{1:k-1})}{\int\tilde{p}(y_k|x'_{k-1})q_k(x_k|x'_{k-1},y_k)p(x'_{k-1}|y_{1:k-1})\mathrm{d}x'_{k-1}}\frac{g_k(y_k|x_k)f_k(x_k|x_{k-1})}{\tilde{p}(y_k|x_{k-1})q_k(x_k|x_{k-1},y_k)}\mathrm{d}x_{k-1}\right)^2\\&\quad=g_k(y_k|x_k)^2\frac{\left(\int f_k(x_k|x'_{k-1})p(x'_{k-1}|y_{1:k-1})\mathrm{d}x'_{k-1}\right)^2}{\left(\int\tilde{p}(y_k|x'_{k-1})q_k(x_k|x'_{k-1},y_k)p(x'_{k-1}|y_{1:k-1})\mathrm{d}x'_{k-1}\right)^2}\\&\quad=\left[G_k^{\mathrm{MAPF}}(x_k)\right]^2,\end{aligned}$$

这表明，对所有 $1 \leq k \leq n$，$\sigma_{n\,k}^{\mathrm{APF}}(\varphi) \geq \sigma_{n\,k}^{\mathrm{MAPF}}(\varphi)$。由此可直接推出 $V_n^{\mathrm{MAPF}}(\varphi) \leq V_n^{\mathrm{APF}}(\varphi)$。

由于函数 $t \mapsto t^2$ 不是仿射函数，只有当 $G_k^{\mathrm{APF}}(\cdot, x_k)$ 关于 x_{k-1} 几乎必然为常数时，等号才成立（例如，参见 Walker (2014)），即 $G_k^{\mathrm{APF}}(\cdot, x_k) = G_k^{\mathrm{APF}}(x_k)$ 几乎处处成立；这发生于

$$q_k(x_k|x_{k-1}, y_k) = \frac{C(x_k) f(x_k|x_{k-1})}{\int C(x_k') f(x_k'|x_{k-1}) \mathrm{d}x_k'}$$

且 $\tilde{p}(y_k|x_{k-1}) = \int C_k(x_k) f_k(x_k|x_{k-1}) \mathrm{d}x_k$，其中 C_k 是某个正函数。事实上，在这种情况下，我们有 $G_k^{\mathrm{APF}}(x_{k-1}, x_k) = g_k(y_k|x_k)/C_k(x_k)$，并且可以看到，FA-APF 满足此条件，其中 $C_k(x_k) = g_k(y_k|x_k)$。在其他所有情况下，边缘化带来的方差缩减可以使用例如 Walker（2014，定理 3.1）进行量化。