arXiv:2303.03515v1 [math.CO] 6 Mar 2023

和积界与16维接吻数的一个不等式

Andrew Mendelsohn

英国伦敦伦敦帝国理工学院EEE系，SW7 2AZ。
andrew.mendelsohn18@imperial.ac.uk

摘要。我们得到了一个关于16维接吻数的不等式。为此，我们将Solymosi和Wong针对四元数得到的一个和积界推广到了16维的半代数。具体而言，我们得到不等式

$$k_{16} \geq \frac{\sum_{x\in\mathcal{R}} |\mathcal{S}_x|}{|\bigcup_{x\in\mathcal{R}} \mathcal{S}_x|} - 1,$$

其中， k_{16} 是16维接吻数， S_x 和 $\mathcal{R}$ 是下文定义的集合。在此过程中，我们还使用了与四元数情形类似的策略，得到了一个关于在取逆元运算下封闭的八元数子集的和积界。我们利用八维接吻数为240这一事实得到了该结果。具体而言，我们得到界

$$\max(|\mathcal{A}+\mathcal{A}|, |\mathcal{A}\mathcal{A}|) \geq \frac{|\mathcal{A}|^{4/3}}{(1928\cdot\lceil\log|\mathcal{A}|\rceil)^{1/3}},$$

其中， $\mathcal{A}$ 是一个八元数有限集，且如果 $x\in\mathcal{A}$， $x^{-1}\in\mathcal{A}$ 也如此。

1 引言

给定环的任意子集 $\mathcal{A}$，令 $\mathcal{A}\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{A}$ 中元素的乘积集合， $\mathcal{A}+\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{A}$ 中元素的和集合； $|\mathcal{A}\mathcal{A}|$ 和 $|\mathcal{A}+\mathcal{A}|$ 能有多大? 在 [3], Erd˝os 和 Szemer´edi 证明，对于整数的子集，$\max(|\mathcal{A}+\mathcal{A}|, |\mathcal{A}\mathcal{A}|) \gg |\mathcal{A}|^{1+\delta}$ 对某个 $\delta>0$ 成立。对于四元数，Chang [4] 证明了 $\delta\geq 1/54$，而 Solymosi 和 Wong [1] 证明了 δ 可以任意接近 $1/3$。关于四元数子集的指数，目前最好的结果来自 Basit 和 Lund [6]，的工作，作者在其中证明了 $\delta>1/3$。

在本文的第一部分，我们注意到，对于某些受条件约束的子集 $\mathcal{A}$， [1] 的方法可以推广到八元数。具体而言，对于子集 $\mathcal{A}\subset\mathbb{O}\setminus\{0\}$，令 $e_1, ..., e_{|\mathcal{A}/\mathcal{A}|}$ 为 $\mathcal{A}/\mathcal{A}:=\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\cap\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$ 的元素， a_i 表示按此顺序将 $\mathcal{A}$ 中的一个元素与 $\mathcal{A}^{-1}$ 中的一个元素相乘以得到 e_i 的方法数，而 b_i 表示按此顺序将 $\mathcal{A}^{-1}$ 中的一个元素与 $\mathcal{A}$ 中的一个元素相乘以得到 e_i 的方法数，其中 $i=$

1, ..., $|\mathcal{A}/\mathcal{A}|$。假设 a_i 和 b_i 满足 $\sum_i a_i b_i \geq \min(\sum_i a_i^2, \sum_i b_i^2)$，不妨设 $\min(\sum_i a_i^2, \sum_i b_i^2) = \sum_i a_i^2$。那么

$$\max\left(|\mathcal{A}+\mathcal{A}|, |\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}|\right) \gg \frac{|\mathcal{A}||\mathcal{A}/\mathcal{A}|^{1/4}}{\lceil \log |\mathcal{A}| \rceil^{1/4}}.$$

对于满足对取逆封闭的子集 $\mathcal{A}$，我们得到

$$\max\left(|\mathcal{A}+\mathcal{A}|, |\mathcal{A}\mathcal{A}|\right) \gg \frac{|\mathcal{A}|^{4/3}}{\lceil \log |\mathcal{A}| \rceil^{1/3}},$$

也就是说，δ 可以任意接近 $1/3$。据我们所知，这是针对八元数子集的首个此类界。

在此基础上，后半部分我们考察将倍增过程应用于八元数，由此得到一个除左半代数[1], ，称为“16元数”，以区别于通过 Cayley-Dickson 倍增过程得到的16维代数，以及实数集上的其他“十六元数”构造（例如参见 [7]）。这里的“除”是指每个非零元素都有一个乘法逆元。

我们将应用于八元数的论证推广到这个空间，使其适用于满足某些条件的集合，从而得到一个涉及16维接吻数 k_{16}的不等式。重新整理后，该不等式给出 k_{16} 的一个抽象下界，此下界以如下定义的特定16元数集合的大小之比表示。于是，第一部分关于八元数和积界的结果可以看作一个“热身”，表明 [1] 的工作可以适用于非结合环境。

特别是，我们发现，当 $\mathcal{A}$ 是一个仅前九个分量可能非零的 16元数有限集，且 $x \in \mathcal{A}/\mathcal{A}$ 时，令 $\ell(x)$ 表示 x 在 $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}$ 中的代表元数量，并定义

$$\mathcal{R} := \max_I \left\{ x \in \mathcal{A}/\mathcal{A} : \ell(x) \geq r(x) \text{ and } 2^I \leq \ell(x) < 2^{I+1} \right\}$$

and

$$\mathcal{S}_x := \left\{ (a+c, b+d) \in (\mathcal{A}+\mathcal{A}) \times (\mathcal{A}+\mathcal{A}) : ab^{-1} = x \text{ and } cd^{-1} = \phi(x) \right\},$$

其中 $x \in \mathcal{R}$ 和 $\phi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ 将 $\mathcal{R}$ 中的一个元素映射到 $\mathcal{R}$ 中与之最近的（不同的）元素，那么

$$k_{16} \geq \frac{\sum_{x\in\mathcal{R}} |\mathcal{S}_x|}{\left|\bigcup_{x\in\mathcal{R}} \mathcal{S}_x\right|} - 1.$$

我们尚未利用这一点具体地降低 k_{16}。遗憾的是，将十六元数加倍得到的“32元数”不具备论证成立所需的代数性质，因此我们无法用这种方法推导更高维度的界。

[1] 其中，左半代数是一个定义在域上的向量空间，带有一种二元运算，且左乘是线性的。

2 预备知识

给定实除法代数 $\mathbb{A}$中的一个有限集 $\mathcal{A}$，我们定义

$$\mathcal{A}+\mathcal{A}=\{a+b:a,b\in\mathcal{A}\} \text{ and } \mathcal{A}\mathcal{A}=\{a\cdot b:a,b\in\mathcal{A}\}.$$

类似地，我们令 $\mathcal{A}^{-1}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中元素的逆元集合。此外，我们还将用到 $\mathcal{A}$ 的比值集这一概念:

$$\mathcal{A}/\mathcal{A}:=\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\cap\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}.$$

我们还需要集合的乘法能量这一概念:

定义1. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{A}$ 中的一个有限集。那么， $\mathcal{A}$ 的乘法能量定义为

$$E(\mathcal{A})=|\{(a,b,c,d)\in\mathcal{A}^4:ca=db\}|.$$

我们还关注下面这个相关集合:

$$E'(\mathcal{A})=|\{(a,b,c,d)\in\mathcal{A}^4:ab^{-1}=c^{-1}d\}|.$$

注意，当 $\mathcal{A}$ 是结合环的子集时，这两个集合相同，并且 $E(\mathcal{A})=E'(\mathcal{A})$。然而，对于八元数 $\mathbb{O}$的子集，情况显然并非如此。

对于结合的 $\mathbb{A}$，有如下界（使用柯西-施瓦茨不等式）：

$$E(\mathcal{A})\geq\frac{|\mathcal{A}|^4}{|\mathcal{A}\mathcal{A}|}.$$

我们希望得到关于 $E'(\mathcal{A})$ 且满足 $\mathcal{A}\subset\mathbb{O}$ 的类似形式的界；下面给出一个引理:

引理1. 设 $\mathcal{A}\subset\mathbb{O}$和 $0\notin\mathcal{A}$。设 $e_1,...,e_{|\mathcal{A}/\mathcal{A}|}$是 $\mathcal{A}/\mathcal{A}$的元素， a_i是将 $\mathcal{A}$的一个元素与 $\mathcal{A}^{-1}$的一个元素（按此顺序）相乘得到 e_i的方式数， b_i 是将 $\mathcal{A}^{-1}$ 的一个元素与 $\mathcal{A}$的一个元素（按此顺序）相乘得到 e_i的方式数，其中 $i=1,...,|\mathcal{A}/\mathcal{A}|$。假设 a_i和 b_i满足 $\sum_i a_ib_i\geq\min(\sum_i a_i^2,\sum_i b_i^2)$。那么

$$E'(\mathcal{A})\geq\frac{|\mathcal{A}|^4|\mathcal{A}/\mathcal{A}|}{\min\left(|\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}|,|\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}|\right)^2}.$$

当 $\mathcal{A}$ 关于取逆元封闭时， $E'(\mathcal{A})\geq\frac{|\mathcal{A}|^4}{|\mathcal{A}\mathcal{A}|}$。

证明。不失一般性，假设 $\min(\sum_i a_i^2,\sum_i b_i^2)=\sum_i a_i^2$。令 $m:=|\mathcal{A}/\mathcal{A}|$。注意 $\sum_{i=1}^m a_i=\frac{|\mathcal{A}||\mathcal{A}^{-1}||\mathcal{A}/\mathcal{A}|}{|\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}|}=\frac{|\mathcal{A}|^2|\mathcal{A}/\mathcal{A}|}{|\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}|}$。于是 $E'(\mathcal{A})=\sum_{i=1}^m a_ib_i\geq\sum_{i=1}^m a_i^2=\|(a_1,...,a_m)\|^2\|(1/\sqrt{m},...,1/\sqrt{m})\|^2\geq(\sum_{i=1}^m a_i)^2=\frac{|\mathcal{A}|^4|\mathcal{A}/\mathcal{A}|^2}{|\mathcal{A}/\mathcal{A}||\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}|^2}=\frac{|\mathcal{A}|^4|\mathcal{A}/\mathcal{A}|}{|\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}|^2}$，根据柯西-施瓦茨不等式。当 $\mathcal{A}=\mathcal{A}^{-1}$ 时，不等式可简化为所述结果。

□

复数象限、四元数十六分象限和八元数六十四分象限 可以将复平面划分为若干象限，并考虑给定复数 $a+ib$ 的两个系数均为正，或均为负的情形。这对应于该复数位于平面的右上象限或左下象限。此外，如果两个复数的系数均为正或均为负，则可以说它们位于同一象限。这样，任意两个此类复数之和的范数都大于其中任一复数的范数。

类似地，可以根据一个四元数的所有系数是否全为正、全为负（或两者皆非）来划分四元数。此时，按照 [1], ，如果两个四元数的系数全为正，或全为负，我们就说它们位于同一个十六分象限（对于给定四元数的系数符号向量，共有 $16=2^4$ 种组合）。

最后，我们对八元数也作出相同要求：如果两个八元数的系数全为正或全为负，就称它们位于同一个五十二分象限。这样一来，任意两个此类八元数之和的范数都大于被相加的各元素的范数。

十六元数 凯莱-迪克森过程是一种从代数 $\mathbb{A}_{n-1}$出发，构造一个维数为原来两倍的新代数 $\mathbb{A}_n$ 的方法。应用于 $\mathbb{A}_0=\mathbb{R}$后，依次得到 $\mathbb{A}_1=\mathbb{C}$、 $\mathbb{A}_2=\mathbb{H}$和 $\mathbb{A}_3=\mathbb{O}$，总共迭代三次。这些都是赋范除法代数。Hurwitz 证明，它们是仅有的赋范实除法代数；后来，Pfister [9] 给出了一个恒等式，说明两个 16 个平方数之和的乘积可以写成 16 个有理数平方之和，这实质上表明实代数在更高维数下也存在范数。特别地，在任何 2 的幂次维数下，都存在一个带有范数的代数（其范数满足一些有时被称为“良好赋范”的性质）。然而，当 $n>3$时，$\mathbb{A}_n$ 就不再是除法代数，因此范数不具乘法性：特别是，由于存在零因子，可能会有 $\|ab\|=0\neq\|a\|\cdot\|b\|$。

Conway 和 Smith 曾指出，通过调整凯莱-迪克森构造，可以构造出一种产生乘法范数的倍增过程。然而，由于赋范除法代数只有 $n<4$，到了 $n=4$ 时，就必须以牺牲其他性质为代价来换取范数的乘法性：例如，交替性（即 $x(xy)=x^2y$）此时便不再成立。

Smith 对由这种调整后的凯莱-迪克森过程得到的代数进行了深入研究 [5]（似乎还与 Conway 有过合作；在 [8] 中，这一过程被称为“Conway-Smith 倍增过程”），并将其称为 2^n-元数。给定 $\mathbb{A}_{n-1}$ 中的两个元素，我们将 $\mathbb{A}_n$ 定义为其加法群为 $\mathbb{A}_{n-1}\times\mathbb{A}_{n-1}$，并配备如下乘法规则的代数：

$$(a,b)(c,d)=\left(ac-\overline{bd},\overline{bc}+\overline{\bar{b}\bar{a}\overline{b^{-1}d}}\right),$$

其中 $\bar{\cdot}$是 $\mathbb{A}_{n-1}$上的共轭。对于 2^n元数，共轭可写作 $(a,b)=(\overline{a},-b)$，其中 $a,b\in\mathbb{A}_{n-1}$。当 $n=4$时，也就是在十六元数的情形下，

上式可简化为

$$(a,b)(c,d)=\left(ac-d\bar{b},cb+\bar{a}b^{-1}\cdot bd\right)$$

当 $b=0$ 时，乘法定义为 $(a,0)(c,d)=(ac,\bar{a}d)$。我们列出 2^n-元数的基本性质。

命题1。 *[5, 定理 15]* 若 $a,b,x,y\in\mathbb{A}_n$, $n\geq 0$ 且 $s,t\in\mathbb{R}$，则

1. 存在唯一的 A 2^n-元数 1，且 $1x=x1=x$。 2. 存在唯一的 A 2^n-元数 0，满足 $0+x=x+0=x$ 且 $0x=x0=0$。 3. $x+y=y+x$, $(x+y)+z=x+(y+z)$；存在 $-x$，满足 $x+(-x)=x-x=0$。 4. 存在一个范数 $\|\cdot\|$，使得 $\|x\|^2=x\bar{x}=\bar{x}x$ 且 $\|x\|^2\|y\|^2=\|xy\|^2$。 5. $s\cdot xy=sx\cdot y=xs\cdot y=x\cdot sy=x\cdot ys$。 6. “弱线性”成立：$(x+s)y=xy+sy$ 且 $x(y+s)=xy+xs$。 7. 左分配律成立：$x(y+z)=xy+xz$。 8. 若 $x\neq 0$，则存在唯一的 x^{-1} 满足 $x^{-1}x=xx^{-1}=1$，且等于 $x^{-1}=\bar{x}\|x\|^{-2}$。取逆与复共轭可交换：$\overline{x^{-1}}=\bar{x}^{-1}$。 9. 左交错律成立：$x\cdot xy=x^2y$。 10. 左消去律成立：$x\cdot x^{-1}y=y$。

请注意，上述许多性质都具有单向性。特别地，16元数构成一个除左半代数，因为所有非零元素都有逆元，但它们不具备成为代数所需的完整分配律性质。

对于16元数的有限子集，我们按照八元数情形中的相同方式定义 $\mathcal{A}+\mathcal{A}$、$\mathcal{A}\mathcal{A}$、$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}$、$E$（$\mathcal{A}$）和 E'（$\mathcal{A}$）。我们用 $\mathbb{S}$表示16元数。当 $\mathcal{A}\subset\mathbb{O}$ 时，对 $\mathcal{A}\subset\mathbb{S}$ 情形下 E'（$\mathcal{A}$）的界的引理可立即推广，我们将其陈述如下。

引理2. 设 $\mathcal{A}\subset\mathbb{S}$ 和 $0\notin\mathcal{A}$。设 e_1、...、$e_{|\mathcal{A}/\mathcal{A}|}$ 为 $\mathcal{A}/\mathcal{A}$的元素， a_i 为将 $\mathcal{A}$ 中的一个元素与 $\mathcal{A}^{-1}$ 中的一个元素相乘（按此顺序）得到 e_i的方式数， b_i 为将 $\mathcal{A}^{-1}$ 中的一个元素与 $\mathcal{A}$ 中的一个元素相乘（按此顺序）得到 e_i的方式数，其中 $i=1$、...、$|\mathcal{A}/\mathcal{A}|$。假设 a_i 和 b_i 满足 $\sum_i a_ib_i\geq\min\left(\sum_i a_i^2,\ \sum_i b_i^2\right)$。那么

$$E'(\mathcal{A})\geq\frac{|\mathcal{A}|^4|\mathcal{A}/\mathcal{A}|}{\min\left(|\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}|,|\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}|\right)^2}.$$

当 $\mathcal{A}$ 在取逆下封闭时， $E'(\mathcal{A})\geq\frac{|\mathcal{A}|^4}{|\mathcal{A}\mathcal{A}|}$。

九元数 16元数中由最后七个分量均为零的元素构成的子集，是一个很有用的子集。这是因为它是同时满足左分配律和右分配律的最大加法封闭子集，而且在取逆下也封闭（但在乘法下不封闭）。左分配律和右分配律对于下面的论证似乎都至关重要。我们将在下文证明这一基本性质。

命题2. 设 x、y、$z\in\mathbb{S}\setminus 0$ 和 x 是九元数。那么（$y+z$）$x=yx+zx$。

证明. 将 $x = (x_1, x_2)$ 写作 $x_i \in \mathbb{O}$, $i = 1, 2$, 对 y和 z也作类似处理。我们有 $x_2 \in \mathbb{R}$。于是

$$\begin{aligned}(y+z)x &= (y_1+z_1, y_2+z_2)(x_1, x_2)\\ &= \big((y_1+z_1)x_1 - x_2(\overline{y_2+z_2}), x_1(y_2+z_2) + (\overline{y_1+z_1})(y_2+z_2)^{-1}\cdot(y_2+z_2)x_2\big)\\ &= (y_1x_1 + z_1x_1 - x_2\overline{y_2} - x_2\overline{z_2}, x_1y_2 + x_1z_2 + (\overline{y_1}+\overline{z_1})x_2)\,.\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}yx + zx &= (y_1, y_2)(x_1, x_2) + (z_1, z_2)(x_1, x_2)\\ &= \big(y_1x_1 - x_2\overline{y_2}, x_1y_2 + \overline{y_1}y_2^{-1}\cdot y_2x_2\big) + \big(z_1x_1 - x_2\overline{z_2}, x_1z_2 + \overline{z_1}z_2^{-1}\cdot z_2x_2\big)\\ &= \big(y_1x_1 - x_2\overline{y_2} + z_1x_1 - x_2\overline{z_2}, x_1y_2 + \overline{y_1}y_2^{-1}\cdot y_2x_2 + x_1z_2 + \overline{z_1}z_2^{-1}\cdot z_2x_2\big)\\ &= (y_1x_1 - x_2\overline{y_2} + z_1x_1 - x_2\overline{z_2}, x_1y_2 + \overline{y_1}x_2 + x_1z_2 + \overline{z_1}x_2)\,.\end{aligned}$$

□

3 八元数的界的推导

我们沿用 [1], 的方法，为八元数推导一个和积界；主要的技术难点在于重新处理其中的证明，以绕过非结合性所施加的限制。为得到所需的界，只需证明

$$\frac{E'(\mathcal{A})}{\log\lceil|\mathcal{A}|\rceil} \ll |\mathcal{A}+\mathcal{A}|^2.$$

对于 $x \in \mathcal{A}/\mathcal{A}$，令 $\ell(x)$（分别令 $r(x)$）表示 x 在 $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}$（分别在 $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$）中的代表元数量。于是，我们可以用 $\ell(x)$ 和 $r(x)$ 表示 $E'(\mathcal{A})$:

$$E'(\mathcal{A}) = \sum_{x\in\mathcal{A}/\mathcal{A}} \ell(x)r(x)$$

不失一般性，假设

$$\sum_{\substack{x\in\mathcal{A}/\mathcal{A}\\ \ell(x)\geq r(x)}} \ell(x)r(x) \geq \sum_{\substack{x\in\mathcal{A}/\mathcal{A}\\ \ell(x)\leq r(x)}} \ell(x)r(x).$$

那么，我们可以如下界定 $E'(\mathcal{A})$:

$$E'(\mathcal{A}) = \sum_{x\in\mathcal{A}/\mathcal{A}} \ell(x)r(x) \leq 2\sum_{\substack{x\in\mathcal{A}/\mathcal{A}\\ \ell(x)\geq r(x)}} \ell(x)r(x) \leq 2\sum_{\substack{x\in\mathcal{A}/\mathcal{A}\\ \ell(x)\geq r(x)}} \ell(x)^2.$$

由于 $1 \leq \ell(x) \leq |\mathcal{A}|$, 因此存在一个指标 I，使得集合 $\mathcal{R} := \{x \in \mathcal{A}/\mathcal{A}$ 中的元素: $\ell(x) \geq r(x)$ 和 $2^I \leq \ell(x) < 2^{I+1}\}$ 对上述总和的贡献至少为 $1/\lceil\log_2|\mathcal{A}|\rceil$。也就是说，

$$\frac{E'(\mathcal{A})}{2\lceil\log|\mathcal{A}|\rceil} \leq \sum_{x\in\mathcal{R}} \ell(x)^2 < |\mathcal{R}|2^{2I+2}.$$

对于每个 $x \in \mathcal{R}$，我们定义集合 $\mathcal{S}_x$ 如下：

$$\mathcal{S}_x = \left\{(a+c, b+d) \in (\mathcal{A}+\mathcal{A}) \times (\mathcal{A}+\mathcal{A}) : ab^{-1} = x \text{ and } cd^{-1} = \phi(x)\right\},$$

其中 ϕ： $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ 将 $\mathcal{R}$ 中的一个元素映射到 $\mathcal{R}$中与之最近的（不同）元素，即

$$\|x - \phi(x)\| \leq \|x - y\|$$

对于所有 x、 $y \in \mathcal{R}$。我们证明， $\bigcup_{s\in\mathcal{R}} \mathcal{S}_x$ 在 $(\mathcal{A}+\mathcal{A}) \times (\mathcal{A}+\mathcal{A})$ 中的规模足够大（即所占比例大于 $E(\mathcal{A})/\lceil \log |\mathcal{A}| \rceil$，再乘以某个常数因子）。

在接下来的两个引理的证明中，我们会用到这样一个事实：虽然八元数不满足结合律，但它们满足一些比结合律弱的恒等式。特别地，如果 x、 $y \in \mathbb{O}$，那么 $y = (yx)x^{-1} = x^{-1}(xy)$ [2]。下面的引理保证

$$|\mathcal{S}_x| \geq \ell(x)\ell(\phi(x)) \geq 2^{2I}.$$

引理3。给定 p、 $q \in \mathcal{A}+\mathcal{A}$ 以及互不相同的 x、 $y \in \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}$，至多存在一个四元组 $(a,b,c,d) \in \mathcal{A}^4$，使得

$$a + c = p, \quad b + d = q, \quad ab^{-1} = x, \quad cd^{-1} = y.$$

证明。由于 x 和 y 不同，它们的差可逆。因此，解方程

$$d = (y-x)^{-1}(p - xq), \quad b = q - d, \quad c = yd, \quad a = xb$$

可得唯一的四元组（a， b， c， d），若此类解存在。 □

引理4。设 a、 b、 c和 d为八元数，且 b和 d非零并位于同一个五十二分象限中。那么

$$\|(a+c)(b+d)^{-1} - ab^{-1}\| \leq \|cd^{-1} - ab^{-1}\|.$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}
\|(a+c)(b+d)^{-1} - ab^{-1}\| &= \|a + c - (ab^{-1})(b+d)\| \frac{1}{\|b+d\|} \\
&= \|a + c - (ab^{-1})b - (ab^{-1})d\| \frac{1}{\|b+d\|} \\
&= \|a + c - a - (ab^{-1})d\| \frac{1}{\|b+d\|} \\
&= \|cd^{-1} - ab^{-1}\| \frac{\|d\|}{\|b+d\|} \\
&\leq \|cd^{-1} - ab^{-1}\|.
\end{aligned}$$

□

引理 5。设 $P \in \mathbb{R}^8$ 包含在 m 个闭球中，记为 $\mathcal{B}_i$，其中心为 $Q_i \in \mathbb{R}^8$，其中 $i = 1,...,m$。假设对于 $j \neq i$， Q_i 不包含在任何 $\mathcal{B}_j$的内部中。那么 $m \leq 241$。

证明。按照引理 $[1, \text{Lemma } 8]$, 的证明方法，可以构造 $m-1$个半径相等且彼此不重叠的球面，它们都与某个中心球面相切。由于在八维空间中，按这种方式排列的球面最多有 240 个（即所谓的接吻数），因此得到所需结果。 □

结合上述结果，我们得到

$$|\mathcal{A}+\mathcal{A}|^2 \geq \left|\bigcup_{x\in\mathcal{R}} \mathcal{S}_x\right| \geq \frac{1}{241}\sum_{x\in\mathcal{R}}|\mathcal{S}_x| \geq \frac{1}{241}|\mathcal{R}|2^{2I} \geq \frac{E'(\mathcal{A})}{1928\lceil \log|\mathcal{A}|\rceil},$$

这就得到了所需的界。

4 得到 16元数的一个界

本节将对八元数所作的分析应用于 16元数的九元数子集。$\mathbb{S}$ 中元素所满足的较弱性质给证明带来了一些微妙之处，并使我们不得不将讨论限制在九元数集合（它们满足良好的分配恒等式）上，但论证过程大体与之前相同。完成这一步后，我们重新整理最终的不等式，得到一个为 k_{16}给出下界的结果。

三十六五十五六万亿项 我们需要根据给定 16 元数的系数，将十六维平面划分为若干部分。我们不再使用越来越长的数字前缀，而是将平面中包含这样的 16 元数的区域称为特权正交象限：这些 16 元数在 $\mathbb{R}^{16}$ 中的向量表示里，所有坐标都为正或都为负。也就是说，对于一个 16 元数 $x = \alpha+\beta i+\gamma j+... \in \mathbb{S}$, 我们可以写成 $x = (\alpha, \beta, \gamma, ...) \in \mathbb{R}^{16}$，而特权正交象限包含向量各分量全为正或全为负的 16 元数。

为了得到 16 元数的界，我们将范围限制在九元数的子集 $\mathcal{A}$ ，并且再次只需证明

$$\frac{E(\mathcal{A})}{\log\lceil|\mathcal{A}|\rceil} \ll |\mathcal{A}+\mathcal{A}|^2.$$

我们像之前一样定义 $\ell(x)$ 和 $r(x)$，并将 $E'(\mathcal{A})$ 表示为

$$E'(\mathcal{A}) = \sum_{x\in\mathcal{A}/\mathcal{A}} \ell(x)r(x),$$

并假设

$$\sum_{\substack{x\in\mathcal{A}/\mathcal{A}\\ \ell(x)\geq r(x)}} \ell(x)r(x) \geq \sum_{\substack{x\in\mathcal{A}/\mathcal{A}\\ \ell(x)\leq r(x)}} \ell(x)r(x).$$

对 $E'(\mathcal{A})$的界

$$E'(\mathcal{A}) = \sum_{x \in \mathcal{A}/\mathcal{A}} \ell(x) r(x) \le 2 \sum_{\substack{x \in \mathcal{A}/\mathcal{A} \\ \ell(x) \ge r(x)}} \ell(x) r(x) \le 2 \sum_{\substack{x \in \mathcal{A}/\mathcal{A} \\ \ell(x) \ge r(x)}} \ell(x)^2$$

可得。由于 $1 \le \ell(x) \le |\mathcal{A}|$，存在一个指标 I，使得 $\mathcal{R} := \{x \in \mathcal{A}/\mathcal{A}$ 中的元素满足：$\ell(x) \ge r(x)$，且 $2^I \le \ell(x) < 2^{I+1}\}$ 对上述总和的贡献至少为 $1/\lceil \log_2 |\mathcal{A}| \rceil$。因此

$$\frac{E'(\mathcal{A})}{2\lceil \log |\mathcal{A}| \rceil} \le \sum_{x \in \mathcal{R}} \ell(x)^2 < |\mathcal{R}| 2^{2I+2}.$$

对于 $x \in \mathcal{R}$，我们定义 $\mathcal{S}_x$ 如下：

$$\mathcal{S}_x = \left\{ (a+c, b+d) \in (\mathcal{A}+\mathcal{A}) \times (\mathcal{A}+\mathcal{A}) : b^{-1}a = x \text{ and } d^{-1}c = \phi(x) \right\},$$

其中 $\phi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ 是一个映射，它将一个元素映射到 $\mathcal{R}$ 中与之距离最近的元素，即

$$\|x - \phi(x)\| \le \|x - y\|$$

对于所有 $x, y \in \mathcal{R}$。我们证明 $\bigcup_{s \in \mathcal{R}} \mathcal{S}_x \subset (\mathcal{A}+\mathcal{A}) \times (\mathcal{A}+\mathcal{A})$ 的大小为 $\gg E(\mathcal{A})/\lceil \log |\mathcal{A}| \rceil$。

在接下来两个引理的证明中，我们利用这样一个事实：尽管十六元数不满足结合律，但它们满足比结合律更弱的恒等式。特别地，我们有 $x^{-1}(xy) = y$。此外，十六元数的左乘是线性运算，即对于 $a, b, c \in \mathbb{S}$，有 $a(b+c) = ab + ac$。然而，我们注意到，对于任意十六元数，右乘法并非线性。这就是我们将范围限制在九元数子集上的原因；根据命题2，当 $u, v \in \mathbb{S}$ 且 w 是九元数时，等式 $(u+v)w = uw + vw$ 成立。以下引理说明

$$|\mathcal{S}_x| \ge \ell(x)\ell(\phi(x)) \ge 2^{2I}.$$

引理6. 给定一个九元数的有限集 $\mathcal{A}$、p、$q \in \mathcal{A}+\mathcal{A}$，以及互不相同的 x、$y \in \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$，至多存在一个四元组（$a$、$b$、$c$、$d$）$\in \mathcal{A}^4$ 使得

$$a + c = p, \quad b + d = q, \quad b^{-1}a = x, \quad d^{-1}c = y.$$

证明. 由于 x 和 y 不同，它们的差是可逆的。然后求解方程

$$d = (y-x)^{-1}(p - xq), \quad b = q - d, \quad c = dy, \quad a = bx$$

如果这样的解存在，则可得到唯一的元组（a、b、c、d）。 □

引理7. 设 a、b、c 和 d 是九元数，满足 $(a+c, b+d) \in \mathcal{S}_x$，其中 x，且 b 和 d 均非零，并位于同一个优选正交象限中。那么

$$\|(b+d)^{-1}(a+c) - b^{-1}a\| \le \|d^{-1}c - b^{-1}a\|.$$

证明. 我们有

$$\begin{aligned}\|(b+d)^{-1}(a+c)-b^{-1}a\| &= \|a+c-(b+d)(b^{-1}a)\|\frac{1}{\|b+d\|}\\ &= \|a+c-b(b^{-1}a)-d(b^{-1}a)\|\frac{1}{\|b+d\|}\\ &= \|d^{-1}c-b^{-1}a\|\frac{\|d\|}{\|b+d\|}.\end{aligned}$$

□

上述引理表明，若 $(a+c,b+d)\in S_x$，则存在一个16元数 $(b+d)^{-1}(a+c)$，位于以 x 为中心、半径为 $\phi(x)$的闭球内。以下引理表明，在任意给定的此类闭球内不可能存在过多的16元数。

引理8。设 $P\in\mathbb{R}^{16}$ 包含于 m 个闭球中，分别记为 $\mathcal{B}_i$，每个闭球的中心为 $Q_i\in\mathbb{R}^{16}$，其中 $i=1,\ ...,\ m$。假设对于 $j\neq i,\ \ Q_i$不包含在任何 $\mathcal{B}_j$的内部。则 $m\leq 7333$。

证明。正如在 $[1,$引理 $8],$的证明中一样，可以构造出 $m-1$ 个半径相等且彼此不重叠的球面，它们都与某个中心球面相切。由于在16维中能够按这种构型排列的球面最大数目（目前）介于4320与 7332 $[10],$ 之间，故得出结论。□

与八元数情形一样，我们由此得到

$$|\mathcal{A}+\mathcal{A}|^2\geq\left|\bigcup_{x\in\mathcal{R}}\mathcal{S}_x\right|\geq\frac{1}{7333}\sum_{x\in\mathcal{R}}|\mathcal{S}_x|\geq\frac{1}{7333}|\mathcal{R}|2^{2I}\gg\frac{E(\mathcal{A})}{\lceil\log|\mathcal{A}|\rceil}.\qquad(1)$$

对 $\boldsymbol{k_{16}}$ 进行界定。注意，不等式 (1) 可以改写为

$$|\mathcal{A}+\mathcal{A}|^2\geq\left|\bigcup_{x\in\mathcal{R}}\mathcal{S}_x\right|\geq\frac{1}{k_{16}+1}\sum_{x\in\mathcal{R}}|\mathcal{S}_x|\geq\frac{1}{k_{16}+1}|\mathcal{R}|2^{2I}\gg\frac{E(\mathcal{A})}{(8k_{16}+8)\lceil\log|\mathcal{A}|\rceil}.$$

重新整理后，我们得到 $k_{16}\geq\ \ \frac{E(\mathcal{A})\,8\lceil\log|\mathcal{A}|\rceil|\mathcal{A}+\mathcal{A}|^2}{}-1$，更精确地说，

$$k_{16}\geq\frac{\sum_{x\in\mathcal{R}}|\mathcal{S}_x|}{\left|\bigcup_{x\in\mathcal{R}}\mathcal{S}_x\right|}-1.$$

因此，通过谨慎选择集合 $\mathcal{A}\subset\mathbb{S}$，或许可以为 k_{16} 建立具体的下界。准确地说，我们有

定理1。设 $\mathcal{A}\subset\mathbb{S}$ 是满足 $0\notin\mathcal{A}$的九元数有限集。定义 $\mathcal{R}$ 和 S_x如上。则

$$k_{16}\geq\frac{\sum_{x\in\mathcal{R}}|\mathcal{S}_x|}{\left|\bigcup_{x\in\mathcal{R}}\mathcal{S}_x\right|}-1.$$

5 结论

我们得到了和积界：首先是八元数子集的和积界，其次是十六元数中九元数子集的和积界；后一个结果意味着接吻数 k_{16}的一个界。本文留下的首要问题是，能否通过选取特定的九元数集合，为 k_{16} 得到一个具体的下界。

6 致谢

作者谨向 Edmund Dable-Heath 致谢，感谢他进行的有益交流。

参考文献

1. Solymosi, J. & Wong, C. 接吻数在和积估计中的应用。*Acta Mathematica Hungarica*. 155 (2017) https://doi.org/10.1007/s10474-018-0831-x 2. Conway, J. & Smith, D. 关于四元数与八元数。CRC出版社 (2003) ISBN: 9781000687774 3. Erd

Studies os, P. & *In Pure Mathematics: To The Memory Of Paul Turán* 213 218 1983 Szemeredi, E. 关于整数的和与积。. pp. - ( ) https://doi.org/

10 1007 978 3 0348 5438 2_19 . / - - - - . Chang, M. 代数除环中的和积估计。*Israel Journal Of* 4 *Mathematics* **150** 369 380 2005 10 1007 . pp. - ( )

https://doi.org/ . /BF

02762388

5 16 2^n . Smith, W. 四元数、八元数，以及如今的 -ons 和 -ons；新型数。(2004) 6. Basit, A. & Lund, B. 四元数的改进和积界。*SIAM Journal On Discrete Mathematics*. 33, 1044-1060 (2019) https://doi.org/10 1231468 7 1137 18 15. / M . Smith, J. 球面上的一个左环。 *Journal Of Algebra*. 176, 128-138 (1995) https://doi.org/ 10 1006 1995 1237 . /jabr. . . Lundstrom, P. 带共轭代数的希尔伯特。 8 ¨ 90 *Algebras And Representation Theory* **15** 119 135 2009 10 1007 10468 010 9235 . pp. - ( )

https://doi.org/ . /s - - -5 9 1 . Pfjster, A. 关于在一个 K¨orper 中将 — 表示为平方和。 *Journal Of The London Mathematical Society*. s1-40, 159-165 (1965) https://doi.org/10 159 10 1112 1 40 1 . /jlms/s - . . . Machado, F. & Oliveira Filho, F. 利用多项式对称性改进接吻数的半定规划界。*matics* **27**, 362 369 2018 *Experimental Mathe-* 10 1080 10586458 2017 1286273 . - ( )

https://doi.org/ . / . .