关于非退化幂级数的雅可比理想

Achim Hennings ♣

摘要：设 f 是一个关于多个变量的非退化幂级数。我们给出多项式 g 的一个条件，该条件蕴含乘积 gf^k 乘以 f 的某个幂后不属于 f 的雅可比理想。

0 引言

设 $P = \mathrm{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ 为收敛幂级数环，m 为其极大理想。设 $f \in m^2$ 是一个幂级数，它关于牛顿多面体 $\Delta := \Gamma_+(f)$ 非退化（按 [Kou, 1.19] 的定义），并满足 $f(\dots, 0, x_i, 0, \dots) \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$。这些假设蕴含，将 f 限制在 C^n 的任意坐标平面上时，它在 0 处有一个孤立奇点，并且 $f_i := x_i f_{x_i}$ $(1 \leq i \leq n)$（其中 $f_{x_i} = \partial f / \partial x_i$）构成一个参数系。

与牛顿多面体有关的常用记号如下：对于 $g = \sum_m g_m x^m \in \mathrm{C}[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ 和 $A \subseteq \mathrm{R}^n$，我们记 $supp(g) := \{m | g_m \neq 0\}$，$\Gamma_+(g) = supp(g) + \mathrm{N}^n$, $g_A = \sum_{m \in A} g_m x^m$的凸包。由于 Δ 与 R^n_+ 相差一个有界集（事实上 $\Delta + \mathrm{R}^n_+ \subseteq \Delta$ 就足够了），因此 g 关于 Δ 的牛顿阶定义良好，定义为$\nu(g) := sup\{a \in \mathrm{R}_+ | supp(g) \subseteq a\Delta\}$（其中 0Δ 必须取为 R^n_+）。

在接下来的几节中，我们需要考虑复流形上的除子族。我们规定$D_I := \bigcap_{i \in I} D_i$, $D(I) := \bigcup_{i \in I} D_i$，如果族 $D_i, i \in I$是局部有限的。

Our 结果涉及理想 $j := (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$（雅可比理想）和 $i := (f_1, \dots, f_n)$，它们属于 P.

设 $\delta \subseteq \Delta$ 是一个不包含于任何坐标超平面的 $n - 1 - r \in [0, n-1]$ 维紧面，且 $\sigma := \mathrm{R}_+\delta$, $A_\sigma := \mathrm{C}[\sigma \cap \mathrm{Z}^n]$, $K_\sigma := \mathrm{C}[\sigma^\circ \cap \mathrm{Z}^n] \subseteq A_\sigma$。[1] K_σ 是 A_σ ([Da, 4.6]) 的典范模。

定理（0.1）：设 $h \in P$ 且 $g := x_1 \dots x_n h$。

1) $supp(g) \subseteq n\Delta^\circ \;\Rightarrow\; h \in i$.
2) $supp(g) \subseteq (n-r)\delta^\circ$ and $0 \neq [g] \in K_\sigma/(f_{1\delta}, \dots, f_{1\delta})K_\sigma \;\Rightarrow$
$$Res_0 \begin{bmatrix} f^r h dx_1 \dots dx_n \\ f_1, \dots, f_n \end{bmatrix} \neq 0.$$

环 A_σ 将赋予 (Q –) 分次，使得 $f_{i\delta}$ 是次数为 1 的齐次元素。我们指出，$f_{1\delta}$ 中的适当元素 $n-r$ 、…、$f_{n\delta}$ 线性无关数目达到最大，并且构成 A_σ 和 K_σ 的正则序列。因此，$\bar{A}_\sigma := A_\sigma/(f_{1\delta}, \dots, f_{n\delta})$ 的典范模为 $\bar{K}_\sigma := K_\sigma/(f_{1\delta}, \dots, f_{n\delta})K_\sigma$。$\bar{K}_\sigma$ 的底座（最高分支）的次数为 $n-r$ （附录2，引理 (A.2.1)）。

♣ 锡根大学，第四学院，赫尔德林街3号，德国锡根57068[1] 内部始终指多面体的仿射包。

推论（0.2）：

1) 设 $a \in A_\sigma$ 齐次，且 $0 \neq [a] \in A_\sigma/(f_{1\delta},\dots, f_{n\delta})$。则 $f^r a \notin i$，特别是当 $a = x_1 \dots x_n \tilde{a}$ 时，$f^r \tilde{a} \notin \jmath$。2) P/i 的底座的（诱导）牛顿阶为 $n - \nu(x_1 \dots x_n)$。

本文旨在证明定理（0.1）。

推论（0.2）的证明：对于 1）：设 $b \in K_\sigma$ 是一个齐次元素，使得 $[ab] \in \overline{K}_\sigma$ 生成底座。由于 $x_1 \dots x_n | b$（根据对 δ 的假设），即 $b = x_1 \dots x_n \tilde{b}$，定理（0.1）的 2）断言，对于 $g \coloneqq ab$，有 $f^r a\tilde{b} \notin i$。由于乘法 $x_1 \dots x_n : P/\jmath \to P/i$ 有定义（且是单射），补充结论得证。

对于 2）。设 δ 是 Δ 的特定面，使得 $(1, \dots, 1) \in \sigma^\circ$。那么 $[x_1 \dots x_n] \neq 0$ 属于 $\overline{K}_\sigma$，并且存在一个齐次的 $\mathrm{h} \in A_\sigma$，使得 $g \coloneqq x_1 \dots x_n \mathrm{h}$ 的剩余类生成 $\overline{K}_\sigma$ 的底座。根据定理（0.1）的 2），$f^r \mathrm{h} \notin i$，但根据定理（0.1）的 1），$f^r \mathrm{h} m \subseteq i$，且 $\nu(f^r \mathrm{h}) = \nu\, f_\delta^r \;\; = \nu\, f_\delta^r g \;\; - \nu\, x_1 \;\; x_n \;\; = n - \nu\, x_1 \;\; x_n \qquad\qquad \nu\, a \;\; > n - (\,\mathrm{h})\,(\,)\,(\dots)\,(\dots)$。此外，对于 $a \in P$，有 $\nu \qquad \geq \nu\, a \;\; + \nu \qquad\qquad > n \qquad a \in i \qquad\qquad 0\;1 \;\; 1$ $()\,(x_1 \dots x_n) : (a x_1 \dots x_n)\,()\,(x_1 \dots x_n)$，并且根据定理（.），。

注记（0.3）：设 $\Omega^n \coloneqq \Omega_{\mathbb{C}^n,\;0}^{\;n}$ 由 $\nu(g dx_1 \dots dx_n) = \nu(g x_1 \dots x_n)$ 滤过。则映射

$$\Omega^n/\jmath\Omega^n \to P/i,\; g dx_1 \dots dx_n \longmapsto g x_1 \dots x_n,$$

是单射，且对商滤过是严格的（参见例如 [BGMM, B.1.2.3]）。它将底座映到彼此对应的底座。

关于 $\Omega^n/\jmath\Omega^n$ 的底座的牛顿阶的问题在 [BGMM] 中被提出。

1 留数

1.1 定义

我们回顾所需的局部留数的解析定义及其若干性质。与 [GH]，中对圈进行积分不同，积分 C^∞ 由富比尼定理得到的形式更为方便，这当然是众所周知的。

设 U 为一个 n –维复流形[2]，并设 $V_1, \dots, V_n \subseteq U$ 为超曲面，满足 $V_1 \cap \dots \cap V_n = \{x\}$。利用单位分解，可以找到 C^∞ –个函数 ρ_i，使得 $\rho_i = 1$ 在 V_i 附近成立，并且 $supp(\rho_1 \dots \rho_n) \subseteq U$ 是紧的。于是，n –形式 $\varphi \in \Omega^n(U \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_n))$ 沿 $V_1, \dots, V_n$ 在 x 处的留数定义为

$$Res_{x, V_1, \dots, V_n}(\varphi) \coloneqq \frac{\varepsilon_n}{(2\pi i)^n} \int_U \varphi \wedge \bar{\partial}\, \rho_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} \rho_n,\; \varepsilon_n \coloneqq (-1)^{n(n-1)/2}.$$

如果我们将 ρ_1 替换为类似的函数 $\tilde{\rho}_1$，不失一般性地假设 $supp(\tilde{\rho}_1) \subseteq supp(\rho_1)$，则有 $\alpha \coloneqq \varphi \wedge (\rho_1 - \tilde{\rho}_1)\bar{\partial}\rho_2 \wedge \dots \wedge \bar{\partial}\rho_n \in \Gamma_c(U \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_n), \mathrm{E}^{2n-1})$, $\int_U d\alpha = 0 = (-1)^n \int \;\; \varphi \wedge \bar{\partial}($

$_U \qquad\quad \rho_1 - \tilde{\rho}_1 \;\wedge \bar{\partial}\, \rho_2 \wedge) \dots \wedge \bar{\partial}\rho_n$，而定义的

---

[2] 这些考虑可以推广到约化复空间，参见 [GH，第 33] 页。

右端保持不变。这表明留数是良定义的。通过考察 $\varphi \wedge \rho_1 \bar{\partial}\rho_2 \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}\rho_n$，我们还可以看出，如果 φ 在 V_1 上正则，则留数为零。

如果 $V_1 \cap \ldots \cap V_n = \{x_1, \ldots, x_m\}$ 是一个有限集，并且 $U_i \ni x_i$ 是互不相交的开邻域，则可以选择新的 $\tilde{\rho}_1, \ldots, \tilde{\rho}_n$，使得 $supp(\tilde{\rho}_1 \ldots \tilde{\rho}_n)$ 在 $\cup_i U_i$ 中是紧的。由于右端保持不变，在这种情况下我们得到如下求和

$$\sum_{x \in V_1 \cap \ldots \cap V_n} Res_{x, V_1, \ldots, V_n}(\varphi).$$

我们还使用熟悉的记号 $Res_x\left[\begin{matrix}\omega \\ f_1, \ldots, f_n\end{matrix}\right]$ 表示 $\frac{\omega}{f_1 \ldots f_n}$ 沿着 $V_i = \underline{\{f_i = 0\}}, i = 1, \ldots, n$ 的留数。

例（1.1）：$U = \{|x_i| < \delta_i\} \subseteq \mathbb{C}^n$，$f_1 = x_1^a, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(U)$，其唯一的零点为 $0 \in U, \omega = g dx_1 \ldots dx_n$。对于更小的 δ_1，我们可以选取 $\rho_1, \ldots, \rho_n$ 作为 $\rho_1(x_1), \rho_i(x_2, \ldots, x_n)$（$2 \leq i \leq n$）。那么一维留数

$$Res_0\left(\frac{h dx_1}{f_1}\right) \text{ with } h := \frac{g}{f_2 \ldots f_n}$$

是定义在 $V_1 \setminus (V_2 \cup \ldots \cup V_n)$ 上关于 $(x_2, \ldots, x_n)$ 的全纯函数，并且我们有

$$\begin{aligned}
(2\pi i)^n Res_0\left[\begin{matrix}\omega \\ f_1, \ldots, f_n\end{matrix}\right] &= \varepsilon_n \int_U \frac{\omega \wedge \bar{\partial}\rho_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}\rho_n}{f_1 \ldots f_n} \\
&= \varepsilon_{n-1} \int_U \frac{g}{f_1 \ldots f_n} (dx_1 \wedge \bar{\partial}\rho_1) \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge \bar{\partial}\rho_2 \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}\rho_n \\
&= \varepsilon_{n-1} \int\limits_{\substack{|x_i| < \delta_i, \\ (i \geq 2)}} \Big(\int\limits_{|x_1| < \delta_1} \frac{h dx_1 \wedge \bar{\partial}\rho_1}{f_1} \Big) dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge \bar{\partial}\rho_2 \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}\rho_n \\
&= (2\pi i)^n Res_{0, V_1 \cap (V_2, \ldots, V_n)} \left(Res_0\left(\frac{h dx_1}{f_1}\right) dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n\right)
\end{aligned}$$

此处及下文中，$V_1 \cap (V_2, \ldots, V_n)$ 是 $(V_1 \cap V_2, \ldots, V_1 \cap V_n)$ 的简写。

特别地，当 $f_i = x_i^{a_i}$ 时，可得 $(2\pi i)^n$ 倍的 g 中 $x_1^{a_1 - 1} \ldots x_n^{a_n - 1}$ 的系数。

可以直接证明，给出的留数定义满足变换规则[3]，因此与其他定义一致。留数和关于 φ 全纯，因为在小变形下，ρ_1、…、ρ_n 可以保持不变。留数定理指出，对于紧流形 U 上维数为 n 的流形，若有 $V_1 \cap \ldots \cap V_n$ 个有限的超曲面 n、…、V_n，则 $\varphi \in \Omega^n(U \setminus (V_1 \cup \ldots \cup V_n))$ 的留数和为零。因为我们可以取 $\rho_i = 1$，所以结论成立。（参见 [GH，第 5]章）

[3] 通过使用另一组参数系展开。

1.2 真修改

我们再次考虑n –流形 U 和满足$V_1 \cap \ldots \cap V_n = \{x\}$的超曲面，并考察在 x 处进行真修改时留数的变化。

因此，设 M 为复流形， $\pi\colon M \to U$ 为适当全纯映射，使得 $D \coloneqq \pi^{-1}(x)_{red} \subseteq M$ 是一个因子，且 $\pi|M \setminus D \to U \setminus \{x\}$ 是同构。设 $Z_i \coloneqq \pi'(V_i)$ 为 V_i 在 M中的严格变换。

如果 $Z_1 \cap \ldots \hat{Z}_i \ldots \cap Z_n$ 只包含 D的光滑点，下面的公式可以将 n –维留数化简为（$n-1$）–维留数。

定理（1.2）：在以下假设下

(1) $D \cap Z_1 \cap \ldots \cap Z_n = \emptyset$ 且 (2) $D \cap Z_1 \cap \ldots \hat{Z}_i \ldots \cap Z_n$ 对某个 $i \in [1,n]$是有限的

对于 $\varphi \in \Omega^n(U \setminus (V_1 \cup \ldots \cup V_n))$，有如下公式

$$Res_{x,V_1,\ldots,V_n}(\varphi) = (-1)^{i-1} \sum_{p \in D \cap Z_1 \cap \ldots \hat{Z}_i \ldots \cap Z_n} Res_{p,D,Z_1,\ldots \hat{Z}_i \ldots,Z_n}(\pi^* \varphi).$$

证明：例如，$i = 1$。由$\pi^* \rho_1 = 1$ 在$D + Z_1$ 附近以及$\pi^* \rho_j = 1$ 在Z_j 附近，我们得出：

$$(2\pi i)^n \varepsilon_n Res_{x,V_1,\ldots,V_n}(\varphi) = \int_U \varphi \wedge \bar{\partial} \rho_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\partial} \rho_n = \int_M \pi^* \varphi \wedge \bar{\partial} \pi^* \rho_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\partial} \pi^* \rho_n$$
$$= (2\pi i)^n \varepsilon_n \sum_{p \in (D+Z_1) \cap Z_{[2,n]}} Res_{p,D+Z_1,Z_2,\ldots,Z_n}(\pi^* \varphi)$$

这就是所断言的公式，因为$Z_1 \cap Z_{[2,n]} = \emptyset$。

1.3 特殊留数计算

设f、$g_j\colon U \longrightarrow \mathrm{C}$（$1 \le j \le n$）为在$x \in U$ 处具有零点的全纯函数，$V \coloneqq (f)$、$V_j \coloneqq (g_j)$为相应的超曲面。我们假设$V_1 \cap \ldots\ldots \cap V_n = \{x\}$。

如1.2节所述，设$\pi\colon M \longrightarrow U$ 是U 在x 中的一个真修改，其中$D \coloneqq \pi^{-1}(x)_{red}$ 为一个因子。设Z、Z_j 分别为V、V_j的严格变换，并且对于$\mathrm{h} \in \mathcal{O}(U)$，$\tilde{\mathrm{h}} \coloneqq \pi^* \mathrm{h}$。

我们列出一组假设，这些假设针对预期的应用情形进行了定制：f 如第0节所述，$g_j \in \mathrm{C}f_1 + \cdots + \mathrm{C}f_n$，$\pi$ 为f的环面消解。

定理（1.3）的假设：

(1) $D = \bigcup_{i \in I} D_i$ 和 $\forall J \subseteq I$ 的交集 D_J 为空，或是光滑且连通的 o f 余维数 $|J|$。(2) 沿 D_i 的赋值满足 $v_{D_i}(\tilde{f}) = v_{D_i}(\tilde{g_j})\ \forall j$，即 $C \coloneqq (\tilde{f}) - Z = (\tilde{g_j}) - Z_j$。(3) $\forall J \subseteq I, |J| = k \ge 1$，假设：a) $D_J \cap Z \subseteq D_J$ 是超曲面或为空。b) $D_J \cap Z_{[k,n]} = \emptyset$。c) $D_J \cap Z_{[k+1,n]}$ 是有限的。

(4) $\forall J \subseteq I$， $|J| = k \ge 1$，存在 c_k^J，……，$c_n^J \in \mathrm{C}$，满足 $\sum_{j=k}^n c_j^J \frac{g_j}{\tilde{f}} = 1$ 关于 $D_J \setminus Z$。

定理（1.3）：在这些假设下，令 $l \in [1,n]$ 和 $\psi \in \Omega^n(U)$ 满足 $\tilde{\psi} \coloneqq \pi^*(\psi) \in \Gamma(M, \Omega^n(\log\ D)(-(n+1-l)C))$，即 $\tilde{f}^{l-1}\tilde{\psi}/(\tilde{g}_1 \dots\ \tilde{g}_n) \in \Gamma(M, \Omega^n(\log\ D)(Z_1 + \cdots + Z_n))$。于是我们得到公式

$$Res_{x,V_1,\dots,V_n}\left(\frac{f^{l-1}\psi}{g_1 \dots g_n}\right) =$$

$$(-1)^{l-1}\sum_{\substack{i_1,\dots,i_l \in I \\ \text{different}}} c_1^{\{i_1\}} \dots c_{l-1}^{\{i_1,\dots,i_{l-1}\}} \sum_{p \in D_{i_1,\dots,i_l} \cap Z_{[l+1,n]}} Res_{p,D_{i_1,\dots,i_l} \cap (Z_{l+1},\dots,Z_n)}\, R_{D_{i_1} \dots D_{i_l}}\left(\frac{\tilde{\psi}}{\tilde{g}_l \dots \tilde{g}_n}\right).$$

这里 $D_{i_1,\dots,i_l} \cap (Z_{l+1}, \dots, Z_n)$ 表示如前所述的交集元组，而 $R_{D_{i_1} \dots D_{i_l}}$ 表示沿着 $D_{i_1}, \dots, D_{i_l}$ 的迭代庞加莱留数。在 $l = n$ 的情况下，我们令 $Res_{p,\emptyset}(\alpha) = \alpha$，其中 $\alpha \in \mathbb{C}$。

证明：对于 $J = \{i_1, \dots, i_l\}$ 和 $D_J \cap Z_{[l+1,n]} \neq \emptyset$，我们需要有 $D_J \cap Z_j \neq D_J$（$j = l$）以及 $j \in [l+1, n]$，以满足 (3), b) 和 (3), c)。此外，若令 $D' = \sum_{j \notin \{i_1 \dots i_l\}} D_j$，

$$R_{D_{i_1} \dots D_{i_l}}\left(\frac{\tilde{\psi}}{\tilde{g}_l \dots \tilde{g}_n}\right) \in \Gamma(D_J, \Omega^{n-l}(\log D' \cap D_J)(Z_l + \cdots + Z_n)).$$

由条件 (3), b) c)，该形式在 p 处的留数定义良好。因此，整个公式定义良好。我们对 l 作归纳证明。

$\underline{l = 1}$：我们像例 (1.1) 中那样变换右侧。

$$\sum_{i \in I} \sum_{p \in D_i \cap Z_{[2,n]}} Res_{p,D_i \cap (Z_2,\dots,Z_n)} R_{D_i}\left(\frac{\tilde{\psi}}{\tilde{g}_1 \dots \tilde{g}_n}\right) = \sum_{i \in I} \sum_{p \in D_i \cap Z_{[2,n]}} Res_{p,D_i,Z_2,\dots,Z_n}\left(\frac{\tilde{\psi}}{\tilde{g}_1 \dots \tilde{g}_n}\right).$$

由于 $D_{ij} \cap Z_{[2,n]} = \emptyset$ 对于 $i \neq j$，这也是定理（1.2）中关于 $\varphi = {}_{g_1}^{\psi} \dots g_n$ 的右端。 ——

$\underline{l \to l+1}$：根据归纳假设，该公式对 l 成立；将 ψ 替换为 $f\psi$ 亦然。

对于 $p \in D_{i_1,\dots,i_l} \cap Z_{[l+1,n]}$，由 (4)（以及庞加莱留数的线性性）可得

$$\sum_{p \in D_{i_1,\dots,i_l} \cap Z_{[l+1,n]}} Res_{p,D_{i_1,\dots,i_l} \cap (Z_{l+1},\dots,Z_n)}\, R_{D_{i_1} \dots D_{i_l}}\left(\frac{\tilde{f}\tilde{\psi}}{\tilde{g}_l \dots \tilde{g}_n}\right) =$$

$$\sum_{p \in D_{i_1,\dots,i_l} \cap Z_{[l+1,n]}} Res_{p,D_{i_1 \dots i_l} \cap (Z_{l+1},\dots,Z_n)}\, R_{D_{i_1} \dots D_{i_l}}\left(\frac{\sum_{j=l}^{n} c_j^{\{i_1,\dots,i_l\}} \tilde{g}_j \tilde{\psi}}{\tilde{g}_l \dots \tilde{g}_n}\right) =$$

$$\sum_{p \in D_{i_1,\dots,i_l} \cap Z_{[l+1,n]}} Res_{p,D_{i_1 \dots i_l} \cap (Z_{l+1},\dots,Z_n)}\, R_{D_{i_1} \dots D_{i_l}}\left(\frac{c_l^{\{i_1,\dots,i_l\}} \tilde{\psi}}{\tilde{g}_{l+1} \dots \tilde{g}_n}\right),$$

这里我们用到，只有一项具有 $n - l$ 极点分量。

将留数定理应用于 $J = \{i_1, \dots, i_l\}$、$\alpha \coloneqq R_{D_{i_1} \dots D_{i_l}}({}_{\tilde{g}_{l+1}}^{\tilde{\psi}} \dots \tilde{g}_n)$、$\underline{D' = \sum_{j \notin J} D_j}$，在 $D_J \cap Z_{[l+1,n]} \neq \emptyset$ 的情况下得到

$$\sum_{p \in D_J} Res_{p,D_J \cap (Z_{l+1}+D',Z_{l+2},\dots,Z_n)}(\alpha) = 0.$$

根据例 (1.1) 和 (3), b)，我们得出

$$\sum_{p \in D_J \cap Z_{[l+1,n]}} Res_{p,D_J \cap (Z_{l+1},Z_{l+2},\dots,Z_n)}(\alpha) =$$

$$-\sum_{i_{l+1} \notin J} \sum_{p \in D_{i_{l+1}} \cap D_J \cap Z_{[l+2,n]}} Res_{p,D_{i_{l+1}} \cap D_J \cap (Z_{l+2},\dots,Z_n)} R_{D_{i_{l+1}}}(\alpha).$$

此公式在 $D_J \cap Z_{[l+1,n]} = \emptyset$ 时也成立。具体而言，若对某个 i_{l+1} 有 $D_{i_{l+1}} \cap D_J \cap Z_{[l+2,n]} \neq \emptyset$，则由 (3), c) 可知 Z_{l+2}、…、Z_n 在 $D_{i_{l+1}} \cap D_J$ 中定义超曲面；由 (3), b) 可知，$Z_{l+1} \cap D_J$ 是 D_J 中的超曲面或空集。因此，留数定理仍然适用。归纳步骤由此得证。

注记（1.4）：若 $\frac{\tilde{f}^{l-1}\tilde{\psi}}{\tilde{g}_1 \ \tilde{g}_n}$ …沿 $D(I_0)$ 只有对数极点，对于某个子集 $I_0 \subseteq I$，那么只需对 $J \subseteq I_0$满足 (3) 和 (4)。

2 f的消解

设 f 是第0节中的非退化幂级数，在零点的某个开邻域 U 上全纯。为了在定理（0.1）的证明中应用定理（1.3），我们需要了解 f的环面消解的细节。（例如参见 [AGV], [V]。）

2.1 环面嵌入

关于环面嵌入，我们采用 [TE] 和 [Da], 中的标准记号；若两者不一致，则优先采用 [Da]中的记号。特别地，我们记:

$M = \mathbb{Z}^n$, $M_{\mathbb{R}} = M \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$ with standard base $e_1, \dots, e_n$,

$N = Hom(M, \mathbb{Z})$, $N_{\mathbb{R}} = N \otimes \mathbb{R}$ with dual base $e_1^*, \dots, e_n^*$,

$\langle l, x \rangle := l(x)$ for $l \in N_{\mathbb{R}}$, $x \in M_{\mathbb{R}}$.

设 Σ_0 是由锥 $\mathrm{R}_+^n := \mathrm{R}_+ e_1^* + \cdots + \mathrm{R}_+ e_n^* \subseteq N_{\mathbb{R}}$ 及其所有边界锥组成的扇。任何支撑集为 $|\Sigma| = \mathrm{R}_+^n$ 的扇 Σ 都是 Σ_0的细分。

对每个锥 $\sigma \in \Sigma$，都关联着其对偶锥 $\check{\sigma} := \{x \in M_{\mathbb{R}} | \langle a, x \rangle \ \geq 0 \ \forall \ a \in \sigma\} \subseteq M_{\mathbb{R}}$ 以及仿射代数簇 $Spec\ \mathrm{C}[\check{\sigma} \cap M]$。

注释 1：设 $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ 是一个凸有理多面锥，$\check{\sigma} \subseteq M_{\mathbb{R}}$ 是其对偶锥。那么这个（反转包含关系的）映射

$$\text{faces of } \sigma \to \text{faces of } \check{\sigma},\ \tau \mapsto \tau^{\perp} \cap \check{\sigma},$$

是双射，其逆映射为 $\tau \mapsto \tau^{\perp} \cap \sigma$。对于 $b \in \tau^{\circ}$，有 $\tau^{\perp} \cap \check{\sigma} = b^{\perp} \cap \check{\sigma}$，且 $\dim \tau^{\perp} \cap \check{\sigma} = \dim \tau^{\perp} = n - \dim \tau$。

证明：$\tau^{\perp} \cap \check{\sigma}$ 是 $\check{\sigma}$ 的一个面，因为 $\check{\sigma} \subseteq \{x | \langle a, x \rangle \ \geq 0 \ \forall a \in \tau\} = \check{\tau}$。我们证明 $(\tau^{\perp} \cap \check{\sigma})^{\perp} \cap \sigma = \tau$。包含关系 $\supseteq$ 显然成立。设 $a \in \sigma \setminus \tau$。$\sigma$ 的面 τ 由 $N_{\mathbb{R}}$ 上的一个线性形式 $x \in M_{\mathbb{R}}$ 截出，其中 $x|\tau = 0, x|\sigma \setminus \tau > 0$。于是 $x \in \tau^{\perp} \cap \check{\sigma}$ 且 $\langle a, x \rangle > 0$，因此 $a \notin (\tau^{\perp} \cap \check{\sigma})^{\perp} \cap \sigma$。等式 $\tau^{\perp} \cap \check{\sigma} = b^{\perp} \cap \check{\sigma}$ 由 $b \pm \varepsilon a \in \tau$ 在 $a \in \tau$ 和 $\varepsilon > 0$ 足够小时得出。要确定 $\tau^{\perp} \cap \check{\sigma}$的维数，我们可以将 τ 纳入 $cospan$（σ）与 σ之间的完备面链中。在极端情形下，答案很容易得出。

注2：设 $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ 是一个有顶点的凸有理多面锥，且 τ 是一个面。那么$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathrm{R}m = \check{\sigma} - \mathrm{N}m$，其中 $m \in (\tau^{\perp} \cap \check{\sigma})^{\circ} \cap M$。

证明：由注释 1可知 $\tau = m^{\perp} \cap \sigma$，而 $(\sigma_1 \cap \sigma_2)\check{} = \check{\sigma}_1 + \check{\sigma}_2$ 通常成立，因为 $(\check{\sigma}_1 + \check{\sigma}_2)\check{} = (\check{\sigma}_1)\check{} \cap (\check{\sigma}_2)\check{} = \sigma_1 \cap \sigma_2$。

根据注2，$\mathrm{C}[\check{\tau} \cap M] = \mathrm{C}[\check{\sigma} \cap M]_{x^m}$，且 $X_{\check{\tau}} \subseteq X_{\check{\sigma}}$ 是一个开嵌入。对于面 τ_1、$\tau_2 \subseteq \sigma$，我们有 $X_{\check{\tau}_1} \cap X_{\check{\tau}_2} = X_{(\tau_1 \cap \tau_2)\check{}} \subseteq X_{\check{\sigma}}$。也就是说，如果 $m_i \in \check{\sigma} \cap M$ 且 $\check{\tau}_i = \check{\sigma} - \mathrm{N}m_i$，那么 $(\tau_1 \cap \tau_2)\check{} = \check{\tau}_1 + \check{\tau}_2 = \check{\sigma} - \mathrm{N}m_1 - \mathrm{N}m_2 = \check{\sigma} - \mathrm{N}(m_1 + m_2)$。

因此，在所有 $X_{\check{\sigma}}$、$\sigma \in \Sigma$的不交并上，关系“$p \sim q \Leftrightarrow p \in X_{\check{\sigma}_1}$ 和 $q \in X_{\check{\sigma}_2}$ 在 $X_{\check{\sigma}_1} \leftarrow X_{(\sigma_1 \cap \sigma_2)\check{}} \rightarrow X_{\check{\sigma}_2}$下有一个公共原像”是一个等价关系，这使得我们可以将 $X_{\check{\sigma}}$、$\sigma \in \Sigma$粘合起来。所得概形 X_{Σ} 就是与扇 Σ相关的环面嵌入或托里克簇。$X_{\check{\sigma}}$、$\sigma \in \Sigma$是开仿射子集，并具有性质 $X_{\check{\sigma}_1} \cap X_{\check{\sigma}_2} = X_{(\sigma_1 \cap \sigma_2)\check{}}$，$\mathrm{C}[(\sigma_1 \cap \sigma_2)\check{} \cap M] = \mathrm{C}[\check{\sigma}_1 \cap M]\mathrm{C}[\check{\sigma}_2 \cap M]$，这表明 X_{Σ} 是分离的。[4]

我们确定了 $X_{\check{\sigma}} \setminus \cup_{\tau \subsetneq \sigma} X_{\check{\tau}}$。有 $X_{\check{\sigma}} \setminus X_{\check{\tau}} = V(x^m)$、$m \in \alpha^{\circ} \cap M$，其中 α 是与 $\tau \subseteq \sigma$ 对应的 $\check{\sigma}$ 的面。由于 $cospan(\check{\sigma}) \subseteq \check{\sigma}$ 对应于 $\sigma \subseteq \sigma$，我们得到 $X_{\check{\sigma}} \setminus \cup_{\tau \subsetneq \sigma} X_{\check{\tau}} = V(\{x^m | m \notin cospan(\check{\sigma})\})$。这就是仿射环面 $T_{\sigma} \coloneqq X_{cospan(\check{\sigma})} \subseteq X_{\check{\sigma}}$。因此，我们将 $X_{\Sigma} = \cup_{\sigma \in \Sigma} T_{\sigma}$ 分解为互不相交的局部闭环面 T_{σ}，其维数为 $\dim cospan(\check{\sigma}) = n - \dim \sigma$。

再次考虑 Σ 中的 $\tau \subseteq \sigma$、$T_{\tau} \subseteq X_{\check{\tau}} \subseteq X_{\check{\sigma}}$ 以及与 $\tau \subseteq \sigma$ 对应的 $\check{\sigma}$ 的面 α。那么 $X_{\check{\sigma}} \setminus \cup_{\tau \not\subseteq \rho \subseteq \sigma} X_{\check{\rho}} = V(\{x^m | m \in \beta^{\circ},\ \beta \not\subseteq \alpha\}) = X_{\alpha} \subseteq X_{\check{\sigma}}$ 是不可约的，其维数为 $\dim \alpha = \dim cospan(\check{\tau})$。另一方面，$X_{\check{\sigma}} \setminus \cup_{\tau \not\subseteq \rho \subseteq \sigma} X_{\check{\rho}} = \cup T_{\gamma} \setminus (\cup_{\gamma \subseteq \sigma} \cup_{\tau \not\subseteq \rho \subseteq \sigma} \cup_{\gamma \subseteq \rho} T_{\gamma}) = \cup_{\tau \subseteq \gamma \subseteq \sigma} T_{\gamma}$。这意味着

$$\bar{T}_{\tau} \cap X_{\check{\sigma}} = \cup_{\tau \subseteq \gamma \subseteq \sigma} T_{\gamma},\ F_{\tau} \coloneqq \cup_{\sigma \in \Sigma} (\bar{T}_{\tau} \cap X_{\check{\sigma}}) = \cup_{\tau \subseteq \gamma} T_{\gamma}.$$

我们指出，F_{τ} 仍然是一个环面嵌入，它对应于将星形$St(\tau) = \{\sigma | \sigma \supseteq \tau\}$从$N = (\mathrm{R}\tau \cap N) \oplus N'$投影到$(\mathrm{R}\tau \cap N)$的一个补空间$N'$。

进一步的推论是

$$F_{\sigma_1} \cap F_{\sigma_2} = \cup_{\sigma_1 \cup \sigma_2 \subseteq \gamma} T_{\gamma}.$$

如果存在，则这是 F_{σ} 中面为 σ_1, σ_2 的最小锥 $\sigma = \cap_{\tau \supseteq \sigma_1 \cup \sigma_2} \tau$；否则为 $\emptyset$。对于单纯扇 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$，若其存在。

现在考虑两个扇 Σ_1, Σ_2，其支撑集 R_+^n, Σ_2 是 Σ_1 的一个细分。这意味着，每个 $\sigma \in \Sigma_1$ 都是 Σ_2 中若干锥的并。包含关系 $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$，$\sigma_i \in \Sigma_i$ 定义了态射 $X_{\check{\sigma}_2} \rightarrow X_{\check{\sigma}_1}$。它们彼此相容：对于 $\sigma_2, \sigma_2' \in \Sigma_2$ 和 $\sigma_1, \sigma_1' \in \Sigma_1$，若 $\sigma_2{}^{(\prime)} \subseteq \sigma_1{}^{(\prime)}$，则有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} X_{\check{\sigma}_2} & \rightarrow & X_{\check{\sigma}_1} \\ \cup\,| & & \cup\,| \\ X_{(\sigma_2 \cap \sigma_2')\check{}} & \rightarrow & X_{(\sigma_1 \cap \sigma_1')\check{}} \end{array}$$

---

[4] 为了证明$(\sigma_1 \cap \sigma_2)\check{} \cap M = (\check{\sigma}_1 \cap M) + (\check{\sigma}_2 \cap M)$，我们使用以下事实：存在一个经过$\sigma_1 \cap \sigma_2$ 的超平面$m^{\perp}$，将σ_1, σ_2分隔开来。将σ_1 替换为$\sigma_1 - \sigma_2$即可容易看出这一点。（参见[TE，第24], [Da，5.4]。）

由于 $|\Sigma_1| = |\Sigma_2|$，所得态射 $\pi\colon X_{\Sigma_2} \longrightarrow X_{\Sigma_1}$ 是适当的（[TE，第 26], [Da，5.5.6]）。

考虑 $\sigma \in \Sigma_2$，令 $\tau \in \Sigma_1$ 为满足 $\sigma^\circ \subseteq \tau^\circ$ 的锥，即满足 $\sigma \subseteq \tau$的最小锥。于是

$$cospan(\check{\tau}) = cospan(\check{\sigma}) \cap \check{\tau},$$

由 $cospan(\check{\tau}) = \tau^\perp = \tau^\perp \cap \check{\tau} = b^\perp \cap \check{\tau} = \sigma^\perp \cap \check{\tau}$, $b \in \sigma \cap \tau^\circ$ 可知，见注释 1。图示

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[cospan(\check{\tau}) \cap M] & \subseteq & \mathbb{C}[cospan(\check{\sigma}) \cap M] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{C}[\check{\tau} \cap M] & \subseteq & \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M] \end{array}$$

（各列分别对应闭嵌入 $T_\tau \subseteq X_{\check{\tau}}$ 和 $T_\sigma \subseteq X_{\check{\sigma}}$）表明

$$\pi|T_\sigma \to T_\tau$$

是一个环面投影（即一个同构于 $pr_1\colon (\mathrm{C}^*)^r \times (\mathrm{C}^*)^s \to (\mathrm{C}^*)^r, r =$ 维 $\tau^\perp, r + s =$ 维 $\sigma^\perp$的群同态）。因此

$$\pi^{-1}(T_\tau) = \cup_{\sigma^\circ \subseteq \tau^\circ} T_\sigma, \pi^{-1}(F_\tau) = \cup_{\gamma \supseteq \tau, \gamma \in \Sigma_1} \cup_{\sigma^\circ \subseteq \gamma^\circ} T_\sigma,$$

$$\pi^{-1}(X_{\check{\tau}}) = \cup_{\gamma \subseteq \tau, \gamma \in \Sigma_1} \cup_{\sigma^\circ \subseteq \gamma^\circ} T_\sigma = \cup_{\sigma \subseteq \tau, \sigma \in \Sigma_2} T_\sigma = \cup_{\sigma \subseteq \tau} X_{\check{\sigma}}.$$

我们特别将其应用于 Σ 和 Σ_0。于是

$$\pi^{-1}(0) = \cup_{\sigma^\circ \subseteq (\mathbb{R}^n_+)^\circ} T_\sigma.$$

在 $\Sigma_0 \setminus \{\mathrm{R}^n_+\} \subseteq \Sigma$ 的情形下（即，如果 e_1^*、…、 e_n^* 是 Σ 在一个适当坐标平面中的唯一边），则每个这样的 σ 都有一条边 λ 满足 $\lambda^\circ \subseteq (\mathrm{R}^n_+)^\circ$（假设 $\Sigma_0 \neq \Sigma$），并且

$$\pi^{-1}(0) = \cup_{\lambda \in L} F_\lambda, \text{ where } L \coloneqq \{\lambda \in \Sigma | \dim \lambda = 1, \lambda^\circ \subseteq (\mathbb{R}^n_+)^\circ\}.$$

我们有 $X_\Sigma \setminus F_\lambda = \cup_{\sigma \not\supseteq \lambda} X_{\check{\sigma}} = X_{\Sigma \setminus \mathrm{St}(\lambda)}$, $St(\lambda) \coloneqq \{\sigma \in \Sigma | \sigma \supseteq \lambda\}$，因此 $X_\Sigma \setminus \pi^{-1}(0) = \cap_{\lambda \in L} X_{\Sigma \setminus \mathrm{St}(\lambda)} = X_{\Sigma_0 \setminus \{\mathrm{R}^n_+\}} = \mathrm{C}^n \setminus \{0\}$。

对于 f 的消解，我们考虑具有支撑集 R^n_+ 的此类扇 Σ，其中支撑函数 $s_\Delta\colon |\Sigma| \to \mathrm{R}$, $s_\Delta(a) \coloneqq \min a(\Delta)$ 在所有 $\sigma \in \Sigma$ 上都是线性的。

存在一个具有此性质的最粗扇 Σ_Δ：对于 Δ 的每个面 δ（包括其自身 Δ），我们取一个内点 $p_\delta \in \delta^\circ$。那么，$\Sigma_\Delta$ 的对偶锥就是由 Δ 在 p_δ 处生成的锥。这些锥本身可定义为 $\sigma(\delta) \coloneqq \{a \in \mathrm{R}^n_+ | s_\Delta(a) = a(p_\delta)\} \subseteq N_{\mathbb{R}}$。这是一个凸有理多面锥，因为它也可以描述为 $\min\ a(E) \geq a(p_\delta)$，其中 E 是 Δ 的顶点有限集。显然，$\sigma(\delta) = \{a \in \mathrm{R}^n_+ | s_\Delta(a) = a(x)\ \forall\, x \in \delta\}$，且 $\cup\ \sigma(\delta)_{\delta \subseteq \Delta} = \mathrm{R}^n_+$。

$\sigma(\delta)$ 的对偶确实是 R+(Δ − p_δ)，因为根据定义，$\sigma(\delta)$ 是锥 R+(Δ − p_δ) 的对偶。

如果 δ、δ' 是 Δ 的面，那么 $\sigma(\delta) \cap \sigma(\delta') = \{a \in \mathrm{R}_+^n | s_\Delta(a) = a(p_\delta) = a(p_{\delta'})\} = \sigma(\delta) \cap (p_{\delta'} - p_\delta)^\perp$ 是 $\sigma(\delta)$ 的面，因为 $\langle \sigma(\delta), p_{\delta'} - p_\delta \rangle \geq 0$。设 γ 是包含 δ 和 δ' 的 Δ 的最小面。那么 $s_\Delta(a) = a(p_\delta) = a(p_{\delta'})$ 等价于 $s_\Delta(a) = a(p_\gamma)$，因此 $\sigma(\delta) \cap \sigma(\delta') = \sigma(\gamma)$。

我们已经证明，$\Sigma_\Delta = \{\sigma(\delta) | \delta \subseteq \Delta\}$ 是一个扇，并且具有所需的性质。由于 $\mathrm{R}_+^n \setminus \Delta$ 有界，R_+^n 的适当边界锥属于 Σ_Δ，即 $\Sigma_0 \setminus \{\mathrm{R}_+^n\} \subseteq \Sigma_\Delta$。

2.2 具有特殊性质的$\boldsymbol{f}$ 的消解

从现在起，设Σ 是Σ_Δ 的一个正则细分，满足$\Sigma_0 \setminus \{\mathrm{R}_+^n\} \subseteq \Sigma$ （参见[TE，第32], [Da页，8.2.3]）。由此定义了一个光滑簇$X \coloneqq X_\Sigma$ 和一个适当态射$\pi: X \to \mathrm{C}^n$，它在$\mathrm{C}^n \setminus \{0\}$上方是同构。

X 中的例外除子为$F_\lambda, \lambda \in L$，其中

$$L = \{\sigma \in \Sigma | \dim \sigma = 1, \sigma \neq \mathbb{R}_+ e_i^* \ (1 \leq i \leq n)\}$$

如上所述。设l_λ 为λ中的本原向量。设$\pi_U: X_U \to U$ 为到开集U的原像上的限制。对于全纯函数 h ∈ $\mathcal{O}(U)$，有

$$(\pi_U^*(h)) = \sum_{\lambda \in L} v_\lambda(h) F_\lambda + \pi_U'((h)),$$

其中v_λ(h) =min $l_\lambda(supp(\mathrm{h})) = s_{\Gamma_+(\mathrm{h})}(l_\lambda)$为重数，而$\pi_U'$((h))是严格变换。这由任意满足$l_\lambda(m) = 1$的$m \in M$ 上的$F_\lambda \cap X_{\tilde{\lambda}} = T_\lambda = (x^m)$可得。我们令$v_\lambda \coloneqq v_\lambda(f)$和$\tilde{l}_\lambda \coloneqq {v_\lambda}^{-1} l_\lambda$，使得$\tilde{l_\lambda}^{-1}$(1)∩ Δ 是Δ的一个面。

由于我们希望采用第 1.2、1.3 节中考虑的修改 π_U，因此必须确保满足其中的要求。

引理（2.1）：存在一个非空的扎里斯基开集 $W \subseteq N_{\mathbb{R}}^n$，使得对于所有 $w_1, \ldots, w_n \in W$，定义 $f_j \coloneqq w_j \cdot f$ $(1 \leq j \leq n)$ 和 $N_{\mathbb{C}} \coloneqq$ 理 (.) 关于 和 () () 的假设均成立。这里将 $N \otimes \mathrm{C} \supseteq N_{\mathbb{R}}$ 视为 $\mathrm{C}[M]$ 的所有零次导子的向量空间。

证明：对于 Δ 的任意紧面 δ，$\dim \delta = n - k$，集合 $N_{\mathbb{R}}|\delta = \{l|\delta \mid l \in N_{\mathbb{R}}\}$ 是一个维数为 $n - k + 1$ 的向量空间（由仿射函数组成），且 $1 \in N_{\mathbb{R}}|\delta$。其元素定义了 f_δ 的导数。由于 f 是非退化的，导数 $f_{1\delta}$、. . .、$f_{n\delta}$ （其中 $f_{i\delta} = f_{\delta i}$）在 $(\mathrm{C}^*)^n$ 中没有公共零点。

设 W 为满足以下条件的所有 $(w_1, \ldots, w_n) \in N_{\mathbb{R}}^n$ 的集合

（i） $\Gamma_+(g_j) = \Delta$；（ii）w_1，…，w_n 是$N_{\mathbb{R}}$的一组基；（iii）对于所有$k \in [1, n]$、$\delta \subseteq \Delta$ 维数为$n - k$的紧致对象，$\sum \mathrm{R}_{j=k}^n \ w_j|\delta = N_{\mathbb{R}}|\delta$，$\delta^\circ \subseteq (\mathrm{R}_+^n)^\circ$。

现在我们验证定理（1.3）的假设。

关于 (1)：$D = \bigcup_{\lambda\in L} F_\lambda \subseteq X \setminus T, T = T_{\{0\}}$ 是一个正规交叉除子，因为 Σ 是正则的。F_λ 的交集由公式 $F_\sigma \cap F_{\sigma'} = F_{\sigma+\sigma'}$ 相连，或者为空。

关于 (2)：这由 (i) 得出。

关于 (3)，a)：由于 $x_i \nmid f$，我们有 $Z = \pi^*(f) \cap (X_U \cap T)$ ——————。设 $X_{\breve{\sigma}} \subseteq X$ 为一张图。由于 $s_\Delta|\sigma$ 是线性的，集合 $\delta := \{x \in \Delta | s_\Delta(a) = a(x)\ \forall a \in \sigma\}$ 是 Δ 的一个面（具有 $\sigma \subseteq \sigma(\delta)$ 的最大面）。设 $m \in \delta \cap M$。那么 $f = x^m f^\sigma$ 满足 $v_\lambda(f^\sigma) = 0\ \forall \lambda \subseteq \sigma$，$\dim \lambda = 1$，因此 $Z \cap (X_{\breve{\sigma}} \cap X_U) = (f^\sigma)$。设 $T_\sigma \subseteq X_{\breve{\sigma}}$ 是一个层，满足 $\pi(T_\sigma) = \{0\}$（即 $\sigma^\circ \subseteq (\mathrm{R}^n_\ddagger)^\circ$）。那么 δ 是紧的，并且对于 $x^{-m}(f - f_\delta)$ 中的每个单项式 x^p 以及某个 $\lambda \subseteq \sigma$，$\dim\ \lambda = 1$，我们有 $v_\lambda(x^p) > 0$。因此 $x^{-m}(f - f_\delta)|T_\sigma = 0$ 和 $Z \cap T_\sigma = (x^{-m} f_\delta)$，$x^{-m} f_\delta \in \mathrm{C}[cospan(\breve{\sigma}) \cap M]$。由非退化性，$(x^{-m} f_\delta) \subseteq (\mathrm{C}^*)^n$ 是一个光滑超曲面或为空。由于 $\mathrm{C}[cospan(\breve{\sigma}) \cap M] \subseteq \mathrm{C}[M]$ 定义了一个环面投影 $(\mathrm{C}^*)^n \to T_\sigma$，对 $Z \cap T_\sigma$ 也同样成立。

关于 (3)，b)：考虑 $k \in [1, n]$ 和一个维数为 $\leq n - k$ 的层 $T_\sigma \subseteq D$。利用 $\Gamma_+(g_j) = \Delta$，我们像之前一样得到 $Z_j \cap T_\sigma = (x^{-m} g_{j\delta})$。根据 (iii)，$\sum \mathrm{R}^n_{j=k}\ g_{j\delta} = \sum \mathrm{R}^n_{j=1}\ f_{j\delta}$，因为 $\dim\ \delta \leq \dim\ cospan(\breve{\sigma}) = n - \dim\ \sigma \leq n - k$。因此，$\emptyset = V(x^{-m} f_{1\delta}, \dots, x^{-m} f_{n\delta}) = Z_{[k,n]} \cap T_\sigma$。

关于 (4)：由于 $v_\lambda(f) = v_\lambda(g_j)\ \forall \lambda \in L$，函数 $\frac{g_j}{f}$ 在 $X_U \setminus Z$ 上全纯。再次考虑 $T_\sigma \subseteq D$，维数 $T_\sigma = n - k$。在 $T_\sigma \setminus Z$ 上我们有 $\frac{g_j}{f} = \frac{g_{j\delta}}{f_\delta}$，结论由 $f_\delta \in \sum \mathrm{R}$ 得出。

关于（3），c）：令 $T_\sigma \subseteq D$，$\dim T_\sigma = n - k$。由（3），b）$(F_\sigma \setminus T_\sigma) \cap Z_{[k+1,n]} = \emptyset$。因此$F_\sigma \cap Z_{[k+1,n]} \subseteq T_\sigma$ 是紧的且仿射的，故为有限的。

3 定理（0.1）的证明

设 f 如第0节所述，$U \subseteq \mathrm{C}^n$ 是0的一个开邻域，在此处f 全纯且π_U：$X_U \to U$ 为第2.2节的消解。设 w_1，…，$w_n \in N_{\mathbb{R}}$ 为一组基，$g_j := w_j(f)$，$V_j := (g_j) \subseteq U$，$Z_j := \pi'_U(V_j)$。为简便起见，我们记作 $dx := dx_1 \dots dx_n$。

关于1）：我们选取（w_1，…，w_n），如引理（2.1）所述。我们可以假设 $\mathrm{h} \in \mathcal{O}(U)$，因为$i$ 包含m的一个幂。微分形式 $\pi^*_U \frac{dx}{x_1 \dots x_n}$沿着$X \setminus T$ 有一阶极点（参见[Da，§ 15]）。由于$v_\lambda(x_1 \dots x_n \mathrm{h}) > v_\lambda(g_1 \dots g_n)\ \forall \lambda \in L$ 且$v_\lambda(x_1 \dots x_n \mathrm{h}) > 0\ \forall \lambda = \mathrm{R}_+ e^*_j$（$1 \leq j \leq n$），我们有

$$\pi^*_U \frac{h dx}{g_1 \dots g_n} \in \Gamma(X_U, \Omega^n(Z_1 + \dots + Z_n)),$$

即沿着 $D = \bigcup_{\lambda\in L} D_\lambda$, $D_\lambda := F_\lambda$ 的正则性。根据定理（1.2），$Res_{0,\ V_1,\dots,V_n}(\frac{\mathrm{h}\, dx}{g_1 \dots g_n}) = 0$。由于 $\{\mathrm{h} | supp(x_1 \dots x_n \mathrm{h}) \subseteq n\Delta^\circ\}$ 是一个理想，我们可以得出 $\mathrm{h} \in i = (g_1, \dots, g_n)$。

关于 2)：目前我们只要求 w_j 满足 $\Gamma_+(g_j) = \Delta$。条件 $supp(f^r g) \subseteq n\Delta \cap (\mathrm{R}_+^n)^\circ$ 对于 $\psi := \frac{gdx}{x_1 \dots x_n}$ 意味着

$$\pi_U^* \frac{f^r \psi}{g_1 \dots g_n} \in \Gamma(X_U, \Omega^n(\log D)\,(Z_1 + \dots + Z_n)).$$

这里 D_λ $(\lambda \in L)$ 是一个极点分量

$$\Leftrightarrow v_\lambda(g) = (n-r) v_\lambda(f)$$

$$\Rightarrow \min l_\lambda\,(\delta^\circ \cap M) = \min l_\lambda(\Delta) = s_\Delta\,(l_\lambda)$$

$$\Rightarrow l_\lambda|\delta = s_\Delta(l_\lambda) \text{ is constant} \Rightarrow \lambda \subseteq \sigma(\delta).$$

令 $\sigma_1,\dots,\sigma_t$ 为那些满足 $\sigma \subseteq \sigma(\delta)$ 且 $\dim\ \sigma = \dim \sigma(\delta) = r+1$ 的 $\sigma \in \Sigma$。令 I_s 为 σ_s ($I_s \subseteq L$ 的边集，因为 $\sigma(\delta)^\circ\ \subseteq (\mathrm{R}_+^n)^\circ$) 且 $L_0 := \cup_{1 \le s \le t} I_s$。令 $V \subseteq N_\mathbb{R}$ 为由 $\sigma(\delta)$（或 σ_s）生成的向量空间。对于某个 $s \in [1,t]$ 满足 $\emptyset \neq J \subseteq I_s$ 的 $J \subseteq L_0$，我们定义

$$E_J := \cap_{i \in J} \tilde{l}_i^{-1}(1) \subseteq M_\mathbb{R}.$$

$N_\mathbb{R}|E_J = \{l|E_J \big| l \in N_\mathbb{R}\}$ 是 E_J 上仿射函数的向量空间，而 $V|E_J = \{l|E_J \big| l \in V\}$ 是一个维数为 $(r+2) - |J|$ 的子空间。（要看出这一点，取 $x_0 \in E_J$。那么，$l_j, j \in \bar{J} := I_s \setminus J$, 在 $E_J - x_0$ 上线性无关。因此，$1|E_J, l_j|E_J, j \in \bar{J}$, 构成一个基。）

现在我们以更严格的方式选取 w_1，…，w_n，使得：

(i) $\Gamma_+(g_j) = \Delta\ \forall\, j$；(ii) w_1，…，w_n 是 $N_\mathbb{R}$ 的一组基；(iii) $w_i \in V\ \forall\, i \in [1, r+1]$（因此根据 (ii) 是一组基）；(iv) $(w_k, \dots, w_{r+1}, \dots, w_n)|E_J$ 是 $N_\mathbb{R}|E_J\ \forall\, J \subseteq L_0, |J| = k \ge 1$ 的一组基，其中 $J \subseteq I_s$ 对某个 $s \in [1,t]$ 成立；(v) $w_i|\delta = 1\ \forall\, i \in [1, r+1]$。

为满足 (iii) 和 (iv)，我们选取 w_1，…，$w_{r+1} \in V$，使得 w_k，…，w_{r+1} 在 $N_\mathbb{R}|E_J\ \forall\, J, |J| = k$ 中仍然线性无关，然后再添加一些向量。由于 (ii)–(iv) 对于 $V^{r+1} \times N_\mathbb{R}^{n-r-1}$ 中的一个扎里斯基开集以及当 $w \in \sigma(\delta)$ 时的 $\ker w \cap \Delta = \emptyset$ 均成立，因此我们可以保证 (i)。根据 (iii) 和 (ii)，(v) 中的 $w_i|\delta$ 是非零常数，可以将其归一化以得到 (v)。

采用这一选择，定理（1.3）的条件（1）、（2），以及关于极点除子 $\cup_{i \in L_0} D_i$ 而非 D 的条件（3）、（4）均得到满足。特别是

$$\sum_{j=k}^n c_j^J \frac{\tilde{g}_j}{\tilde{f}} = 1 \text{ on } D_J \setminus Z,$$

如果选择 $c_j^J \in \mathrm{R}$，使得 $\sum_{j=k}^n c_j^J\, w_j|E_J = 1|E_J$。（参见引理（2.1）的证明。）

由定理（1.3）和注记（1.4），我们有

$$Res_{0,V_1,\dots,V_n}\left(\frac{f^r \psi}{g_1 \dots g_n}\right) =$$

$$(-1)^r \sum_{s=1}^t \sum_{i_1,\dots,i_{r+1} \in I_s} c_1^{\{i_1\}} \dots c_r^{\{i_1,\dots,i_r\}} \sum_{p \in D_{I_s} \cap Z_{[r+2,n]}} Res_{p, D_{I_s} \cap (Z_{r+2},\dots,Z_n)} R_{D_{i_1} \dots D_{i_{r+1}}}\left(\frac{\tilde{\psi}}{\tilde{g}_{r+1} \dots \tilde{g}_n}\right)$$

.

我们考察第一个和式中的一个加项，例如 $s=1$。若通过一个全序将 I_1 与 $[1,r+1]$ 等同起来，这就是微分形式 $\sum_{p\in D_{[1,r+1]}\cap Z_{[r+2,n]}} Res_{p\ D_{[1,r+1]}\cap\ Z_{r+2}\quad Z_n\quad ,(\ ,\dots,\ )}$ 的留数和

$$c_1 R_{D_1\dots D_{r+1}}\left(\frac{\tilde{\psi}}{\tilde{g}_{r+1}\cdots\tilde{g}_n}\right).$$

Here

$$c_1=\sum_{(i_1,\dots,i_{r+1})\in P([1,r+1])} c_1^{\{i_1\}}\dots c_r^{\{i_1,\dots,i_r\}}\, sign(i_1,\dots,i_{r+1}),$$

采用下文引理 (3.1) 中的记号。

我们需要表示这个微分形式：设 $\tilde{l}_i=\sum_{j=1}^{r+1} a_{ij}w_j$ $(1\le i\le r+1)$ 和 $A=(a_{ij})\in M_{r+1}(\mathrm{R})$。由于 $\tilde{l}_i|\delta=w_i|\delta=1\ \forall\, i\in[1,r+1]$，我们有 $\sum_{j=1}^{r+1} a_{ij}=1(1\le i\le r+1)$，因此

$$detA=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,r+1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r+1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,r} & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & 1\end{vmatrix},$$

根据下文推论 (3.2)，这等于 c_1。

迭代庞加莱留数 $R_{D_1\dots D_{r+1}}(\ \tilde{\psi}_{\tilde{g}_{r+1}\dots\tilde{g}_n})$ 可描述如下：迭代留数映射 $R_{D_1\dots D_{r+1}}=R_{D_{[1,r+1]}}R_{D_{[1,r]}}\dots R_{D_1}$ (限制在 $X_{\breve{\sigma}_1}$)

$$\begin{array}{ccc}\Gamma(X_{\breve{\sigma}_1},\Omega^n(\log D)) & \longrightarrow & \Gamma(T_{\sigma_1},\Omega^{n-r-1})\\ \cap\,| & & \|\\ \mathbb{C}[\breve{\sigma}_1\cap M]\otimes\Lambda^n M_{\mathbb{C}} & \to & \mathbb{C}[cospan(\breve{\sigma}_1)\cap M]\otimes\Lambda^{n-r-1}(V^{\perp})_{\mathbb{C}}\end{array}$$

是因子 $\Lambda^n M_{\mathbb{C}}$ 上的内积 $i(l_{r+1})i(l_r)\dots i(l_1)$，以及 $\mathrm{C}[\breve{\sigma}_1\cap M]$ 上的留数映射。

因此我们得到（如 $g=g_{(n-r)\delta}$）

$$R_{D_1\dots D_{r+1}}\left(\frac{\tilde{\psi}}{\tilde{g}_{r+1}\cdots\tilde{g}_n}\right)=\frac{g}{g_{r+1,\delta}\cdots g_{n,\delta}}i(l_{r+1})\dots i(l_1)(\frac{dx}{x})$$

（其中 $x=x_1\dots x_n$）并且

$$i(l_{r+1})\dots i(l_1)=(v_1\dots v_{r+1})i(\tilde{l}_{r+1})\dots i(\tilde{l}_1)=(v_1\dots v_{r+1})\det(A)i(w_{r+1})\dots i(w_1).$$

在这种表示中，只有 $(v_1\dots v_{r+1})\det(A)$ 依赖于 s。结合 c_1，庞加莱留数中出现的正因子 $(v_1\dots v_{r+1})\det(A)^2$ 依赖于 s。

由于 $cospan(\breve{\sigma}_s)=cospan(\breve{\sigma}(\delta))\ \forall\, s\in[1,t]$，我们可以将所有 T_{σ_s} 视为相同，并得到关于 $s\neq 1$ 的相同结果，至多相差一个正因子，因为只有正因子（$v_1\dots v_{r+1}$）$\det(A)^2$ 可能发生变化。[5]

---

[5] 这个证明思路在特殊情形 $\dim\delta=0$ 下用于 [Vas]。在这种情形下，证明到此已经完成。

由于留数和是在所有$p \in D_{I_s} \cap Z_{[r+2,n]} \subseteq T_{\sigma_s}$上取的，$s = 1$、…、$t$ 的留数和也仅相差一个正因子。

因此，我们只需证明，对于 $s = 1$，留数和非零。为此，我们将附录中的断言 (A.1.1) 应用于 $X = D_{I_1} = F_{\sigma_1}$ 和除子 $(Z_{r+1}, \dots, Z_n) \cap D_{I_1}$。我们指出，$H^{n-r-1}\Gamma(X, F^{\cdot+1} \otimes \Omega_X^{n-r-1})$（记号同 (A.1.1)）与 $K_\sigma/(f_{1\delta}, \dots, f_{n\delta})K_\sigma$ 的 $(n-r)$ −次齐次分量（记号同定理 0.1）同构。留数和（不含额外因子）就是迹

$$Tr\left[\frac{g}{g_{r+1,\delta} \dots g_{n,\delta}} i(l_{r+1}) \dots i(l_1)\left(\frac{dx}{x}\right)\right]$$

并且当 g 在 $H^{n-r-1}\Gamma(X, F^{\cdot+1} \otimes \Omega_X^{n-r-1})$ 中的类非零时，它也非零。这正是定理（0.1）第 2) 条的假设，因此定理得证。

下面还需补充一个关于上述证明中所用行列式的引理和推论。

设 V 是一个维数为 n 的实向量空间，$w_1, \dots, w_n$ 是对偶空间 V^* 的一组基，并且 $v_1, \dots, v_{r+1} \in V^*$ 与 $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j$ 线性无关。对于 $I \subseteq [1, r+1]$，$|I| = k \geq 1$，我们考虑所有双射 $p = (i_1, \dots, i_k)$：$[1,k] \to I$ 的集合 $P(I)$，并将 $sign(p)$ 记作通过自然顺序将 I 与 $[1,k]$ 对应后所得置换 $[1,k]$ 的符号。于是 $sign(i_1, \dots, i_k, j) = (-1)^{1+k-s(j)} sign(i_1, \dots, i_k)$，其中 $s(j)$ 是 j 在有序集合 $\{i_1, \dots, i_k, j\}$ 中的位置。对于 $I \subseteq [1, r+1]$，$J \subseteq [1, n]$，$|I| = |J|$，我们将 $(a_{ij}) \in M_{r+1,\, n}(\mathrm{R})$ 的相应子式记为 $D(I, J)$。

引理 (3.1)：假设对于每个 $I \subseteq [1, r+1]$, $|I| = k \geq 1$，都存在系数 c_i^I, $i \in [k, n]$ $\sum_{i=k}^n c_i^I w_i = 1$ $E_I := \cap_{j \in I} v_j^{-1}$ 1 $I \subseteq$，使其位于仿射子空间 ( ) 上。$[1, r+1]$ $|I| = k \geq 1$
那么对于所有 , :

$$\sum_{p=(i_1,\dots,i_k) \in P(I)} sign(p) c_1^{\{i_1\}} \dots c_k^{\{i_1,\dots,i_k\}} = D(I, [1,k]).$$

证明：首先，我们推导 c_i^I 的一个公式。令 $u := \sum_{i=k}^n c_i^I w_i$。由 $u|E_I = 1$ 我们得到$u| \cap \ker_{j \in I} v_j = 0$ 以及 $u = \sum_{j \in I} b_j^I v_j$，其中 $\sum_{j \in I} b_j^I = 1$。代入 $v_j = \sum_{l=1}^n a_{jl} w_l$ 后，我们得到

$$u = \sum_{i=k}^n c_i^I w_i = \sum_{j \in I} b_j^I \sum_{l=1}^n a_{jl} w_l = \sum_{l=1}^n (\sum_{j \in I} b_j^I a_{jl}) w_l.$$

这相当于以下方程组

$$\sum_{j \in I} b_j^I = 1,$$

$$\sum_{j \in I} b_j^I a_{jl} = 0, l = 1, \dots, k-1$$

连同 $c_l^I = \sum_{j \in I} b_j^I a_{jl}$, , $l = k, \dots, n$。

根据克拉默法则

$$b_j^I \left(\sum_{i \in I} (-1)^{1+s(i)} D(I \setminus \{i\}, [1, k-1])\right) = (-1)^{1+s(j)} D(I \setminus \{j\}, [1, k-1]),$$

并将其代入 c_l^I 的公式中，

$$c_l^I\left(\sum_{i\in I}(-1)^{1+s(i)}\,D(I\setminus\{i\},[1,k-1])\right)=\sum_{j\in I}(-1)^{1+s(j)}\,a_{jl}D(I\setminus\{j\},[1,k-1]),$$

其中 $s(i)$ 是 i 在 I 中的位置。对于 $l=k$，最后一个公式可简化为

$$c_k^I\left(\sum_{i\in I}(-1)^{1+s(i)}\,D(I\setminus\{i\},[1,k-1])\right)=(-1)^{k-1}D(I,[1,k]).$$

现在我们通过对 k 归纳来证明该引理。

$k=1$: $\quad c_1^{\{i_1\}}=D(\{i_1\},\{1\}).$

$k\to k+1$: 利用归纳假设，我们得到

$$\sum_{p=(i_1,\dots,i_{k+1})\in P(I)}sign(p)c_1^{\{i_1\}}\dots c_{k+1}^{\{i_1,\dots,i_{k+1}\}}=$$
$$\sum_{j\in I}\left(\sum_{p'=(i_1,\dots,i_k)\in P(I\setminus\{j\})}sign(p',j)c_1^{\{i_1\}}\dots c_k^{\{i_1,\dots,i_k\}}\right)c_{k+1}^I=$$
$$\sum_{j\in I}(-1)^{1+k-s(j)}\left(\sum_{p'=(i_1,\dots,i_k)\in P(I\setminus\{j\})}sign(p')c_1^{\{i_1\}}\dots c_k^{\{i_1,\dots,i_k\}}\right)c_{k+1}^I=$$
$$\sum_{j\in I}(-1)^{1+k-s(j)}(D(I\setminus\{j\},[1,k])c_{k+1}^I=D(I,[1,k+1]).$$

推论（3.2）：对于 $I=[1,r+1]$，我们有

$$\sum_{p=(i_1,\dots,i_{r+1})\in P(I)}sign(p)c_1^{\{i_1\}}\dots c_r^{\{i_1,\dots,i_r\}}=\sum_{i\in I}(-1)^{r+1+s(i)}(D(I\setminus\{i\},[1,r]).$$

证明:

$$\sum_{p=(i_1,\dots,i_{r+1})\in P(I)}sign(p)c_1^{\{i_1\}}\dots c_r^{\{i_1,\dots,i_r\}}=$$
$$\sum_{i\in I}(-1)^{1+r-s(i)}\sum_{p'=(i_1,\dots,i_r)\in P(I\setminus\{i\})}sign(p')c_1^{\{i_1\}}\dots c_r^{\{i_1,\dots,i_r\}}=\sum_{i\in I}(-1)^{1+r-s(i)}(D(I\setminus\{i\},[1,r]).$$

附录1：$H^n(X,\Omega_X^n)$（维数为 n 的环面簇）

设 M,N 是 $n-$维的互为对偶的格，分别位于 $M_{\mathbb{R}},N_{\mathbb{R}}$ 中，配对为 $\langle .,.\rangle:N\times M\to\mathbb{Z}$；并设 Δ 是 $M_{\mathbb{R}}$ 中一个 $n-$维的紧凸整多面体（即其顶点属于 M）。我们考虑 $N_{\mathbb{R}}$ 上的一个扇 Σ，使得支撑函数 $s_\Delta(a)=\inf\langle a,\Delta\rangle$ 在所有 $\sigma\in\Sigma$ 上都是线性的，即 $\exists\, m_\sigma\in M\cap\Delta$ 与 $s_\Delta|\sigma=\langle .,m_\sigma\rangle$。换言之，$\Sigma$ 将对偶于 Δ 的扇细分。为简单起见，我们假设 Σ 是正则的。

与这些数据相关联的是托里克簇 $X=X_\Sigma$、环面 $T=Spec\,\mathbb{C}[M]\subseteq X$、最大的约化不变除子 $D=X\setminus T$，以及一个 $T-$不变除子 C，其阶函数为 $ord\,\mathcal{O}(C)=s_\Delta$，即 $C|_{X_{\check{\sigma}}}=(x^{-m_\sigma})$。于是

$$\Gamma\big(X,\mathcal{O}(lC)\big)=L(l\Delta):=\{g\in\mathbb{C}[M]|supp(g)\subseteq l\Delta\}.$$

令 $g_0,\dots,g_n\in L(\Delta)$ 具有公共牛顿多面体 $\Delta(g_i)=conv(supp(g_i))=\Delta$。我们有一个分解 $(g_i)=Z_i-C$，其中 Z_i 是一个在 D 中不含任何分支的卡蒂埃除子。g_i 可以选取为使得

$$Z_0\cap\dots\cap Z_n=\emptyset,\ D\cap Z_0\cap\dots\hat{Z}_i\dots\cap Z_n=\emptyset\ \forall\, i\in[0,n].$$

（这可由线性系 $|C|$ 没有基点这一事实推出，因为 $(x^{m_\sigma}) + C|X_{\check{\sigma}} = 0$。这也可由贝尔蒂尼定理推出，参见 [Da, 6.8]: 对于 D 的任意分支D_i ，托里克簇 D_i 上的线丛 $\mathcal{O}_{D_i}(C)$ 与 Δ的一个面相关联，并且限制映射 $\Gamma(X, \mathcal{O}(C)) \to \Gamma(D_i, \mathcal{O}_{D_i}(C))$ 是满射。为此，我们可以用一个等价的因子替换 C ，使其不包含 D_i。因此，对于一般的 $g \in L(\Delta)$，因子 $Z =(g) + C$ 与 X 的所有分层 T_σ 横截相交，而 g_i 可以取为 $g, x_i \partial g/\partial x_i$ $(1 \le i \le n)$ 的一般线性组合。）

由于 T 仅包含有限个紧子空间，第二个条件意味着

$$Z_0 \cap \ldots \hat{Z}_i \ldots \cap Z_n \text{ is finite.}$$

令 $\mathcal{U}$ 为 X的覆盖 $U_i = X \setminus Z_i, i \in [0, n]$。对于 Ω_X^n ，它是无环的，因为 $\Omega_X^n \cong \mathcal{O}(-D)$ 且

(1) $H^q(X, \mathcal{O}(-D + lC)) = 0$ 对于 $l > 0, q > 0$ 或 $l \le 0, q \ne n$

([Da], [TE])。我们还有

(2) $H^0\big(X, \mathcal{O}(-D + lC)\big) = L(l\Delta^\circ), l > 0.$

迹映射 $Tr\colon C^n(\mathcal{U}, \Omega_X^n) \to \mathbb{C}$ 可定义为

$$Tr(\varphi) \coloneqq \sum_{p \in Z_{[1,n]}} Res_{p, Z_1, \ldots, Z_n}(\varphi), \varphi \in \Gamma\big(X, \Omega_X^n(*(Z_0 + \cdots + Z_n))\big).$$

根据留数定理，$Tr(\varphi) = 0$ 对于 $\varphi \in \sum_{i=1}^n \Gamma(X, \Omega_X^n(*(Z_0 + \cdots \hat{Z}_i \ldots + Z_n)))$，且诱导映射

$$Tr\colon H^n(\mathcal{U}, \Omega_X^n) \to \mathbb{C}$$

定义良好。

考虑 $\omega \coloneqq \sum (_{i=0}^n -1\ ^i \frac{dg_0}{g_0} \wedge) \ldots \frac{dg_\imath}{g_\imath} \ldots \wedge \frac{dg_n}{g_n}$。我们有 $\omega \in \Gamma(X, \Omega_X^n($ $Z_0 + \cdots + Z_n))$。也就是说，在仿射图$X_{\check{\sigma}} \subseteq X$ 上，我们有$g_i = x^m \tilde{g}_i$， $Z_i = (\tilde{g}_i)$，其中 $m = m_\sigma$， $\frac{dg_i}{g_i} = \frac{dx^m}{x^m} + \frac{d\tilde{g}_i}{\tilde{}}$ ，并且g_i

$$\omega = \sum_{i=0}^n (-1)^i \Big(\sum_{j<i} (-1)^j \frac{dx^m}{x^m} \frac{d\tilde{g}_0}{\tilde{g}_0} \ldots \widehat{\frac{d\tilde{g}_j}{\tilde{g}_j}} \ldots \widehat{\frac{d\tilde{g}_\imath}{\tilde{g}_\imath}} \ldots \frac{d\tilde{g}_n}{\tilde{g}_n} +$$
$$\sum_{j>i} (-1)^{j-1} \frac{dx^m}{x^m} \frac{d\tilde{g}_0}{\tilde{g}_0} \ldots \widehat{\frac{d\tilde{g}_\imath}{\tilde{g}_\imath}} \ldots \widehat{\frac{d\tilde{g}_j}{\tilde{g}_j}} \ldots \frac{d\tilde{g}_n}{\tilde{g}_n} + \frac{d\tilde{g}_0}{\tilde{g}_0} \ldots \widehat{\frac{d\tilde{g}_\imath}{\tilde{g}_\imath}} \ldots \frac{d\tilde{g}_n}{\tilde{g}_n}\Big) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{d\tilde{g}_0}{\tilde{g}_0} \ldots \widehat{\frac{d\tilde{g}_\imath}{\tilde{g}_\imath}} \ldots \frac{d\tilde{g}_n}{\tilde{g}_n}.$$

对于$p \in X_{\check{\sigma}}$ 留数$Res_{p,\ z_1,\ \ldots,\ z_n}(\omega) = Res_{p,\ z_1,\ \ldots,\ z_n}(\frac{d\tilde{g}_1}{\tilde{g}_1} \ldots \frac{d\tilde{g}_n}{\tilde{g}_n})$ 是交数（$Z_1 \ldots Z_n$）$_p$。因此$Tr(\omega) = (Z_1 \ldots Z_n)$。

一般而言，对于紧流形，有$0 \ne H^n(X, \Omega_X^n) \cong H^{2n}(X, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$（由塞尔对偶可知）。由此可得$Z_1 \cap \ldots \cap Z_n \ne \emptyset$ 并且

$$Tr\colon H^n(\mathcal{U}, \Omega_X^n) = H^n(X, \Omega_X^n) \to \mathbb{C}$$

是一个同构。在托里克情形（$Z_1 \ldots Z_n$）$= n! Vol(\Delta)$，由[Da，11.12.2]。

$H^n(\mathcal{U}, \Omega_X^n)$的更显式表示可由如下定义的Koszul复形得到：$F \coloneqq \oplus_0^n \mathcal{O}(C)$, $F^p \coloneqq \Lambda^p F$, $s = (g_0, \dots, g_n) \in \Gamma(X, F)$ 以及

$$F^{\cdot}: 0 \to F^0 \to F^1 \overset{s\wedge}{\to} \dots \to F^{n+1} \to 0.$$

在图 $X_{\check{\sigma}} \subseteq X$ 上，模 $\mathcal{O}(C)$ 是自由的，而 $\Gamma(X_{\check{\sigma}}, F^{\cdot})$ 同构于由元素 $\tilde{g}_0, \dots, \tilde{g}_n \in \Gamma(X_{\check{\sigma}}, \mathcal{O}_X)$ 构成的 Koszul复形；该复形是正合的，因为这些元素生成了单位理想。

由于 $F^p = \Lambda^p(\mathcal{O}_X^{n+1} \otimes \mathcal{O}(C)) = \Lambda^p(\mathcal{O}_X^{n+1}) \otimes \mathcal{O}(pC)$ 且由 (1),

$$0 \to \Omega_X^n \to F^1 \otimes \Omega_X^n \to F^2 \otimes \Omega_X^n \to \cdots$$

是 Ω_X^n 的无环消解。因此

$$H^n(X, \Omega_X^n) = H^n\Gamma(X, F^{\cdot+1} \otimes \Omega_X^n) = \Gamma(X, \Omega_X^n((n+1)C))/\sum_0^n g_i\, \Gamma(X, \Omega_X^n(nC)).$$

复形 $F^{\cdot} \otimes \Omega_X^n$ 同构于子复形

$$0 \to \Omega_X^n \to \oplus_{i=0}^n \mathcal{O}(Z_i) \otimes \Omega_X^n \to \oplus_{i<j} \mathcal{O}\big(Z_i + Z_j\big) \otimes \Omega_X^n \to \cdots$$

Čech分解的

$$0 \to \Omega_X^n \to \oplus_{i=0}^n \mathcal{O}(* Z_i) \otimes \Omega_X^n \to \oplus_{i<j} \mathcal{O}\big(* (Z_i + Z_j)\big) \otimes \Omega_X^n \to \cdots$$

Ω_X^n 的。这表明映射

$$H^n\Gamma(X, F^{\cdot+1} \otimes \Omega_X^n) \to H^n(\mathcal{U}, \Omega_X^n)$$

是一个同构。我们已经证明：

(A.1.1) The map $H^n\Gamma(X, F^{\cdot+1} \otimes \Omega_X^n) \to \mathbb{C}$, $[\varphi] \mapsto Tr\left[\frac{\varphi}{g_0 \dots g_n}\right]$ is bijective.

附录2：底 socle 的次数计算

设 $\sigma \subseteq \mathrm{R}^n$ 是一个 $k-$维凸有理多面锥，且 $cospan(\sigma) = \{0\}$。令 $A_\sigma \coloneqq \mathrm{C}[\sigma \cap \mathrm{Z}^n]$ 和 $K_\sigma \coloneqq \mathrm{C}[\sigma^\circ \cap \mathrm{Z}^n]$ 按线性形式 $\lambda: \mathrm{Q}^n \longrightarrow \mathrm{Q}$ 分次，该线性形式在 $\sigma \setminus \{0\}$ 上为正。我们考虑一个齐次参数系 $f_1, \dots, f_k \in A_\sigma$，其次数为 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$。

(A.2.1) 引理：$\overline{K}_\sigma \coloneqq K_\sigma/(f_1, \dots, f_k)K_\sigma$ 的底 socle 的次数为 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$。

证明：取一个整数倍后，不妨设 $\lambda(\mathrm{Z}^n) \subseteq \mathrm{Z}$。首先，设 $\sigma = \langle m_1, \dots, m_k \rangle$，$m_i \in \mathrm{Z}^n$ 是单纯的，并且 $f_i = x^{m_i}$。则 $\{[x^m] \big| m \in \mathrm{Z}^n, m = \sum_{i=1}^k a_i\, m_i, 0 < a_i \leq 1\}$ 是 $\overline{K}_\sigma$ 的 $\mathrm{C}-$基，而底 socle 的次数为 $\beta \coloneqq \lambda(m_1) + \cdots + \lambda(m_k)$。庞加莱级数之间的关系为

$$P(K_\sigma) = \frac{P(\overline{K}_\sigma)}{\left(1-t^{\lambda(m_1)}\right)\dots\left(1-t^{\lambda(m_k)}\right)},$$

且 $P(K_\sigma)$ 是两个次数为 β 且首项系数分别为 1 和 $(-1)^k$ 的多项式之商。它们的商给出值 $P(K_\sigma)(\infty)$。

对于一般的 σ，设 $\sigma^{\circ} = \cup\ \tau^{\circ}{}_{\tau}$　是由单纯开锥组成的分解（参见 [TE，第 32],[Da，8.2]）。那么 $P(K_{\sigma})\ = \sum\ P(_{\tau}\quad K_{\tau}\ )$ 也是次数相同的多项式之商，且$P(K_{\sigma})(\infty)\ = \sum_{\tau} P(K_{\tau})(\infty) = \sum($ $_{\tau}\ -1\ ^{\dim \tau})$。这是一个（$k-1$）–球的负欧拉示性数$-\chi(B,\partial B)\ = (-1)^{k}$。同样根据

$$P(K_{\sigma}) = \frac{P(\overline{K}_{\sigma})}{(1-t^{\alpha_1})\ldots(1-t^{\alpha_k})}$$

我们看到 $P(\overline{K}_{\sigma})$ 是一个次数为 $\alpha_1+\cdots+\alpha_k$、首项系数为 1 的多项式。

参考文献

AGV Arnold, V.I., S.M. Gusein-Zade, A.N. Varchenko：《可微映射的奇点》第2卷，Birkhäuser，巴塞尔、波士顿，1988年。BGMM Briancon, J., M. Granger, Ph. Maisonobe, M. Miniconi：《伯恩斯坦多项式计算算法》，傅里叶研究所年刊39卷（1989年），553-610。Da Danilov, V.I.：《环面簇的几何》，俄罗斯数学调查33卷（1978年），85-134。GH Griffiths, Ph., J. Harris：《代数几何原理》，Wiley，纽约，1978年。Kou Kouchnirenko, A.G.：《牛顿多面体与米尔诺数》，《数学发明》32卷（1976年），1-31。TE Kempf, G., F. Knudson, D. Mumford, B. Saint-Donat：《环面嵌入》，Springer，数学讲义丛书第339卷（1973年）。V Varchenko, A.N.：《单值化的 ζ 函数与牛顿图》，《数学发明》37卷（1976年），253-262。Vas Vasil’ev, V.A.：《复域中指数积分的渐近行为》，《泛函分析及其应用》13卷（1979年），239-247。