采用等几何分析的基于超材料的热操控器水平集拓扑优化

Chintan Jansari[a]，St´ephane P.A. Bordas[*, a, b]，Elena Atroshchenko[c]

[a]卢森堡大学科学、技术与医学学院计算工程研究所，卢森堡市，卢森堡。[b]犹他大学机械工程系克莱德访问研究员，美国犹他州盐湖城。[c]新南威尔士大学土木与环境工程学院，澳大利亚悉尼。

arXiv:2303.03557v1 [cs.CE] 6 Mar 2023

摘要

我们采用水平集拓扑优化，为基于超材料的热操控器确定最优材料分布。为利用其易于控制光滑度和连续性的优势，我们使用非均匀有理B样条（NURBS）基函数对水平集函数、几何和解场进行参数化。此外，NURBS逼近能够精确表示圆锥曲线几何，并能提高高阶单元的计算效率。控制点处的水平集函数值（称为展开系数）被用作设计变量。在优化过程中，我们采用先进的数学规划技术——序列二次规划（SQP）。考虑到该优化问题涉及大量设计变量而约束数量较少，我们采用伴随方法计算相对于设计变量的所需灵敏度。通过求解三个数值算例，验证了所提方法的效率和稳健性。我们还展示了当前方法能够处理不同的几何形状和目标函数类型。此外，我们还探讨了蒂霍诺夫正则化和体积正则化等正则化技术，以减少不必要的复杂性并提高优化拓扑的可制造性。

关键词：水平集拓扑优化、热隐身斗篷、热伪装、热超材料、伴随方法、等几何分析。

*通讯作者电子邮箱： stephane.bordas@alum.northwestern.edu (St´ephane P.A. Bordas)

1. 引言

由于组成材料的特殊排列，热超材料能够实现优于自然界现有材料的热传递能力。因此，研究人员提出利用人工制造的热超材料来控制热通量。这一概念为热传递应用开辟了新的研究机遇。其中一个机遇是制造在热学上等效于电阻器、电容器、电感器、二极管、晶体管等的器件。这些器件称为热操控器，目前已有多种此类器件被提出，例如热隐身斗篷 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]，热聚集器 [1, 2, 3, 7, 9]，热伪装 [4, 10]，热通量反转器 [1] 等。基于超材料的热操纵器中构件材料的空间布局对其性能有显著影响。因此，结构优化可作为一种有效方法，用于理解构件材料空间排列的影响并开发性能更优的设计。据作者所知，针对基于超材料的热操纵器开展的优化研究仍然有限 [11, 12, 13]。作者此前已发表一篇文章，将等几何形状优化与无梯度的粒子群优化（PSO）算法相结合 [14]。本文可视为前述工作的延伸：本文采用拓扑优化，以避免形状优化所带来的限制，并探索更大的设计空间。

结构优化的目标是确定设计域中的材料分布，使器件或结构达到最佳性能。在结构优化发展初期，其主要关注机械结构的优化。随着时间推移，优化逐渐发展为一种更通用的数值技术，可用于解决更广泛的物理问题，包括流体、光学、声学、热力学等。近年来，与形状优化和尺寸优化等其他结构优化技术相比，拓扑优化日益受到关注。其受欢迎的原因在于，它能够在优化过程中改变拓扑，从而避免需要一个接近最优的初始设计。迄今为止，已有多种拓扑优化方法。最常见的方法包括基于密度的、基于水平集的、基于相场的和基于进化算法的。尽管这些方法为拓扑优化提供了不同的思路，但它们在概念上的差异很小。由于缺少直接相关的比较，很难确定哪种技术最适合特定问题 [15]。此外，影响整体性能的不仅是方法的选择，优化器、滤波器、约束等因素也同样重要。然而，尤其是在基于水平集的方法中，界面在整个优化过程中都有明确的定义

因此，我们重点研究水平集拓扑优化，因为在未来的工作中，它可能具有在界面上施加目标函数或约束的优势 [16, 17, 18, 19]。其余方法已在综述文章中作了详细介绍 [15, 20, 21, 22]。

Osher 和 Sethian 提出的水平集方法（LSM） [23], 可捕捉多相流中的运动界面。Haber 和 Bendsoe [24]提出了将水平集方法与拓扑优化相结合的想法。此后，多个研究团队开始开展相关研究，并陆续发表了水平集拓扑优化方法 [16, 25]。Osher 和 Santosa [26], 、Allaire 等人 [18, 27], 以及 Wang 等人 [17], 引入了基于形状灵敏度的水平集拓扑优化框架。针对热操控器，Fujii 和 Akimoto 探索了水平集拓扑优化方法。他们使用该方法优化了热隐身斗篷 [11], 、热隐身斗篷-聚热器 [12], 以及热-电联合隐身斗篷 [13]。他们的研究采用有限元方法求解边值问题，并使用随机进化策略进行优化。相比之下，我们采用等几何分析求解边值问题，并使用基于梯度的序列二次规划（SQP）方法进行优化。接下来的几段中，我们将讨论水平集拓扑优化方法以及优化过程的其他方面。

在水平集拓扑优化中，水平集函数（LSF）的等值线隐式定义了材料相之间的界面。因此，拓扑会随着这些等值线的移动而发生变化。此外，网格保持不变，从而消除了每次迭代创建新网格所需的成本。

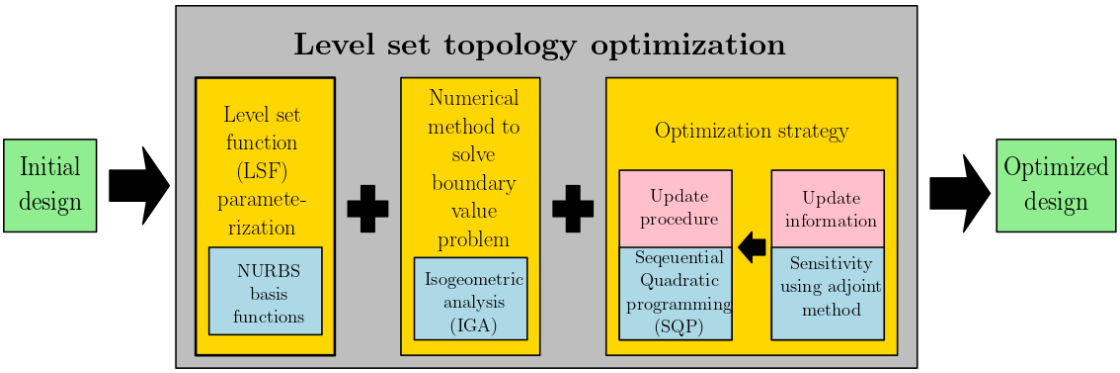


图1：水平集拓扑优化的组成部分。

水平集拓扑优化主要包含三个部分：水平集函数（LSF）参数化（设计空间）、用于求解边值问题的高效数值方法

以及优化策略。在本研究中，采用NURBS基函数对水平集函数、几何和解场（即温度分布）进行参数化。等几何分析（IGA） [28]用于求解热边值问题。在这里，我们通过采用两组不同的NURBS基，将水平集函数参数化与几何和解场解耦。然而，借助几何无关场近似（GIFT）等工具，将这三种参数化全部解耦将更具优势 [29, 30]。对于优化，我们采用数学规划方法——序列二次规划（SQP） [31]。上述选择及其相应替代方案背后的动机将在以下段落中讨论。图1展示了该方法及其各组成部分和每个组成部分具体选择的概览。

首先，我们讨论水平集函数参数化。通过水平集函数参数化，利用少量点值对整个设计域上的水平集函数进行近似，这些节点/控制点处的值充当设计变量。水平集函数参数化决定了设计自由度、细节程度以及优化问题的性质。因此，优化所需的工作量在很大程度上取决于水平集函数参数化。在本研究中，水平集函数的参数化与几何参数化和解场参数化相互解耦。解耦可以在不增加优化复杂性的情况下，确保解具有所需的精度。这一思想在自由边界问题的水平集方法中已十分常见，正如 [32] 中所述。

采用 NURBS 参数化和等几何分析（IGA）相比拉格朗日参数化和传统有限元法（FEM） [33,34]具有多项优势：(i) 易于控制光滑度和单元间连续性；(ii) 能够精确表示圆锥曲线几何；(iii) 使用高阶单元时效率更高。Hughes等人 提出了等几何分析（IGA），其基于使用 NURBS基函数对伽辽金公式进行离散化。此后，人们又提出了等几何分析的多种变体，例如等几何配点法（IGA-C） [35], 、等几何边界元法（IGABEM） [36, 37], 和几何无关场近似（GIFT） [29, 30] 。等几何分析及其变体已成功应用于形状与拓扑优化框架 [33, 34, 38, 39]。在我们的工作中，我们采用了 Wang等人 [40]提出的结合等几何分析的参数化水平集拓扑优化方法。不过，我们没有采用浸入边界技术将几何映射到数值模型中，而是使用基于密度的点几何映射，因为其实现相对简单。此外，基于密度的映射避免了浸入边界技术中常见的病态问题。在基于密度的映射中，不对积分进行特殊处理。

数值分析中积分点处的热导率直接根据水平集函数的值定义。然而，这种简化方法在界面附近的材料定义不够精确。因此，通过使用足够精细的求解网格，确保基于密度的映射不会降低求解精度。

最后，将讨论优化过程。它包括两个部分：（i）更新信息和（ii）更新过程。更新信息通常包括目标函数以及目标函数和约束对设计变量的灵敏度。灵敏度分析最常用的方法有：（a）直接法、（b）有限差分法、（c）半解析法和（d）伴随方法 [33]。直接法需要针对每个设计变量额外求解一个方程组；因此，对于复杂问题，直接法的计算成本很高。同样，有限差分法需要针对 $n+1$ 设计变量求解边界值问题 n 。此外，有限差分法的精度取决于扰动大小。半解析法的计算效率较高；但在某些特殊情况下，由于设计灵敏度场与结构不相容，其精度可能不尽如人意 [41]。伴随方法需要针对 $n+1$ 依赖于场解的目标函数和约束求解 n 方程组。对于设计变量数量较多、约束数量较少的问题，伴随系统效率较高，这与本文的情况相符。因此，本文采用伴随方法 [42] 计算灵敏度。

更新过程决定如何利用更新信息推进水平集界面。对于更新过程，文献中有两类可用的方法：（a）基于 Hamilton-Jacobi（HJ）方程的方法；（b）数学规划。对于第一类方法，该问题被视为一个准时间问题。界面的运动基于伪时间 [43, 44, 45] 中 Hamilton-Jacobi（HJ）方程的解进行计算。第二类方法，即数学规划 [46, 47, 48, 49] ，通常配备复杂的步长选择、约束处理策略，以及经过优化的速度和效率。本文选择序列二次规划（SQP） [31] ，因为它能够准确求解非线性约束问题。此外，MATLAB 在其“fmincon”优化工具中内置了 SQP 子程序，从实现角度来看具有优势。

本文其余部分安排如下：第2 节介绍水平集拓扑优化的数值表述，包括边值问题表述、隐式界面表示和数值近似。优化问题、灵敏度分析、SQP算法以及

正则化技术将在第3节说明。第4节展示三个数值算例：具有已知状态解和伴随边值问题解的环形区域玩具问题（第4.1节）、热斗篷问题（第4.2节）以及热伪装问题（第4.3节），这些算例验证了所提方法的效率和稳健性。第5 节总结了当前工作的主要结论。

2. 结合等几何分析的水平集拓扑优化

2.1. 边值问题描述

如图2所示，考虑嵌入区域 $\Omega \in \mathbb{R}^2$中的一个热操控器。请注意，此处给出的所有公式均适用于三维物理空间。该区域的外部边界为 $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$，其中 Γ_D和 Γ_N 为边界的两个部分，分别施加狄利克雷边界条件和诺伊曼边界条件。$\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$。嵌入的热操控器将区域唯一地划分为 3 个不同部分：内部区域 Ω_{in}、热操控器区域 Ω_{design}以及外部区域 Ω_{out}。$\Omega = \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{design}} \cup \Omega_{\text{out}}$。这些部分之间的内部边界统称为 $\Gamma_I = \Gamma_{I_{\text{in}}} \cup \Gamma_{I_{\text{out}}}$。

在本研究中，我们将范围限定为由两种各向同性构成材料制成的超材料。因此，除上述划分外，Ω_{design} 还被划分为两部分 Ω_{ℓ_1} 和 Ω_{ℓ_2}，分别代表两种构件材料（$\Omega_{\text{design}} = \Omega_{\ell_1} \cup \Omega_{\ell_2}$）。构件材料之间的界面 Γ_L 由水平集函数隐式定义。第Γ_L 2.2节将详细说明水平集函数及相应界面 Γ_I的描述。我们基于以下假设对问题进行简化：沿 T 温度和法向通量连续，热传导是唯一存在的热传递形式，且不存在内部热源。对于给定温度场 T，稳态热边值问题可写为：

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa} \nabla T) &= 0 && \text{in} \quad \Omega, && \text{(1a)}\\
T &= T_D && \text{on} \quad \Gamma_D, && \text{(1b)}\\
\nabla T \cdot \boldsymbol{n} &= Q_N && \text{on} \quad \Gamma_N, && \text{(1c)}\\
[\![T]\!] &= 0 && \text{on} \quad \Gamma_I, && \text{(1d)}\\
\boldsymbol{n} \cdot [\![\boldsymbol{\kappa} \nabla T]\!] &= 0 && \text{on} \quad \Gamma_I, && \text{(1e)}
\end{aligned}
$$

其中，$\boldsymbol{\kappa}$ 为热导率矩阵（对于各向同性材料，$\boldsymbol{\kappa} = \kappa \mathbf{I}_2$，其中$\mathbf{I}_2$ 为 $\mathbb{R}^2$阶单位矩阵），Q_N 为施加在 Γ_N上的通量，T_D 为 Γ_D上的规定温度，$\boldsymbol{n}$ 为边界上的单位法向量，$[\![\cdot]\!]$ 为跳跃算子，

以及 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$。在内部边界 Γ_I上，$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}^1 = -\boldsymbol{n}^2$表示位于 Γ_I 处的相连片区，分别记为1和2。

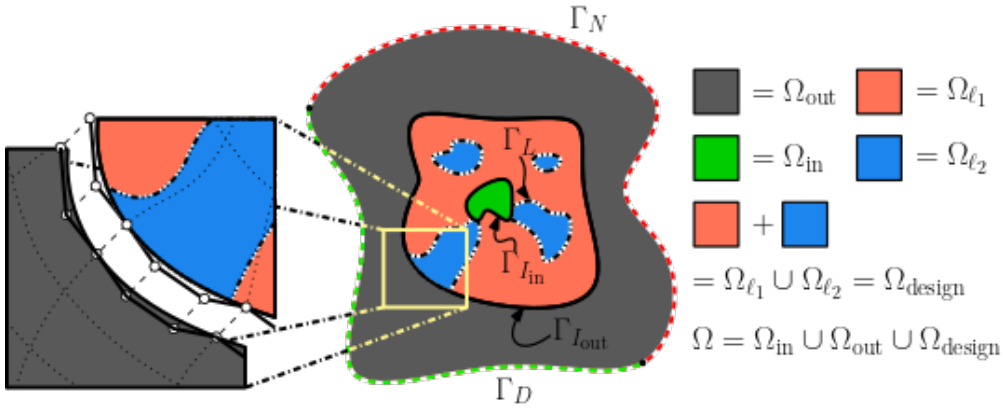


图2：边值问题的区域描述。Ω^{design} 表示热操控器的区域，Ω_{in} & Ω_{out} 分别表示相对于 Ω^{design}的内部区域和外部区域。Ω=$\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{out}} \cup \Omega^{\text{design}}$。实心黑线表示显式定义的界面 Γ_I，而黑白虚线表示隐式定义的界面 Γ_L （该界面将 Ω^{design} 分为两部分 Ω_{ℓ_1} 和 Ω_{ℓ_2}）。细节图突出显示了连接片区在界面 Γ_I处控制点的匹配情况。

为求解边值问题，使用标准布勃诺夫-伽辽金公式将式（1）所述的强形式转换为弱形式。弱公式如下：求 $T^h \in \mathscr{T}^h \subseteq \mathscr{T} = \{T \in \mathbb{H}^1(\Omega)\ T = T_D \text{ 在 } \Gamma_D\}$ 上，使得 $\forall S^h \in \mathscr{S}_0^h \subseteq \mathscr{S}_0 = \{S \in \mathbb{H}^1(\Omega)\ S = 0 \text{ 在 } \Gamma_D\}$，

$$a(T^h, S^h) = \ell(S^h), \tag{2}$$

with

$$a(T^h, S^h) = \int_\Omega (\nabla S^h)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\kappa} \nabla T^h d\Omega, \tag{3}$$

$$\ell(S^h) = \int_{\Gamma_N} (S^h)^{\mathrm{T}} Q_N d\Gamma. \tag{4}$$

方程（1d）-（1e）中描述的界面连续性条件采用 Nitsche方法 [50]。Nitsche方法以弱形式施加界面条件，同时保持双线性形式的强制性和相容性。Nitsche方法介于拉格朗日乘子法和罚函数法之间，旨在克服这些传统方法的一些局限性，例如对罚参数过度敏感、变分形式不相容，以及其他限制

稳定性条件施加的限制等。Nitsche方法通过以拉格朗日方法中拉格朗日乘子的实际物理表示形式（即法向通量）替代拉格朗日乘子，从而修改双线性形式。如 [50, 51], 所示，修改后的双线性形式如下：

$$a(T^h, S^h) = \int_\Omega (\nabla S^h)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\kappa} \nabla T^h d\Omega - \int_{\Gamma_I} \left(\boldsymbol{n} \cdot \{\boldsymbol{\kappa} \nabla S^h\} \right)^{\mathrm{T}} [\![T^h]\!] \, d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_I} [\![S^h]\!]^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{n} \cdot \{\boldsymbol{\kappa} \nabla T^h\} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_I} \beta \, [\![S^h]\!]^{\mathrm{T}} [\![T^h]\!] \, d\Gamma, \quad (5)$$

其中， β 为稳定化参数，$\{\cdot\}$ 为平均算子，其定义为$\{\theta\} = \gamma\theta^1 + (1-\gamma)\theta^2$，其中 γ 为平均参数（$0 < \gamma < 1$） [50, 51]。对于当前工作， $\beta = 1 \times 10^{12}$ 且 $\gamma = 0.5$。文献 [50, 51], 也指出，较大的稳定化参数可能导致方程组病态，但我们的边值问题并未出现任何病态问题。

2.2. 基于水平集函数的隐式边界表示

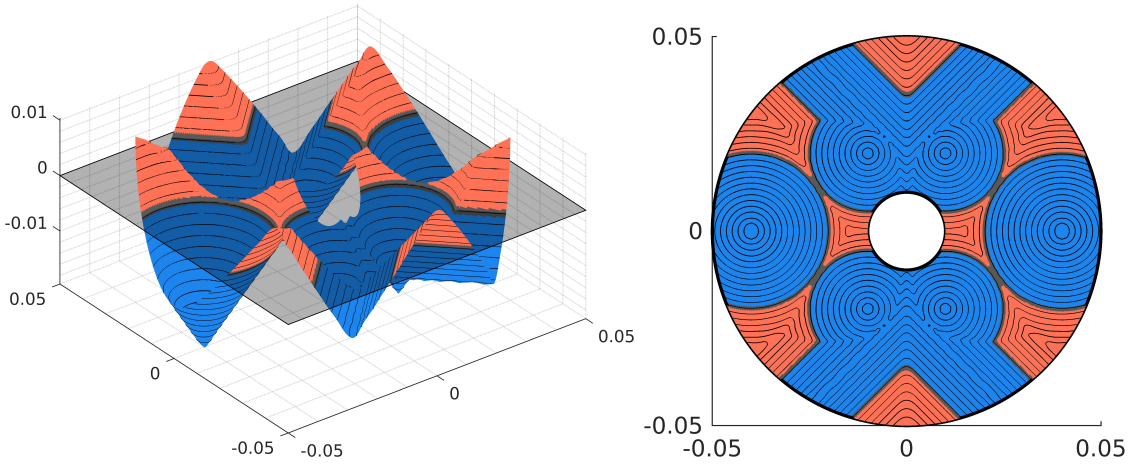
如第2.1节所述，界面 Γ_L，位于 Ω^{design} 内，用于分隔构件材料，但未在方程（1）中显式定义。该界面由水平集函数定义，其移动是水平集拓扑优化的主要操作。

在 $\mathbb{R}^d$水平集方法中，两种材料之间的界面由标量函数 Φ 的等值面隐式表示：$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，该函数称为水平集函数（LSF）。因此，在我们的工作中，LSF Φ：$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$， $\Phi = 0$的等值面定义了界面 Γ_L，该界面分隔 Ω_{ℓ_1} 和 Ω_{ℓ_2}，位于 Ω^{design} 内，如图3所示。整体水平集表示可写为：

$$\Phi(\boldsymbol{x}) > 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_{\ell_1} \setminus \Gamma_L, \quad (6a)$$
$$\Phi(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_L, \quad (6b)$$
$$\Phi(\boldsymbol{x}) < 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_{\ell_2} \setminus \Gamma_L, \quad (6c)$$

在优化过程中，界面的移动由等值面 $\Phi = 0$ 的演化决定，而背景欧拉网格保持固定。

在水平集方法中，几何映射定义了如何利用水平集函数信息求解边值问题的数值解。通过影响数值解的精度，几何映射会影响优化结果。常见的几何映射方法有三种 [19]: （a）保形离散；（b）浸入边界技术 [52, 53], ；以及（c）基于密度的映射。在保形离散中，网格与由水平集函数定义的界面相一致。该方法不同于形状优化，因为形状变化由水平集函数控制。该



(a) 三维中的水平集函数 Φ (b) 二维中的水平集函数 Φ

图 3：用于定义材料分布的水平集表示。(a) 三维中的水平集函数 Φ 。高度表示 Φ 的值。平面 $\Phi = 0$ 上方和下方的部分 Φ 分别表示两种构件材料（以两种不同颜色显示）。(b) 二维中的水平集函数 Φ。材料界面由函数 Φ 与平面 $\Phi = 0$ 的交线确定。

方法能够提供清晰的界面表示和最精确的解。然而，由于每次迭代都需要重新网格划分，其计算成本较高。另一方面，浸入边界技术允许使用非协调网格。在这些方法中，网格保持固定，并通过特殊处理在数值模型中捕捉界面。浸入边界技术同样具有清晰的界面表示，并允许直接施加界面条件。对于被水平集界面切割的单元，需要专门的代码进行数值积分和场近似。浸入边界技术有时会因交叠区域较小而出现噪声和病态问题。最后一种方法是基于密度的映射，因其易于实现而最为常用。出于同样的优势，我们采用基于密度的几何映射。我们研究逐点密度映射。换言之，积分点处的水平集函数值定义了该点的材料密度。因此，热导率 $\boldsymbol{\kappa}$直接成为水平集函数值的函数。其形式如下：

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{cases} \boldsymbol{\kappa}^1 = \kappa^1 \mathbf{I}_2 & \text{if } \boldsymbol{x} \in \Omega_{l_1} \quad i.e.\ \Phi \geqslant 0, \\ \boldsymbol{\kappa}^2 = \kappa^2 \mathbf{I}_2 & \text{if } \boldsymbol{x} \in \Omega_{l_2} \setminus \Gamma_L \quad i.e.\ \Phi < 0, \end{cases} \tag{7}$$

其可使用 Heaviside 函数 H 表示为，

$$\boldsymbol{\kappa}(\Phi) = \boldsymbol{\kappa}^1 H(\Phi) + \boldsymbol{\kappa}^2 (1 - H(\Phi)), \tag{8}$$

with

$$H(\Phi)=\begin{cases}1 & \text{if } \Phi \geqslant 0,\\ 0 & \text{if } \Phi < 0.\end{cases} \tag{9}$$

对于灵敏度分析（见第 3.2 节），我们需要求 $\boldsymbol{\kappa}$ 关于 Φ 的导数，因此还需要求 Heaviside 函数关于Φ 的导数，即 Dirac δ 函数 $\delta(\Phi)$。Dirac δ 函数的奇异性在计算导数时会带来数值问题；因此，通常使用其近似形式替代这两个函数。文献中已有多种近似海维赛德函数形式 [19]。这里，我们采用如下给出的多项式形式，

$$H(\Phi)=\begin{cases}\alpha & \text{if} \quad \Phi < -\Delta,\\ \dfrac{3(1-\alpha)}{4}\left(\dfrac{\Phi}{\Delta}-\dfrac{\Phi^3}{3\Delta^3}\right)+\dfrac{1+\alpha}{2} & \text{if} -\Delta \leqslant \Phi < \Delta,\\ 1 & \text{if} \quad \Phi \geqslant \Delta,\end{cases} \tag{10}$$

其中，α 是一个较小的正值（此处取 $\alpha=0$），Δ 是支撑带宽。

因此，$\boldsymbol{\kappa}$ 的导数可写为：

$$\frac{d\boldsymbol{\kappa}(\Phi)}{d\Phi}=(\boldsymbol{\kappa}^1-\boldsymbol{\kappa}^2)\delta(\Phi), \tag{11}$$

其中，一维 Dirac δ 函数 $\delta(\Phi)$ 近似为：

$$\delta(\Phi)=\begin{cases}\dfrac{3(1-\alpha)}{4\Delta}\left(1-\dfrac{\Phi^2}{\Delta^2}\right) & \text{if} \quad |\Phi| \leqslant \Delta,\\ 0 & \text{if} \quad |\Phi| > \Delta.\end{cases} \tag{12}$$

给定多项式形式下的平滑 Heaviside 函数和平滑 Dirac δ 函数如图4所示。

2.3. 使用等几何分析求解边值问题

根据水平集函数对界面的隐式表征，对弱形式（式（5））再次进行修改，以纳入导热率矩阵泛函 $\boldsymbol{\kappa}(\Phi)$。由于水平集函数定义在区域 Ω^{design}内，而该区域与 $\partial\Omega$ 没有公共边界，因此所施加的边界条件并非水平集函数的函数。因此，线性形式（式（4））保持不变。修改后的弱形式变为：

$$a(T^h,S^h,\Phi)=\ell(S^h), \tag{13}$$

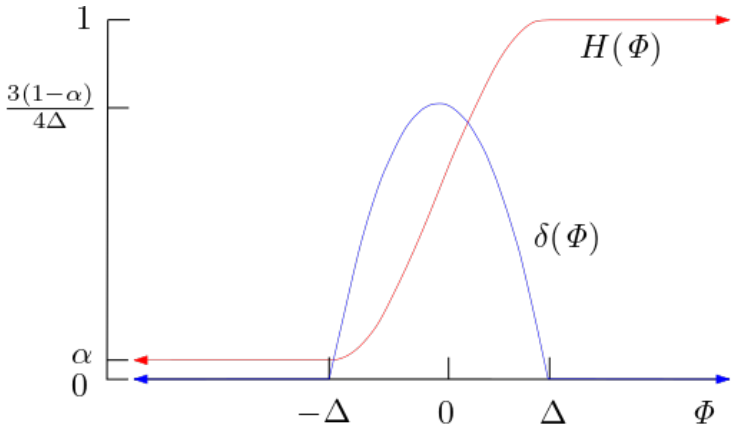


图4：平滑Heaviside函数和平滑Dirac δ函数。

with

$$a(T^h, S^h, \Phi) = \int_\Omega (\nabla S^h)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\kappa}(\Phi) \nabla T^h d\Omega - \int_{\Gamma_I} \left(\boldsymbol{n} \cdot \{\boldsymbol{\kappa}(\Phi) \nabla S^h\} \right)^{\mathrm{T}} [\![T^h]\!] \, d\Gamma$$
$$- \int_{\Gamma_I} [\![S^h]\!]^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{n} \cdot \{\boldsymbol{\kappa}(\Phi) \nabla T^h\} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_I} \beta \, [\![S^h]\!]^{\mathrm{T}} [\![T^h]\!] \, d\Gamma, \quad (14)$$

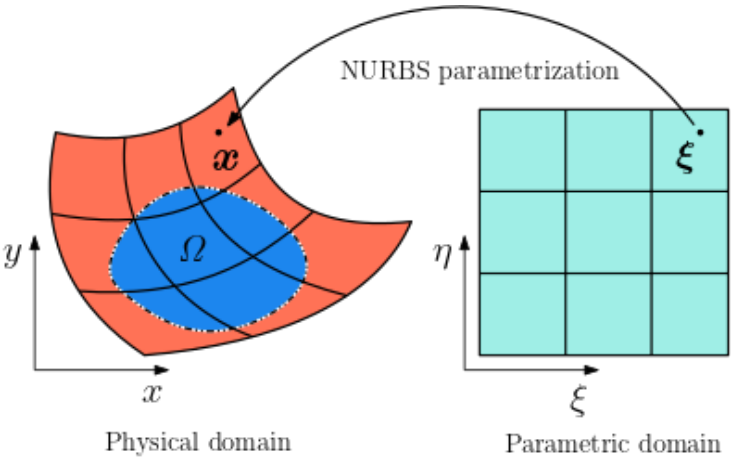


图5：参数 域中的点到物理区域中一点的参数化
，使用NURBS基函数。

下一步是定义几何和解的近似，以对弱形式进行离散化。如第1节所述，我们采用非均匀有理B样条基函数来

几何和解场近似。这里我们采用标准的等几何分析，其中几何和解场均使用相同的NURBS基函数进行近似。设 $\boldsymbol{x} \in \Omega$，且 $\boldsymbol{\xi}$ 为参数域中的对应点，如图5所示，则使用 n NURBS函数 N_i 和 n 控制点$\mathbf{X}_i$ 对区域进行近似，得到：

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i N_i(\boldsymbol{\xi}), \tag{15}$$

相应地，检验函数和试函数也使用相同的NURBS形函数进行近似，如下：

$$T^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} T_i N_i(\boldsymbol{\xi}), \quad \text{and} \quad S^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} S_i N_i(\boldsymbol{\xi}), \tag{16}$$

这里， T_i 和 S_i 分别是 i^{th} 控制点处的温度和任意温度。

By 将方程（16）代入方程（13），可得到一个线性系统 ，

$$\mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{F}, \tag{17}$$

其中$\mathbf{T}$ 是控制点处未知温度构成的向量。全局刚度矩阵$\mathbf{K}$ 和全局通量向量$\mathbf{F}$ 表示为：

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^b + \mathbf{K}^n + (\mathbf{K}^n)^{\mathrm{T}} + \mathbf{K}^s, \tag{18}$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma_N} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} Q_N \, d\Gamma, \tag{19}$$

其中$\mathbf{K}^b$ 为体刚度矩阵。由于将Ω_{in}、Ω_{out} 和Ω^{design} 视为独立片区，$\mathbf{K}^b$ 定义如下：

$$\mathbf{K}^b = \sum_{k\in\{\text{in,design,out}\}} \int_{\Omega_k} (\mathbf{B}^k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\kappa}^k(\Phi) \mathbf{B}^k \, d\Omega. \tag{20}$$

其中，$\mathbf{B}$ 为形函数导数矩阵（上标 k 表示片区索引）。

$\mathbf{K}^n$ 和$\mathbf{K}^s$ 是界面刚度矩阵，因为这些矩阵用于根据公式（1d）-（1e）中给出的条件耦合相邻片区。在定义$\mathbf{K}^n$ 和$\mathbf{K}^s$之前需要注意的是，如图2所示，连接片区在界面处具有匹配的控制点。遵循第2.1节所采用的记号，界面 Γ_I 处的连接片区记为 1 和 2（在下列公式中以上标 1 和 2 表示），

因此，$\mathbf{K}^n$ 和$\mathbf{K}^s$ 由以下公式给出：

$$\mathbf{K}^n = \begin{bmatrix} -\gamma \int_{\Gamma_I} (\mathbf{N}^1)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}\boldsymbol{\kappa}^1(\Phi)\mathbf{B}^1 \, d\Gamma & -(1-\gamma) \int_{\Gamma_I} (\mathbf{N}^1)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}\boldsymbol{\kappa}^2(\Phi)\mathbf{B}^2 \, d\Gamma \\ \gamma \int_{\Gamma_I} (\mathbf{N}^2)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}\boldsymbol{\kappa}^1(\Phi)\mathbf{B}^1 \, d\Gamma & (1-\gamma) \int_{\Gamma_I} (\mathbf{N}^2)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}\boldsymbol{\kappa}^2(\Phi)\mathbf{B}^2 \, d\Gamma \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$\mathbf{K}^s = \begin{bmatrix} \beta \int_{\Gamma_I} (\mathbf{N}^1)^{\mathrm{T}} \mathbf{N}^1 \, d\Gamma & -\beta \int_{\Gamma_I} (\mathbf{N}^1)^{\mathrm{T}} \mathbf{N}^2 \, d\Gamma \\ -\beta \int_{\Gamma_I} (\mathbf{N}^2)^{\mathrm{T}} \mathbf{N}^1 \, d\Gamma & \beta \int_{\Gamma_I} (\mathbf{N}^2)^{\mathrm{T}} \mathbf{N}^2 \, d\Gamma \end{bmatrix}, \tag{22}$$

其中$\mathbf{N}$ 为形函数向量。对于给定的片区 k，形函数导数矩阵$\mathbf{B}^k$ 和形函数向量$\mathbf{N}^k$ 如下所示，

$$\mathbf{B}^k = \begin{bmatrix} N^k_{1,x} & N^k_{2,x} & \dots & N^k_{I,x} & \dots \\ N^k_{1,y} & N^k_{2,y} & \dots & N^k_{I,y} & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^k = \begin{bmatrix} N^k_1 & N^k_2 & \dots & N^k_I & \dots \end{bmatrix}. \tag{23}$$

在第3.2节中，灵敏度计算需要用到全局刚度矩阵关于水平集函数 Φ 的导数。将方程（18）求导，可得

$$\frac{d\mathbf{K}}{d\Phi} = \frac{d\mathbf{K}^b}{d\Phi} + \frac{d\mathbf{K}^n}{d\Phi} + \left(\frac{d\mathbf{K}^n}{d\Phi}\right)^{\mathrm{T}} + \frac{d\mathbf{K}^s}{d\Phi}, \tag{24}$$

其中

$$\frac{d\mathbf{K}^b}{d\Phi} = \sum_{k\in\{\text{in,design,out}\}} \int_{\Omega_k} (\mathbf{B}^k)^{\mathrm{T}} \frac{d\boldsymbol{\kappa}^k(\Phi)}{d\Phi} \mathbf{B}^k \, d\Omega, \tag{25}$$

以及$\frac{d\mathbf{K}^n}{d\Phi}$ & $\frac{d\mathbf{K}^s}{d\Phi}$ 分别通过对方程（21）和方程（22）求导，采用类似方式定义。

2.4. 水平集函数参数化

水平集函数参数化的目的是利用基函数（在本研究中为NURBS基函数），通过节点/控制点处的取值来近似整个区域上的水平集函数。节点/控制点处的取值称为展开系数，并作为优化的设计变量。水平集函数参数化的选择还决定了设计自由度以及细节程度

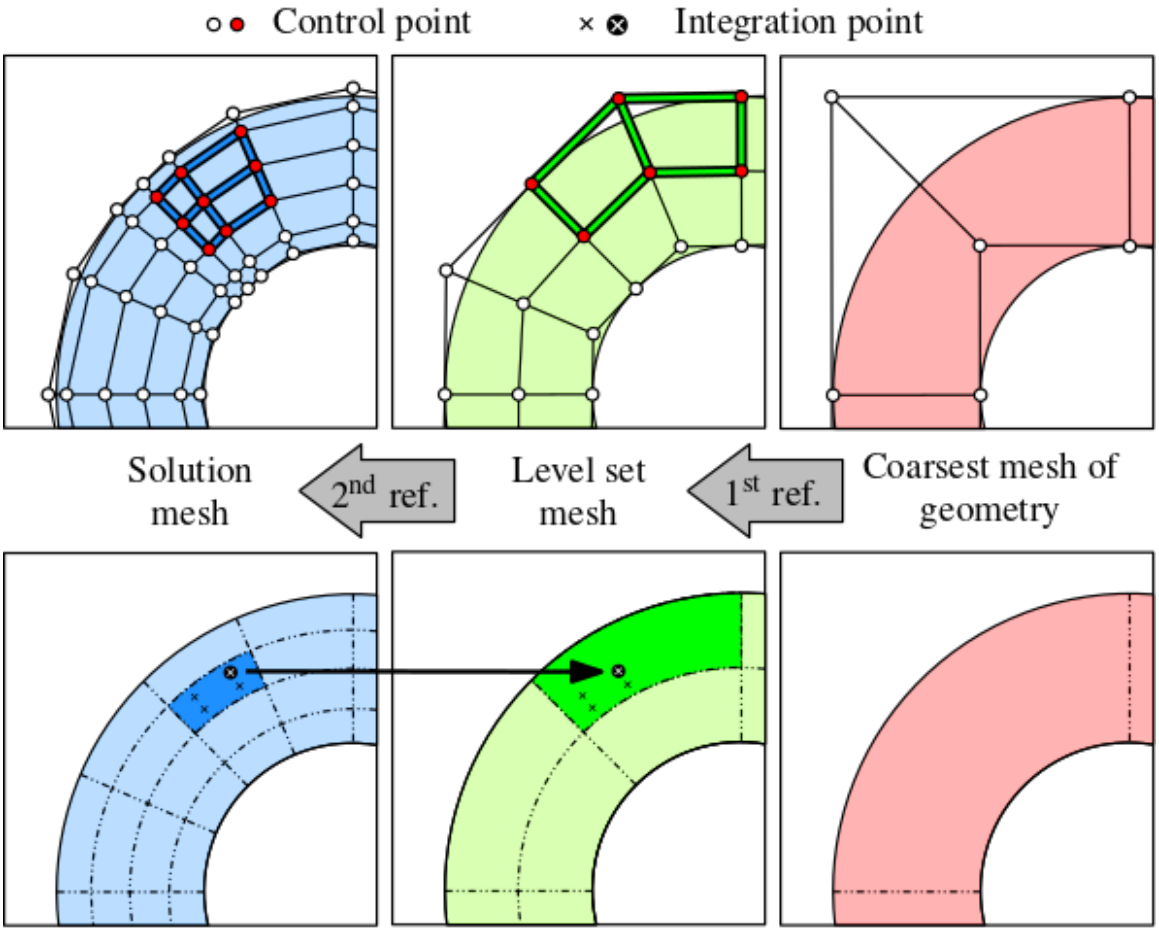


图6：用于将 LSF 参数化与几何和解场参数化解耦的离散化策略。该策略包含两个细化阶段：首先创建设计/LSF 网格，然后创建求解网格，以确保求解精度。

水平集界面，并最终影响优化结果。用于水平集函数参数化的网格越精细，优化问题通常就越复杂，设计变量也越多，因此自然需要投入更多计算资源。另一方面，数值分析方法需要更精细的网格，以确保求解精度足够高。考虑到这一点，将水平集函数参数化与结构网格解耦是有利的。这样一来，结构网格可以在不改变设计变量的情况下进行细化。

本文采用两个阶段的细化来实现上述解耦。在尽可能粗糙的非均匀有理B样条网格上创建几何后，我们进行第一阶段细化，以获得所需的水平集函数参数化（或所需数量的设计变量）。第一阶段完成后，再次细化网格，进行第二阶段细化，以确保达到所需的结构精度。详细的细化流程如图6所示。两个阶段的细化均采用次数提升和节点插入算法。所有细化均为均匀细化。对于未来的工作，可根据水平集函数 [54, 55, 56, 57] 定义细化准则，并采用高级样条进行局部细化 [30]。水平集函数 Φ 使用 m NURBS基函数 R_i 进行参数化，如下所示：

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{m} R_i(\boldsymbol{\xi})\Phi_i \tag{26}$$

其中，Φ_i 是对应于 i^{th} 控制点的展开系数

.

我们经常需要获取与预定义水平集函数相对应的展开系数，例如，用于初始化优化。为获得这些展开系数 Φ_i，需要求解一个简单的线性质量系统。质量系统可表示为：

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Psi}, \tag{27}$$

其中，$\boldsymbol{\Phi} = [\Phi_1 \;\; \Phi_2 \;\; \ldots \;\; \Phi_m]^{\mathrm{T}}$、质量矩阵$\mathbf{M}$ 和右端向量 $\boldsymbol{\Psi}$ 定义如下：

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_{\text{design}}} (\mathbf{R})^{\mathrm{T}}\mathbf{R} \; d\Omega, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \int_{\Omega_{\text{design}}} (\mathbf{R})^{\mathrm{T}}\Phi \; d\Omega. \tag{29}$$

3. 优化问题

3.1. 优化问题描述

在水平集拓扑优化方法中，如方程（26）所述，展开系数用作设计变量。目标是找到这些

设计变量的取值，使相应的拓扑能够使所关注函数（称为目标函数）达到最优值。在我们的例子中，$\boldsymbol{\Phi} = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_{N_{\text{var}}}]^{\text{T}}$ 是 N_{var} 个设计变量组成的向量，而 J 是目标函数。一般情况下，N_{var} 可以不同于方程（26）中的基函数数量 m 。对于下一节中的大多数数值算例，N_{var} 小于 m ，同时考虑施加的 x 和 y 轴对称性。热操控器的拓扑优化问题可以用数学形式定义如下：

$$\min_{\boldsymbol{\Phi}\in\mathbb{R}^{N_{\text{var}}}} \quad J(T^h, \Phi), \tag{30}$$

with

$$J : \mathbb{R}^{N_{\text{var}}} \to \mathbb{R}, \tag{31a}$$

$$J : \boldsymbol{\Phi} \mapsto J(T^h(\boldsymbol{\Phi}), \Phi(\boldsymbol{\Phi})), \tag{31b}$$

使得满足以下约束，

等式约束：
$$a(T^h, S^h, \Phi) = \ell(S^h), \forall S^h \in \mathscr{S}_0^h \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{32}$$

等式约束：
$$T = T_D \quad \text{on} \quad \Gamma_D, \tag{33}$$

盒约束：
$$\Phi_{i,\min} \leq \Phi_i \leq \Phi_{i,\max} \quad i = 1, 2, ..., N_{\text{var}}, \tag{34}$$

其中 $\Phi_{i,\min}$ 和 $\Phi_{i,\max}$ 是设计变量 Φ 的下界和上界 $_i$.

如第1节所述，给定的优化问题采用数学规划技术——序列二次规划（SQP）求解。在 SQP 中，每次迭代都会求解第 2.1 节所述的边值问题。由于 SQP 是一种基于梯度的算法，因此需要在每次迭代结束时，利用边值问题的解计算目标函数 J 相对于各设计变量 Φ_i 的灵敏度。随后，将灵敏度输入算法，以生成新的设计变量值。接下来的两节将分别详细介绍如何使用伴随方法计算每次迭代的灵敏度，以及 SQP。

3.2. 灵敏度分析

本节将介绍一种称为伴随方法 [42, 58, 59] 的灵敏度分析方法。在最一般的情况下，性能目标函数$J(T,\ \Phi)$可写为两项之和，分别对应体积积分和面积分，即

$$J(T, \Phi) = \int_{\Omega_b} J_b(T, \Phi)\ d\Omega + \int_{\Gamma_s} J_s(T, \Phi)\ d\Gamma, \tag{35}$$

其中，Ω_b 是计算体积项的区域，Γ_s 是计算表面项的部分边界。对于我们的数值算例，仅考虑目标函数的体积项。

接下来，将目标泛函$J(T,\ \Phi)$与弱形式约束及狄利克雷边界约束相结合，即可得到拉格朗日函数；其中，分别借助拉格朗日乘子 P 和 λ来施加这两项约束，而 T 应满足这些约束。其定义如下：

$$\mathcal{L} : \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}, \tag{36}$$

with

$$\mathcal{L}(T, P, \Phi, \lambda) = J(T, \Phi) + a(T, P, \Phi) - \ell(P) + \int_{\Gamma_D} \lambda(T - T_D)\ d\Gamma. \tag{37}$$

最小化问题的最优性条件可由拉格朗日函数的驻值条件推导得出。第一个驻值条件是令$\mathcal{L}$ 关于 P 的偏 Fr´échet 导数（沿任意方向 $\delta P \in \mathbb{H}^1$）等于零，即

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(T, P, \Phi, \lambda)}{\partial P}, \delta P \right\rangle = \left\langle \frac{\partial a(T, P, \Phi)}{\partial P}, \delta P \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \ell(P)}{\partial P}, \delta P \right\rangle = 0. \tag{38}$$

利用方程（14）和方程（4）中的双线性形式和线性形式，可推导得出：

$$\left\langle \frac{\partial a(T, P, \Phi)}{\partial T}, \delta T \right\rangle = a(\delta T, P, \Phi); \quad \left\langle \frac{\partial a(T, P, \Phi)}{\partial P}, \delta P \right\rangle = a(T, \delta P, \Phi);$$
$$\text{and} \quad \left\langle \frac{\partial \ell(P)}{\partial P}, \delta P \right\rangle = \ell(\delta P). \tag{39}$$

代入 将方程（39）中的第二个和第三个方程代入方程（38），

$$a(T, \delta P, \Phi) = \ell(\delta P), \tag{40}$$

这 表明 $\forall \delta P \in \mathbb{H}^1$，给定的状态变量 $T \in \mathbb{H}^1$ 满足弱形式 .

第二个驻值条件通过对$\mathcal{L}$ 关于 λ （沿任意方向 $\delta\lambda \in \mathbb{H}^1$）取偏 Fr´échet 导数，并令其等于零，得到如下结果：

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(T, P, \Phi, \lambda)}{\partial \lambda}, \delta\lambda \right\rangle = \int_{\Gamma_D} \delta\lambda(T - T_D)\ d\Gamma = 0. \tag{41}$$

这显然意味着 $T = T_D$ 在 Γ_D上。方程（40）和方程（41）共同求解状态变量 T 的边界值问题（如方程（1）所述）。

第三个驻值条件通过对$\mathcal{L}$ 关于 T （沿任意方向 $\delta T \in \mathbb{H}^1$）取部分 Fr´échet 导数并令其等于零得到，如下所示，

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(T,P,\Phi,\lambda)}{\partial T}, \delta T \right\rangle = \left\langle \frac{\partial J(T,\Phi)}{\partial T}, \delta T \right\rangle + \left\langle \frac{\partial a(T,P,\Phi)}{\partial T}, \delta T \right\rangle + \int_{\Gamma_D} \lambda \delta T \, d\Gamma = 0. \tag{42}$$

利用方程（39）以及 T 为常数这一事实，即$\delta T = 0$，在 Γ_D上，

$$a(\delta T, P, \Phi) = -\left\langle \frac{\partial J(T,\Phi)}{\partial T}, \delta T \right\rangle. \tag{43}$$

方程（43）对 $\forall \delta T \in \mathbb{H}^1$成立，因此，在 Γ_D 上令法向导数$\frac{\partial \delta T}{d\boldsymbol{n}}$任意，且迹 $\delta T = 0$ 为零，可得， $P = 0$ 在 Γ_D上。将此事实与方程（43）结合，可得到适定的伴随问题，如下所示，

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa} \nabla P) &= -\frac{\partial J(T,\Phi)}{\partial T} && \text{in} \quad \Omega, && \text{(44a)}\\
P &= 0 && \text{on} \quad \Gamma_D, && \text{(44b)}\\
\nabla P \cdot \boldsymbol{n} &= 0 && \text{on} \quad \Gamma_N, && \text{(44c)}\\
[\![P]\!] &= 0 && \text{on} \quad \Gamma_I, && \text{(44d)}\\
\boldsymbol{n} \cdot [\![\boldsymbol{\kappa} \nabla P]\!] &= 0 && \text{on} \quad \Gamma_I, && \text{(44e)}
\end{aligned}$$

其中， T 是主温度场， P 是伴随温度场。采用试函数和检验函数近似后，伴随问题离散为以下线性系统，

$$\mathbf{K}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} = \mathbf{F}_{\mathrm{adj}}, \tag{45}$$

其中， $\mathbf{P}$ 是控制点处伴随温度构成的向量， $\mathbf{F}^{\mathrm{adj}}$ 是定义如下的全局伴随通量向量，

$$\mathbf{F}_{\mathrm{adj}} = -\int_{\Omega_b} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \frac{dJ_b}{dT} \, d\Omega - \int_{\Gamma_s} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \frac{dJ_s}{dT} \, d\Gamma, \tag{46}$$

最后，在满足全部三个驻定条件后，目标泛函相对于 $\left.\frac{dJ}{d\Phi}\right)$ 的灵敏度等于拉格朗日函数的全导数

$\mathcal{L}$ 相对于水平集函数 Φ 的导数。因此，可写为：

$$\left\langle \frac{dJ(T,\Phi)}{d\Phi}, \delta\Phi \right\rangle := \left\langle \frac{d\mathcal{L}(T,P,\Phi,\lambda)}{d\Phi}, \delta\Phi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial J(T,\Phi)}{\partial \Phi}, \delta\Phi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial J(T,\Phi)}{\partial T}, \delta T \right\rangle + \left\langle \frac{\partial a(T,P,\Phi)}{\partial \Phi}, \delta\Phi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial a(T,P,\Phi)}{\partial T}, \delta T \right\rangle. \quad (47)$$

通过代入方程（43），

$$\left\langle \frac{dJ(T,\Phi)}{d\Phi}, \delta\Phi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial J(T,\Phi)}{\partial \Phi}, \delta\Phi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial a(T,P,\Phi)}{\partial \Phi}, \delta\Phi \right\rangle, \quad (48)$$

$$\therefore \frac{dJ(T,\Phi)}{d\Phi} = \frac{\partial J(T,\Phi)}{\partial \Phi} + \frac{\partial a(T,P,\Phi)}{\partial \Phi}. \quad (49)$$

采用试函数和检验函数近似后，方程（49）可写为：

$$\frac{dJ}{d\Phi} = \int_{\Omega_b} \frac{dJ_b}{d\Phi}\, d\Omega + \int_{\Gamma_s} \frac{dJ_s}{d\Phi}\, d\Gamma + (\mathbf{P})^{\mathrm{T}}\, \frac{d\mathbf{K}}{d\Phi}\, \mathbf{T}, \quad (50)$$

其中 $d\mathbf{K}\ d\Phi$ 是全局刚度矩阵关于 Φ 的导数（如方程（24）所示）。利用水平集函数参数化（方程（26））， 关于特定展开系数 Φ_i 的灵敏度可表示为：

$$\frac{dJ}{d\Phi_i} = \int_{\Omega_b} \frac{dJ_b}{d\Phi}\, \frac{d\Phi}{d\Phi_i}\, d\Omega + \int_{\Gamma_s} \frac{dJ_s}{d\Phi}\, \frac{d\Phi}{d\Phi_i}\, d\Gamma + (\mathbf{P})^{\mathrm{T}}\, \frac{d\mathbf{K}}{d\Phi}\, \frac{d\Phi}{d\Phi_i}\, \mathbf{T}. \quad (51)$$

3.3. 更新方案——序列二次规划（*SQP*）

在序列二次规划（SQP）方法中，每次迭代都会将优化问题近似为一个二次子问题 [31]。对于SQP方法，主要挑战在于构造一个良好的二次子问题，以生成适用于优化的合适步长。对于我们的优化问题，第 m^{th} 次迭代中的二次子问题建模如下：

$$\min_{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^{N_{\mathrm{var}}}} \; J_m + \nabla J_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{H}}_m\boldsymbol{p}, \quad (52)$$

其中， J_m、 ∇J_m 和$\boldsymbol{\mathcal{H}}_m$ 分别表示第 m^{th} 次迭代中目标函数值、目标函数的梯度以及拉格朗日函数$\mathcal{L}$ 的海森矩阵近似。随后，基于线搜索算法或信赖域算法，利用子问题 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_m$ 的极小化解得到下一近似解 $\boldsymbol{\Phi}_{m+1}$ 。

此处需要注意的是，等式约束未被纳入考虑。由于温度T 由线性系统方程（17）计算得到，因此等式约束将在每次迭代中被显式满足。

在本研究中，我们使用 MATLAB 的“fmincon”优化工具箱，并选择“sqp”选项。“sqp”选项采用主动集策略求解上述二次子问题。在每次迭代中，用户提供目标函数 J_m和梯度 ∇J_m （使用上一节中的灵敏度分析结果）。对于海森矩阵近似 $\boldsymbol{\mathcal{H}}_m$ 的计算，该工具采用 BFGS 更新方案。找到子问题 $\boldsymbol{p}_m$ 的解后，通过内置的线搜索算法确定步长 α_m 。随后，设计变量更新如下：

$$\boldsymbol{\Phi}_{m+1} = \boldsymbol{\Phi}_m + \alpha_m \boldsymbol{p}_m. \tag{53}$$

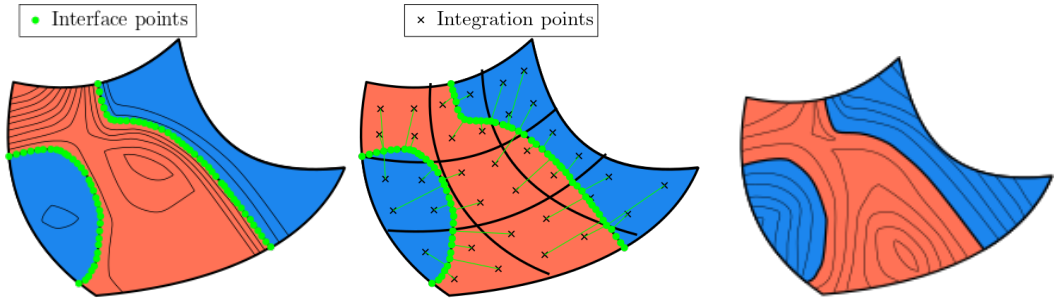
3.4. 正则化

优化问题往往存在适定性不足、数值伪影、收敛速度较慢以及陷入性能不佳的局部极小值等问题。为克服这些问题，可以采用正则化技术。有时，正则化用于控制优化结果中的几何特征。通常，一种正则化技术可以解决上述多个问题。在数值算例中，我们探讨了三种正则化技术：水平集函数重新初始化、蒂霍诺夫正则化和体积正则化。

3.4.1. 水平集函数重新初始化

由于界面由水平集函数的零水平集定义，因此在最优解中，只有这些零水平集附近的局部区域能够得到唯一描述。因此，水平集函数并不唯一，尤其是在远离界面的区域。由于这种非唯一性，水平集函数在优化过程中有时会变得过于平坦或过于陡峭。这种现象可能会降低收敛速度。为缓解这一问题，优化过程中会将水平集函数初始化为有符号距离函数（$||\nabla \Phi||_2 = 1$），并使其始终保持为有符号距离函数。一种保持水平集函数为有符号距离函数的方法是：在保持零水平集位置不变的同时，每经过若干次迭代便对其进行重新初始化。

在此，我们采用基于几何的约束重新初始化技术。图7 展示了该技术的步骤。利用水平集函数参数化的逆映射，我们找到了界面上的若干点，如图7a所示。为便于说明，我们称这些点为界面点。随后，将某点处新的水平集函数值定义为该点到最近界面点的距离，同时保留原始值的符号（图7b）。界面点的数量决定了重新初始化的精度

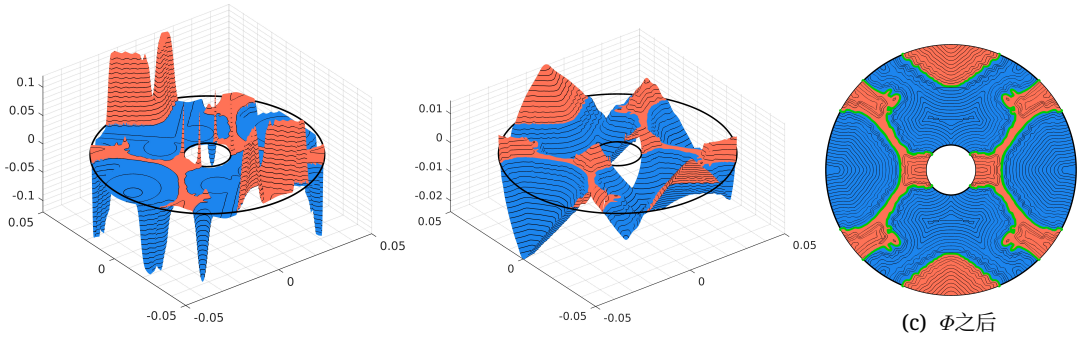


(a) Φ 重新初始化前。界面点通过水平集函数参数化进行评估。

(b) 符号距离的计算从积分点到最近的界面点。

(c) 求解质量矩阵方程组后 Φ 重新初始化质量矩阵方程组时使用积分点处的符号距离。

图 7：基于几何的约束水平集函数重新初始化技术



(a) Φ 重新初始化前

(b) Φ 重新初始化后

(c) Φ之后二维重新初始化

图 8：重新初始化前后的水平集函数。绿色点（见 (c)）表示重新初始化前的界面点，它们恰好位于新界面上。

。为求得新的展开系数，我们在积分点/配点处代入新的水平集函数值（图27），并按公式（7c）所示求解质量矩阵方程组。然而，这与初始化质量系统有所不同。在该方程组中，我们通过罚函数法施加约束，强制界面点处的水平集函数值为零，以保持界面位置。图8展示了重新初始化前后的水平集函数示例。

3.4.2. 蒂霍诺夫正则化

蒂霍诺夫正则化 [46, 60]的作用类似于周长正则化，后者会对水平集界面的周长施加惩罚。在蒂霍诺夫正则化中，主目标函数中会添加一个惩罚水平集函数梯度的附加项。通过惩罚水平集函数的梯度，优化过程会朝着使水平集函数更加平滑的方向进行

，最终使界面也更加平滑。该蒂霍诺夫项及其对应的灵敏度写作：

$$J_{\mathrm{Tknv}} = \int_{\Omega_{\mathrm{design}}} \nabla \Phi^{\mathrm{T}} \, \nabla \Phi \, d\Omega, \quad \text{and} \quad \frac{dJ_{\mathrm{Tknv}}}{d\Phi_i} = \int_{\Omega_{\mathrm{design}}} 2 \nabla \Phi^{\mathrm{T}} \, \nabla R_i \, d\Omega. \tag{54}$$

为实施蒂霍诺夫正则化，使用权重参数 χ，在主要目标函数和灵敏度中加入相应的蒂霍诺夫正则化项，如下所示：

$$J_{\mathrm{total}} = J + \chi J_{\mathrm{Tknv}}, \quad \text{and} \quad \frac{dJ_{\mathrm{total}}}{d\Phi_i} = \frac{dJ}{d\Phi_i} + \chi \frac{dJ_{\mathrm{Tknv}}}{d\Phi_i}. \tag{55}$$

3.4.3. 体积正则化

对于热操纵器优化，我们提出另一种正则化方法，称为体积正则化。在基于超材料的热操纵器（由两种构件材料组成）中，通常使用一种高 κ 材料和另一种低 κ 材料。高 κ 材料充当允许通量流动的介质，而低 κ 材料则阻碍通量流动，并引导其沿所需路径流动。考虑到这些特定作用，可以用低 κ 材料填充通量不流动（且温度梯度为零或极小）的区域。换言之，对原始目标没有贡献的区域可以用低 κ 材料填充。这样可以使这些区域尽可能均匀，并避免不必要的复杂特征。从数学上讲，该目标通过体积项定义如下：

$$J_{\mathrm{vol}} = \int_{\Omega_{\mathrm{design}}} H(\Phi) \, d\Omega, \quad \text{and} \quad \frac{dJ_{\mathrm{vol}}}{d\Phi_i} = \int_{\Omega_{\mathrm{design}}} \delta(\Phi) R_i \, d\Omega. \tag{56}$$

该项用于计算高 κ 材料的体积，因为我们将高 κ 材料指定在水平集界面的正侧。由于我们的优化问题是一个最小化问题，该项会引导优化过程增大低 κ 材料的体积。通过加权参数将该项加入主目标函数后，即可同时实现热操控和体积填充的目标。

为实现体积正则化，我们使用加权参数 ρ，在主要目标函数和灵敏度中加入相应的体积正则化项，具体如下：

$$J_{\mathrm{total}} = J + \rho J_{\mathrm{Tknv}}, \quad \text{and} \quad \frac{dJ_{\mathrm{total}}}{d\Phi_i} = \frac{dJ}{d\Phi_i} + \rho \frac{dJ_{\mathrm{Tknv}}}{d\Phi_i}. \tag{57}$$

4. 数值算例

本节验证所提方法，并通过若干数值算例测试其效率和有效性。对于给定算例，我们将 p 和 q 分别记为NURBS曲面片沿两个方向的NURBS逼近阶数，这两个方向分别为周向和径向。由于我们使用MATLAB中的“fmincon”优化工具箱，其中有若干内置停止准则，例如“OptimalityTolerance”（一阶最优性度量的容差值）、“StepTolerance”（设计变量取值变化的容差值）、“ObjectiveLimit”（目标函数的容差值）、“MaxFunctionEvaluations”（函数评估的最大次数）和“MaxIterations”（最大迭代次数）。我们将“ObjectiveLimit”定义为$=1 \times 10^{-9}$，“StepTolerance”定义为$=1 \times 10^{-8}$，“OptimalityTolerance”定义为$=1 \times 10^{-6}$。如果采用水平集函数重新初始化，则使用“MaxFunctionEvaluations”和“MaxIterations”在重新初始化之前停止优化。此外，“StepTolerance”准则通常会受到较差的LSF函数影响。因此，如果连续4次因不满足“StepTolerance”准则而失败，就停止优化。否则，对水平集函数进行重新初始化并再次运行优化。不同算例采用的停止准则、容差值和正则化略有不同，具体见各算例的说明。大多数算例关于 x 轴和 y轴对称。因此，几乎所有数值模型均采用关于 x 轴和 y轴的对称性；如有例外，我们会明确说明。还需注意，从此处开始，特定测试算例的目标函数值将在图注中给出。

4.1. 环形环问题

在本例中，我们考虑一个基准问题。据作者所知，目前尚无涉及热传导现象且给定界面条件的多材料优化基准问题。此测试算例旨在通过解析解验证所提方法。内半径为 R_a 、外半径为 R_b 的环形区域构成区域 Ω。通过隐式定义的界面 $_a$ （半径为 $_b$ 的圆，如图 Γ_L 所示），将区域 Ω 划分为两个子区域 ΩR_L和 Ω。区域 Ω$_a$ 和 Ω$_b$ 分别填充导热率为 κ_a 和 κ_b的各向同性材料。对于状态变量 T，边界值

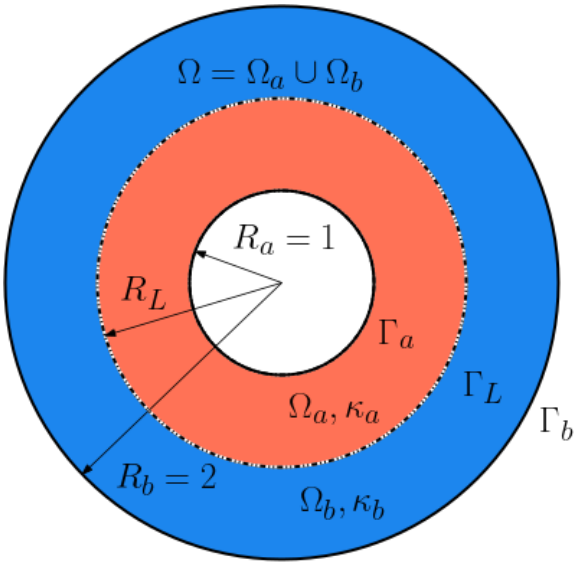


图9：环形环问题的区域描述。

问题可表示为：

控制方程：

$$\kappa_a \nabla^2 T_a = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_a, \tag{58a}$$

$$\kappa_b \nabla^2 T_b = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_b, \tag{58b}$$

界面条件：

$$\kappa_a \frac{\partial T_a}{\partial r} = \kappa_b \frac{\partial T_b}{\partial r} \quad \text{at} \quad r = R_L, \tag{58c}$$

$$T_a = T_b \quad \text{at} \quad r = R_L, \tag{58d}$$

边界条件：

$$T_a = \overline{T}_a \quad \text{at} \quad r = R_a, \tag{58e}$$

$$T_b = \overline{T}_b \quad \text{at} \quad r = R_b, \tag{58f}$$

目标是最大化泛函 $J(T)$，

$$J(T) = \int_\Omega T^2 d\Omega. \tag{59}$$

将其与方程（35）进行比较，$\Omega_b = \Omega$，$J_b = T^2$，且表面项不存在。

在最简单的情况下，当界面半径 R_L 是唯一的设计变量时，

伴随问题 伴随状态的问题 P 可利用公式 (44) 构造如下: ,

$$
\begin{aligned}
&\text{控制方程:} && \kappa_a \nabla^2 P_a = -2T_a \quad \text{in} \quad \Omega_a, && \text{(60a)}\\
& && \kappa_b \nabla^2 P_b = -2T_b \quad \text{in} \quad \Omega_b, && \text{(60b)}\\
&\text{界面条件:} && \kappa_a \frac{\partial P_a}{\partial r} = \kappa_b \frac{\partial P_b}{\partial r} \quad \text{at} \quad r = R_L, && \text{(60c)}\\
& && P_a = P_b \quad \text{at} \quad r = R_L, && \text{(60d)}\\
&\text{边界条件:} && P_a = 0 \quad \text{at} \quad r = R_a, && \text{(60e)}\\
& && P_b = 0 \quad \text{at} \quad r = R_b. && \text{(60f)}
\end{aligned}
$$

对于给定的示例，我们取 $R_a = 1$， $R_b = 2$， $T_a = 0$， $T_b = 100$， $\kappa_a = 100$，以及 κ_b =10。边值问题和伴随问题的解析解见附录 A。根据解析解可推导出，优化后的 $J(T)$、 $J(T) = 1.6094 \times 10^4$在 $R_L \approx 1.80612$处达到最优值。这是给定设计空间内唯一的极小值，因此也是该优化问题的唯一解。

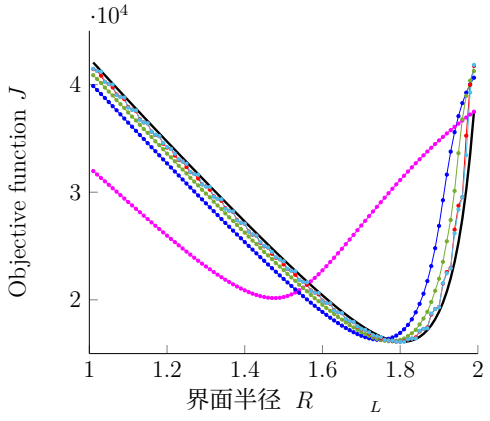
首先，我们比较近似 Heaviside 函数在方程（10）中采用不同支撑带宽 Δ 时的数值结果与解析结果。图 10 展示了目标函数 J、灵敏度dJ/dR_L、界面周长 Per_L以及状态变量和伴随变量相对于界面半径 R_L 在区间 $[R_a, R_b]$内的误差等量的变化情况。采用具有 4389 个自由度和 1089 个展开系数的固定网格。对于每个 R_L值，均使用方程（27）定义展开系数。相对于界面半径的数值灵敏度按如下方式计算，

$$
\frac{dJ}{dR_L} = \frac{dJ}{d\mathbf{\Phi}} \cdot \frac{d\mathbf{\Phi}}{dR_L}, \quad \text{where} \quad \frac{d\mathbf{\Phi}}{dR_L} = \mathbf{M}^{-1} \frac{d\mathbf{\Psi}}{dR_L} \quad \text{(refer Equation (27))}, \tag{61}
$$

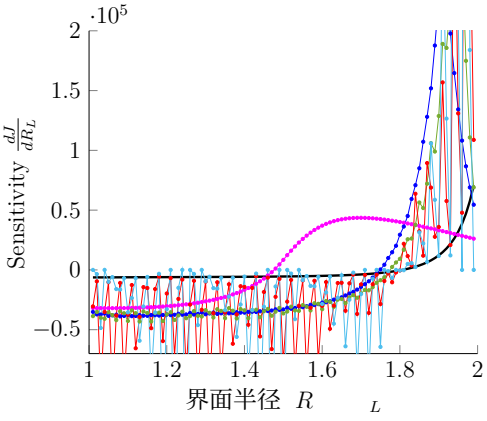
界面周长 Per_L 根据展开系数计算如下，

$$
Per_L = \int_\Omega \delta(\Phi(\mathbf{\Phi}))\, d\Omega. \tag{62}
$$

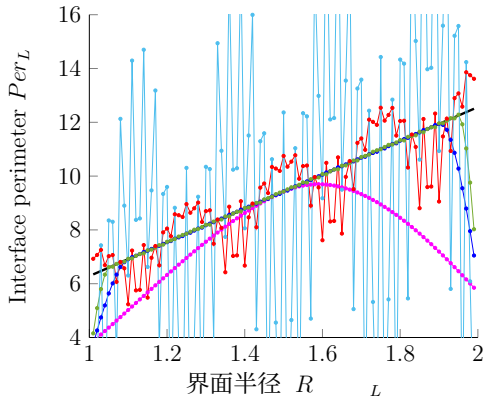
所考虑的支撑带宽 Δ 取值为 $\Delta = 0.5$，0。1，0。05、0。01、0。005。从图10可以明显看出，在较小带宽下，IGA 在目标函数方面具有更高的精度。然而，带宽过小可能导致结果不稳定，并在优化过程中产生振荡。这是因为我们采用了基于密度的几何映射，界面附近的材料信息不够精确。振荡可能会使优化过早停止，或使



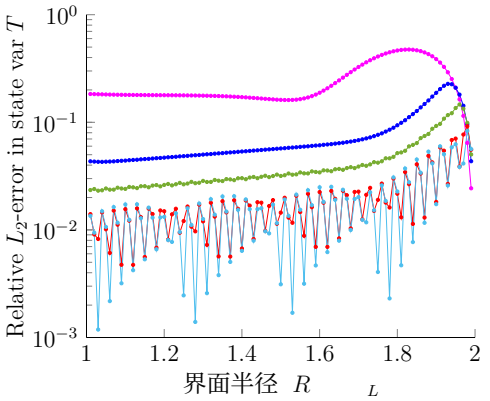
(a) 目标函数 J v/s 界面半径 R_L



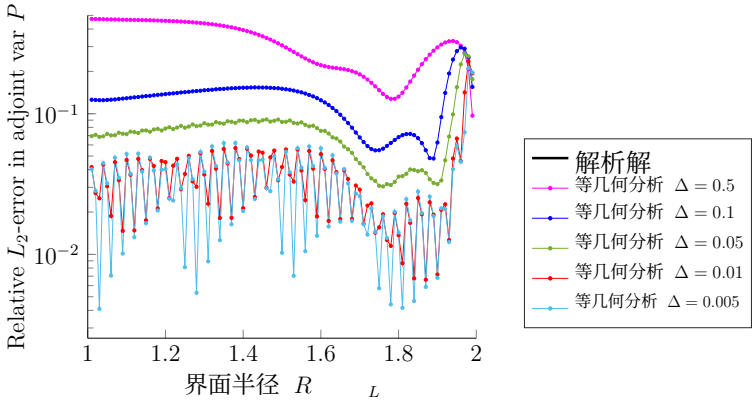
(b) 灵敏度 $\frac{dJ}{dR_L}$ v/s 界面半径 R_L



(c) 界面周长 Per_L 与界面半径 R_L的关系



(d) 状态变量 T 相对于界面半径 R_L的相对误差 L_2-范数



（e）伴随变量中的相对误差 L_2-范数 P 与界面半径 R_L之比

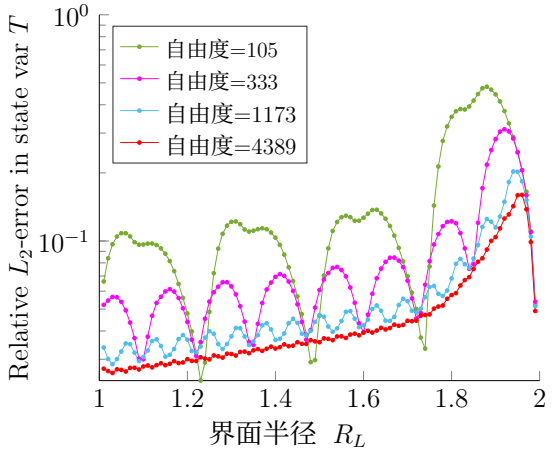
图 10：对于环形环问题，展示了不同带宽 (Δ) 的26近似海维赛德函数下，目标函数 J 的变化 ~~(a)~~、灵敏度 $\frac{dJ}{dR_L}$ 的变化 (b)、界面周长 Per_L 的变化 (c)、状态变量 T 的相对 L_2 误差 (d)，以及伴随变量 P 的相对 L_2 误差 (e) 随界面半径 R_L 的变化。解析结果以黑色表示。可以看出，带宽较小时，等几何分析在目标函数上的精度更高。然而，带宽过小可能导致结果不稳定，并在优化过程中产生振荡。

它的表现不稳定。此外，网格尺寸与这些振荡直接相关。

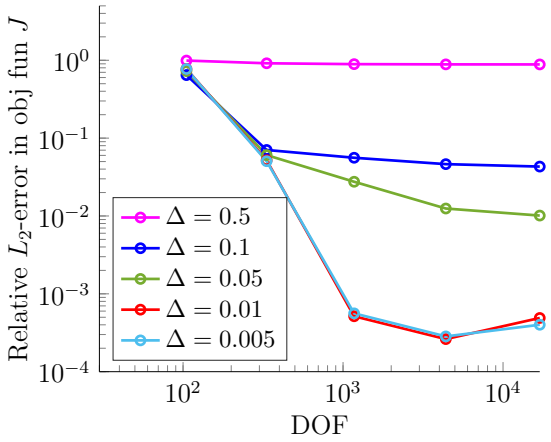
在图 11中，我们展示了网格尺寸对数值结果的影响。图 11a 展示了在 L_2范围内，状态变量 T 的相对 R_L 误差随网格尺寸变化的情况，涵盖四种不同网格尺寸，其自由度分别为=105、333、1173、4389。 $\Delta = 0.05$ 适用于全部四种情况。从图中可以明显看出，随着网格细化，精度和稳定性均有所提高，这与我们的预期一致。由于我们采用基于密度的几何映射，更精细的网格能够更精确地表示材料分布，从而改善结构响应。此外，它还能以更高的精度捕捉近似的 Heaviside 函数和 Dirac δ 函数，从而获得稳定的结果。需要注意的是，网格越精细，优化所需的计算工作量越大，这也对网格尺寸构成了实际限制。

图 11b 和图 11c 分别绘出了目标函数 J 以及变量 T& P的相对 L_2-误差随自由度变化的情况。这里，我们考虑了五个 Δ 值，与图 10 相同。我们观察到类似的规律：在支撑带宽的约束下，三个量的误差均随着网格细化而减小。图 11d 给出了目标函数J 的相对 L_2-误差与 Δ/h_{avg}之间的近似关系，其中 h_{avg} 为平均网格尺寸。从图中可以看出，黑线 $\log_{10}(||err_J||_2) = m\log_{10}(\Delta/h_{\text{avg}}) + C$; $m \approx 1.7008, C \approx -3.8495$表示在给定 Δ值时，细化所带来的改进的近似上界。在线的右侧，细化带来的精度提升有限。这一经验关系有助于确定适当的网格尺寸（针对给定的 Δ），用于优化。

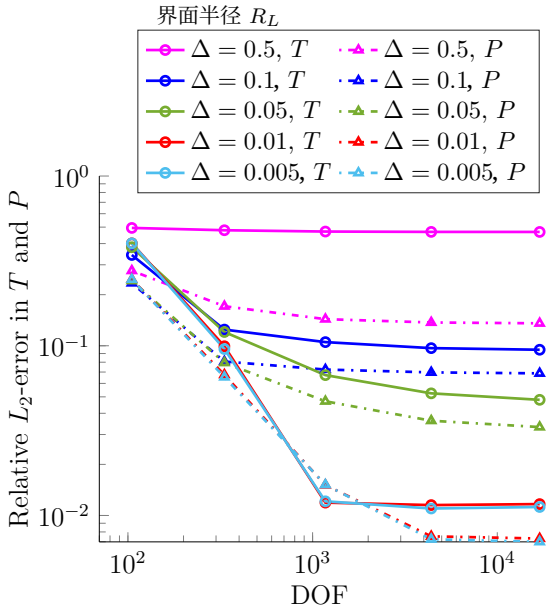
在优化中，我们将展开系数而不是界面半径作为设计变量。图12 展示了 N_{var}、$N_{\text{var}} = 25$、42 和 1089 三种取值下的初始拓扑和优化拓扑。相应的求解网格分别具有 4389、4658 和 4389 个自由度。对于 $N_{\text{var}} = 25$，1089，我们使用 $p = 2$ 和$q = 1$；而对于 $N_{\text{var}} = 42$，我们使用 $p = 3$ 和 $q = 2$。我们选择 $\Delta = 0.05$ ，以权衡精度、稳定性和计算成本。我们还考虑了四个不同的水平集函数（样本 I、II、III 和 IV）来定义初始拓扑。对于特定的水平集函数，由于参数化方式不同，每个 N_{var} 取值下的初始拓扑可能略有不同。从图中可以观察到，无论初始拓扑如何，每种情况生成的拓扑都接近解析解得到的最优拓扑，这验证了所提方法的有效性。目标函数值与最优值的偏差也均在 1% 以内。有趣的是，在所有情况下，优化都收敛到了对应于设计空间中 J 全局最小值的最小值，其中参数唯一为 R_L。在最一般的空间中，我们只能断言它是一个局部最小值。



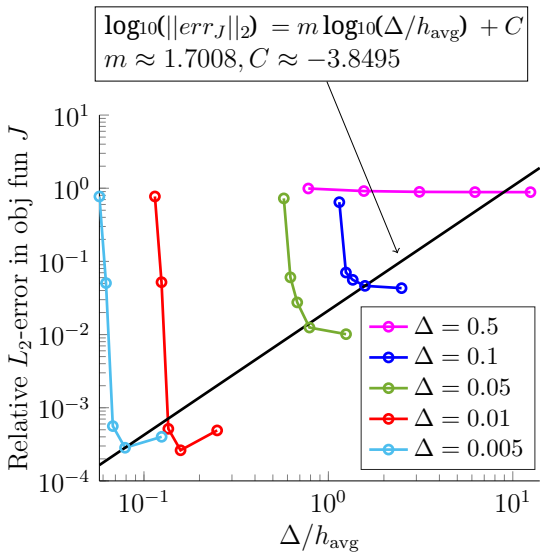
(a) 状态变量 T v/s 的相对 L_2-误差



（b）目标函数中的相对 L_2误差 J v/s DOF



(c) 状态变量 T 的相对 L_2-误差和伴随变量 P 与自由度的比值



(d) 目标函数 J 的相对 L_2-误差与 Δ/h_{avg}

图 11：对于环形环问题，自由度数量对稳定性和精度的影响：(a) 随着网格细化，半径范围内状态变量 T 的相对 L_2-误差变化；$\Delta = 0.05$ (b) 目标函数 J 的收敛情况， $\Delta = 0.5$，0.1，0.05，0.01，0.005 (c) 状态变量 T 和伴随变量 P 的收敛情况， $\Delta = 0.5$，0.1，0.05，0.01，0.005 (d) J 中相对 L_2-误差与 Δ/h_{avg} 之间的关系，其中 h_{avg} 为平均网格尺寸， $\Delta = 0.5$，0.1，0.05，0.01，0.005。 J、 T 和 P 中的误差随着网格细化而减小，其上限由支撑带宽决定。

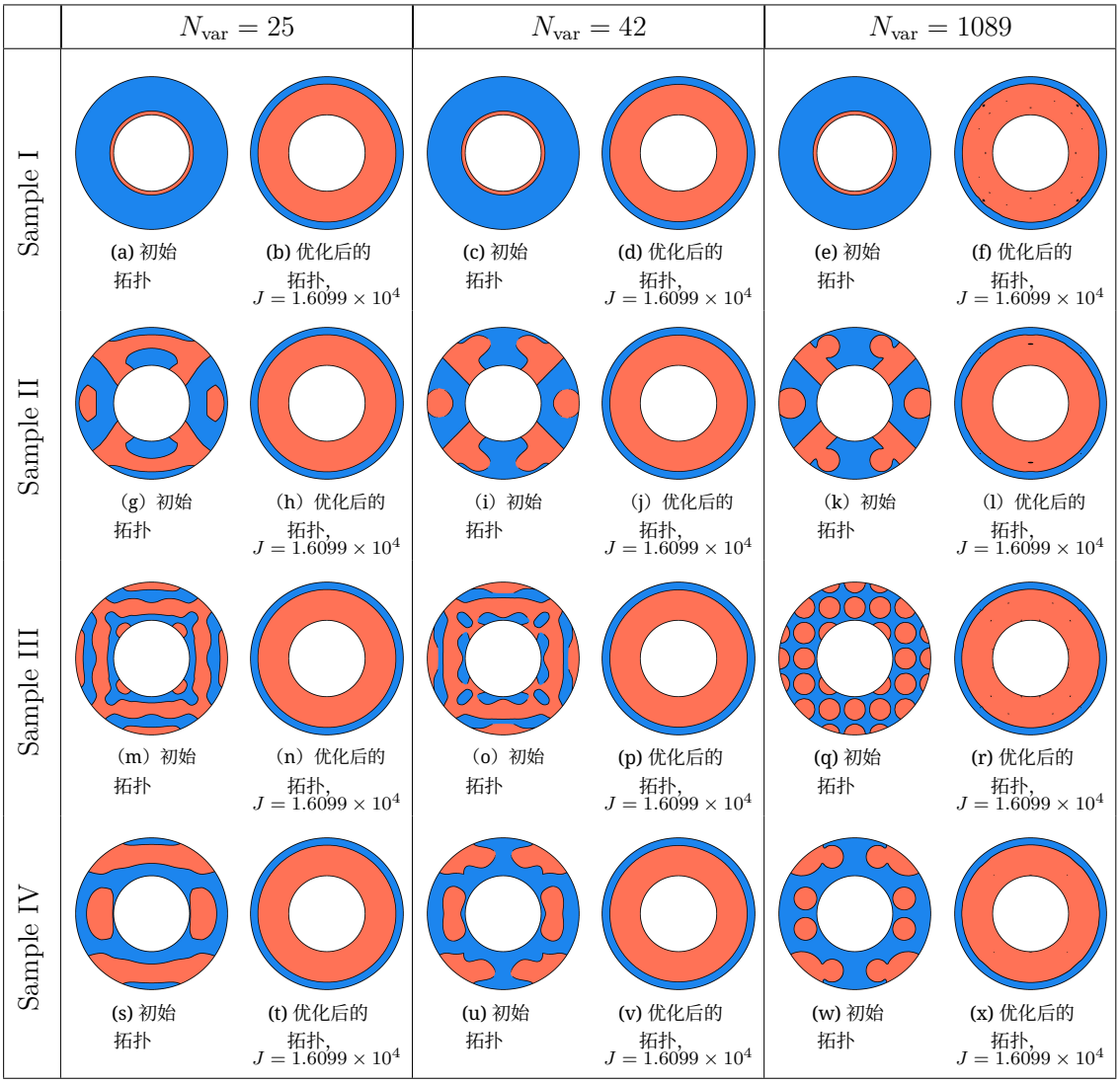
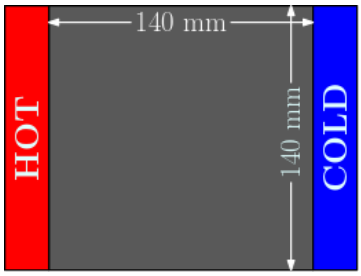
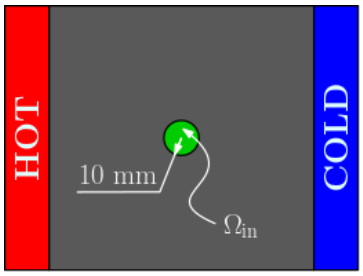


图12：对于环形环问题， N_{var} =25，42 和 1089 对应的三种取值下的初始和优化拓扑结构，$\Delta = 0.05$。四种初始拓扑（样本 I、II、III 和 IV）均采用相应的设计基进行离散化。所有优化拓扑都接近具有圆形界面的最优拓扑， $R_L \approx 1.80612$ 目标函数为 $J = 1.6098 \times 10^4$。

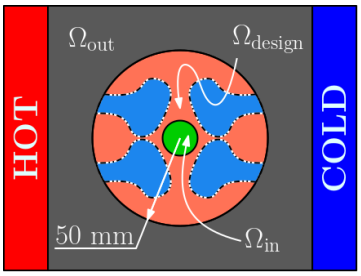
4.2. 热斗篷问题 *4.2.1.* 问题描述



（a）恒定热通量作用下的基材板恒定热通量。



（b）嵌入该板。



（c）一种基于超材料的隐身结构，位于基材板。

图 13：示意设计：(a) 左侧高温热源和右侧低温热汇施加恒定热通量的基材（铝合金）板；(b) 嵌入基材板中的圆形隔热障碍物；（Ω_{in} 为障碍物）(c) 嵌入基材板中的障碍物及其周围的基于超材料的热隐身斗篷；Ω_{design} 为斗篷的区域，其拓扑（以粉色和蓝色表示的两种材料的分布）经过优化；Ω_{out} 为其余基材所在的外部区域，在此区域中力求减小温度扰动。$\Omega = \Omega_{in} \cup \Omega_{design} \cup \Omega_{out}$。

在本示例中，对热隐身斗篷进行了优化。热隐身斗篷的目标是减小障碍物产生的温度扰动，并产生仿佛不存在障碍物时的温度分布。几何形状参考自 [61], 然而，我们关注的是热隐身斗篷，而不是 [61]中的热聚集器。我们考虑一块正方形基材铝合金（6063）板（κ_{Al} =200 W/mK），边长为 140 mm。该板处于左侧（300 K）与右侧（200 K）之间的恒定温差下，如图13a所示。在其余两侧施加绝热边界条件，$\nabla T \cdot \boldsymbol{n} = 0$。现在，在板中嵌入一个圆形障碍物，该障碍物是一种热导率极低的热绝缘体，$\kappa_{insulator} = 0.0001$ W/mK（见图13b）。由于加入了绝热材料，温度分布受到扰动。接下来，为减小温度扰动，在障碍物周围添加由超材料制成的热隐身斗篷（如图13c所示）。该问题的所有相关尺寸均 shown in Figure 13。对于热隐身斗篷，我们选择由铜和聚二甲基硅氧烷（PDMS）制成的超材料，其热导率分别为 $\kappa_{copper} = 398$ W/mK 和 $\kappa_{PDMS} = 0.27$ W/mK。

4.2.2. 目标函数

热隐身斗篷旨在减小由内部障碍物 Ω_{in}在 Ω_{out} 中产生的温度扰动。在数学上，热隐身斗篷的目标函数定义为：

$$J_{\text{cloak}} = \frac{1}{\widetilde{J}_{\text{cloak}}} \int_{\Omega_{\text{out}}} |T - \overline{T}|^2 \, d\Omega, \tag{63}$$

其中， J_{cloak} 为归一化值，定义如下：

$$\widetilde{J}_{\text{cloak}} = \int_{\Omega_{\text{out}}} |\widetilde{T} - \overline{T}|^2 \, d\Omega, \tag{64}$$

这里，$\overline{T}$ 表示参考情况下的温度场，即整个区域均由基材填充时的温度场； T 表示 Ω_{design}完全由绝热材料填充时的温度场。

与方程（35）相比，$\Omega_b = \Omega_{\text{out}}$，$\alpha_b = \frac{1}{\widetilde{J}_{\text{cloak}}} |T - \overline{T}|^2$，且不包含表面项。

4.2.3. 结果与讨论

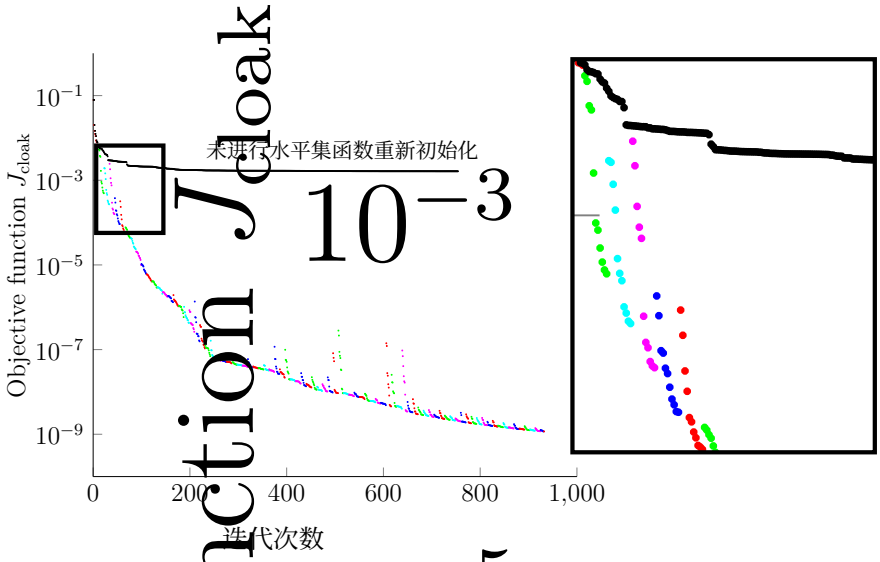


图14：对于热斗篷问题，目标函数 J_{cloak}（关于迭代次数）的收敛情况，以及进行和不进行水平集函数重新初始化时的对比。黑色圆点表示不进行水平集函数重新初始化的情况，其余颜色表示进行水平集函数重新初始化的情况。颜色的变化表明在该次迭代中水平集函数已重新初始化。

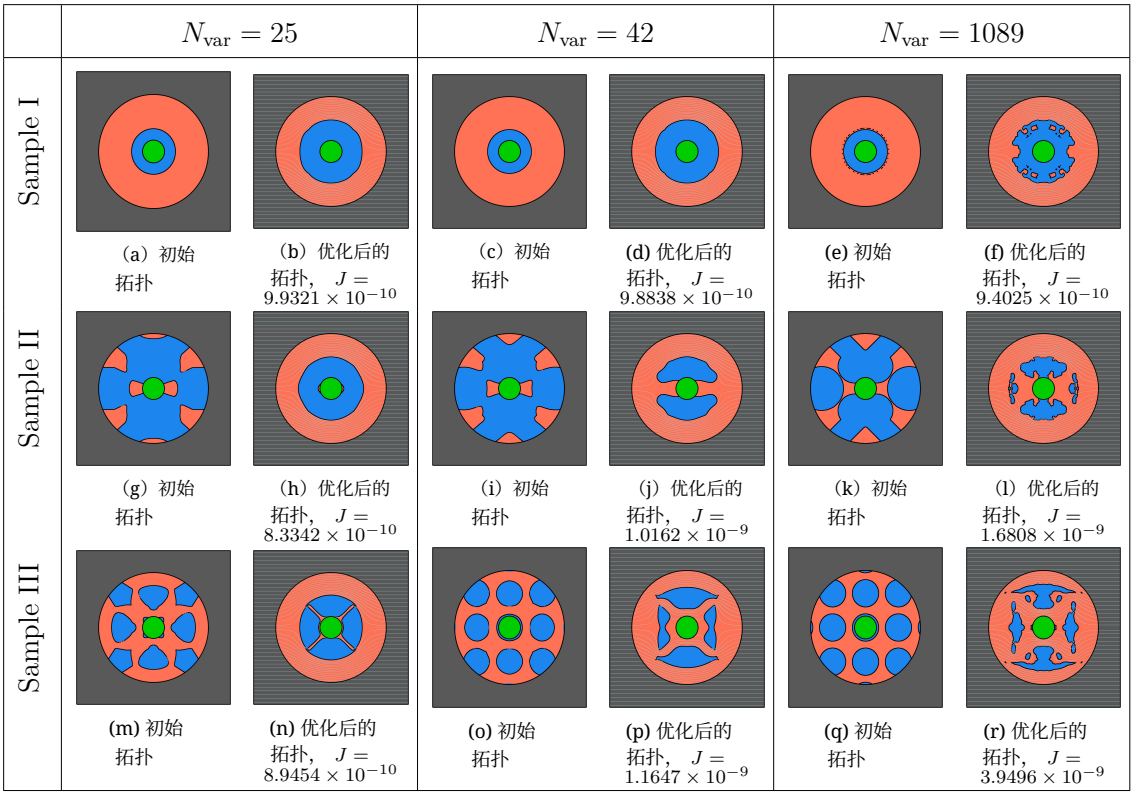


图 15：对于热斗篷问题，$\Delta = 0.0005$下 N_{var} =25、42 和 1089 三种取值对应的初始拓扑和优化拓扑。三个初始拓扑（样本 I、II 和 III）均采用相应的设计基进行离散化。所有优化拓扑的目标函数值均达到 10^{-9}-10^{-10} 量级。

此处， N_{var}， p， q取值与前一个示例相同，且$\Delta = 0.0005$。本文考虑三种初始拓扑（样本 I、样本 II 和样本 III），并使用 $N_{\text{var}} = 25$，42 和 1089 对相应的水平集函数进行离散。与 $N_{\text{var}} = 25$，42 和 1089 对应的求解网格分别具有 13167、13974 和 13167 个自由度。此外，采用水平集函数重新初始化来提高收敛速度。对于参数方向上的每个节点跨距，我们使用 20 条等参数线来确定界面点（如第3.4.1节所述）。每 10 次迭代或 100 次函数评估后执行一次重新初始化。为展示重新初始化时目标函数的收敛模式，我们在图 $N_{\text{var}} = 1089$ 中展示了样本 III 在14下的收敛情况。由图14可见，重新初始化显著提高了收敛速度。

图15 展示了初始拓扑和优化后的拓扑。从图中可以看出，优化后的拓扑取决于初始拓扑以及设计变量的数量。然而，在所有情况下，目标函数都成功达到 10^{-9}-10^{-10} 量级的数值。较大的 N_{var} 代表更大的设计自由度，这一点在 $N_{\text{var}} = 1089$对应的优化拓扑中显而易见。较大的 N_{var}可以探索更精细的拓扑结构，但同时也可能产生不必要且复杂的特征。解决隐身斗篷问题的方法之一是采用 [4], 中提出的精确双层隐身斗篷，其中界面为圆形，其半径由相关导热系数唯一确定。通过优化，我们得到了若干接近双层隐身斗篷的优化拓扑，例如（图15b、15d、15f、15h、15n）。

为进一步说明优化结果，图16展示了样本 I 在 $N_{\text{var}} = 1089$条件下的优化热隐身斗篷。我们比较了图13所示三种情况下的热流流动和温度分布：恒定热通量作用下的背景板、带有障碍物的板，以及带有障碍物和隐身斗篷的板。从温差可以明显看出，热隐身斗篷降低了障碍物造成的温度扰动。在 Ω_{out}区域内，温度分布与参考情况相似，且热流未受扰动。

在本段中，我们将讨论如何避免图15f、15l 和15r所示优化拓扑结构中的不必要复杂特征。目标是使用正则化技术生成平滑且不太复杂的拓扑结构。首先，我们探讨蒂霍诺夫正则化。采用蒂霍诺夫正则化时，总目标函数为 $J_{\text{total}} = J_{\text{cloak}} + \chi J_{\text{Tknv}}$。优化分别在以下四个取值下进行：$\chi$： 10^{-5}、 10^{-4}、 10^{-3}和 10^{-2}。优化结果如图17所示。对于 $\chi = 10^{-5}$， 10^{-4}，正则化的影响非常小，因此仍可看到一些小特征。对于更大的 χ （10^{-3}，

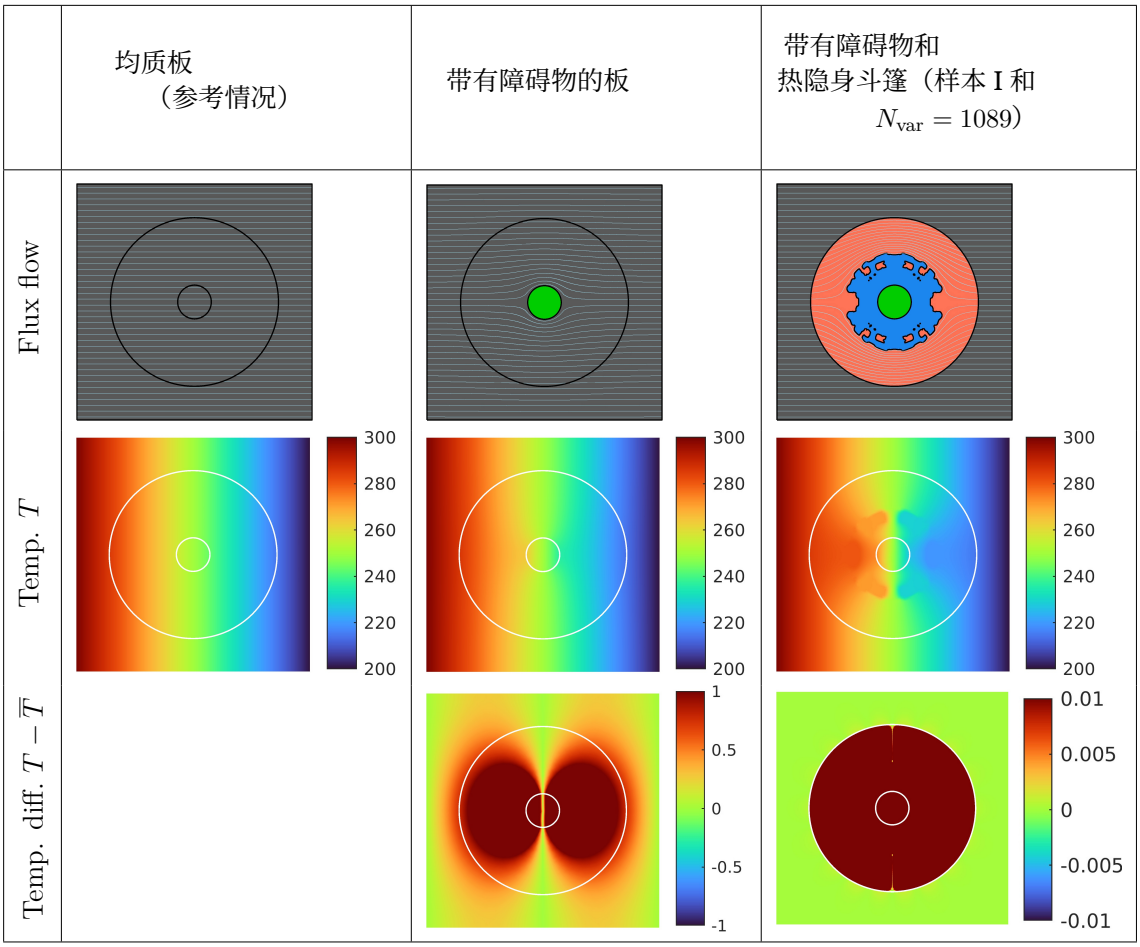


图 16：对于热斗篷问题，展示了（左列）均质基材板（参考情况）、（中列）嵌入圆形绝缘体障碍物的基材板，以及（右列）嵌入圆形绝缘体并由热隐身斗篷环绕的基材板（样本 I 和 $N_{\text{var}} = 1089$）中的热流流动和温度分布。图中显示了温度和热通量分布。热隐身斗篷降低了 Ω_{out} 中的温度扰动。

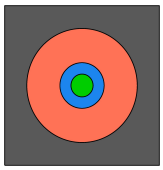
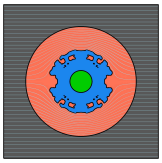
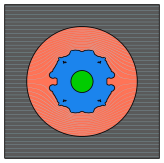
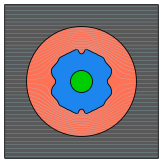
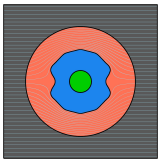
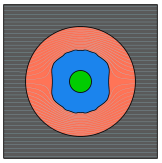
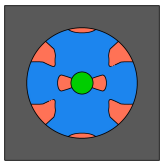
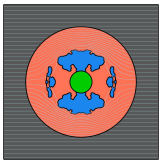
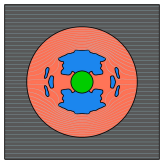
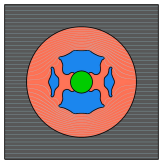
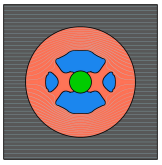
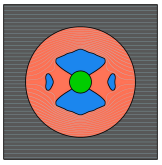
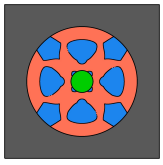
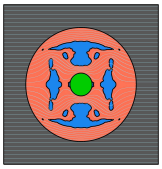
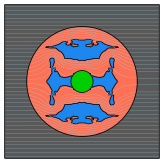
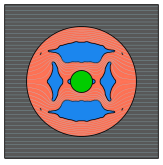
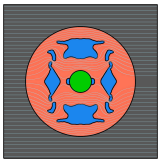
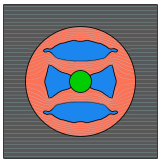
	初始拓扑	无任何 reg. $J_{\text{total}} = J_{\text{cloak}}$	蒂霍诺夫正则化 $J_{\text{total}} = J_{\text{cloak}} + \chi J_{\text{Tknv}}$			
			$\chi = 1\times10^{-5}$	$\chi = 1\times10^{-4}$	$\chi = 1\times10^{-3}$	$\chi = 1\times10^{-2}$
Sample I						
	(a) 初始拓扑	(b) $J_{\text{cloak}} = 9.4025 \times 10^{-10}$	(c) $J_{\text{cloak}} = 3.6926 \times 10^{-9}$	(d) $J_{\text{cloak}} = 1.4965 \times 10^{-9}$	(e) $J_{\text{cloak}} = 2.2925 \times 10^{-9}$	(f) $J_{\text{cloak}} = 2.7410 \times 10^{-7}$
Sample II						
	(g) 初始拓扑	(h) $J_{\text{cloak}} = 1.6808 \times 10^{-9}$	(i) $J_{\text{cloak}} = 1.3970 \times 10^{-8}$	(j) $J_{\text{cloak}} = 1.1734 \times 10^{-8}$	(k) $J_{\text{cloak}} = 3.6621 \times 10^{-8}$	(l) $J_{\text{cloak}} = 1.9286 \times 10^{-7}$
Sample III						
	(m) 初始拓扑	(n) $J_{\text{cloak}} = 3.9218 \times 10^{-9}$	(o) $J_{\text{cloak}} = 3.1303 \times 10^{-8}$	(p) $J_{\text{cloak}} = 2.8539 \times 10^{-8}$	(q) $J_{\text{cloak}} = 4.4867 \times 10^{-7}$	(r) $J_{\text{cloak}} = 4.4867 \times 10^{-7}$

图17：对于热斗篷问题，$N_{\text{var}} = 1089$ 在 $\Delta = 0.0005$条件下的初始拓扑、未经正则化和采用蒂霍诺夫正则化得到的优化拓扑。三个初始拓扑（样本I、II和III）均采用相应的设计基进行离散化。考虑了加权参数 χ 的四个取值。蒂霍诺夫正则化使优化拓扑更加平滑，但 J_{cloak}值略有折衷。

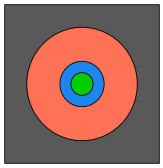
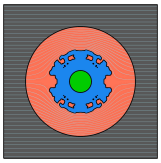
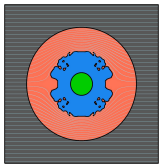
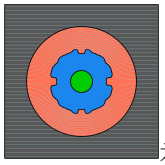
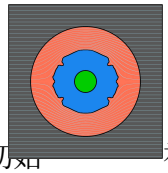
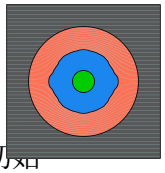
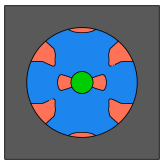
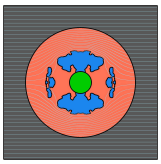
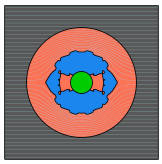
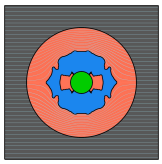
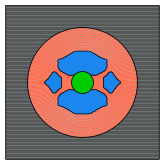
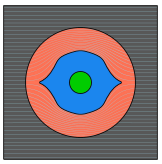
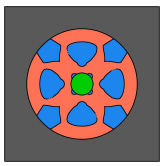
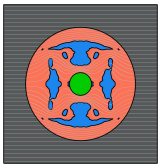
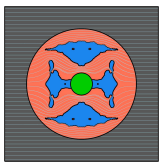
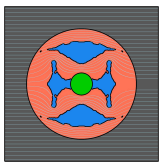
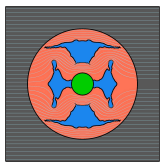
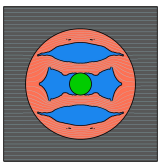
	初始拓扑	无任何 reg. $J_{\text{total}} = J_{\text{cloak}}$	体积正则化 $J_{\text{total}} = J_{\text{cloak}} + \rho J_{\text{vol}}$			
			$\rho = 1\times10^{-5}$	$\rho = 1\times10^{-4}$	$\rho = 1\times10^{-3}$	$\rho = 1\times10^{-2}$
Sample I	 (a) 初始拓扑	 (b) $J_{\text{cloak}} = 9.4025\times10^{-10}$	 (c) $J_{\text{cloak}} = 1.0381\times10^{-9}$	 (d) $J_{\text{cloak}} = 6.0961\times10^{-10}$	 (e) $J_{\text{cloak}} = 8.2470\times10^{-9}$	 (f) $J_{\text{cloak}} = 4.2666\times10^{-8}$
Sample II	 (g) 初始拓扑	 (h) $J_{\text{cloak}} = 1.6808\times10^{-9}$	 (i) $J_{Initial\text{cloak}} = 2.5519\times10^{-9}$	 (j) $J_{\text{cloak}} = 2.6986\times10^{-9}$	 (k) $J_{\text{cloak}} = 4.2448\times10^{-8}$	 (l) $J_{\text{cloak}} = 1.5302\times10^{-7}$
Sample III	 (m) 初始拓扑	 (n) $J_{\text{cloak}} = 3.9496\times10^{-9}$	 (o) $J_{\text{cloak}} = 2.8493\times10^{-8}$	 (p) $J_{\text{cloak}} = 8.3947\times10^{-9}$	 (q) $J_{\text{cloak}} = 3.2274\times10^{-7}$	 (r) $J_{\text{cloak}} = 1.6057\times10^{-6}$

图18：对于热斗篷问题，展示了初始拓扑、未进行任何正则化的优化拓扑，以及采用体积正则化的优化拓扑，针对 $N_{\text{var}} = 1089$ 且 $\Delta = 0.0005$。三个初始拓扑（样本I、II和III）采用相应的设计基进行离散化。考虑了加权参数 ρ的四个取值。体积正则化会用PDMS材料填充零通量区域，同时使 J_{cloak}值略有折衷。

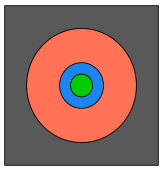
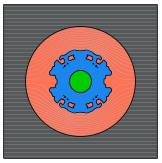
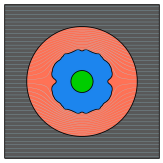
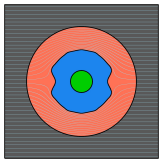
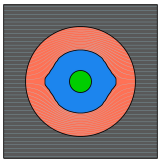
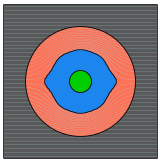
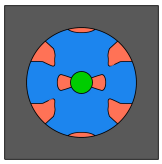
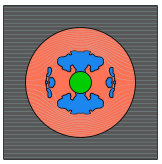
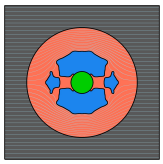
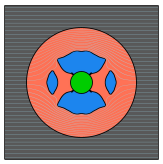
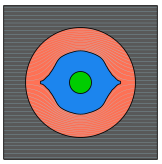
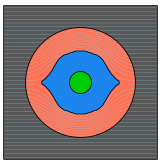
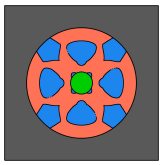
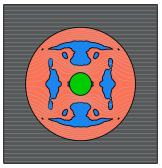
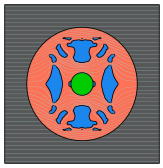
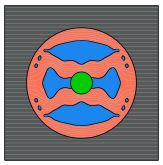
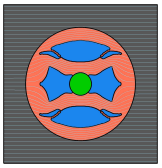
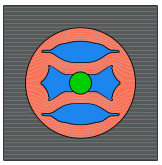
	初始拓扑	无任何正则化处理 $J_{\text{cloak}}^{\text{总计}} =$	蒂霍诺夫 +体积正则化 $J_{\text{total}} = J_{\text{cloak}} + \chi J_{\text{Tknv}} + \rho J_{\text{vol}}$			
			集合 A $\chi = 1\times10^{-4}$ $\rho = 1\times10^{-4}$	集合 B $\chi = 1\times10^{-3}$ $\rho = 1\times10^{-4}$	集合 C $\chi = 1\times10^{-4}$ $\rho = 1\times10^{-2}$	集合 D $\chi = 1\times10^{-3}$ $\rho = 1\times10^{-2}$
Sample I	 (a) 初始拓扑	 (b) $J_{\text{cloak}} = 9.4025 \times 10^{-10}$	 (c) $J_{\text{cloak}} = 4.7079 \times 10^{-9}$	 (d) $J_{\text{cloak}} = 6.6095 \times 10^{-9}$	 (e) $J_{\text{cloak}} = 1.3305 \times 10^{-7}$	 (f) $J_{\text{cloak}} = 1.0838 \times 10^{-7}$
Sample II	 (g) 初始拓扑	 (h) $J_{\text{cloak}} = 1.6808 \times 10^{-9}$	 (i) $J_{\text{cloak}} = 1.0086 \times 10^{-8}$	 (j) $J_{\text{cloak}} = 6.2857 \times 10^{-8}$	 (k) $J_{\text{cloak}} = 1.5262 \times 10^{-7}$	 (l) $J_{\text{cloak}} = 1.3121 \times 10^{-7}$
Sample III	 (m) 初始拓扑	 (n) $J_{\text{cloak}} = 3.9496 \times 10^{-9}$	 (o) $J_{\text{cloak}} = 4.1915 \times 10^{-8}$	 (p) $J_{\text{cloak}} = 2.1605 \times 10^{-7}$	 (q) $J_{\text{cloak}} = 1.6656 \times 10^{-6}$	 (r) $J_{\text{cloak}} = 1.7590 \times 10^{-6}$

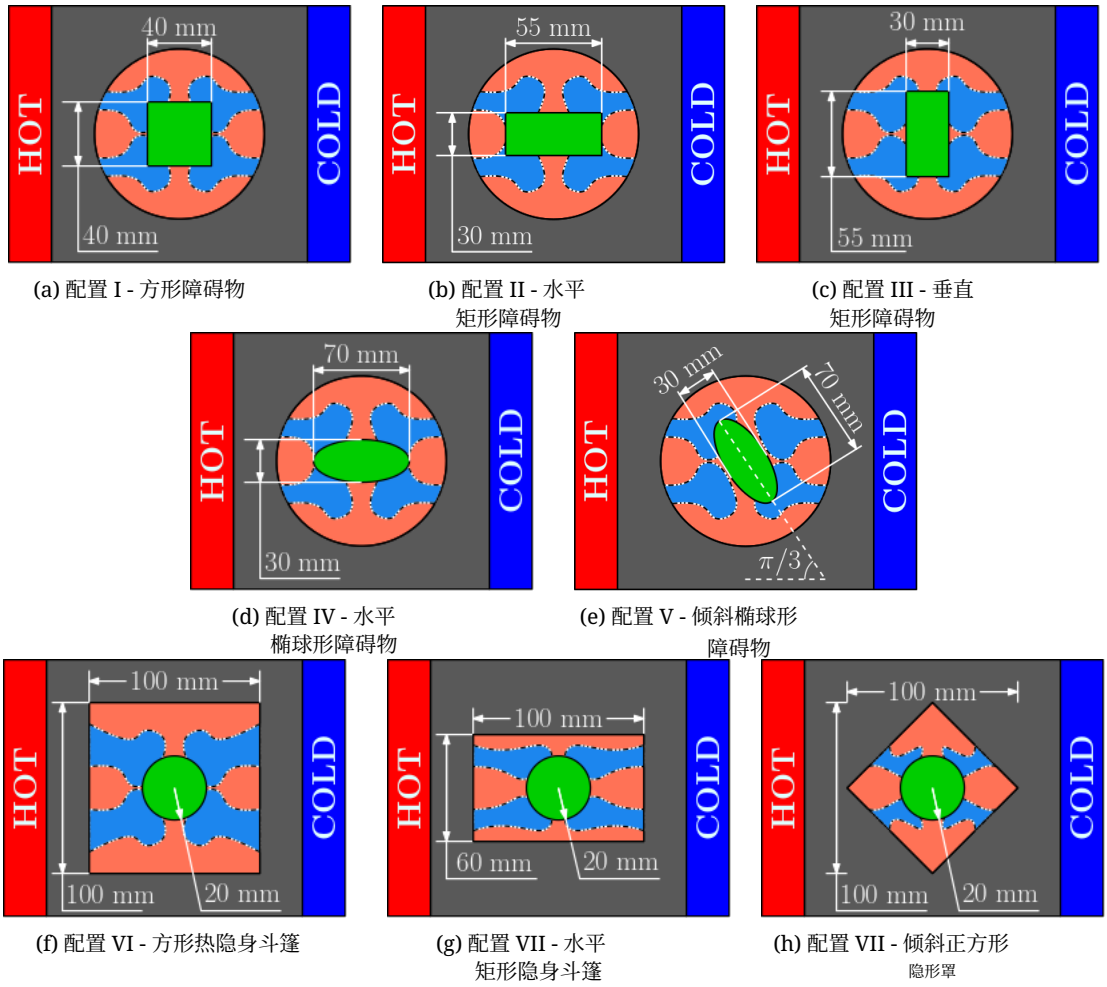
图19：对于热斗篷问题， $N_{\text{var}} = 1089$ 下的初始拓扑、未进行任何正则化的优化拓扑，以及采用蒂霍诺夫与体积组合正则化得到的优化拓扑，其中 Δ =0。0005。三个初始拓扑（样本I、II和III）采用相应的设计基进行离散化。考察了四组权重参数 χ 和 ρ 。组合正则化既能用PDMS材料填充零通量区域，也能生成更平滑的拓扑结构，同时仅对 J_{cloak}值略有影响。

10^{-2})，正如预期，优化后的拓扑更加平滑，复杂特征也更少。然而，正则化对 J_{cloak} 值施加了轻微的约束。这些值虽然处于 10^{-7} 的量级，但仍足以提供具有足够精度的隐身效果。

接下来，我们探究另一种正则化——体积正则化的影响。采用体积正则化后，总目标函数 $J_{\text{total}} = J_{\text{cloak}} + \rho J_{\text{vol}}$。此处，我们使用了 ρ 的四个取值： 10^{-5}， 10^{-4}， 10^{-3} 和 10^{-2}。图 18 展示了优化结果。从图中可以明显看出，较大的 ρ 下，体积正则化会用 PDMS材料填充零通量区域。对于较小的 ρ，其影响并不显著。与上一种正则化类似， J_{cloak} 值在一定程度上受到影响，但仍处于 10^{-6} 的量级。此外，对于样品 II，未采用任何正则化时的优化拓扑（如图 18h所示）与双层结构相当不同。然而，经过体积正则化后，图 18l-18k 与双层隐身斗篷较为接近。

随后，我们检验前两个段落中提到的这两种正则化的组合。我们考虑了 $\chi = 10^{-4}$、 10^{-3} 和$\rho = 10^{-4}$、 10^{-2}的四种组合，分别记为集合 A 至 D。优化结果如图19所示。对于样本 I，所有集合得到的结果都相似，拓扑差异极小。对于样品 II 和 III，与集合 A 和 B 相比，集合 C 和 D 得到的拓扑结构更平滑、周长更小，且特征更简单。 J_{cloak}值方面，集合 C 和 D 的结果略高。因此，我们可以认为， χ 和 ρ 的取值取决于拓扑结构的平滑程度与隐身目标实现程度之间的权衡。然而，事先很难预测 χ和 ρ 的确切取值，因此应通过试错法来确定。还可以采用周长正则化和灵敏度平滑等其他正则化技术，以获得更平滑的几何形状。不过，缺乏权重参数适当取值的先验知识这一问题仍然存在。避免复杂拓扑结构的另一种方法是在优化问题中施加几何约束，例如最小长度尺度。然而，几何约束优化超出了本文的研究范围，将在未来的研究中加以探讨。

在下一项研究中，我们针对给定问题探讨几种障碍物和热隐身斗篷的几何形状。所考虑的不同构型及其尺寸如图20所示。板尺寸与图 13相同，因此不再列出。对于所有构型，我们均像前述情况一样沿 x和 y轴应用对称性，但配置 V——倾斜椭球形障碍物除外；由于几何本身不具对称性，我们不施加对称条件。我们针对一个 N_{var}， $N_{\text{var}} = 1089$以及相应的——



(a) 配置 I - 方形障碍物　(b) 配置 II - 水平矩形障碍物　(c) 配置 III - 垂直矩形障碍物

(d) 配置 IV - 水平椭球形障碍物　(e) 配置 V - 倾斜椭球形障碍物

(f) 配置 VI - 方形热隐身斗篷　(g) 配置 VII - 水平矩形隐身斗篷　(h) 配置 VII - 倾斜正方形隐形罩

图20：热斗篷问题中不同类型几何形状的构型与尺寸：配置 I - 方形障碍物，配置 II - 水平矩形障碍物，配置 III - 垂直矩形障碍物，配置 IV - 水平椭圆形障碍物，配置 V - 倾斜椭球形障碍物，配置 VI - 方形热隐身斗篷，配置 VII - 水平矩形热隐身斗篷，配置 VIII - 倾斜方形热隐身斗篷。

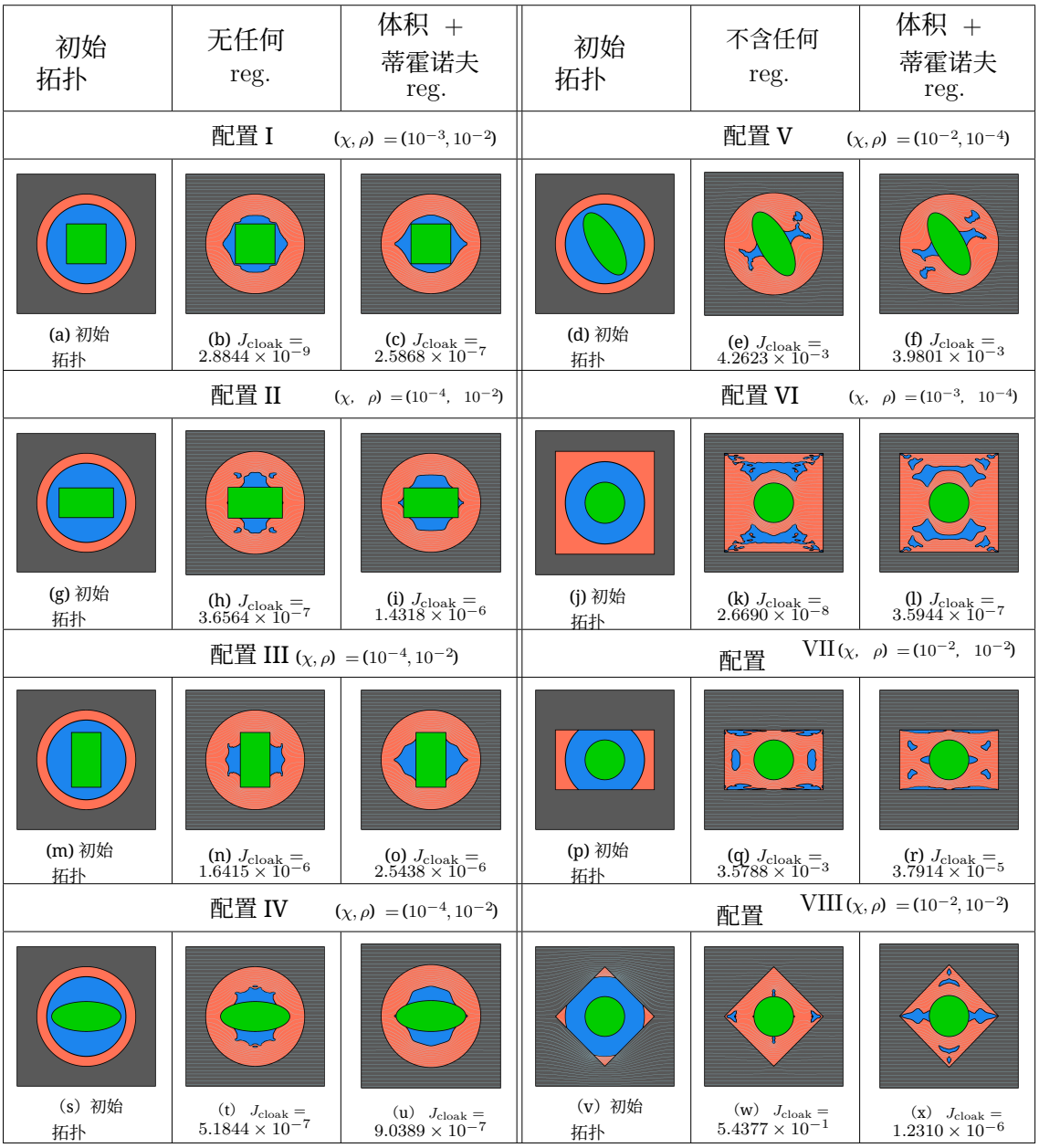
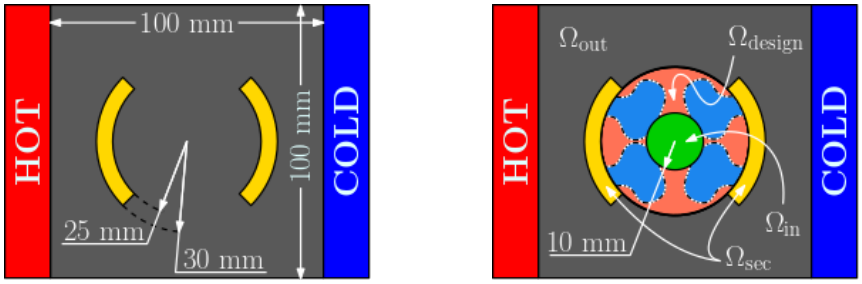


图21：对于热斗篷问题，展示了热隐身斗篷的不同几何形状下的初始拓扑、未进行任何正则化的优化拓扑，以及结合蒂霍诺夫正则化和体积正则化的优化拓扑，针对 $N_{\text{var}} = 1089$ with $\Delta = 0.0005$。所提方法能够处理不同的几何形状。

结果如图所示21 分别展示初始拓扑、优化后的拓扑（未进行任何正则化）以及优化后的拓扑（结合蒂霍诺夫正则化与体积正则化）。对于结合蒂霍诺夫正则化与体积正则化的情况，我们仅展示一个案例，该案例获得了更平滑的拓扑且精度良好（各案例对应的权重参数 χ 和 ρ 也在图21中给出）。从结果可以得出，所提方法能够处理不同的几何形状。与前面的结果类似，正则化可以生成更平滑的几何形状。在某些情况下，正则化问题的目标函数优于未正则化问题。其原因在于，未正则化的优化问题可能陷入局部最小值，而未能探索整个设计空间。应用正则化后，对于这些情况，正则化问题的定义更加完善。因此，优化能够探索更优的设计，而这些设计在此前是无法实现的。

4.3 热伪装问题 *4.3.1* 问题描述



(a) 嵌入基材中的两个绝缘体扇区板（参考状态）。

(b) 一个导电物体及其周围的超材料基伪装结构，嵌入板中。

图22：示意设计：(a) 一块铝合金基材板，其中嵌入两个绝缘体扇区，左侧高温热源施加恒定热通量，右侧为低温热汇；(b) 一个导电物体、包围该物体的热伪装结构，以及嵌入基材板中的两个绝缘体扇区；Ω_{sec} 为绝缘体扇区覆盖的区域，Ω_{in} 为物体覆盖的区域，Ω_{design} 为进行拓扑优化的伪装区域，Ω_{out} 为剩余基材的外部区域，$\Omega = \Omega_{in} \cup \Omega_{design} \cup \Omega_{sec} \cup \Omega_{out}$。

在本例中，我们探讨热伪装的优化。热隐身斗篷和热伪装都能模拟其他参考场景在感兴趣区域内的热特征。热隐身斗篷可将物体隐藏起来，使其不被外部

探测到；然而，从内部观察时仍能发现它们，因为其热特征与外部区域不同。另一方面，热伪装能够模拟另一个物体的热特征，从而同时躲避来自内部和外部的探测。热伪装问题的示意图及相应尺寸如图22所示。图22a 展示了参考状态：两个绝热扇区嵌入一块边长为 100 mm 的方形基材铝合金（5457牌号）板中（$\kappa_{\mathrm{Al}} = 177$ W/mK），绝缘体的导热率取为 0.0001 W/mK。图22b 展示了在两个扇区中心加入镁合金物体（AZ91D牌号），其热导率为 $\kappa_{\mathrm{Mg}} = 72.7$ W/mK。图中还展示了基于超材料的热伪装结构，其覆盖两个扇区与物体之间的区域。对于伪装，我们选用了与上一个示例类似的超材料，由铜和聚二甲基硅氧烷（PDMS）制成，热导率分别为 $\kappa_{\mathrm{copper}} = 398$ W/mK 和 $\kappa_{\mathrm{PDMS}} = 0.27$ W/mK。边界条件与前一个示例相同。

4.3.2. 目标函数

热伪装的目标是减小 $\Omega_{\mathrm{in}} \cup \Omega_{\mathrm{design}} \cup \Omega_{\mathrm{out}}$ 中相对于参考状态温度特征的温差。数学上，伪装函数定义为：

$$J_{\mathrm{cmflg}} = \frac{1}{\widetilde{J}_{\mathrm{cmflg}}} \int_{\Omega_{\mathrm{in}} \cup \Omega_{\mathrm{design}} \cup \Omega_{\mathrm{out}}} |T - \overline{T}|^2 \, d\Omega, \tag{65}$$

其中 J_{cmflg} 为归一化值，定义如下：

$$\widetilde{J}_{\mathrm{cmflg}} = \int_{\Omega_{\mathrm{in}} \cup \Omega_{\mathrm{design}} \cup \Omega_{\mathrm{out}}} |\widetilde{T} - \overline{T}|^2 \, d\Omega, \tag{66}$$

此处，$\overline{T}$ 表示参考情况的温度场，即 $\Omega_{\mathrm{in}} \cup \Omega_{\mathrm{design}} \cup \Omega_{\mathrm{out}}$ 填充基材时的温度场；T 则表示 Ω_{design} 完全填充绝热材料时的温度场。

与公式（35）相比，$\Omega_b = \Omega_{\mathrm{in}} \cup \Omega_{\mathrm{design}} \cup \Omega_{\mathrm{out}}$，$J_b = \frac{1}{\widetilde{J}_{\mathrm{cmflg}}} |T - \overline{T}|^2$，且不包含表面项。

4.3.3. 结果与讨论

在本例中，我们考虑 $N_{\mathrm{var}} = 1089$（其中 $p = 2$、$q = 1$，网格包含 17655 个自由度）和 $\Delta = 0.001$。我们还采用了每 10 次迭代或 300 次函数评估后执行的水平集函数重新初始化。其他所有参数均与上一个示例相同。

图23 展示了初始拓扑结构、未进行任何正则化的优化拓扑结构（$J_{\text{total}} = J_{\text{cmflg}}$），以及采用蒂霍诺夫正则化和体积正则化组合的优化拓扑结构（$J_{\text{total}} = J_{\text{cmflg}} + \chi J_{\text{Tknv}} + \rho J_{\text{vol}}$）。对于组合正则化，我们考虑四组参数 χ 和 ρ，分别记为集合 A（$\chi = 1,\ \rho = 10^{-2}$）、集合 B（$\chi = 1,\ \rho = 10^{-1}$）、集合 C（$\chi = 1,\ \rho = 1$）和集合 D（$\chi = 1,\ \rho = 0$）。可以看出，最优拓扑结构形成了铜通道，使通量能够以与参考情况类似的方式流动。通道宽度取决于数值精度、设计自由度和正则化参数。从图中可以明显看出，未进行任何正则化的优化几何形状因特征过于复杂而不切实际。然而，采用正则化的替代设计具有更实用的拓扑结构。还需注意的是，它们的 J_{cmflg}值与未正则化情形处于同一范围，有时甚至更小。从集合 A 到集合 D 的优化拓扑结构之间差异极小。正如上一个示例所讨论的，参数 χ 和 ρ 的取值难以事先预测，必须根据设计要求通过试错法确定。

在图 24中，我们展示了样本 I 在有正则化和无正则化情况下，为实现预期伪装目标而得到的优化拓扑。我们将热流流动、温度分布和温差与参考温度分布进行了比较。从图中可以看出，热伪装产生了与参考情况相同的温度特征。

5. 结论

本文探讨了用于设计热操控器的水平集拓扑优化方法。采用 NURBS基函数对几何、温度场和水平集函数进行参数化。热边值问题通过等几何分析求解。对于优化问题，采用了一种基于梯度的先进数学规划技术——序列二次规划（SQP）。灵敏度通过伴随方法计算。本文给出了三个数值算例：环形区域问题、热斗篷问题，以及用于验证所提方法有效性的热伪装问题。

在环形环问题中，数值结果与解析结果相符，这验证了所提方法的精度。结果表明，

- 减小近似 Heaviside 函数的支撑带宽可以提高数值解的精度，进而改善优化结果。然而，带宽过小会影响数值灵敏度计算

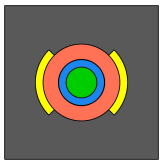
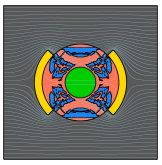
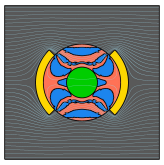
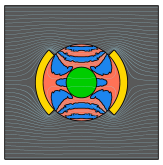
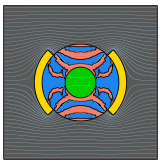
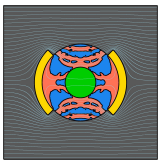
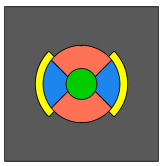
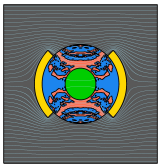
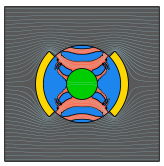
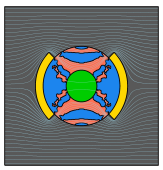
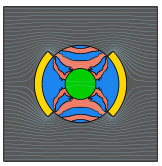
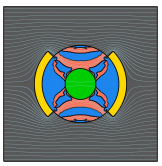
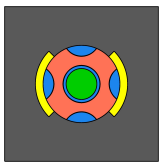
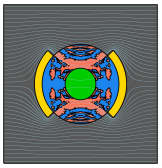
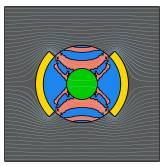
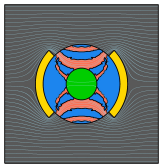
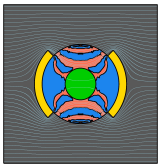
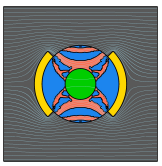
	初始拓扑	无任何正则化-化 $J_{\text{cmflg}}^{\text{总计}} =$	蒂霍诺夫 +体积 正则化 $J_{\text{total}} = J_{\text{cmflg}} + \chi J_{\text{Tknv}} + \rho J_{\text{vol}}$			
			集合 A $\chi = 1 \times 10^{0}$ $\rho = 1 \times 10^{-2}$	集合 B $\chi = 1 \times 10^{0}$ $\rho = 1 \times 10^{-1}$	集合 C $\chi = 1 \times 10^{0}$ $\rho = 1 \times 10^{0}$	集合 D $\chi = 1 \times 10^{0}$ $\rho = 0 \times 10^{0}$
Sample I	 (a) 初始拓扑	 (b) $J_{\text{cmflg}} = 3.4436 \times 10^{-3}$	 (c) $J_{\text{cmflg}} = 1.3200 \times 10^{-3}$	 (d) $J_{\text{cmflg}} = 1.4132 \times 10^{-3}$	 (e) $J_{\text{cmflg}} = 1.6917 \times 10^{-3}$	 (f) $J_{\text{cmflg}} = 1.3591 \times 10^{-3}$
Sample II	 (g) 初始拓扑	 (h) $J_{\text{cmflg}} = 9.1497 \times 10^{-4}$	 (i) $J_{\text{cmflg}} = 1.3130 \times 10^{-3}$	 (j) $J_{\text{cmflg}} = 1.2862 \times 10^{-2}$	 (k) $J_{\text{cmflg}} = 1.4967 \times 10^{-3}$	 (l) $J_{\text{cmflg}} = 9.8891 \times 10^{-4}$
Sample III	 (m) 初始拓扑	 (n) $J_{\text{cmflg}} = 3.6367 \times 10^{-3}$	 (o) $J_{\text{cmflg}} = 1.6029 \times 10^{-3}$	 (p) $J_{\text{cmflg}} = 1.0982 \times 10^{-3}$	 (q) $J_{\text{cmflg}} = 8.6531 \times 10^{-4}$	 (r) $J_{\text{cmflg}} = 7.4425 \times 10^{-4}$

图23：对于热伪装问题，展示了 $N_{\text{var}} = 1089$ 在$\Delta = 0.001$条件下的初始拓扑、未采用任何正则化的优化拓扑，以及结合蒂霍诺夫正则化和体积正则化的优化拓扑。三种初始拓扑（样本I、II和III）采用相应的设计基进行离散化。考虑了四组权重参数 χ 和 ρ 。

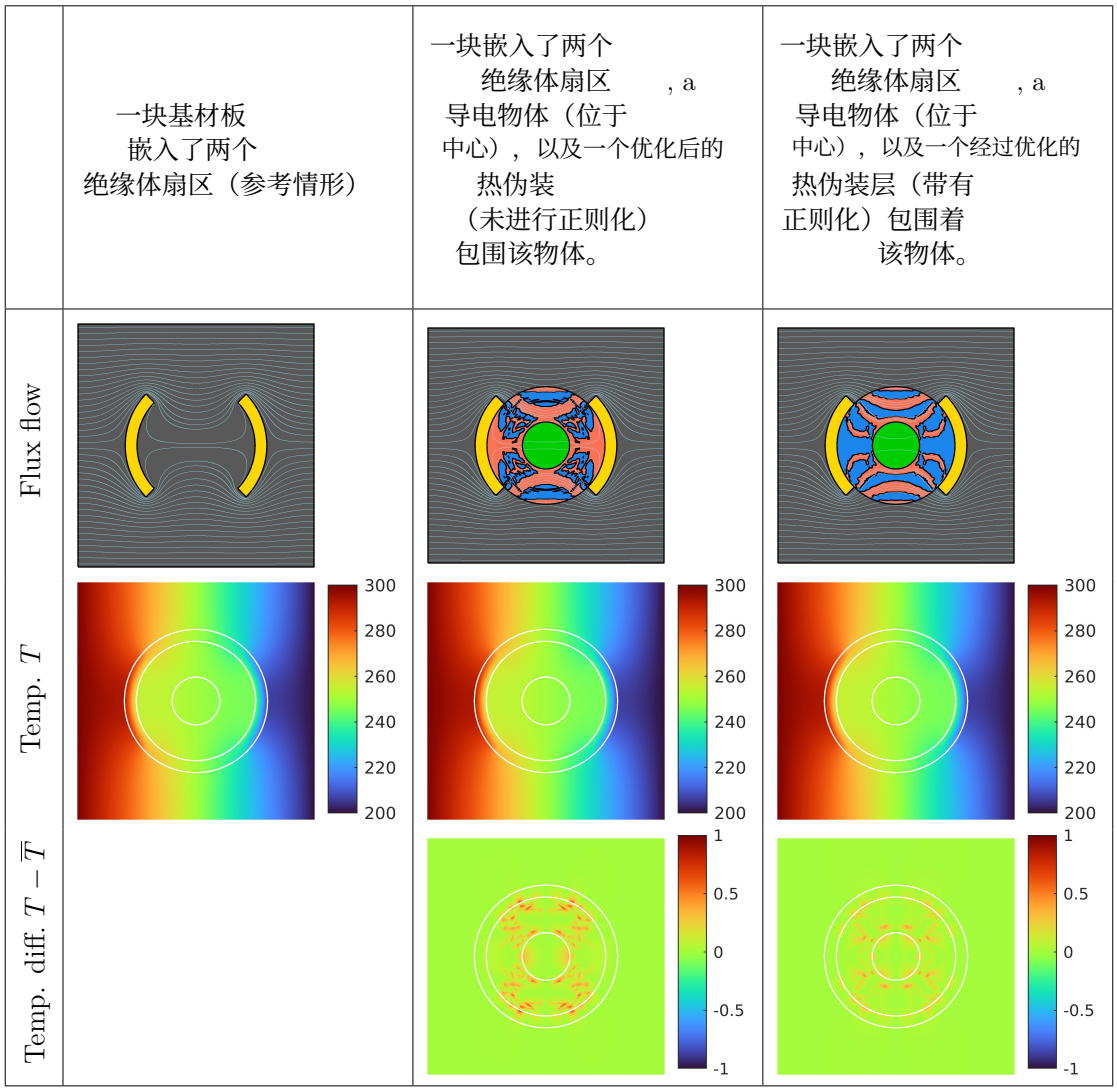


图24：对于热伪装问题，（左列）嵌入两个绝热材料扇区的基材板的热流流动和温度分布（参考情况）；（中列）嵌入两个绝热材料扇区、一个导电物体（位于中心）以及环绕该物体的优化热伪装（未进行正则化）的基材板（样本 I）；（右列）嵌入两个绝热材料扇区、一个导电物体（位于中心）以及环绕该物体的优化热伪装（进行了正则化）的基材板（样本 I，集合 C）。图中显示了温度分布和热通量分布。热伪装降低了 $\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{design}} \cup \Omega_{\text{out}}$ 中的温度扰动。

并在优化过程中产生振荡。这会导致优化过早停止，或使其行为不稳定。

- 解决较小带宽所引起振荡的一种方法是细化求解网格。然而，细化程度也受相关计算成本的限制。因此，需要权衡精度、稳定性和计算成本，以确定求解网格及近似海维赛德函数的带宽。不过，对于基准问题，我们建立了给定支撑带宽下所需网格尺寸的经验下界，以供估算。

- 鉴于给定设计空间内解的唯一性，所提出的优化过程无论初始拓扑如何，都能成功生成接近解析最优拓扑结构的拓扑。目标函数的取值与最优值的偏差也在 1% 以内。

在热斗篷问题中，我们对环形热隐身斗篷的拓扑进行了优化。我们还探讨了两种正则化（蒂霍诺夫正则化和体积正则化）及其组合，以生成更平滑、更实用的优化拓扑。最后，我们还考察了当前方法应用于热隐身斗篷其他几何形状时的有效性。结果表明，

- 该问题不是凸问题，且可能因初始拓扑和设计变量数量不同而得到不同的优化拓扑。若干优化拓扑接近一种已知的解析解——具有圆形界面的双层隐身斗篷。所有情况下，目标函数值均达到 $10^{-9} - 10^{-10}$量级。

- 在优化过程中加入正则化项，可以生成更平滑、复杂度更低的拓扑结构，但目标函数值会略有折衷。

- 参数 χ 和 ρ的取值分别是蒂霍诺夫项和体积项的权重，很难事先预测。通常需要通过试错法，在拓扑结构的复杂度与隐身目标的实现程度之间权衡后确定。

- 所提方法能够同样有效地处理不同的几何形状。

在最后一个示例中，我们优化了一种热伪装，使其模拟参考场景的温度特征。与热斗篷问题类似，我们利用正则化生成更平滑、更实用的设计。结果同样令人满意。

所提方法可推广至适用于具有不同几何形状的任意热操控器。此外，考虑到热流操控问题通常并非只有唯一解，该方法能够基于变换热学、散射抵消法等解析方法，为已开发的热操控器找到其他可能的拓扑结构。此外，我们常常需要处理数量较多的设计变量，因此，基于梯度的优化（采用伴随方法求取灵敏度）比其他无梯度优化过程更快。然而，该方法目前尚不具备进行几何约束优化的能力。因此，未来可扩展该方法，使其能够进行几何约束优化。此外，还可将该优化问题扩展至热磁、热声、热电等多物理场问题。另一方面，可利用边值问题的代理模型、加速技术以及 NURBS 超曲面改进该方法，以减少计算时间 [62, 63]。

附录

A. 环形环问题的解析解

边值问题（方程（58））的解析解如下：

$$T_a(r) = c_a + d_a \log(r), \tag{67a}$$
$$T_b(r) = c_b + d_b \log(r), \tag{67b}$$

其中系数 c_a、d_a、c_b、d_b 由以下代数方程组得到，该方程组源于满足 $r = R_a$、$r = R_b$ 和 $r = R_L$的边界条件（方程（58））：

$$\begin{bmatrix} 1 & \log(R_a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \log(R_b) \\ 1 & \log(R_L) & -1 & -\log(R_L) \\ 0 & \kappa_a & 0 & -\kappa_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ d_a \\ c_b \\ d_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a \\ T_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{68}$$

可写为:

$$
\begin{aligned}
c_a &= -\frac{-\kappa_b T_b \log(R_a) - \kappa_a T_a \log(R_I) + \kappa_b T_a \log(R_I) + \kappa_a T_a \log(R_b)}{\kappa_b \log(R_a) + \kappa_a \log(R_I) - \kappa_b \log(R_I) - \kappa_a \log(R_b)}, \\
d_a &= \frac{\kappa_b (T_a - T_b)}{\kappa_b \log(R_a) + \kappa_a \log(R_I) - \kappa_b \log(R_I) - \kappa_a \log(R_b)}, \\
c_b &= -\frac{\kappa_b T_b \log(R_a) + \kappa_a T_b \log(R_I) - k_b T_b \log(R_I) - \kappa_a T_a \log(R_b)}{-\kappa_b \log(R_a) - \kappa_a \log(R_I) + \kappa_b \log(R_I) + \kappa_a \log(R_b)}, \\
d_b &= \frac{\kappa_a (T_a - T_b)}{\kappa_b \log(R_a) + \kappa_a \log(R_I) - \kappa_b \log(R_I) - \kappa_a \log(R_b)}.
\end{aligned} \tag{69}
$$

伴随系统（方程（60））可化简为以下两个常微分方程,

$$
\begin{aligned}
P_a^{''}(r) + \frac{1}{r} P_a^{'}(r) &= \frac{-2}{\kappa_a}(c_a + d_a \log(r)), \\
P_b^{''}(r) + \frac{1}{r} P_b^{'}(r) &= \frac{-2}{\kappa_b}(c_b + d_b \log(r)),
\end{aligned} \tag{70}
$$

其解的形式为,

$$
\begin{aligned}
P_a(r) &= C_1 \log(r) + D_1 - \frac{(c_a - d_a) r^2}{2\kappa_a} + \frac{d_a r^2 \log(r)}{2\kappa_a}, \\
P_b(r) &= C_2 \log(r) + D_2 - \frac{(c_b - d_b) r^2}{2\kappa_b} + \frac{d_b r^2 \log(r)}{2\kappa_b},
\end{aligned} \tag{71}
$$

这些系数 C_1、D_1、C_2、D_2 通过满足方程（60）给出的边界条件求得，即由以下方程组求得:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & \log(R_a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \log(R_b) \\ 1 & \log(R_L) & -1 & -\log(R_L) \\ 0 & \kappa_a & 0 & -\kappa_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ D_1 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{R_a^2 (c_a - d_a) + R_a^2 d_a \log(R_a)}{2\kappa_a} \\ \dfrac{R_b^2 (c_b - d_b) + R_b^2 d_b \log(R_b)}{2\kappa_b} \\ \dfrac{R_L^2}{2}\left(\dfrac{c_a - d_a}{\kappa_a} - \dfrac{c_b - d_b}{\kappa_b}\right) + \dfrac{R_L^2 \log(R_L)}{2}\left(\dfrac{d_a}{\kappa_a} - \dfrac{d_b}{\kappa_b}\right) \\ \dfrac{R_L^2}{2}(2c_a - 2c_b - d_a + d_b) + R_L^2 \log(R_L)(d_a - d_b) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{72}
$$

参考文献

[1] S. Narayana，Y. Sato，通过设计热材料操控热通量，Physical Review Letters 108（2012）214303。[2] S. Guenneau，C. Amra，D. Veynante，变换热力学：隐身与热通量聚集，Optics Express 20（2012）8207–8218。[3] R. Schittny，M. Kadic，S. Guenneau，M. Wegener，变换热力学实验：塑造热流，Physical Review Letters 110（2013年）195901。[4] T. Han，X. Bai，D. Gao，J. T. L. Thong，B. Li，C.-W. Qiu，双层热隐身斗篷的实验演示，Physical Review Letters 112（2014年）054302。[5] T. Han，X. Bai，J. T. L. Thong，B. Li，C.-W. Qiu，全面控制和操控热特征：隐身、伪装与热超材料，Advanced Materials 26（2014年）1731–1734。[6] S. R. Sklan，X. Bai，B. Li，X. Zhang，通过瞬态效应检测热隐身斗篷，Scientific Reports 6（2016）32915。[7] J. Li，Y. Li，T. Li，W. Wang，L. Li，C.-W. Qiu，双极热超器件，Physical Review Applied 11（2019年）044021。[8] G. Fujii，Y. Akimoto，通过浸入边界水平集方法结合协方差矩阵自适应进化策略实现拓扑优化的热地毯隐身斗篷，International Journal of Heat and Mass Transfer 137（2019年）1312–1322。[9] X. Shen，C. Jiang，Y. Li，J. Huang，用于高效导热汇聚传输的热超材料，Applied Physics Letters 109（2016）201906。[10] Y.-G. Peng，Y. Li，P.-C. Cao，X.-F. Zhu，C.-W. Qiu，用于宽角度热伪装的3D打印超材料头盔，Advanced Functional Materials 30（2020年）2002061。[11] G. Fujii，Y. Akimoto，M. Takahashi，通过协方差矩阵自适应进化策略探索热隐身斗篷的最优拓扑，Applied Physics Letters 112（2018）061108。

[12] G. Fujii、Y. Akimoto，通过拓扑优化实现热传导中聚热器的隐身，《International Journal of Heat and Mass Transfer》159（2020年）120082。[13] G. Fujii、Y. Akimoto，优化操控热通量和直流电的双功能隐形斗篷的结构拓扑，《Applied Physics Letters》115（2019年）174101。[14] C. Jansari、S. P. Bordas、E. Atroshchenko，通过等几何形状优化设计基于超材料的热操控器，《International Journal of Heat and Mass Transfer》196（2022年）123201。[15] O. Sigmund、K. Maute，拓扑优化方法：比较综述，《结构与多学科优化》48（2013年）1031–1055。[16] J. A. Sethian、A. Wiegmann，通过水平集和浸入界面方法进行结构边界设计，《Journal of computational physics》163（2000年）489–528。[17] M. Y. Wang、X. Wang、D. Guo，一种用于结构拓扑优化的水平集方法，《Computer methods in applied mechanics and engineering》192（2003年）227–246。[18] G. Allaire、F. Jouve、A.-M. Toader，利用灵敏度分析和水平集方法进行结构优化，《Journal of computational physics》194（2004年）363–393。[19] N. P. van Dijk、K. Maute、M. Langelaar、F. van Keulen，结构拓扑优化的水平集方法：综述，《结构与多学科优化》48（2013年）437–472。[20] D. J. Munk、G. A. Vio、G. P. Steven，使用进化算法的拓扑与形状优化方法：综述，《结构与多学科优化》52（2015年）613–631。[21] G. I. N. Rozvany，结构拓扑优化既有方法的批判性综述，《结构与多学科优化》37（2009年）217–237。[22] J. D. Deaton、R. V. Grandhi，结构与多学科连续体拓扑优化综述：2000年以后，《结构与多学科优化》49（2014年）1–38。

[23] S. Osher、J. A. Sethian，以曲率相关速度传播的前沿：基于Hamilton–Jacobi公式的算法，《Journal of computational physics》79（1988年）12–49。[24]R. Haber、M. Bendsoe，问题表述、求解流程与几何建模——可变拓扑优化中的关键问题，载于：第七届AIAA/USAF/NASA/ISSMO多学科分析与优化研讨会，第4948页。[25] M. De Ruiter、F. Van Keulen，拓扑优化：利用拓扑函数描述处理材料分布问题，载于：《材料、复合材料及复合结构的计算技术》（鲁汶，2000年9月6日至8日），第111–119页。[26] S. J. Osher、F. Santosa，涉及几何与约束的优化问题的水平集方法：I. 双密度非均匀鼓的频率，《Journal of Computational Physics》171（2001年）272–288。[27] G. Allaire、F. Jouve、A.-M. Toader，一种形状优化的水平集方法，《数学报告》334（2002年）1125–1130。[28] T. J. Hughes、J. A. Cottrell、Y. Bazilevs，等几何分析：计算机辅助设计、有限元、非均匀有理B样条、精确几何与网格细化，《Computer methods in applied mechanics and engineering》194（2005年）4135–4195。[29] E. Atroshchenko、S. Tomar、G. Xu、S. P. Bordas，弱化等几何分析中几何与仿真之间的紧密耦合：从次几何与超几何分析到几何无关场近似（GIFT），《国际工程数值方法杂志》114（2018年）1131–1159。[30] C. Jansari、J. Videla、S. Natarajan、S. P. Bordas、E. Atroshchenko，用于二维时谐声学的自适应富集几何无关场近似，《计算机与结构》263（2022年）106728。[31] J. Nocedal、S. J. Wright，《数值优化》，施普林格运筹学与金融工程丛书，施普林格，纽约，第2版，2006年。[32] R. Duddu、S. Bordas、D. Chopp、B. Moran，一种结合扩展有限元与水平集方法的生物膜生长模拟方法，《国际工程数值方法杂志》74（2008年）848–870。

[33] Y. Wang, Z. Wang, Z. Xia, L. Hien Poh，基于等几何分析的结构设计优化：全面综述，《Computer Modeling in Engineering & Sciences》117（2018）455–507。[34] J. Gao, M. Xiao, Y. Zhang, L. Gao，等几何拓扑优化全面综述：方法、应用与展望，《中国机械工程学报》33（2020）87。[35] F. Auricchio, L. B. Da Veiga, T. Hughes, A. Reali, G. Sangalli，等几何配点法，《应用科学中的数学模型与方法》20（2010）2075–2107。[36] R. N. Simpson, S. P. Bordas, J. Trevelyan, T. Rabczuk，用于弹性静力分析的二维等几何边界元法，《Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering》209（2012）87–100。[37] R. N. Simpson, S. P. Bordas, H. Lian, J. Trevelyan，用于弹性静力分析的等几何边界元法：二维实现要点，《Computers & Structures》118（2013）2–12。专刊：英国工程计算力学协会。[38] H. Lian, P. Kerfriden, S. P. Bordas，二维线弹性中用于基于梯度的形状优化的正则化等几何边界元方法的实现，《国际工程数值方法杂志》106（2016）972–1017。[39] Y. Wang, D. J. Benson，直接基于 CAD 的形状优化：采用 T 样条的等几何边界元方法，《Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering》317（2017）1–41。[40] Y. Wang, D. J. Benson，基于参数化 LSM 的结构拓扑优化的等几何分析，《计算力学》57（2016）19–35。[41] B. Barthelemy, R. T. Haftka，形状灵敏度计算半解析法的精度分析，《结构与机器力学》18（1990）407–432。[42] G. Allaire, F. de Gournay, F. Jouve, A.-M. Toader，利用水平集方法进行拓扑灵敏度与形状灵敏度驱动的结构优化，《控制与控制论》34（2005）59–80。

[43] M. Burger, S. J. Osher，逆问题与最优设计中的水平集方法综述，《欧洲应用数学杂志》16（2005）263–301。[44] J. A. Sethian，水平集方法与快速行进法：计算几何、流体力学、计算机视觉和材料科学中的演化界面，第3卷，剑桥大学出版社，1999。[45] J. A. Sethian，用于推进前沿的水平集方法与快速行进法：理论发展、实现与应用，《Journal of Computational Physics》169（2001）503–555。[46] E. Haber，一种用于优化形状设计问题中特征值的多层水平集方法，《Journal of Computational Physics》198（2004）518–534。[47] Z. Luo, L. Tong, M. Y. Wang, S. Wang，采用参数化水平集方法的柔顺机构形状与拓扑优化，《Journal of Computational Physics》227（2007）680–705。[48] K. Maute, S. Kreissl, D. Makhija, R. Yang，纳米复合材料中的热传导拓扑优化，载于：第九届世界结构与多学科优化大会，日本静冈。[49] J. Norato, R. Haber, D. Tortorelli, M. P. Bendsøe，用于形状优化的几何投影方法，《国际工程数值方法杂志》60（2004）2289–2312。[50] V. P. Nguyen, P. Kerfriden, M. Brino, S. P. Bordas, E. Bonisoli，用于二维和三维 NURBS 曲面片耦合的Nitsche方法，《计算力学》（2014）。[51] Q. Hu, F. Chouly, P. Hu, G. Cheng, S. P. Bordas，等几何分析中的斜对称Nitsche公式：Dirichlet条件与对称条件、曲面片耦合及无摩擦接触，《Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering》341（2018）188–220。[52] T.-P. Fries, T. Belytschko，扩展/广义有限元方法：方法概述及其应用，《国际工程数值方法杂志》84（2010）253–304。[53] M. Duprez, A. Lozinski，ϕ-有限元：定义在水平集区域上的有限元方法，《SIAM数值分析杂志》58（2020）1008–1028。

[54] S. Bordas, M. Duflot, P. Le，扩展有限元的一个简单误差估计器，《Communications in Numerical Methods in Engineering》24 (2008) 961–971。[55] S. Bordas, M. Duflot，扩展有限元的导数恢复与后验误差估计，《Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering》196 (2007) 3381–3399。[56] M. Duflot, S. Bordas，通过扩展全局恢复对扩展有限元进行后验误差估计，《国际工程数值方法杂志》76 (2008) 1123–1138。[57] C. Jansari, S. Natarajan, L. Beex, K. Kannan，适用于有限弹性弱不连续性的自适应平滑稳定扩展有限元方法，《European Journal of Mechanics - A/Solids》78 (2019) 103824。[58] M. Y. Wang, X. Wang, D. Guo，结构拓扑优化的水平集方法，《Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering》192 (2003) 227–246。[59] Z. Luo, L. Tong, M. Y. Wang, S. Wang，采用参数化水平集方法对柔顺机构进行形状与拓扑优化，《Journal of Computational Physics》227 (2007) 680–705。[60] A. N. Tikhonov, A. Goncharsky, V. Stepanov, A. G. Yagola，不适定问题的数值求解方法，第328卷，Springer Science & Business Media，1995。[61] F. Chen, D. Yuan Lei，利用易于制作的热超材料实现极端热通量集中，《Scientific Reports》(2015)。[62] M. Montemurro, K. Refai，基于非均匀有理B样条超曲面的热传导问题拓扑优化方法，《Symmetry》13 (2021)。[63] G. Costa, M. Montemurro, J. Pailh`es，用于三维拓扑优化问题的NURBS 超曲面，《Mechanics of Advanced Materials and Structures》28 (2021) 665–684。