arXiv:2303.03559v1 [math.NT] 7 Mar 2023

关于 Kaneko-Tsumura 的 λ 函数值的显式关系

Kyosuke Nishibiro

摘要

~最近，Kaneko 和 Tsumura 引入了多重 T值、另一类多重欧拉数，以及相关的 Arakawa-Kaneko 型ζ函数。研究表明，它们各自都满足与多重ζ值、多重伯努利数及相关 Arakawa-Kaneko 型ζ函数类似的公式。本文给出了 Kaneko-Tsumura λ 函数在正整数处取值的一些显式关系，包括一种对偶型关系。

1 引言

首先，我们回顾一些记号。对于指标 $\Bbbk = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 1}$，其权和深度定义为

$$\mathrm{wt}(\Bbbk) = k_1 + \cdots + k_r, \quad \mathrm{dep}(\Bbbk) = r.$$

可容许指标是带有 $k_r \geq 2$ 的指标，不可容许指标则是带有 $k_r = 1$的指标。对于可容许指标 $\Bbbk$，我们设 $\Bbbk_- = (k_1, \ldots, k_r - 1)$。此外，对于 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$和 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们设 $\{j\}_l = (\underbrace{j\ j\ \ldots\ j}_{l},,,\ )$.

若 $l = 0$，我们将 $\{j\}_0$ 视为空指标 ϕ。

在[4], Kaneko 和 Tsumura 引入了多重 T-值

$$T(k_1, \ldots, k_r) = 2^r \sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r \\ m_j \equiv j \bmod 2}} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \qquad ((k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 1}, k_r \geq 2).$$

多重 T值被视为多重ζ值的二级类比物

$$\zeta(k_1 \ldots, k_r) = \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}.$$

此外，多重 T值的一种记号被视为 Hoffman 多重 t值的“shuffle对应物”

$$t(k_1, \ldots, k_r) = 2^r \sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r \\ m_j \equiv 1 \bmod 2}} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}.$$

对于每个值，已知由 $\mathbb{Q}$ 上的每个值张成的向量空间都具有有趣的性质（详情请参见 [1,3,4]）。另一方面，我们对它们仍知之甚少，其中包括关于每个向量空间的维数猜想。因此，寻找这些值之间的关系十分重要。一种方法是考察如下定义的 Arakawa-Kaneko型ζ函数：

$$\xi(k_1, \ldots, k_r; s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{\mathrm{Li}(k_1, \ldots, k_r; 1 - e^{-t})}{e^t - 1} dt \ (\mathrm{Re}(s) > 0) \tag{1}$$

and

$$\psi(k_1, \ldots, k_r; s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{\mathrm{A}(k_1, \ldots, k_r; \tanh(t/2))}{\sinh t} dt \ (\mathrm{Re}(s) > 0) \tag{2}$$

分别。这里，

$$\mathrm{Li}(k_1,\dots,k_r;z)=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\ (|z|<1)$$

是多重对数函数，而

$$\mathrm{A}(k_1,\dots,k_r;z)=2^r\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r\\ m_j\equiv j \bmod 2}}\frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\ (|z|<1)$$

是二级多重对数函数。注意，

$$\mathrm{Li}(1;z)=-\log(1-z),\quad \mathrm{A}(1;z)=2\tanh^{-1}z,$$

and

$$\mathrm{Li}(1;1-e^{-t})=t,\quad \mathrm{A}(1;\tanh(t/2))=t$$

成立。特别地，我们有

$$\xi(1;s)=s\zeta(s+1),\quad \psi(1;s)=(1-2^{-s})\zeta(s).$$

众所周知，ξ 和 ψ 函数可以解析延拓至 $\mathbb{C}$，且 ξ 和 ψ 函数在正整数处的取值分别与多重ζ值和多重 T值有关（详情见[1,4,5]）。

~最近，Kaneko 和 Tsumura 引入了多重 T 值及相关的 ζ 函数

$$\widetilde{T}(k_1,\dots,k_r)=2^r\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r\\ m_j\equiv j \bmod 2}}\frac{(-1)^{(m_r-r)/2}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

and

$$\lambda(k_1,\dots,k_r;s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{\mathscr{A}(k_1,\dots,k_r;\tanh(t/2+\pi i/4))}{\cosh t}dt \tag{3}$$

在 [6]中。这里，对于 $\Bbbk_r=(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}$, $\mathscr{A}(k_1,\dots,k_r;z)$是由下式定义的四级多重对数函数

$$\mathscr{A}(k_1,\dots,k_{r-1},k_r;z)=\begin{cases}\int_i^z\frac{1}{u}\mathscr{A}(k_1,\dots,k_{r-1},k_r-1;u)\,du & (\Bbbk_r:\text{admissible}),\\ \int_i^z\frac{2}{1-u^2}\mathscr{A}(k_1,\dots,k_{r-1};u)\,du & (\Bbbk_r:\text{non-admissible})\end{cases}$$

（由此，我们可以证明 $\mathscr{A}(\Bbbk_r;z)$ 满足洗牌积关系）。特别地，我们有

$$\mathscr{A}(1;z)=\mathrm{A}(1;z)-\frac{\pi i}{2}=\tanh^{-1}\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi i}{4}\right). \tag{4}$$

~注意，多重 T 值与某些多重 L 值相关。令 χ_4 为~导数为四的狄利克雷特征。那么，多重 T 值可以用多重 L 值表示为

$$\widetilde{T}(k_1,\dots,k_r)=2^rL_{\text{ш}}(k_1,\dots,k_r;\chi_4,\dots,\chi_4).$$

~（关于多重 L 值的详情，请参见[2]）。因此，多重 T值也称为四级多重 L值。在 [6], 中，展示了 λ 函数与多重 T值之间的一些关系。本文将展示它们之间的其他关系。第 2 节给出 λ 函数取值的一些显式公式。第 3 节给出 λ 函数的对偶型关系。

2 Kaneko-Tsumura 的 λ 函数值的显式公式

本节将给出 λ 函数取值和多重 T值的一些显式公式。首先，我们证明 λ 函数的取值可以表示为多重 T值。对于 ξ 函数和 ψ函数，以下定理已为人所知。注意，对于空指标 ϕ，我们将 $\mathrm{wt}(\phi) = 0$ 和常数 1 视为权为 0 的值。

定理 2.1 ([4,8])。对于 $\Bbbk = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^r$，有

$$\xi(\Bbbk; s) = \sum_{\Bbbk', j \geq 0} C_{\Bbbk}(\Bbbk'; j) \binom{s+j-1}{j} \zeta(\Bbbk', s+j),$$
$$\psi(\Bbbk; s) = \sum_{\Bbbk', j \geq 0} C'_{\Bbbk}(\Bbbk'; j) \binom{s+j-1}{j} T(\Bbbk', s+j).$$

这里，求和遍历所有满足 $\mathrm{wt}(\Bbbk') + j \leq \mathrm{wt}(\Bbbk)$ 的指标 $\Bbbk'$ 和 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$；而 $C_{\Bbbk}(\Bbbk'; j)$ $C'_{\Bbbk}(\Bbbk'; j)$ 分别是权为 $\mathrm{wt}(\Bbbk) - \mathrm{wt}(\Bbbk') - j$ 的多重ζ值和多重 T 值的 $\mathbb{Q}$-线性组合。

对于 λ 函数和多重 T 值，也有类似的定理。

定理 2.2。对于 $\Bbbk = (k_1, \dots, k_r) \in (\mathbb{Z}_{\geq 1})^r$，有

$$\lambda(\Bbbk; s) = i^{\mathrm{wt}(\Bbbk) - \mathrm{dep}(\Bbbk)} \sum_{\Bbbk', j \geq 0} \widetilde{C}_{\Bbbk}(\Bbbk'; j) \binom{s+j-1}{j} \widetilde{T}(\Bbbk', s+j).$$

这里，求和遍历所有满足 $\mathrm{wt}(\Bbbk') + j \leq \mathrm{wt}(\Bbbk)$ 的指标 $\Bbbk'$ 和 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$；而 $C_{\Bbbk}(\Bbbk'; j)$ 是权为 $\mathrm{wt}(\Bbbk) - \mathrm{wt}(\Bbbk') - j$ 的多重 T 值的 $\mathbb{Q}$-线性组合。

为证明定理 2.2，我们需要以下引理。

引理 2.3。[6, 第24] 对于 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，有

$$\mathscr{A}(\{1\}_r; z) = \frac{1}{r!} (\mathscr{A}(1; z))^r.$$

引理 2.4。对于 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$、$\Bbbk = (k_1, \dots, k_{r-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ 以及满足 $\mathrm{Re}(s) > 1$的 $s \in \mathbb{C}$，有

$$i^{r-1} \widetilde{T}(\Bbbk, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{\mathrm{A}(\Bbbk; ie^{-t})}{\cosh t} dt.$$

证明。根据多重 $\widetilde{T}$ 值和 Γ $\int_0^\infty t^{s-1} e^{-nt} = \frac{1}{n^s}$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}(\Bbbk_{r-1}, s) &= 2^r \sum_{\substack{0 < m_1 < \cdots < m_{r-1} \\ m_j \equiv j \bmod 2}} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_{r-1}^{k_{r-1}}} \sum_{\substack{m_r = m_{r-1}+1 \\ m_r \equiv r \bmod 2}}^{\infty} \frac{(-1)^{(m_r - r)/2}}{m_r^s} \\
&= \frac{2^r}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \sum_{\substack{0 < m_1 < \cdots < m_{r-1} \\ m_j \equiv j \bmod 2}} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_{r-1}^{k_{r-1}}} \sum_{\substack{m_r = m_{r-1}+1 \\ m_r \equiv r \bmod 2}}^{\infty} (-1)^{(m_r - r)/2} e^{-m_r t} dt \\
&= \frac{2^r i^{-r}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \sum_{\substack{0 < m_1 < \cdots < m_{r-1} \\ m_j \equiv j \bmod 2}} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_{r-1}^{k_{r-1}}} \sum_{\substack{m_r = m_{r-1}+1 \\ m_r \equiv r \bmod 2}}^{\infty} (ie^{-t})^{m_r} dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{2^{r-1}i^{-r+1}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_{r-1} \\ m_j \equiv j \bmod 2}} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_{r-1}^{k_{r-1}}} \frac{2(ie^{-t})^{m_{r-1}}}{e^t + e^{-t}} dt$$

$$= \frac{i^{-r+1}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{\mathrm{A}(\Bbbk; ie^{-t})}{\cosh t} dt.$$

因此，我们得到引理 2.4。 □

引理 2.5. 对于 $\Bbbk = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^r$，我们有

$$\mathscr{A}\left(\Bbbk; \frac{1+z}{1-z}\right) = \sum_{\Bbbk', j \geq 0} i^{\mathrm{wt}(\Bbbk)-\mathrm{dep}(\Bbbk)-\mathrm{dep}(\Bbbk')} \widetilde{C}_{\Bbbk}(\Bbbk'; j) \mathscr{A}\left(\{1\}_j; \frac{1+z}{1-z}\right) \mathrm{A}\left(\Bbbk'; z\right).$$

~这里的求和遍历所有满足条件的指标 $\Bbbk'$ 和 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，其中 $\mathrm{wt}(\Bbbk') + j \leq \mathrm{wt}(\Bbbk)$，并且 $C_{\Bbbk}(\Bbbk'; j)$ 与定理 2.2相同。此外，我们将 $\mathscr{A}(\phi; z) = \mathrm{A}(\phi; z) = 1$。

证明。 我们对 wt(𝕜) 使用归纳法证明该引理。情形 𝕜 =(1) 显然。假设该引理对权小于 wt(𝕜) 的指标成立。我们先假设 𝕜 是可容许的。记

$$\mathscr{A}\left(\Bbbk_-; \frac{1+z}{1-z}\right) = \sum_{(\Bbbk_-)', j \geq 0} i^{\mathrm{wt}(\Bbbk_-)-\mathrm{dep}(\Bbbk_-)-\mathrm{dep}((\Bbbk_-)')} \widetilde{C}_{\Bbbk_-}((\Bbbk_-)'; j) \mathscr{A}\left(\{1\}_j; \frac{1+z}{1-z}\right) \mathrm{A}((\Bbbk_-)'; z).$$

于是，由分部积分可得

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\left(\Bbbk; \frac{1+z}{1-z}\right) &= \int_i^z \frac{2}{1-u^2} \mathscr{A}\left(\Bbbk_-; \frac{1+u}{1-u}\right) du \\
&= \sum_{(\Bbbk_-)', j \geq 0} i^{\mathrm{wt}(\Bbbk_-)-\mathrm{dep}(\Bbbk_-)-\mathrm{dep}((\Bbbk_-)')} \widetilde{C}_{\Bbbk_-}((\Bbbk_-)'; j) \\
&\times \left(\sum_{l=0}^{j} \mathscr{A}\left(\{1\}_{j-l}; \frac{1+z}{1-z}\right) \mathrm{A}((\Bbbk_-)', l+1; z) - i^{\mathrm{dep}((\Bbbk_-)', j+1)} \widetilde{T}((\Bbbk_-)', j+1) \right).
\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{wt}(\Bbbk_-) - \mathrm{dep}(\Bbbk_-) - \mathrm{dep}((\Bbbk_-)') = \mathrm{wt}(\Bbbk) - \mathrm{dep}(\Bbbk) - \mathrm{dep}((\Bbbk_-)', l+1)$，引理 2.5 成立。假设 𝕜 是不可容许的。记 $\Bbbk_r = \Bbbk$ 和 $\Bbbk_{r-1} = (k_1, \ldots, k_{r-1})$。此时，由多重对数的正则化及引理 2.3 可得

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\left(\Bbbk_r; \frac{1+z}{1-z}\right) &= \mathscr{A}\left(\Bbbk_{r-1}; \frac{1+z}{1-z}\right) \mathscr{A}\left(1; \frac{1+z}{1-z}\right) \\
&- \sum_{l=1}^{r-1} \sum_{\substack{k_{l,1}+k_{l,2}=k_l+1 \\ k_{l,1}, k_{l,2} \geq 1, k_{1,1} \geq 2}} \mathscr{A}\left(k_1, \ldots, k_{l-1}, k_{l,1}, k_{l,2}, k_{l+1}, \ldots, k_{r-1}; \frac{1+z}{1-z}\right).
\end{aligned}$$

~令 $\Bbbk_{r-1,\ l} = (k_1, \ldots, k_{l,\ 1}, k_{l,\ 2}, \ldots, k_{r-1})$。由归纳法假设，得

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\left(\Bbbk_r; \frac{1+z}{1-z}\right) &= \sum_{(\Bbbk_{r-1})', j \geq 0} i^{\mathrm{wt}(\Bbbk_{r-1})-\mathrm{dep}(\Bbbk_{r-1})-\mathrm{dep}((\Bbbk_{r-1})')} \widetilde{C}_{\Bbbk_{r-1}}((\Bbbk_{r-1})'; j)(j+1) \\
&\times \mathscr{A}\left(\{1\}_{j+1}; \frac{1+z}{1-z}\right) \mathrm{A}((\Bbbk_{r-1})'; z) \\
&- \sum_{l=1}^{r-1} \sum_{\substack{k_{l,1}+k_{l,2}=k_l+1 \\ k_{l,1}, k_{l,2} \geq 1, k_{1,1} \geq 2}} \sum_{(\widetilde{\Bbbk}_{r-1,i})', j_1 \geq 0} i^{\mathrm{wt}(\widetilde{\Bbbk}_{r-1,l})-\mathrm{dep}(\widetilde{\Bbbk}_{r-1,l})-\mathrm{dep}((\widetilde{\Bbbk}_{r-1,l})')} \widetilde{C}_{\widetilde{\Bbbk}_{r-1,l}}((\widetilde{\Bbbk}_{r-1,l})'; j_1)
\end{aligned}$$

$$\times \mathscr{A}\left(\{1\}_{j_1}; \frac{1+z}{1-z}\right) \mathrm{A}\left((\widetilde{\Bbbk}'_{r-1,l}); z\right).$$

由于

$$\begin{aligned}\mathrm{wt}(\Bbbk_{r-1}) - \mathrm{dep}(\Bbbk_{r-1}) - \mathrm{dep}((\Bbbk_{r-1})') &= \mathrm{wt}(\Bbbk_r) - \mathrm{dep}(\Bbbk_r) - \mathrm{dep}((\Bbbk_{r-1})'),\\ \mathrm{wt}(\widetilde{\Bbbk}_{r-1,l}) - \mathrm{dep}(\widetilde{\Bbbk}_{r-1,l}) - \mathrm{dep}((\widetilde{\Bbbk}_{r-1,l})') &= \mathrm{wt}(\Bbbk_r) - \mathrm{dep}(\Bbbk_r) - \mathrm{dep}((\widetilde{\Bbbk}_{r-1,l})'),\end{aligned}$$

我们得到引理 2.5。 □

定理 *2.2* 的证明。 我们将 $z = ie^{-t}$ 代入引理 2.5。由（4），可得

$$\mathscr{A}\left(\Bbbk; \tanh^{-1}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi i}{4}\right)\right) = \sum_{\Bbbk', j\geq 0} i^{\mathrm{wt}(\Bbbk)-\mathrm{dep}(\Bbbk)-\mathrm{dep}(\Bbbk')} \widetilde{C}_{\Bbbk}(\Bbbk'; j)\frac{t^j}{j!} \mathrm{A}\left(\Bbbk'; ie^{-t}\right). \tag{5}$$

因此，将（5）代入（3），并应用引理 2.4，即可得到定理2.2。 □

例 2.1。 对于 $\Bbbk = (2)$，直接计算可得

$$\mathscr{A}\left(2; \frac{1+z}{1-z}\right) = \mathscr{A}\left(1; \frac{1+z}{1-z}\right) \mathrm{A}(1; z) + \mathrm{A}(2; z) - i\widetilde{T}(2).$$

因此，我们有

$$\lambda(2; s) = is\widetilde{T}(1, s+1) + i\widetilde{T}(2, s) - i\widetilde{T}(2)\widetilde{T}(s).$$

将 $s = 3$ 代入上述方程，可得

$$\lambda(2; 3) = 3i\widetilde{T}(1, 4) + i\widetilde{T}(2, 3) - i\widetilde{T}(2)\widetilde{T}(3).$$

另一方面，由 [4, 定理 4。3]，可得

$$\lambda(2; 3) = -i\left(3\widetilde{T}(1, 4) + 2\widetilde{T}(2, 3) + \widetilde{T}(3, 2)\right).$$

因此我们得到

$$\widetilde{T}(2)\widetilde{T}(3) = 6\widetilde{T}(1, 4) + 3\widetilde{T}(2, 3) + \widetilde{T}(3, 2)$$

（这也可以通过洗牌积得到）。

此外，对于某些指标，我们可以明确写出 λ 函数的一些取值。对于 ξ 和 λ 函数，以下定理是已知的。

定理 2.6 ([8, 定理 2.15, 2.16])。 **</style}对于，** $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 其中 $j \leq r$ 且 $s \in \mathbb{C}$ 满足 $\mathrm{Re}(s) > 1$，我们有

$$\begin{aligned}\xi(\{1\}_{j-1}, 2, \{1\}_{r-j}; s) &= (-1)^{r-j-1} \sum_{m=r-j}^{r} \binom{m}{r-j}\binom{s+r-m-2}{r-m-1}\zeta(m+2, s+r-m-1)\\ &\quad + \sum_{l=0}^{r-j}(-1)^l \binom{j+l}{l}\binom{s+r-j-l-1}{r-j-l}\zeta(s+r-j-l)\zeta(j+l+1),\\ \psi(\{1\}_{j-1}, 2, \{1\}_{r-j}; s) &= (-1)^{r-j-1} \sum_{m=r-j}^{r} \binom{m}{r-j}\binom{s+r-m-1}{r-m}T(m+1, s+r-m)\\ &\quad + \sum_{l=0}^{r-j}(-1)^l \binom{j+l}{l}\binom{s+r-j-l-1}{r-j-l}\widetilde{T}(s+r-j-l)\widetilde{T}(j+l+1).\end{aligned}$$

为了得到关于 λ 函数的类似关系，我们需要以下引理。

引理 2.7。 对于 m， $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，我们有

$$\begin{aligned}\int_i^z \mathscr{A}(1;u)^m \,\mathrm{A}\left(1;\frac{1+u}{1-u}\right)^n \frac{2du}{1-u^2} &= n!\sum_{l=0}^{m}\frac{m!}{(m-l)!}(-1)^l\mathscr{A}(1;z)^{m-l}\,\mathrm{A}(\{1\}_{n-1},l+2;\frac{1+z}{1-z})\\ &\quad - n!m!(-1)^m i\widetilde{T}(\{1\}_{n-1},m+2).\end{aligned}$$

证明。由于

$$\frac{d}{dz}\,\mathrm{A}\left(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r;\frac{1+z}{1-z}\right)=\begin{cases}\frac{2}{1-z^2}\,\mathrm{A}\left(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r-1;\frac{1+z}{1-z}\right) & (\Bbbk_r:\text{admissible}),\\ -\frac{1}{z}\,\mathrm{A}\left(k_1,\ldots,k_{r-1};\frac{1+z}{1-z}\right) & (\Bbbk_r:\text{non-admissible}),\end{cases}$$

且 $\frac{1+i}{1-i}=i$，我们有

$$\begin{aligned}\int_i^z \mathscr{A}(1;u)^m \,\mathrm{A}\left(1;\frac{1+u}{1-u}\right)^n \frac{2du}{1-u^2} &= n!\int_i^z \mathscr{A}(1;u)^m\,\mathrm{A}\left(\{1\}_n;\frac{1+u}{1-u}\right)\frac{2du}{1-u^2}\\ &= n!\left[\mathscr{A}(1;u)^m\,\mathrm{A}\left(\{1\}_{n-1},2;\frac{1+u}{1-u}\right)\right]_i^z\\ &\quad - n!\int_i^z m\mathscr{A}(1;u)^{m-1}\,\mathrm{A}\left(\{1\}_{n-1},2;\frac{1+u}{1-u}\right)\frac{2du}{1-u^2}\\ &= \cdots\\ &= n!\sum_{l=0}^{m-1}\frac{m!}{(m-l)!}(-1)^l\mathscr{A}(1;z)^{m-l}\,\mathrm{A}(\{1\}_{n-1},l+2;\frac{1+z}{1-z})\\ &\quad + \left[n!m!(-1)^m\,\mathrm{A}\left(\{1\}_{n-1},m+2;\frac{1+u}{1-u}\right)\right]_i^z\\ &= n!\sum_{l=0}^{m}\frac{m!}{(m-l)!}(-1)^l\mathscr{A}(1;z)^{m-l}\,\mathrm{A}(\{1\}_{n-1},l+2;\frac{1+z}{1-z})\\ &\quad - n!m!(-1)^m i\widetilde{T}(\{1\}_{n-1},m+2).\end{aligned}$$

因此，我们得到引理 2.7。 □

命题 2.8。 对于 r， $j\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，其中 $r>j$ 且 $s\in\mathbb{C}$ 满足 $\mathrm{Re}(s)>1$，我们有

$$\begin{aligned}\lambda(\{1\}_{j-1},2,\{1\}_{r-j};s) &= i(-1)^{r-j}\sum_{m=r-j}^{r}\binom{m}{r-j}\binom{s+r-m-1}{r-m}\widetilde{T}(m+1,s+r-m)\\ &\quad - i\sum_{l=0}^{r-j}(-1)^l\binom{j+l}{l}\binom{s+r-j-l-1}{r-j-l}\widetilde{T}(s+r-j-l)\widetilde{T}(j+l+1).\end{aligned}$$

证明。对于任意指标 $\Bbbk_r=(k_1,\ldots,k_r)$，因为

$$\int_{a<u_1<\cdots<u_r<b}\frac{2du_1}{1-u_1^2}\cdots\frac{2du_r}{1-u_r^2}=\frac{1}{r!}\left(\mathscr{A}(1;b)-\mathscr{A}(1;a)\right)^r, \tag{6}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\left(\mathbb{k}_r;z\right)=&\int_{i<t_1<\cdots<t_{k_r}<z}\frac{2dt_1}{1-t_1^2}\underbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}_{k_1-1}\cdots\frac{2dt_{k_{r-1}+1}}{1-t_{k_{r-1}+1}^2}\underbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}_{k_r-1}\\
=&(-1)^r\int_{i<t_1<\cdots<t_{k_r}<\frac{z-1}{z+1}}\frac{dt_1}{t_1}\underbrace{\frac{2dt}{1-t^2}\cdots\frac{2dt}{1-t^2}}_{k_1-1}\cdots\frac{dt_{k_{r-1}+1}}{t_{k_{r-1}+1}}\underbrace{\frac{2dt}{1-t^2}\cdots\frac{2dt}{1-t^2}}_{k_r-1}\\
=&\frac{(-1)^r}{\prod_{l=1}^r(k_l-1)!}\int_{i<t_1<\cdots<t_r<\frac{z-1}{z+1}}\frac{dt_1}{t_1}\left(\mathscr{A}\left(1;t_2\right)-\mathscr{A}\left(1;t_1\right)\right)^{k_1-1}\cdots\\
&\times\frac{dt_r}{t_r}\left(\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)-\mathscr{A}\left(1;t_r\right)\right)^{k_r-1}.
\end{aligned}\tag{7}$$

这里，我们将 $\mathbb{k}_r=(\{1\}_{j-1},2,\{1\}_{r-j})$ 代入上式。直接计算可得

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\left(\mathbb{k}_r;\frac{1+z}{1-z}\right)=&(-1)^r\int_{i<t_1<\cdots<t_r<z}\frac{\mathscr{A}\left(1;t_{j+1}\right)-\mathscr{A}\left(1;t_j\right)}{t_1\cdots t_r}dt_1\cdots dt_r\\
=&(-1)^r\int_{i<t_1<\cdots<t_r<\frac{z-1}{z+1}}\frac{\mathscr{A}\left(1;\frac{1+u_{j+1}}{1-u_{j+1}}\right)-\mathscr{A}\left(1;\frac{1+u_j}{1-u_j}\right)}{\frac{1}{2}(1-u_1^2)\cdots\frac{1}{2}(1-u_r^2)}du_1\cdots du_r\\
=&(-1)^r\int_i^{\frac{z-1}{z+1}}\frac{\mathscr{A}\left(1;u\right)^j}{j!(r-j-1)!}\left(\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)-\mathscr{A}\left(1;u\right)\right)^{r-j-1}\mathscr{A}\left(1;\frac{1+u}{1-u}\right)\frac{2du}{1-u^2}\\
&-(-1)^r\int_i^{\frac{z-1}{z+1}}\frac{\mathscr{A}\left(1;u\right)^{j-1}}{(j-1)!(r-j)!}\left(\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)-\mathscr{A}\left(1;u\right)\right)^{r-j}\mathscr{A}\left(1;\frac{1+u}{1-u}\right)\frac{2du}{1-u^2}\\
=&\sum_{l=0}^{r-j-1}\binom{r-1-j}{l}\frac{(-1)^{r+l}}{(r-j-1)!j!}\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)^{r-1-j-l}\int_i^{\frac{z+1}{z-1}}\mathscr{A}\left(1;u\right)^{j+l}\mathscr{A}\left(1;\frac{1+u}{1-u}\right)\frac{2du}{1-u^2}\\
&-\sum_{l=0}^{r-j}\binom{r-j}{l}\frac{(-1)^{r+l}}{(r-j)!(j-1)!}\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)^{r-j-l}\int_i^{\frac{z+1}{z-1}}\mathscr{A}\left(1;u\right)^{j+l-1}\mathscr{A}\left(1;\frac{1+u}{1-u}\right)\frac{2du}{1-u^2}\\
=&\sum_{l=0}^{r-j}\frac{(-1)^{r+l-1}(j+l)}{(r-j-l)!j!l!}\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)^{r-j-l}\int_i^{\frac{z+1}{z-1}}\mathscr{A}\left(1;u\right)^{j+l-1}\mathscr{A}\left(1;\frac{1+u}{1-u}\right)\frac{2du}{1-u^2}\\
=&\sum_{l=0}^{r-j}\frac{(-1)^{r+l-1}(j+l)}{(r-j-l)!j!l!}\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)^{r-j-l}\int_i^{\frac{z+1}{z-1}}\mathscr{A}\left(1;u\right)^{j+l-1}\mathrm{A}\left(1;\frac{1+u}{1-u}\right)\frac{2du}{1-u^2}\\
&-\frac{\pi i}{2}\sum_{l=0}^{r-j}\frac{(-1)^{r+l-1}(j+l)}{(r-j-l)!j!l!}\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)^{r-j-l}\int_i^{\frac{z+1}{z-1}}\mathscr{A}\left(1;u\right)^{j+l-1}\frac{2du}{1-u^2}\\
=&\sum_{l=0}^{r-j}\sum_{m=0}^{j+l-1}\frac{(-1)^{r+l-1-m}(j+l)!}{(r-j-l)!(j+l-1-m)!j!l!}\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)^{r-1-m}\mathrm{A}(m+2;z)\\
&-i\sum_{l=0}^{r-j}\frac{(-1)^{r+j}(j+l)!}{(r-j-l)!j!l!}\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)^{r-j-l}\widetilde{T}(j+l+1)\\
&-\frac{\pi i}{2}\sum_{l=0}^{r-j}\frac{(-1)^{r+l-1}}{(r-j-l)!j!l!}\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)^{r}.
\end{aligned}$$

由于 $\frac{ie^{-t}-1}{ie^{-t}+1}=$双曲正切$(-\frac{t}{2}+\frac{\pi i}{4})$，我们得到

$$\mathscr{A}\left(\Bbbk_r;\tanh^{-1}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi i}{4}\right)\right)=\sum_{l=0}^{r-j}\sum_{m=0}^{j+l-1}\frac{(-1)^l(j+l)!}{(r-j-l)!(j+l-1-m)!j!l!}t^{r-1-m}\,\mathrm{A}(m+2;ie^{-t})$$
$$-i\sum_{l=0}^{r-j}\frac{(-1)^l(j+l)!}{(r-j-l)!j!l!}t^{r-j-l}\widetilde{T}(j+l+1)-i\widetilde{T}(1)\sum_{l=0}^{r-j}\frac{(-1)^{l+1}}{(r-j-l)!j!l!}t^r$$

and

$$\lambda(\{1\}_{j-1},2,\{1\}_{r-j};s)=i\sum_{l=0}^{r-j}\sum_{m=0}^{j+l-1}\frac{(-1)^l(r-m-1)!(j+l)!}{(r-j-l)!(j+l-m-1)!}\binom{s+r-m-2}{r-m-1}\widetilde{T}(m+2,s+r-m-1)$$
$$-i\sum_{l=0}^{r-j}\frac{(-1)^l(j+l)!}{j!l!}\binom{s+r-j-l-1}{r-j-l}\widetilde{T}(s+r-j-l)\widetilde{T}(j+l+1)$$
$$-i\widetilde{T}(1)\sum_{l=0}^{r-j}\frac{(-1)^{l+1}r!}{(r-j-l)!j!l!}\binom{s+r-1}{r}\widetilde{T}(s+r).$$

对于第一个求和，类似于[8, 定理 2.8]，，我们有

$$\sum_{l=0}^{r-j}\sum_{m=0}^{j+l-1}\frac{(-1)^l(r-m-1)!(j+l)!}{(r-j-l)!(j+l-m-1)!}\binom{s+r-m-2}{r-m-1}\widetilde{T}(m+2,s+r-m-1)$$
$$=\sum_{m=1}^{r}\binom{s+r-m-1}{r-m}\widetilde{T}(m+1,s+r-m)\sum_{l=0}^{r-j}(-1)^l\binom{r-m-1}{r-j-l}\binom{j+l}{j}$$
$$=(-1)^{r-j}\sum_{m=r-j}^{r}\binom{m}{r-j}\binom{s+r-m-1}{r-m}\widetilde{T}(m+1,s+r-m).$$

对于最后一个求和，我们有

$$\sum_{l=0}^{r-j}\frac{(-1)^{l+1}r!}{(r-j-l)!j!l!}\binom{s+r-1}{r}\widetilde{T}(s+r)=-\binom{r}{j}\binom{s+r-1}{r}\widetilde{T}(s+r)\sum_{l=0}^{r-1}(-1)^l\binom{r+j}{l}$$
$$=0.$$

因此，我们得到命题2.8。 □

例 2.2。 对于 $r=2$ 和 $j=1$，我们有

$$\lambda(2,1;s)=-is\widetilde{T}(2,s+1)-2i\widetilde{T}(3,s)-is\widetilde{T}(2)\widetilde{T}(s+1)+2i\widetilde{T}(3)\widetilde{T}(s).$$

我们也可以由定理 2.2得到上述公式。

对于 $r=j$，我们有以下公式。

命题 2.9。 对于 $r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和 $s\in\mathbb{C}$，当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时，有

$$\lambda(\{1\}_{r-1},2;s)=i\binom{s+r-1}{r}\widetilde{T}(1,s+r)+i\sum_{l=0}^{r-1}\binom{s+r-l-2}{r+l-1}\widetilde{T}(l+2,s+r-l-1)-i\widetilde{T}(r+1)\widetilde{T}(s).$$

证明。令 $\Bbbk_r=(\{1\}_{r-1},2)$ 代入（7）中。类似于命题 2.8，有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\left(\Bbbk_r;\frac{1+z}{1-z}\right)&=(-1)^r\int_{i<t_1<\cdots<t_r<\frac{z-1}{z+1}}\frac{\mathscr{A}(1;z)-\mathscr{A}\left(1;\frac{1+u_r}{1-u_r}\right)}{\frac{1}{2}(1-u_1^2)\cdots\frac{1}{2}(1-u_r^2)}du_1\cdots du_r\\&=\frac{(-1)^r}{r!}\left(\mathrm{A}(1;z)-i\widetilde{T}(1)\right)\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)^r+\frac{(-1)^r}{r!}\frac{\pi i}{2}\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)^r\\&\quad-\frac{(-1)^r}{(r-1)!}\sum_{l=0}^{r-1}\frac{(-1)^l(r-1)!}{(r-1-l)!}\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)^{r-1-l}\mathrm{A}(l+2;z)-i\widetilde{T}(r+1)\\&=\frac{(-1)^r}{r!}\mathrm{A}(1;z)\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)^r-i\widetilde{T}(r+1)\\&\quad-\frac{(-1)^r}{(r-1)!}\sum_{l=0}^{r-1}\frac{(-1)^l(r-1)!}{(r-1-l)!}\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)^{r-1-l}\mathrm{A}(l+2;z).\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\mathscr{A}\left(\Bbbk_r;\tanh^{-1}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi i}{4}\right)\right)=\frac{1}{r!}\mathrm{A}(1;ie^{-t})+\sum_{l=0}^{r-1}\frac{1}{(r-l-1)!}t^{r-l-1}\mathrm{A}(l+2;ie^{-t})-i\widetilde{T}(r+1),$$

并且结论由（3）和引理 2.4. □

例 2.3. 对于 $r=1$，我们有

$$\lambda(2;s)=is\widetilde{T}(1,s+1)+i\widetilde{T}(2,s)-i\widetilde{T}(2)\widetilde{T}(s),$$

并且我们得到

$$\lambda(2;2)=2i\widetilde{T}(1,3)+i\widetilde{T}(2,2)-i\widetilde{T}(2)^2.$$

另一方面，由 [6, 定理 4.3]，我们得到

$$\lambda(2;2)=-i\widetilde{T}(2,2)-2i\widetilde{T}(1,3).$$

因此我们有

$$\widetilde{T}(2)^2=4\widetilde{T}(1,3)+2\widetilde{T}(2,2)$$

（这也可以通过洗牌积得到）。

此外，Pallewatta 和 Xu 证明了以下关系。

定理 2.10（[8, 定理2.17]）。对于 k，p 和 $r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，有

$$\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\Bbbk)=k+r-1\\ \mathrm{dep}(\Bbbk)=r}}\xi(\Bbbk;p)=\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\binom{p+r-j-2}{r-j-1}\xi(\{1\}_j,k;p+r-j-1),$$

$$\xi(\{1\}_{r-1},k;p)=\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\Bbbk)=k+j\\ \mathrm{dep}(\Bbbk)=j+1}}(-1)^j\binom{p+r-j-2}{r-j-1}\xi(\Bbbk;p+r-j-1),$$

$$\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\Bbbk)=k+r-1\\ \mathrm{dep}(\Bbbk)=r}}\psi(\Bbbk;p)=\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\binom{p+r-j-2}{r-j-1}\psi(\{1\}_j,k;p+r-j-1),$$

$$\psi(\{1\}_{r-1},k;p)=\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\Bbbk)=k+j\\ \mathrm{dep}(\Bbbk)=j+1}}(-1)^j\binom{p+r-j-2}{r-j-1}\psi(\Bbbk;p+r-j-1).$$

我们对 λ 函数得到了类似的关系。

命题 2.11。 对于 r， $k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 以及 $s\in\mathbb{C}$，若 $\mathrm{Re}(s)>1$，则有

$$\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\Bbbk)=k+r-1\\ \mathrm{dep}(\Bbbk)=r}}\lambda(\Bbbk;s)=\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\binom{s+r-j-2}{r-j-1}\lambda(\{1\}_j,k;s+r-j-1),\tag{8}$$

$$\lambda(\{1\}_{r-1},k;s)=\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\Bbbk)=k+j\\ \mathrm{dep}(\Bbbk)=j+1}}(-1)^j\binom{s+r-j-2}{r-j-1}\lambda(\Bbbk;s+r-j-1).\tag{9}$$

证明。 对于 (8)，由多项式定理及 (6)，可得

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\Bbbk)=k+r-1\\ \mathrm{dep}(\Bbbk)=r}}\mathscr{A}(\Bbbk;z)&=\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\Bbbk)=k+r-1\\ \mathrm{dep}(\Bbbk)=r}}\int_{i<t_1<\cdots<t_r<z}\prod_{j=1}^{r}\frac{2dt_j}{1-t_j^2}\underbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}_{k_j-1}\\
&=\frac{(-1)^r}{(k-1)!}\int_{i<t_1<\cdots<t_r<\frac{z-1}{z+1}}\frac{\left(\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)-\mathscr{A}(1;t_r)\right)^{k-1}}{t_1\cdots t_r}dt_1\cdots dt_r\\
&=-\frac{1}{(r-1)!(k-1)!}\int_i^{\frac{z-1}{z+1}}\frac{\left(\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)-\mathscr{A}(1;t)\right)^{k-1}}{t}\left(\mathscr{A}(1;z)-\mathscr{A}\left(1;\frac{1+t}{1-t}\right)\right)^{r-1}dt\\
&=-\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}\frac{(-1)^j\mathscr{A}(1;z)^{r-j-1}}{(r-1)!(k-1)!}\int_i^{\frac{z-1}{z+1}}\frac{\mathscr{A}\left(1;\frac{1+t}{1-t}\right)^j\left(\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)-\mathscr{A}(1;t)\right)^{k-1}}{t}dt\\
&=-\frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\mathscr{A}(1;z)^{r-j-1}}{(r-j-1)!}\int_{i<t_1<\cdots<t_j<t<\frac{z-1}{z+1}}\frac{\left(\mathscr{A}\left(1;\frac{z-1}{z+1}\right)-\mathscr{A}(1;t)\right)^{k-1}}{t_1\cdots t_jt}dt_1\cdots dt_jdt\\
&=\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(-1)^j}{(r-j-1)!}\mathscr{A}(1;z)^{r-j-1}\mathscr{A}(\{1\}_j,k;z).
\end{aligned}$$

令 $z=$双曲正切$\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}i\right)$ 并将其代入 (3)，得到 (8)。对于 (9)，有

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(-1)^j\mathscr{A}(1;z)^{r-1-j}}{(r-j-1)!}\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\Bbbk)=k+j\\ \mathrm{dep}(\Bbbk)=j+1}}\mathscr{A}(\Bbbk;z)&=\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(-1)^j\mathscr{A}(1;z)^{r-1-j}}{(r-j-1)!}\sum_{l=0}^{j}\frac{(-1)^l\mathscr{A}(1;z)^{j-l}}{(j-l)!}\mathscr{A}(\{1\}_l,k;z)\\
&=\sum_{l=0}^{r-1}(-1)^l\mathscr{A}(1;z)^{r-l-1}\mathscr{A}(\{1\}_l,k;z)\sum_{j=l}^{r-1}\frac{(-1)^j}{(r-j-1)!(j-l)!}\\
&=\sum_{l=0}^{r-1}\frac{(-1)^l}{(r-l-1)!}\mathscr{A}(1;z)^{r-l-1}\mathscr{A}(\{1\}_l,k;z)\sum_{j=l}^{r-1}(-1)^j\binom{r-l-1}{j-l}.
\end{aligned}$$

由于最后一个求和除了 $l=r-1$ 外均为 0，因此有

$$\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(-1)^j}{(r-j-1)!}\mathscr{A}(1;z)^{r-1-j}\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\Bbbk)=k+j\\ \mathrm{dep}(\Bbbk)=j+1}}\mathscr{A}(\Bbbk;z)=\mathscr{A}(\{1\}_{r-1},k;z).$$

令 $z=$双曲正切$\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}i\right)$ 并将其代入（3），可得（9）。

□

例 2.4. 对于 $r=k=2$，有

$$\begin{aligned}(LHS\ of\ (8)) &= \lambda(1,2;s)+\lambda(2,1;s)\\ &= i\binom{s+1}{2}\widetilde{T}(1,s+2)-i\widetilde{T}(3,s)-is\widetilde{T}(2)\widetilde{T}(s+1)+i\widetilde{T}(3)\widetilde{T}(s),\\ (RHS\ of\ (8)) &= s\lambda(2;s+1)-\lambda(1,2;s)\\ &= i\binom{s+1}{2}\widetilde{T}(1,s+2)-is\widetilde{T}(2)\widetilde{T}(s+1)-i\widetilde{T}(3,s)+i\widetilde{T}(3)\widetilde{T}(s).\end{aligned}$$

因此我们可以看出(8) 成立。此外，由上述等式可得

$$\lambda(1,2;s)=s\lambda(2;s+1)-\lambda(1,2;s)-\lambda(2,1;s).$$

因此我们可以看出(9) 成立。

3 对偶关系

在本节中，我们证明 λ 函数满足一种对偶关系。为陈述该定理，我们准备一些在[7]中使用的记号。对于一个指标 $\Bbbk_r=(k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ 和 $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们使用以下记号：

$$\overrightarrow{\Bbbk_j}=(k_1,k_2,\ldots,k_j),\quad \overleftarrow{\Bbbk_j}=(k_r,k_{r-1},\ldots,k_{r+1-j}),\quad \overrightarrow{\Bbbk_0}=\overleftarrow{\Bbbk_0}=\phi.$$

此外，对于两个指标 $(k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 1}$ 和 $(l_1,\ldots,l_s)\in\mathbb{Z}^s_{\geq 1}$，Kaneko 和 Yamamoto 在 [7] 中引入了“带圈调和积”，定义如下：

$$\zeta\left((k_1,\ldots,k_r)\circledast(l_1,\ldots,l_s)\right)=\zeta\left((k_1,\ldots,k_{r-1})*(l_1,\ldots,l_{s-1}),k_r+l_s\right). \tag{10}$$

利用式（10）的二级类比，Pallewatta 和 Xu 给出了以下关系 s.

定理 3.1([8, 定理 3.4],[9, 定理 3.3])。对于 $p,q,r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和 $\Bbbk_r=(k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 2}$，有

$$\begin{aligned}&\xi(\{1\}_{q-1},(\overrightarrow{\Bbbk_r})_-;p+1)-(-1)^{\mathrm{wt}(\Bbbk_r)}\xi(\{1\}_{p-1},(\overleftarrow{\Bbbk_r})_-;q+1)\\ &=\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{\mathrm{wt}(\overleftarrow{\Bbbk_j})}\sum_{i=1}^{k_{r-j}-2}(-1)^{i-1}\zeta(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_j},i+1)\zeta(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}},k_{r-j}-i)\\ &+\sum_{j=0}^{r-2}(-1)^{\mathrm{wt}(\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}})}\left\{\zeta(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}})\xi(\{1\}_{p-1},(\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}})_-;2)-\zeta(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}})\xi(\{1\}_{q-1},(\overrightarrow{\Bbbk_{r-1-j}})_-;2)\right\},\\ &\psi(\{1\}_{q-1},(\overrightarrow{\Bbbk_r})_-;p+1)-(-1)^{\mathrm{wt}(\Bbbk_r)}\psi(\{1\}_{p-1},(\overleftarrow{\Bbbk_r})_-;q+1)\\ &=\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{\mathrm{wt}(\overleftarrow{\Bbbk_j})}\sum_{i=1}^{k_{r-j}-2}(-1)^{i-1}T(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_j},i+1)T(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}},k_{r-j}-i)\\ &+\sum_{j=0}^{r-2}(-1)^{\mathrm{wt}(\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}})}\left\{T(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}})T\left(\left(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}}\right)_-\circledast(1,1)\right)\right.\\ &\qquad -T(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}})T\left(\left(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}}\right)_-\circledast(1,1)\right)\\ &\qquad \left.+2\delta_{p+j,q+r-j-2}\log(2)T(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}})T(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}})\right\}.\end{aligned}$$

这里， $T(\Bbbk \ *\bigcirc (1,\ 1))$ 是 (10) （称为卷积 T-值）的二级类比，定义见 [10], 和 $\delta_{r,\ s}$定义为

$$\delta_{r,s} = \begin{cases} 0 & (r \equiv s \bmod 2), \\ -1 & (r : even, s : odd), \\ 1 & (r : odd, s : even) \end{cases}$$

对于 $r,\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. (关于卷积 T 值的详细信息，请参见 [8, 10].)

这个定理的证明基于以下引理。

引理3.2 ([8, 引理3.5]). 设数列 $A_n,\ B_n$ 为有限和

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad (a_n, b_n = o(n^{-p}), \mathrm{Re}(p) > 1)$$

以及 $A = \lim_{n\to\infty} A_n,\ B = \lim_{n\to\infty} B_n$。此外，我们定义

$$H_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\alpha}.$$

于是我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{A_n B}{n+\alpha} - \frac{AB_n}{n+\beta} \right\} = AB(\psi(\beta+1) - \psi(\alpha+1)) + A\sum_{n=1}^{\infty} b_n H_{n-1}(\beta) - B\sum_{n=1}^{\infty} a_n H_{n-1}(\alpha),$$

其中 $\psi(\alpha+1)$ 是双伽马函数，且 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$。

不使用这一引理，而是通过考虑多重对数的 shuffle正规化，我们得到了关于 λ 函数的对偶型关系。

定理 3.3. 对于 $p, q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 以及 $\Bbbk_r = (k_1, .., k_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 2}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\lambda\left(\{1\}_{q-1}, (\overrightarrow{\Bbbk_r})_-; p+1\right) - (-1)^{\mathrm{wt}(\Bbbk_r)} \lambda\left(\{1\}_{p-1}, (\overleftarrow{\Bbbk_r})_-; q+1\right) \\
&= i^{\mathrm{dep}(\Bbbk_r)-\mathrm{wt}(\Bbbk_r)+1} \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^{\mathrm{wt}(\overleftarrow{\Bbbk_j})} \sum_{l=1}^{k_{r-j}-2} (-1)^{l-1} \widetilde{T}\left(\left(\{1\}_{p-1}, \overleftarrow{\Bbbk_j}, l+1\right)^{\dagger}\right) \widetilde{T}\left(\left(\{1\}_{q-1}, \overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}}, k_{r-j}-l\right)^{\dagger}\right) \\
&+ i^{\mathrm{dep}(\Bbbk_r)-\mathrm{wt}(\Bbbk_r)+1} \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^{\mathrm{wt}(\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}})} \left\{ \widetilde{T}\left(\left(\{1\}_{q-1}, \overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}}\right)^{\dagger}\right) \widetilde{T}\left(\left(\left(\{1\}_{p-1}, \overleftarrow{\Bbbk_{j+1}}\right)_- \circledast (1,1)\right)^{\dagger}\right) \right. \\
&\qquad \left. - \widetilde{T}\left(\left(\{1\}_{p-1}, \overleftarrow{\Bbbk_{j+1}}\right)^{\dagger}\right) \widetilde{T}\left(\left(\left(\{1\}_{q-1}, \overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}}\right)_- \circledast (1,1)\right)^{\dagger}\right) \right\}.
\end{aligned} \tag{11}$$

这里， $\Bbbk^{\dagger}$ 是 $\Bbbk$ 的对偶指标，并且

$$\widetilde{T}\left((\Bbbk_r)_- \circledast (1,1)\right) = \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{\substack{k_{j,1}+k_{j,2}=k_j+1 \\ k_{j,1},k_{j,2}\geq 1, k_{1,1}\geq 2}} \widetilde{T}(k_1, \ldots, k_{j-1}, k_{j,1}, k_{j,2}, k_{j+1} \ldots, k_r).$$

证明。 我们采用类似于 [11]的变量替换。通过在（双曲正切$(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} i) = z$ （3）中进行变量替换并令$s = p+1$, 可得

$$\lambda((\{1\}_{q-1}, \overrightarrow{\Bbbk_r})_-; p+1) = i \int_i^1 \frac{\mathscr{A}\left(\{1\}_p; z\right) \mathscr{A}\left((\{1\}_{q-1}, \overrightarrow{\Bbbk_r})_-; z\right)}{z} dz.$$

对于被积函数，通过分部积分可得

$$
\begin{aligned}
&i\frac{\mathscr{A}\left(\{1\}_p;z\right)\mathscr{A}\left(\left(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_r}\right)_-;z\right)}{z}\\
&\quad=i\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{\mathrm{wt}(\overleftarrow{\Bbbk_j})}\sum_{l=1}^{k_{r-j}-2}(-1)^{l-1}\frac{d}{dz}\left\{\mathscr{A}\left(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_j},l+1;z\right)\mathscr{A}\left(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}},k_{r-j}-l;z\right)\right\}\\
&+i\sum_{j=0}^{r-2}(-1)^{\mathrm{wt}(\overleftarrow{\Bbbk_j})}\frac{d}{dz}\left\{\mathscr{A}\left(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}};z\right)\mathscr{A}\left(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}},1;z\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\mathscr{A}\left(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}},1;z\right)\mathscr{A}\left(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}};z\right)\right\}\\
&+i(-1)^{\mathrm{wt}(\overleftarrow{\Bbbk_r})}\frac{\mathscr{A}\left(\{1\}_q;z\right)\mathscr{A}\left(\left(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_r}\right)_-;z\right)}{z}.
\end{aligned}
$$

对于第二个求和，由 $\mathscr{A}$ 的归一化可得

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{A}\left(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}};z\right)\mathscr{A}\left(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}},1;z\right)-\mathscr{A}\left(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}},1;z\right)\mathscr{A}\left(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}};z\right)\\
&=\mathscr{A}\left(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}};z\right)\mathscr{A}\left(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}};z\right)\mathscr{A}\left(1;z\right)\\
&\quad-\mathscr{A}\left(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}};z\right)\mathscr{A}\left(\left(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}}\right)_-\circledast(1,1);z\right)\\
&\quad-\mathscr{A}\left(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}};z\right)\mathscr{A}\left(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}};z\right)\mathscr{A}\left(1;z\right)\\
&\quad+\mathscr{A}\left(\left(\{1\}_{p-1},\overrightarrow{\Bbbk_{j+1}}\right)_-\circledast(1,1);z\right)\mathscr{A}\left(\{1\}_{q-1},\overleftarrow{\Bbbk_{r-j-1}};z\right)\\
&=\mathscr{A}\left(\left(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}}\right)_-\circledast(1,1);z\right)\mathscr{A}\left(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}};z\right)\\
&\quad-\mathscr{A}\left(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}};z\right)\mathscr{A}\left(\left(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}}_-\right)\circledast(1,1);z\right).
\end{aligned}
$$

根据 [6, 命题 3.2], 可得

$$\mathscr{A}\left(\Bbbk_r;1\right)=i^{\mathrm{dep}(\Bbbk_r)-\mathrm{wt}(\Bbbk_r)}\widetilde{T}((\Bbbk_r)^\dagger).$$

因此，对 z 从 i 到 1 积分，即可得出该定理。 □

注 3.1。 同理，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\psi\left(\{1\}_{q-1},(\overrightarrow{\Bbbk_r})_-;p+1\right)-(-1)^{\mathrm{wt}(\Bbbk_r)}\psi\left(\{1\}_{p-1},(\overleftarrow{\Bbbk_r})_-;q+1\right)\\
&\quad=\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{\mathrm{wt}(\overleftarrow{\Bbbk_j})}\sum_{l=1}^{k_{r-j}-2}(-1)^{l-1}T(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_j},l+1)T(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}},k_{r-j}-l)\\
&\quad+\sum_{j=0}^{r-2}(-1)^{\mathrm{wt}(\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}})}\left\{T\left(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}}\right)T\left(\left(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}}\right)_-\circledast(1,1)\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.-T\left(\{1\}_{p-1},\overleftarrow{\Bbbk_{j+1}}\right)T\left(\left(\{1\}_{q-1},\overrightarrow{\Bbbk_{r-j-1}}\right)_-\circledast(1,1)\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

例 3.1. 对于 $\Bbbk_r=(2,2)$ $p=1$ 以及 $q=2$，根据定理 *2.8*，我们有

$$(LHS\ of\ (11)\ )=\lambda(1,2,1;2)-\lambda(2,1;3)$$

$$= 2i\widetilde{T}(3,3) + 3i\widetilde{T}(4,2).$$

另一方面，直接计算可得

$$\begin{aligned}(RHS\ of\ (11)\ ) &= -i\widetilde{T}((1) \circledast (1,1))^{\dagger})\widetilde{T}(3) + i\widetilde{T}(2)\widetilde{T}(((1,1) \circledast (1,1))^{\dagger}) \\ &= 2i\tilde{T}(3,3) + 3i\tilde{T}(4,2).\end{aligned}$$

因此我们可以看出，定理 *3.3* 成立。

致谢

作者谨向我的导师 Hirofumi Tsumura 教授致以谢意，感谢他给予的悉心指导和宝贵意见。本研究得到 JST“促进大学奖学金设立以推动科学技术创新”项目的支持，资助编号为 JPMJFS2139。

参考文献

[1] *T. Arakawa* 和 *M. Kaneko*，《多重ζ值、多重伯努利数及相关ζ函数》，名古屋数学杂志 *153(1999), 189–209*。[2] ———，关于多重 *L*值，日本数学会杂志 *56 (2004), no. 4, 967–991*。[3] *M. E. Hoffman*，《多重ζ值的一个奇数变体》，数论与物理通讯 *13 (2019), no. 3, 529–567*。[4] *M. Kaneko* 和 *H. Tsumura*，《二级多重ζ值》，筑波数学杂志 *44 (2020), 213-234*。[5] ———，连接多重ζ值与多重伯努利数的ζ函数，《纯粹数学高级研究》*84 (2020), 181–204*。[6] ———，四级多重 *L*值、多重欧拉数及相关ζ函数，即将在东北数学杂志发表。*arXiv:2208.05146*。[7] *M. Kaneko* 和 *S. Yamamoto*，《多重ζ值与正则化的一个新积分级数恒等式》，数学精选 *24 (2018), no. 3, 2499–2521*。[8]*M. Pallewatta* 和 *C. Xu*，《关于荒川-金子函数、金子-津村函数及相关函数的一些结果》，*arXiv:1901.07877 (2019)*。[9] *C. Xu*，《荒川-金子ζ值及相关变体的对偶公式》，马来西亚数学科学学会通报 *(2021), 3001–3018*。[10] *C. Xu* 和 *J. Zhao*，《具有偶数和奇数求和指标的多重ζ值变体》，数学杂志 *300 (2022), no. 3, 3109–3142*。[11] *S. Yamamoto*，《金子-津村型多重ζ函数及其在正整数处的取值》，九州数学杂志 *76 (2022), no. 2, 497–509*。