arXiv:2303.03573v1 [q-fin.MF] 7 Mar 2023

# 滤过扩张：结合金融例子阐述核心思想

Karen Grigorian*和 Robert A. Jarrow†

2023年3月8日

摘要

本文全面综述了滤过扩张数学的现状，并从数理金融的视角解读了文献中的关键结果。本文着重提供一份结构清晰的已知数学结果汇编，以供数理金融领域的研究人员使用。我们主要陈述研究结果并讨论其作用和意义，同时为省略的证明提供参考文献。对数学结果的讨论辅以大量数理金融方面的例子。

## 1 滤过扩张简介

### 1.1 哲学旁论

滤过作为信息流数学模型的根本作用，在现代金融中早已确立。滤过为模型设定了“时间之箭”。用 P. Medvegyev 的话来说：“……时间的一个基本属性是其‘不可逆性’。引入滤过，正是对这一时间属性的表达。”此外，

*康奈尔大学运筹学与工业工程系，纽约州伊萨卡，邮编 14853。电子邮件：kgg44@cornell.edu。

†康奈尔大学塞缪尔·柯蒂斯·约翰逊管理研究生院，纽约州伊萨卡，邮编 14853。电子邮件：raj15@cornell.edu。

二次变差是随机分析中的核心概念之一，其作用在滤过扩张与 Doob 分解的相互作用中尤为突出。“信号”和“噪声”这些模糊概念，在 Doob 分解和扩张的语境下获得了精确含义。作为一种信息模型，扩展滤过（例如获得内幕信息）可能会带来套利机会。最后，许多结果和概念都对底层滤过极为敏感；在讨论特定金融模型以及一般随机过程时，不应忽视滤过作为随机基核心组成部分的作用。以下各节将更严谨地探讨这些及许多其他观点。

本文结构如下。第 1 节简要介绍滤过扩张的数学理论及其与数理金融的联系。第 2 节讨论滤过扩张与不同套利概念之间的关系。第 3 节分析滤过扩张与测度变换技术之间的关系。第 4 节研究扩张下鞅表示性质的保持与丧失。第 5 节详细介绍莱维过程、独立增量过程和点过程背景下的滤过扩张。第 6 节为结论。

## 1.2 基本概念

我们首先介绍若干定义。

定义 1. 如果 $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t, \quad \forall t \geq 0$，则称滤过 $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t, t \geq 0)$ 是滤过 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ 的扩张。

一般而言， $\mathbb{F}$-鞅并非一定是 $\mathbb{G}$-鞅，甚至也未必是 $\mathbb{G}$-半鞅，因此基于这些考虑，自然会提出两个假设。我们关注这样的条件：确保每个 $\mathbb{F}$-鞅都是 $\mathbb{G}$-鞅（文献中称为假设 $\mathcal{H}$，或称浸入，记作 $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$），或者确保每个 $\mathbb{F}$-鞅都是 $\mathbb{G}$-半鞅（称为 $\mathcal{H}'$ 假设）。

滤过扩张主要有两种类型。当较大的滤过取为 $\mathbb{G} := \mathbb{F} \vee \sigma(\zeta)$ 时，我们称之为初始扩张，其中 $\zeta$ 是某个随机变量（或更一般地说，是某个随机元素）。渐进扩张则定义为使给定的随机时刻 $\tau$（任意非负随机变量）成为停时的最小 $\mathbb{G}$。

## 1.3 初始扩张

关于初始扩张下浸入的一个标准结果如下（证明见 Aksamit、Jeanblanc，2017，第11页）。下文中，$\mathcal{F} \perp\!\!\!\perp_{\mathcal{H}} \mathcal{G}$ 表示在给定 $\mathcal{H}.$ 的条件下，$\sigma$代数 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 条件独立。若没有下标，则表示无条件独立。

定理2. 设 $\mathbb{F}$ 为一个滤过，$\zeta$ 为一个随机变量。那么 $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{F} \vee \sigma(\zeta)$当且仅当$\sigma(\zeta) \perp\!\!\!\perp_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_\infty$。特别地，若 $\sigma(\zeta) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_\infty$，则 $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{F} \vee \sigma(\zeta)$。

整个领域中最著名、最重要的结果之一，是众所周知的关于 $\mathcal{H}'$ 的 Jacod 判据（有时记作 $\mathcal{J}$）。这里仅陈述该结果，证明可见例如（Protter，2005年，第371页）。

定理3. 设 $\zeta$是标准Borel空间（$E, \mathcal{E}$）中的一个随机元素，并设$Q_t(\omega, dx)$为在给定 $\mathcal{F}_t$，$\forall t \geq 0$的条件下 $\zeta$ 的正则条件分布。假设存在一个正的 $\sigma$-有限测度 $\eta$，定义在（$E$, $\mathcal{E}$）上，使得 $Q_t(\omega, dx) \ll \eta(dx)$ 几乎处处成立，$\forall t \geq 0$。则 $\mathcal{H}'$ 成立。

一个直接但重要的推论如下。

推论4. 设 $\zeta$ 是 $(E, \mathcal{E})$ 中的一个随机元素，且 $\zeta$ 与 $\mathbb{F}$ 独立，并设 $\mathbb{G} := \mathbb{F} \vee \sigma(\zeta)$。那么 Jacod 判据成立，因此 $\mathcal{H}'$ 成立。

证明. 由独立性可知，$\zeta$ 的正则条件分布 $Q_t(\omega, dx)$ 等于 $\zeta.$ 的分布 $\eta(dx)$

□

虽然 Jacod 条件可以说是该领域最一般的结果之一，但即使在相对简单的情形下，它也可能不成立。

例子5. (Corcuera, Valdivia, 2012年) 设 $L$ 是强度为 $\lambda$ 的泊松过程 $(N_t)^{t\in(0,T)}$ 的第 $n$ 次跳跃，$\mathbb{F}$ 是其自然滤过。那么

$$\mathbb{P}(L > x|\mathcal{F}_t) = {}_{\mathbb{I}^{\{N_x<n, N_t\geq n\}}} + {}_{\mathbb{I}^{\{N_t<n\}}} \int_{(x-t)_+}^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda u}(\lambda u)^{n-N_t-1}}{(n-N_t-1)!} du,$$

且条件概率无法被非随机测度支配。

例6。（Ouwehand，2007；Amedinger等，1998）我们考虑一个标准例子：在时刻0，已知布朗运动在某个终止时刻 $T$（例如在 $T=1$）的值。设 $B$ 为布朗运动， $\mathbb{F}$ 为其自然滤过，并用由 $B_1$生成的 $\sigma$-域对其进行扩大，即 $\mathbb{F}^{\sigma(B_1)} := \cap_{s>t}(\mathcal{F}_s \vee \sigma(B_1))$. 过程 $B$ 不再是 $\mathbb{F}^{\sigma(B_1)}$-鞅。为说明这一点，考虑例如过程（$\mathbb{E}[B_1|\mathcal{F}^{\sigma(B_1)}{}_t \quad ], t \geq 0$），并注意到它恒等于 $B_1$）。然而， $B$ 是一个 $\mathbb{F}^{\sigma(B_1)}$-半鞅，而定义为 $\beta$ 的过程

$$\beta_t := B_t - \int_0^{t\wedge 1} \frac{B_1 - B_s}{1-s} ds$$

是一个 $\mathbb{F}^{\sigma(B_1)}$-布朗运动。Jacod 判据在 $[0,\infty)$ 上不成立，但在 $[0,T)$ 上成立。对于 $t<T$， $B_T$显然在给定 $\mathcal{F}_t$ 的条件下服从高斯分布；因此，若 $Q_t(\omega, dx)$ 是 $\mathbb{P}(B_T \in dx|\mathcal{F}_t)$ 的一个正则版本，则 $Q_t(\omega, dx)$ 相对于勒贝格测度绝对连续。不过请注意，对于 $t \geq T$， $Q_t(\omega, dx)$ 是点质量测度 $\delta_{B_T(\omega)}(dx)$，并且不可能找到一个统一的测度 $\eta$，使得对于所有 $c \in \mathbb{R}$ 都有 $\delta_c(dx) \ll \eta(dx)$。

例7。（Amedinger，1998年）考虑一个取值于可数集合 $U$ 的随机变量 $G$，满足对于所有 $l \in U$， $\mathbb{P}(G=l) > 0$。因此，由 $G$ 生成的 $\sigma$-代数中的集合具有如下形式：对于某个子集 $J \subseteq U$， $A = \cup_{l\in J}\{G=l\}$。于是我们有

$$\mathbb{P}(G \in A|\mathcal{F}_t) = \sum_{l\in J} \mathbb{P}(G=l|\mathcal{F}_t) = \sum_{l\in J} p_t^l \mathbb{P}(G=l) = \int_A p_T^l \mathbb{P}(G \in dl) = \int_A p_T^l \eta(dl) \ \forall t \in [0,T],$$

其中 $p_t^l = \frac{\mathbb{P}(G=l|\mathcal{F}_t)}{\mathbb{P}(G=l)}$，且条件概率 $\mathbb{P}(G \in \cdot|\mathcal{F}_t)$ 相对于 $G$ 的分布绝对连续（即 $\eta(dl) = \mathbb{P}(G \in dl)$）$\forall t \in [0,T]$。然而请注意，只有当对所有 $l \in U$， $\mathbb{P}(G=l|\mathcal{F}_t) > 0$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立时， $G$ 给定 $\mathcal{F}_t$ 的条件分布才与 $G$ 的分布等价。若 $G$是 $\mathcal{F}_T$-可测的，这种等价性也不成立，因为此时 $\mathbb{P}(G=l|\mathcal{F}_T) = \mathbb{I}^{\{G=l\}}$ 可能以正概率为零，除非 $G$是一个常数。

一个颇具启发性的特殊情形是，当 $G := \mathbb{I}^{\{B_T \in [a,b]\}}$ 时，也就是说，它发出一个信号，指示标准布朗运动的终值 $B_T$ 是否落在某个区间 $[a,b]$ 内。于是

$$p_t^1 = \frac{\mathbb{P}(G=1|\mathcal{F}_t)}{\mathbb{P}(G=1)}, \quad p_t^0 = \frac{1-\mathbb{P}(G=1|\mathcal{F}_t)}{1-\mathbb{P}(G=1)}, \tag{1}$$

并且可以很容易地算出，条件分布为

$$\mathbb{P}(G=1|\mathcal{F}_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_a^b \exp(-\frac{(u-B_t)^2}{2(T-t)})du,\quad t\in[0,T),$$
$$\mathbb{P}(G=1)=\mathbb{P}(G=1|\mathcal{F}_0)=\Phi(b/\sqrt{T})-\Phi(a/\sqrt{T}),$$

其中， $\Phi$ 是标准正态分布函数。因此，对于所有 $t\in[0,T)$ ，条件概率$\mathbb{P}(G\in\cdot|\mathcal{F}_t)$相对于 $G$的分布绝对连续，且 Jacod 条件在 $[0,T)$ 上成立。

例8。（Amedinger）设 $G=B_T+\epsilon$，其中 $B_T$是标准布朗运动 $B$的终值， $\epsilon$是一个与 $\mathcal{F}_T$独立的 $\mathcal{N}(0,1)$-随机变量，可将其解释为某种“噪声”对可用信息 $B_T$的扭曲。那么 $\forall t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G\in dx|\mathcal{F}_t)&=\mathbb{P}(B_T-B_t+B_t+\epsilon\in dx|\mathcal{F}_t)\\&=\mathbb{P}(B_T-B_t+\epsilon\in dx-y|\mathcal{F}_t)|_{y=B_t}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t+1)}}\exp(-\frac{(x-B_t)^2}{2(T-t+1)})dx\\&=p_t(x)\mathbb{P}(B_T+\epsilon\in dx),\end{aligned}$$

其中 $p_t(x)=\sqrt{\frac{T+1}{T-t+1}}\exp(-\frac{(x-B_t)^2}{2(T-t+1)}+\frac{x^2}{2(T+1)})$。对 $\frac{(x-B_t)^2}{(T-t+1)}$ 应用伊藤公式可得

$$p_t(x)=\mathcal{E}\left(\int\frac{(x-B_s)^2}{(T-s+1)}dB_s\right)_t,$$

可以通过验证 Novikov条件证明，这是一个 $\mathbb{F}$-鞅。因此，对于所有 $t\in[0,T]$，包括区间端点，条件概率 $\mathbb{P}(G\in\cdot|\mathcal{F}_t)$相对于 $G$的分布绝对连续。

如果我们改为考虑终值与噪声项的混合，即$G=\lambda B_T+(1-\lambda)\epsilon$，则可以以自然的方式推广这个例子。类似于上述的计算可得， $\mathbb{P}(G\in dx|\mathcal{F}_t)=p_t(x)\mathbb{P}(G\in dx)$，其中 $p_t(x)=\sqrt{\frac{\lambda^2T+(1-\lambda^2)}{T-t+\lambda^2+1-\lambda}}\exp(-\frac{(x-\lambda B_t)^2}{2\lambda^2T-t+}+\frac{x^2}{((1-\lambda)^2)})$， $x\in\mathbb{R}$。因此，条件概率 $\mathbb{P}(G\in\cdot|\mathcal{F}_t)$ 是均值为 $\mu_t=\lambda B_t$、方差为$\sigma_t^2=\lambda^2(T-t)+(1-\lambda)^2$, 的正态概率分布，并且 Jacod 条件在 $[0.T]$ 上成立。

以下引理至关重要，它使我们能够选择一个良好的密度过程版本（例如，证明参见 Jacod，1985年）。下文及全文中，$\mathbb{F}^{\sigma(\zeta)}$是 $\mathbb{F} \vee \sigma(\zeta)$ 的右连续增广，即通过取值于 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的随机变量 $\zeta$ 对 $\mathbb{F}$ 进行初始扩张：$= [-\infty, \infty]$。

引理 9。在 $\mathcal{J}$ 条件下，存在一个非负的 $\mathcal{O}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-可测函数 $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \overline{\mathbb{R}} \ni (\omega, t, x) \mapsto p_t(\omega, x)$，它关于 $t$ 是右连续左极限的，使得

(i) 对每个 $t \geq 0$，都有 $Q_t(\omega, dx) = p_t(\omega, x)\eta(dx)$；(ii) 对每个 $x \in \overline{\mathbb{R}}$，过程 $(p_t(x))_{t \geq 0}$ 是一个 $\mathbb{F}$-鞅；(iii) $p(x) > 0$ 且 $p_-(x) > 0$ 于 $[\![0, \zeta^x[\![$，并且 $p(x) = 0$ 于 $[\![\zeta^x, \infty[\![$，其中 $\zeta^x$:=inf $\{t | p_-(x) = 0\}$。

虽然 Jacod 判据是一项确保 $\mathcal{H}'$ 有效的一般结果，但一个更具体的问题是：该过程在扩张滤过中的半鞅分解是什么？以下定理对此给出了解答。请注意，引理所确保的条件密度过程 $p(x)$ 对于得到这一分解至关重要。

定理 10. 假设随机元素 $\zeta$ 满足 $\mathcal{J}$。若 $X$ 是一个 $\mathbb{F}$-局部鞅，定义过程 $X$ 为

$$\widetilde{X}_t := X_t - \int_0^t \frac{1}{p_{s-}(\zeta)} d\langle X, p(u) \rangle_s^{\mathbb{F}}|_{u=\zeta}, \quad t \leq T$$

则是一个 $\mathbb{F}^{\sigma(\zeta)}$-局部鞅。特别地，$\mathcal{H}'$ 成立。

证明。参见例如 (Aksamit、Jeanblanc，2017年，第 88 页)。 □

## 1.4 渐进扩张

考虑由所谓的违约指标过程 $A := \mathbb{1}_{[\![\tau, \infty[\![}$ 生成的滤过 $\mathbb{A} := (\mathcal{A}_t, t \geq 0)$，其中 $\tau$ 是一个随机时刻，即非负随机变量。滤过的渐进扩张定义为 $\mathbb{G} := \mathbb{F} \vee \mathbb{A}$。与此过程相关的 Azéma 超鞅具有根本重要性，其定义为$Z = {}^o(1 - A) = (\mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{F}_t))_{t \geq 0}$，即 $1 - A$ 的可选投影。有时也会研究一个与$\widetilde{}$相关的过程 $Z = {}^o(1 - A_-) = (\mathbb{P}(\tau \geq t | \mathcal{F}_t))_{t \geq 0}$，它仅有右极限和左极限。可以证明，这些过程属于类 $(D)$。还可以证明

$Z = m - A^o = n - A^p$ 对于某些 $\mathbb{F}$-鞅 $m$ 和 $n$（其中 $A^o$ 和 $A^p$ 分别是 $\mathbb{F}$ 中的对偶可选投影和可预测投影）。以下是关于在 $\tau$ 处停止的 $\mathbb{F}$-局部鞅的半鞅分解的基本结果（证明见 Aksamit、Jeanblanc，2017年，第102–103页）。采用这一记号，我们陈述以下结果。

定理11。每个在 $\tau$ 处停止的右连续左极限 $\mathbb{F}$局部鞅 $X$ 都是特殊 $\mathbb{G}$半鞅，其典范分解为

$$X_t^\tau = \widehat{X}_t + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, m\rangle_s^{\mathbb{F}}}{Z_{s-}} = \widehat{X}_t + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, n\rangle_s^{\mathbb{F}} + dJ_s}{Z_{s-}},$$

其中 $X$ 是一个 $\mathbb{G}$局部鞅，而 $J$ 是过程 $\mathbb{1}_{[\![\tau,\infty[\![}\Delta X_\tau$ 的 $\mathbb{F}$对偶可预测投影。

以下定理给出了另一种分解。

定理12。每个在 $\tau$ 处停止的右连续左极限 $\mathbb{F}$局部鞅 $X$ 都是一个 $\mathbb{G}$半鞅，其分解为

$$X_t^\tau = \bar{X}_t + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d[X, m]_s}{\widetilde{Z}_s} - (\mathbb{1}_{[\![\widetilde{R},\infty[\![}\Delta X_{\widetilde{R}})^{p,\mathbb{F}}_{t\wedge\tau},$$

其中 $X$ 是一个 $\mathbb{G}$局部鞅，且 $R := R_{\{\widetilde{Z}_R = 0 < Z_{R-}\}}$，其中 $R := \inf\{t | Z_t = 0\}$。

文献中分析了几种不同类型的随机时刻。下面我们简要介绍这些类型。

定义 13. 随机时刻 $\tau$ 是诚实时刻，当且仅当对于每个 $t > 0$，都存在一个 $\mathcal{F}_{t-}$-可测随机变量 $\tau_t$，使得 $\tau = \tau_t$ 在 $\{\tau < t\}$ 上成立。

定义 14. 随机时刻 $\tau$ 若满足 Jacod绝对连续性判据，则称为 $\mathcal{J}$-时刻。

定义 15. 随机时刻 $\tau$ 若其图 $[\![\tau]\!]$ 包含于某个薄集内，则称为 $\mathbb{F}$-薄时刻；也就是说，存在一个由 $\mathbb{F}$-停时 $(T_n)_{n=1}^\infty$ 构成的穷尽序列，其图两两不相交，且满足 $[\![\tau]\!] \subset \cup_n [\![T_n]\!]$。

这意味着 $\tau = \infty_{\mathbb{1}_{C_0}} + \sum_n T_{n\,\mathbb{1}_{C_n}}$，其中 $C_0 := \{\tau = \infty\}$ 和 $C_n := \{\tau = T_n < \infty\}$ 对于 $n \geq 1$。

定义16. 随机时刻 $\tau$ 称为 $\mathbb{F}$-伪停时，如果对于任意有界的 $\mathbb{F}$-鞅 $Y$， $\mathbb{E}[Y_\tau] = \mathbb{E}[Y_0]$。

对于这些随机时刻的渐进扩张，我们有相应的半鞅分解。

定理17. 设 $\tau$ 是一个 $\mathbb{F}$诚实时刻。那么，每个右连续左极限 $\mathbb{F}$局部鞅 $X$ 都是特殊的 $\mathbb{G}$ 半鞅，其典范分解为

$$X_t = \widetilde{X}_t + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, m\rangle_s^{\mathbb{F}}}{Z_{s-}} - \int_\tau^{t\vee\tau} \frac{d\langle X, m\rangle_s^{\mathbb{F}}}{1 - Z_{s-}},$$

~其中 $X_t$ 是一个 $\mathbb{G}$局部鞅。

定理18. 设 $\tau$ 是一个 $\mathcal{J}$时刻。那么，任意右连续左极限 $\mathbb{F}$局部鞅 $X$ 都是特殊的$\mathbb{G}$半鞅，其典范分解为

$$X_t = \widehat{X}_t + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, m\rangle_s^{\mathbb{F}}}{Z_{s-}} + \int_{t\wedge\tau}^t \frac{1}{p_{s-}(\tau)} d\langle X, p(x)\rangle_s^{\mathbb{F}}|_{x=\tau},$$

^其中 $X_t$ 是一个 $\mathbb{G}$局部鞅。

定理19. 设 $\tau$ 是一个薄时刻。那么，对于 $\mathbb{G}$， $\mathbb{F} \subset \mathbb{G} \subset \mathbb{F}^{\mathcal{C}}$ 和 $\mathcal{H}'$ 成立，其中 $\mathbb{F}^{\mathcal{C}}$是 $\mathbb{F}$ 的初始扩张，并带有原子 $\sigma$域 $\mathcal{C} := \sigma(C_n, n \geq 0)$。此外，任意 $\mathbb{F}$局部鞅 $X$ 具有如下 $\mathbb{G}$半鞅典范分解

$$X_t = \widehat{X}_t + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, m\rangle_s^{\mathbb{F}}}{Z_{s-}} + \sum_n \mathbb{I}^{C_n} \int_0^t \mathbb{I}^{\{s>T_n\}} \frac{d\langle X, z^n\rangle_s^{\mathbb{F}}}{z_{s-}^n},$$

^其中， $X_t$ 是一个 $\mathbb{G}$-局部鞅， $z_t^n := \mathbb{P}(C_n|\mathcal{F}_t)$.

关于随机时刻及其相关的 Azéma 超鞅的讨论，经常会用到以下两个假设。

假设（A）若随机时刻 $\tau$ 满足假设（A），则称其满足假设（A）；也就是说， $\tau$ 避开所有 $\mathbb{F}$-停时，即对于所有 $\mathbb{F}$-停时 $\sigma$，均有 $\mathbb{P}(\tau = \sigma) = 0$ 。

假设（C）若所有 $\mathbb{F}$-鞅都是连续的，则称假设（C）成立。

当两个假设都满足时，我们称（CA）成立。

定义 20. 若过程 $X$ 满足族 $\{X_{\tau}\mathbb{I}_{\{\tau<\infty\}}:\ \tau$ 是停时$\}$ 一致可积，则称其为 (D) 类。

以下这个关于 (D) 类右连续左极限正超鞅的著名乘法分解常常很有用，尽管其用途远不及加法分解。

定理21。（伊藤-渡边）设 $X$ 是一个 (D) 类正右连续左极限超鞅。那么存在一个局部鞅 $N$ 和一个可预测递减过程 $D$，使得 $X = ND$，其中 $D_0 = X_0$。

定理22。（Nikeghbali、Yor，2006年）设 $L$ 是满足（CA）的一个诚实时刻。那么存在一个连续非负局部鞅 $(N_t)_{t\geq 0}$，满足 $N_0 = 1$ 且 $\lim_{t\to\infty} N_t = 0$，使得

$$Z_t := \mathbb{P}(L > t|\mathcal{F}_t) = \frac{N_t}{S_t},$$

其中 $S_t = \sup_{s\leq t} N_s$（有时也记作 $\overline{N}_t$）。

推论23。在前一定理的记号下，超鞅 $Z_t = \mathbb{P}$（$L > t|\mathcal{F}_t$）具有以下乘法与加法分解：

$$\begin{aligned} Z_t &= \frac{N_t}{S_t}, \qquad (Ito - Watanabe), \\ Z_t &= M_t - A_t, \qquad (Doob - Meyer). \end{aligned}$$

其中相应的各项之间的关系如下：

$$\begin{aligned} N_t &= exp\left(\int_0^t \frac{dM_s}{Z_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d\langle M\rangle_s}{Z_s^2}\right), \\ S_t &= exp(A_t) \end{aligned}$$

$and$

$$\begin{aligned} M_t &= 1 + \int_0^t \frac{dN_s}{S_s} = \mathbb{E}(logS_\infty|\mathcal{F}_t), \\ A_t &= log\ S_t. \end{aligned}$$

现在我们继续讨论一些例子，具体计算与给定随机时刻相关的阿泽马超鞅，以及扩张滤过中过程的路径分解。但首先，考虑一个重要定理，该定理确立了末次穿越时刻实际上是诚实时刻。

定理24. 设 $X$ 是一个 $\mathbb{F}$-适应过程，且 $\tau := \sup\{t : X_t \leq a\}$. 那么 $\tau$ 是一个诚实时刻。

证明. 考虑 $\tau_u :=\sup\{t \leq u : X_t \leq a\}$ ，并注意到它是 $\mathcal{F}_u$-可测的。显然，在 $\tau < u$上 $\tau = \tau_u$ ，故得证。 □

例25. (Nikeghbali，2006年) 设 $B$ 是一个标准布朗运动，$S_t :=\sup_{s\leq t} B_s$且 $g := \sup\{t : B_t = S_t\}$. 。由上述结果可知

$$\mathbb{P}(g > t|\mathcal{F}_t) = \frac{B_t}{S_t}.$$

例26. (Nikeghbali，2006年) 设 $N_t := \exp(2\nu B_t - 2\nu^2 t)$，其中 $\nu > 0$，且 $B$ 是一个标准布朗运动。我们有

$$\begin{aligned} S_t &= \exp\left(\sup_{s\leq t} 2\nu(B_s - \nu s)\right), \\ g &= \sup\left\{t : (B_t - \nu t) = \sup_{s\geq 0}(B_s - \nu s)\right\}, \end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{P}(g > t|\mathcal{F}_t) = \exp\left(2\nu(B_s - \nu s) - \sup_{s\geq 0}(B_s - \nu s)\right).$$

例27. (Nikeghbali，2006年) 考虑一个维数为2($1-\mu$)且从0出发的贝塞尔过程 $R$ ，其中 $\mu \in (0, 1)$。定义 $g_\mu := \sup\{t \leq 1 : R_t = 0\}$。那么相应的Azéma超鞅 $Z^{g_\mu}$ 为（推导过程参见原论文）

$$Z_t^{g_\mu} = \mathbb{P}(g_\mu > t|\mathcal{F}_t) = \frac{1}{2^{\mu-1}\Gamma(\mu)} \int_{\frac{R_t}{\sqrt{1-t}}}^{\infty} \exp(-\frac{y^2}{2}) y^{2\mu-1} dy,$$

以及 $\mathbb{I}^{\{g_\mu \leq t\}}$ 的对偶可预测投影 $A^{g_\mu}$ 是

$$A_t^{g_\mu} = \frac{1}{2^\mu \Gamma(1+\mu)} \int_0^{t\wedge 1} \frac{dL_u}{(1-u)^\mu},$$

其中 $L_y := \sup\{t:\ R_t = y\}$。

现在将这些结果应用于标准布朗运动的情形。注意，当 $\mu = 1/2$、 $R_t$ 可视为 $|B_t|$ 时，则对于 $g := \sup\{t \leq 1 :\ B_t = 0\}$，我们有

$$Z_t^g = \mathbb{P}(g > t|\mathcal{F}_t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{B_t}{\sqrt{1-t}}}^{\infty} \exp(-\frac{y^2}{2}) dy,$$

and

$$A_t^g = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{t\wedge 1} \frac{dL_u}{\sqrt{1-u}}.$$

对于最后一个例子，我们需要以下引理所提供的辅助结果。

引理28。（Nikeghbali，Yor，2006年）给定与随机时刻 $g$ 或上述例子中的 $g^\mu$ 相关联的 Azéma超鞅 $Z$，定义非增过程（$r_t$）为

$$r_t := inf_{\ u\leq t} Z_u = inf_{u\leq t} \frac{N_u}{S_u},$$

其中 $N$ 和 $S$ 如上面的伊藤-渡边分解中所定义。则

$$\rho := sup \left\{ t < g : \frac{N_t}{S_t} = inf_{u\leq t} \frac{N_u}{S_u} \right\}$$

是一个伪停时，并且 $r_\rho$ 在 (0, 1) 上服从均匀分布。

例29。在上述设定中，令 $N_t = B_t$。考虑通过 $g$ 和 $\sigma(S_{T_0})$ 分别对 $\mathbb{F}$ 进行的初始扩张 $\mathbb{F}^g$ 和 $_{\mathbb{F}^{\sigma(S_{T_0})}}$。则
(i) $\frac{B_\rho}{S_\rho}$ 在 (0, 1) 上均匀分布 (ii) $(B_t)$ 是一个 $\mathbb{F}^g-$，并且是一个 $\mathbb{F}^{\sigma(S_{T_0})}$-半鞅，
其典范分解为

$$B_t = \widetilde{B}_t + \int_0^{t\wedge g} \frac{ds}{B_s} - \int_g^{t\wedge T_0} \frac{ds}{S_{T_0} - B_s},$$

其中 $\widetilde{B}_t$ 是一个 $\mathbb{F}^{\sigma(S_{T_0})}$-布朗运动，在首次到达时刻 0 处停止，即 $T_0$。

例30.（Cox构造）。设随机变量 $\Theta$与 $\mathcal{F}_\infty$独立，且对所有 $t \geq 0$均有 $\mathbb{P}(\Theta > t) = \exp(-t)$。令$(\Lambda_t)$为一个 $\mathbb{F}$-适应的连续

递增过程，满足 $\Lambda_\infty = \infty$。定义 $\sigma \coloneqq \inf\{t \geq 0 : \Lambda_t \geq \Theta\}$，并注意到它是一个伪停时，因为

$$Z_t \coloneqq \mathbb{P}(\sigma > t|\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(\Lambda_t < \Theta|\mathcal{F}_t) = \exp(-\Lambda_t).$$

作为一个重要的特殊情形，考虑 $\mathbb{F}$ 为由泊松过程$N$生成的滤过，且 $\tau = \inf\{t \geq 0 : \psi(N_t) \geq \Theta\}$，其中 $\psi$ 是某个非递减函数 $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$，满足 $\psi(0) = 0$ 且 $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = \infty$。那么，相应的Azéma超鞅为 $Z_t = e^{-\psi(N_t)}$，对所有 $t \in \mathbb{R}_+$均成立。注意，它是递减的，但不是可预测的。Azéma超鞅具有如下分解 $Z = \mu - A^p$，其中

$$\mu_t = 1 + \int_0^t \left(e^{-\psi(N_{s-}+1)} - e^{-\psi(N_{s-})}\right) dM_s,$$
$$A_t^p = \int_0^t \lambda \left((e^{-\psi(N_s+1)} - e^{-\psi(N_s+1)}\right) ds,$$

而过程

$$M_t^{(\tau)} \coloneqq A_t - \int_0^{t\wedge\tau} e^{\psi(N_s)} dA_s^p = A_t - \int_0^{t\wedge\tau} \lambda \left((e^{-\psi(N_s+1)} - e^{-\psi(N_s+1)}\right) ds$$

是一个 $\mathbb{G}$-鞅，这意味着 $\tau$ 是一个完全不可达的 $\mathbb{G}$-停时。事实上，$Z_t = Z_0 + \sum_{0<s\leq t} e^{-\psi(N_s)} - e^{-\psi(N_{s-})} = 1 + \int_0^t \left(e^{-\psi(N_{s-}+1)} - e^{-\psi(N_{s-})}\right) dM_s$，且 $M_t = N_t - \lambda t$。第二个陈述的证明见（Aksamit等，2018年，第1243页）。

## 1.5 扩张与数理金融的联系

扩张理论与金融相关的核心思想萌芽，除其他情况外，可以在初始扩张框架中找到：随机过程的自然滤过由终值生成的 $\sigma$-代数进行扩张。也就是说，如果一名内幕人士在时刻 0 已掌握关于未来将发生某一事件的信息，那么就可以利用该信息获利。

更一般地，现代数理金融的基石是套利（或无套利）的概念。经过恰当定义后，可以证明，它等价于存在一个等价概率测度，使得资产的价格过程在该测度下成为（局部）鞅。其核心思想是，扩张滤过可能会产生套

利机会。具体而言，资产定价第一基本定理指出，对于一般半鞅价格过程 $S$，存在一个等价概率测度，使得 $S$ 是 $\sigma$-鞅，这与无套利等价（无套利定义为不存在风险趋于零的免费午餐，即 NFLVR——见下一节）。由此可知，如果扩张基础滤过破坏了 $S$ 的半鞅性质，那么能够获取这一扩张信息集的人很可能会面临套利机会。然而，半鞅性质并不能保证无套利。例如，在标准布朗运动的自然滤过中加入 $B_T$ 后，半鞅性质仍然成立。然而，在布莱克–斯科尔斯模型中，知道 $B_T$ 就等同于知道股票价格 $S_T$ 的终值，这显然意味着存在套利（Ouwehand，2007）。

在继续讨论金融中的实际应用之前，有必要先提醒一句。尽管滤过扩张理论是研究金融中与信息相关方面的有力工具，但它绝非普适，也不能涵盖这一主题的全部内容。例如，(Ernst 等人，2017年) 将“扩大的”滤过 $(\mathcal{F}'_t) := (\mathcal{F}_{t+a})$（其中 $a > 0$ 为某个固定值）视为代表内幕人士的“预知”。在这一新滤过中，标准布朗运动 $B$ 甚至不是半鞅。(Ernst 等人，2017年) 得出结论：“滤过扩张的结果在这里都无法帮助我们 – 所要解决的问题具体而富有挑战性，无法通过一般理论处理”。

上文的讨论，特别是针对扩张滤过中各过程给出的半鞅分解，揭示了滤过扩张与随机分析中若干核心思想之间的有趣联系。从宏观角度看，半鞅可以非正式地理解为对随时间演化的随机现象所作“噪声—信号”分解的一种推广。这一思想也体现在 Doob 对超鞅的分解中。需要注意的是，扩张会使“噪声”过程（在我们的类比中即局部鞅项）出现趋势（即有限变差项，也就是“信号”），或者变得如此“狂野”，以至于不再是半鞅。扩张下漂移项的出现，与 Girsanov 变换以及一般的测度变换技术颇为相似。这种相似并非表面现象，事实上，这两种思想密切交织。此外，初始扩张与成熟的桥过程理论有着天然的联系。事实上，即使在经典例子中，若将自然滤过扩张至包含该过程的终值（即

桥过程的“到达”点），标准布朗运动也会转变为布朗桥。这种联系并非仅仅是一种有用的类比，而是一种牢固的关系。正如 M. Yor 所指出的（Mansuy、Yor，第36页），几乎所有通过添加由不同随机变量生成的 $\sigma$-代数而得到的初始扩张公式，“都可以从马尔可夫桥的半鞅分解角度来解释”。鉴于这些考虑，我们给出后续讨论中会用到的必要定义和定理。更多细节可参见例如（Protter，2005年）。

定理31.（Doob-Meyer分解）。设 $Z$ 是一个右连续左极限超鞅。那么 $Z$ 有如下分解：$Z = Z_0 + M - A$，其中 $M$ 是一个局部鞅，$A$ 是一个可预测递增过程，并且 $M_0 = A_0 = 0$。这种分解是唯一的。

定理32.（Girsanov）。设 $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$。设 $X$ 在 $\mathbb{P}$ 下是一个半鞅，其分解为 $X = M + A$。那么 $X$ 在 $\mathbb{Q}$ 下也为半鞅，其分解为 $X = L + C$，其中

$$L_t = M_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[Z, M]_s$$

是一个 $\mathbb{Q}$-局部鞅，$Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} | \mathcal{F}_t)$，并且 $C = X - L$ 是一个 $\mathbb{Q}$-有限变差过程。

定理33.（Lenglart-Girsanov）。设 $X$ 是一个 $\mathbb{P}$-局部鞅，且满足 $X_0 = 0$。设 $\mathbb{Q}$ 是一个概率测度，满足 $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$，并设 $Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} | \mathcal{F}_t)$，$R = \inf\{t > 0 : Z_t = \widetilde{0}, Z_{t-} > 0\}$, $U_t = \Delta X_{R} \mathbb{I}_{\{t \geq R\}}$，且 $U_t$ 是 $U_t$ 的可预测补偿子，使得 $U - U$ 是一个 $\mathbb{P}$-局部鞅。那么

$$X_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[Z, M]_s + \widetilde{U}_t$$

是一个 $\mathbb{Q}$-局部鞅。

定义 34. 马尔可夫桥是这样一种过程：通过条件化，使马尔可夫过程 $X$ 在时刻 0 从某个状态 $x$ 出发，并在时刻 $t$ 到达某个状态 $z$。我们将该过程称为由 $X$ 导出的 $(x, t, z)$-桥。

# 2 滤过的扩张与不同的套利概念

## 2.1 预备知识与定义

下文中，我们在给定的滤过概率空间（随机基）（Ω $\mathcal{F}$， $\mathbb{F}$， $\mathbb{P}$）上开展工作，其中滤过 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ 满足右连续性以及通过 $\mathbb{P}$-零集增广的通常假设， $T \in$ （0， $\infty]$ 和 $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$。我们假设 $n$ 个风险资产的价格过程是一般的正半鞅 $S =$ （$S_1$（$t$）...， $S_n$（$t$））$^\top$。

我们用 $\mathcal{L}(S)$ 表示关于 $S$ 可积的可预测过程集合，用 $\mathcal{O}$ 表示可选过程集合。可接受的自融资交易策略集合定义为

$\mathcal{A}(x) = \{(\alpha_0, \alpha) \in (\mathcal{O}, \mathcal{L}(S)) : \ X_t = \alpha_0(t) + \alpha_t \cdot S, \exists c \le 0, X_t = x + \int_0^t \alpha_u \cdot dS_u \ge c, \forall t \in [0,T]\}$，其中 $X_t = x + \int_0^t \alpha_u \cdot dS_u$ 是（归一化的）价值过程。我们还将使用 $\alpha \bullet S$ 表示随机积分过程（$\int_0^t \alpha_u \cdot dS_u$）$_{0\le t\le T}$。下面我们首先回顾若干不同的定义，以阐明套利的概念（更多细节请参见 Jarrow，2021）。

定义 35. 若可容许自融资交易策略 $(\alpha_0, \alpha) \in \mathcal{A}(x)$ 满足以下条件，则称其为（简单）套利机会
(i) $X_0 = x = 0$(ii)
$X_T = \int_0^T \alpha_u \cdot dS_u \ge 0$ $\mathbb{P}$-几乎
处处 (iii) $\mathbb{P}(X_T > 0) > 0.$

定义 36. 一列可容许自融资交易策略 $(\alpha_0, \alpha)_n \in \mathcal{A}(x)$ 及其对应的价值过程 $X^n$，若满足以下条件，则称其产生有界风险下的无界利润
(i) $X_0^n = x > 0$(ii) $X_t^n \ge 0$ $\mathbb{P}$-几乎处处 $\forall t \in [0,T]$(iii) 序列 $(X_T^n)_n \ge 0$ 依概率无界，即 $\lim_{m\to\infty}(\sup_n \mathbb{P}(X_T^n > m)) > 0.$

定义 37. 若一个 $\mathcal{F}_T$-可测随机变量 $\xi$ 满足以下条件，则称其产生第一类套利机会

(i) $\mathbb{P}(\xi \ge 0) = 1$
(ii) $\mathbb{P}(\xi > 0) > 0$

(iii) $\forall x > 0$ 存在一个可容许自融资交易策略 $(\alpha_0, \alpha) \in \mathcal{A}(x)$，其价值过程为$X^{x,}$ $^{\alpha} \geq 0$ 使得 $X^{x,}{}_{T}{}^{\alpha} \geq \xi$。

定义 38. 风险趋于零的免费午餐是一个可容许自融资交易策略序列 $(\alpha_0, \alpha)_n \in \mathcal{A}(x)$，满足 $x \geq 0$，其价值过程为 $X_t^n$，可容许性下界为 $c_n \leq 0$，使得 $\exists c \leq c_n$ 对所有 $n$ 均成立；并且存在一个 $\mathcal{F}_T$-可测随机变量 $\xi \geq x$，使得 $\mathbb{P}(\xi > x) > 0$，且 $X_T^n \to \xi$ 依概率成立。

如果不存在上述类型的套利机会，我们分别称 NA、NUPBR、NA1 和 NFLVR 成立。我们还可以使用以下等价表述来定义 NFLVR（Karatzas、Kardaras，2007）：

定义 39. 若存在一个 $\epsilon > 0$ 和一个递增序列 $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $0 \leq \delta_n \nearrow 1$ 且 $\mathbb{P}(X_T^n > -1 + \delta_n) = 1$，并且对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\mathbb{P}(X_T^n > \epsilon) \geq \epsilon$，则可容许自融资交易策略序列 $(\alpha_0, \alpha)_n$（其价值过程为 $X_t^n$）生成一个风险趋于零的免费午餐。

这些套利概念彼此密切相关。例如，可以证明（Kardaras，2012年；Fontana，2014），NA1 等价于 NUPBR。此外，NFLVR 等价于 NA 和 NUPBR 同时成立（Delbaen Schachermayer，1994；Fontana，2014）。我们还回顾一下，资产定价基本定理最一般的版本指出，对于一般的半鞅 $S$，NFLVR 等价于存在一个定义在 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 上、与 $\mathbb{P}$ 等价的概率测度 $\mathbb{Q}$，在该测度下，$S$ 是一个 $\sigma$-鞅。由于我们假设 $S$ 非负，且每个非负 $\sigma$- 鞅都是局部鞅，因此 NFLVR 等价于存在一个定义在 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 上、与 $\mathbb{P}$ 等价的概率测度 $\mathbb{Q}$，在该测度下，$S$ 是局部鞅。

以下定义也有助于理解接下来的讨论。考虑一个由 $(S, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 给出的一般半鞅金融市场。

定义 40. 一个严格为正的 $\mathbb{F}$-局部鞅 $(L_t)$，满足 $L_0 = 1$ 且 $L_\infty > 0$ 几乎处处成立，称为局部鞅贴现因子，若过程 $(S_t L_t)$ 是一个 $\mathbb{F}$-局部鞅。

注 41. NA1 等价于局部鞅贴现因子的存在。

定义 42. $\mathbb{Q} := L_\infty \mathbb{P}$ 是一个等价局部鞅测度，若存在一个局部鞅贴现因子 $(L_t)$，它是一致可积鞅，且由 $L_\infty$. 闭合

明确了这些概念后，我们现在来阐明不同套利概念与底层过滤族不同类型扩张之间的关系。

## 2.2 EoF 与 NFLVR 的关系

首先注意，第一资产定价基本定理确立了以无免费午餐与无风险套利概念所涵盖的套利机会，与存在关于 $S$ 的等价局部鞅测度之间的联系。因此，对于 $\mathbb{F}$ 的一般扩张 $\mathbb{G}$，我们有如下观察（Neufcourt，2017年，第37页，推论2.3）。

定理43. 假设半鞅 $S = S_0 + M + A$ 在 $\mathbb{F}$ 中满足无免费午餐与无风险套利，其中 $M$ 是局部鞅， $A$ 是有限变差过程。那么， $S$ 在 $\mathbb{G}$ 中满足无免费午餐与无风险套利，当且仅当存在一个等价概率测度，使得在该测度下， $M$ 是 $\mathbb{G}$-半鞅。

考虑初始扩张的设定。以下定理的证明见（Aksamit、Jeanblanc，2017，第97页）。

定理44. 假设 $\zeta$ 在 $\mathbb{P}$ 下满足 Jacod 等价条件 $\mathcal{E}$ 。设 $[0,T]$ 为有限时间范围。若 $S$ 在 $(\mathbb{F},\mathbb{P})$ 中满足无免费午餐与无风险套利，则 $S$ 在 $(\mathbb{F}^{\sigma(\zeta)},\mathbb{P})$ 中满足无免费午餐与无风险套利。

众所周知（Jacod，1985年），在初始扩张设定下， $\mathcal{J}$ 存在一个联合可测过程 $\alpha^x$，使得 $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T)$，且 $\int_0^t (\alpha_u^x)^2 du < \infty$,$\langle p^x, B\rangle_t = \int_0^t p_u^x \alpha_u^x du$, $B$ 是标准的 $\mathbb{F}$-布朗运动，而 $\widetilde{B}_t = B_t - \int_0^t \alpha_u^x du$ 是 $\mathbb{G}$-布朗运动；其中 $p^x$ 是上文定义的条件密度过程，也可写成随机指数形式 $p_t^x = \mathcal{E}\left(-\int_0^t \alpha_u^x dB_u\right)$。以下结果是证明半鞅模型违反无免费午餐与无风险套利的标准工具（证明见 Ankirchner、Imkeller，2005年）。

定理45. 若 $\mathbb{P}\left(\int_0^T (\alpha_t^x)^2 dt = \infty\right) > 0$，则 $S$ 在 $\mathbb{G}$ 中存在自由午餐且有风险：$= \mathbb{F} \vee \sigma(\zeta)$。

该结果的一个推论可用于检验初始扩张滤过中是否满足无免费午餐与无风险套利。

推论46. 若过程 $\alpha^x$ 满足 $\mathbb{E}\left[\exp(\frac{1}{2}\int_0^T (\alpha_t^x)^2 dt)\right] < \infty$，则 $S$ 在 $\mathbb{G}$ 中满足无免费午餐与无风险套利：$= \mathbb{F} \vee \sigma(\zeta)$。

证明。Novikov条件和Girsanov定理保证等价局部鞅测度的存在，因此根据第一个资产定价基本定理，无免费午餐与无风险套利成立。 □

考虑由（$S$、$\mathbb{F}$、$\mathbb{P}$）给出的金融市场，其中无免费午餐与无风险套利成立。回顾上文记号中的停时 $R$ $R = T_0^Z = \inf\{t > 0 : Z_t = 0\}$。

定理 47。（Kreher，第 22 页）设 $T$ 是一个 $\mathbb{F}$停时， $\sigma$ 是一个随机时刻。假设条件 (A) 成立。设 $Z$ 是与 $\sigma$ 相关联的 Azéma超鞅。若 $\mathbb{P}(T_0^Z \leq T) = 0$，则在 $[0, \sigma \wedge T]$ 上的渐进扩张滤过 $\mathbb{G}$ 中，无免费午餐与无风险套利成立。

可以证明，过程 $(\frac{\rho_{t\wedge\sigma}}{N_{t\wedge\sigma}})_{t\geq 0}$ 是 $(S_{t\wedge\sigma})$ 在 $\mathbb{G}$ 中的局部鞅贴现因子，即在 $[0, \sigma]$ 上的 $\mathbb{G}$ 中无套利1成立，其中 $\rho_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho|\mathcal{F}_t)$ 是原始 $\mathbb{F}$市场中的 Radon–Nikodym密度过程，而 $N$ 是伊藤-渡边分解 $Z = ND$ 中相应的局部鞅项，如上所述。这里， $D$ 是由 $D = \frac{1}{N}, \overline{N}_t := \sup_{s\leq t} N_s$ 给出的可预测递减过程。由于下一小节将给出关于无套利1稳定性的更一般结果，因此我们省略该定理的陈述。不过，我们可以将此结果用于能够确保无免费午餐与无风险套利成立的条件。具体而言，下述定理给出了一个充要判据，用于判断 $(\frac{\rho_{t\wedge\sigma}}{N_{t\wedge\sigma}})_{t\geq 0}$ 是否是在 $[0, \sigma \wedge T]$ 上的一致可积鞅，其中 $T$ 是一个 $\mathbb{F}$停时，而 $\sigma$ 是一个随机时刻。

定理48。（Kreher，第26页）设 $T$ 是一个 $\mathbb{F}$停时， $\sigma$ 是一个随机时刻。那么，

$$\left(\frac{\rho_{t\wedge\sigma}}{N_{t\wedge\sigma}}\right)_{t\geq 0} \in \mathcal{M}_{u.i.}(\mathbb{P}, \mathbb{G}) \Leftrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(D_{\infty \mathbb{I}_{T_0^N \leq T}}\right) = 0.$$

该定理有两个直接推论。其一是对上述 $[0, \sigma \wedge T]$ 上 $\mathbb{G}$ 上 NFLVR 稳定性的另一种证明；其二是以下推论。

推论49。如果 $D_\infty = 0$ 几乎必然成立，那么在 $[0, \sigma]$上， $\mathbb{G}$ 中的 NFLVR 成立。

我们注意到，每个伪停时都满足该条件，因为 $D_\infty = 1 - A_\infty = 1 - 1 = 0$。Emery 给出了一个例子，表明其他停时也可能满足条件 $D_\infty = 0$ 几乎必然成立，因此在 $[0, \sigma]$上， $\mathbb{G}$ 中存在一个等价局部鞅测度。

现在我们来看一些关于 NFLVR 在滤过扩张下稳定性的例子。我们先从一些众所周知的基本例子入手，再讨论更具体（且更复杂）的例子。

例50。（Karatzas、Pikovski，1996；另见 Aksamit、Jeanblanc，2017）考虑 Black–Scholes框架下的投资组合优化问题。假设风险

资产的动态由形式为 $dS_t = S_t\mu dt + S_t\sigma dB_t$ 的随机微分方程驱动，其中 $B$ 是布朗运动，$\mu$ 和 $\sigma$ 是常数。我们的目标是针对给定的 $T$ 最大化预期对数效用$\mathbb{E}(\ln X^{\pi}{}_{,T}{}^{x})$，其中上标强调其对投资于风险资产的财富比例 $\pi$ 以及初始财富 $x$ 的依赖关系。容易验证，财富过程的动态由下式给出

$$\ln X_t^{\pi,x} = \ln x + \int_0^t (r - \frac{1}{2}\pi_s^2\sigma^2 + \theta\pi_s\sigma)ds + \sigma\int_0^t \pi_s dB_s,$$

其中 $\theta := \frac{\mu - r}{\sigma}$（即所谓的风险市场价格），且 $\pi_t := \frac{\alpha_t S_t}{X_t}$，而 $\alpha_t$ 是风险资产中的持仓。考虑满足 $\pi \bullet B$ 为真鞅的可容许策略，即满足 $\mathbb{E}(\int_0^t \pi_s^2 ds) < \infty$ 的 $\pi$。取期望，并注意到右侧的随机积分为零，可得以下表达式

$$\mathbb{E}(\ln X_t^{\pi,x}) = \ln x + \int_0^t \mathbb{E}((r - \frac{1}{2}\pi_s^2\sigma^2 + \theta\pi_s\sigma))ds,$$

令 $\pi_s^* = \frac{\theta}{\sigma}$ 即可使其达到最优，其中 $\pi$ 属于可容许策略集。稍加推导可以证明，该解对所有可容许策略均成立，包括 $\pi \bullet B$ 仅为局部鞅的情形。

现在我们考虑内幕人士的优化问题。内幕人士可以获知 $B_{T^*}$，即生成模型中随机性的布朗运动的终值。一个标准结果是，在这个扩张滤过下，过程 $\beta_t = B_t - \int_0^t \frac{B_1 - B_s}{1-s}ds$ 是一个 $\mathbb{G}$-布朗运动。因此，对于 $T < T^*$，财富过程在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ 上的动态如下：

$$\ln X_T^{\pi,x} = \ln x + \int_0^T (r - \frac{1}{2}\pi_s^2\sigma^2 + \widetilde{\theta}_s\pi_s\sigma)ds + \sigma\int_0^T \pi_s d\beta_s,$$

其中，$\widetilde{\theta}_s = \theta + \frac{B_{T^*} - B_s}{T^* - s}$标准计算表明，内幕人士的最优投资组合（即使 $T < T^*$ 的预期终端对数效用最大化的组合）为 $\pi^* = \frac{\theta_s}{\sigma}$. 记 $V^{\mathbb{F}}$ 和 $V^{\mathbb{G}}$ 分别表示不同滤过下目标函数的最优值，则对于 $T < T^*$，有 $V^{\mathbb{G}}(x) = V^{\mathbb{F}}(x) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(\int_0^T (\frac{B_{T^*} - B_s}{T^* - s})^2 ds = V^{\mathbb{F}}(x) + \frac{1}{2}\ln\frac{T^*}{T^* - T}$. 从这一表达式显然可知，当 $T \uparrow T^*$时，目标函数趋于无穷大。换言之，在 $T = T^*$ 时，积分 $(\int_0^{T^*} \mathbb{E}(\frac{B_{T^*} - B_s}{T^* - s})^2 ds$发散，因此在 $\mathbb{G}$上不存在等价鞅测度。不过，对于所有 $T < T^*$，该测度在 $[0, T]$ 上确实存在，

也就是说，内幕信息只会在时刻 $T^*$产生套利机会。以下例子将在更一般的情形下对这个简单例子作进一步阐述。

例子 51。（Imkeller、Perkowski，2013）考虑一个随机基（$\Omega$ $\mathcal{F}$,$\mathbb{F}$,$\mathbb{P}$），其中 $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$，且 $\mathcal{F}_0$ 是平凡的，即 $\forall A \in \mathcal{F}_0$ 我们有 $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$。假设 $S$ 是一般半鞅，且市场是完备的（即每个或有索赔都可以对冲）。取一个 $\mathcal{F}_\infty$-可测随机变量 $L$，它几乎处处不为常数，并考虑初始扩张滤过 $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_t \vee \sigma(L)\ t \geq 0)$。由于 $L$ 不是常数，存在 $A \in \sigma(L)$，使得 $\mathbb{P}(A) \in (0,1)$。假设 $\mathbb{Q}$ 是 $S$对应的等价 $\mathbb{G}$-局部鞅测度。考虑 $\mathbb{F}$-鞅 $N_t = \mathbb{E}_\mathbb{Q}(\mathbb{I}_A|\mathcal{F}_t)$，$t \geq 0$。由完备性，$\mathbb{I}^A$可以被复制，即存在一个 $\mathbb{F}$-可预测可容许交易策略 $\alpha$，使得 $N_t = \mathbb{E}_\mathbb{Q}(\mathbb{I}^A) + \int_0^t \alpha_s dS_s$。这意味着$\int_0^t \alpha_s dS_s$在 $\mathbb{Q}$下是有界的 $\mathbb{G}$-局部鞅，因此是真鞅。考虑一个在$\mathbb{Q}$下具有正测度的事件 $A \in \mathcal{G}_0$，并注意

$$0 = \mathbb{E}_\mathbb{Q}(\mathbb{I}_{A^c}\mathbb{I}_A) = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left(\mathbb{I}_{A^c}(\mathbb{E}_\mathbb{Q}(\mathbb{I}_A) + \int_0^\infty \alpha_s dS_s)\right) = \mathbb{Q}(A^c)\mathbb{Q}(A) > 0,$$

这与假设矛盾。因此，等价局部鞅测度不存在，无免费午餐与无风险套利条件不成立。

然而，并非所有关于价格过程未来取值的信息都会产生套利机会。（D'Auria、Salmeron，2019年）给出了一个例子：关于风险资产终值（例如，定义为 $B_T$ 的某个函数）的一些信息，并不一定会导致套利机会。由于计算相当繁琐，我们这里只介绍他们推导过程中的主要步骤。

例子 52. 考虑具有 $\mathbb{G} := \mathbb{F}^{\sigma(\zeta)}$ 的初始扩张情形，其中附加信息由 $\zeta = \mathbb{I}_{\{B_T \in \cup_{k=-\infty}^{+\infty}[2k-1,2k]\}}$ 提供，该信息表示布朗运动最终是否会落入某个由长度为 1 的区间组成的特定无限并集中。价格过程的 $\mathbb{G}$-半鞅分解中的新漂移项为

$$\alpha_t^x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T-t}} \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi'(\frac{2k-B_t}{\sqrt{T-t}}) - \Phi'(\frac{2k-1-B_t}{\sqrt{T-t}})}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi'(-\frac{2k-B_t}{\sqrt{T-t}}) - \Phi'(\frac{2k-1-B_t}{\sqrt{T-t}})} & \text{when} \quad x = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{T-t}} \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi'(\frac{2k-1-B_t}{\sqrt{T-t}}) - \Phi'(\frac{2k-B_t}{\sqrt{T-t}})}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi'(-\frac{2k-B_t}{\sqrt{T-t}}) - \Phi'(\frac{2k-1-B_t}{\sqrt{T-t}})} & \text{when} \quad x = 1, \end{cases}$$

其中， $\Phi$ 是标准高斯随机变量的分布。随后可以证明， $\alpha^x$ 满足 Novikov条件 $\mathbb{E}\left[\exp(\frac{1}{2}\int_0^T(\alpha_t^x)^2dt)\right]<\infty$，因此根据上述推论， $S$ 在 $\mathbb{G}$ 中满足无免费午餐与无风险套利。

例 53。（Kreher，2016，第 25 页）考虑金融市场模型 $(S_t,\mathbb{F},\mathbb{P})$。设 $\sigma$ 是一个有界于 1 的伪停时。由于 $1-Z_1=A_1=1$，因此 $\mathbb{P}(T_0^Z\leq 1)=1$，其中 $Z_t=\mathbb{P}(\sigma>t|\mathcal{F}_t)$ 是 Azéma 超鞅， $T_0^Z$ 是 $Z$ 首次到达 0 的时刻。此外， $\mathbb{E}(\rho_\sigma)=1$ 且 $N\equiv 1$，其中 $\rho$ 是该市场的等价局部鞅测度，即 $\rho_t:=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho|\mathcal{F}_t)$，而 $Z=ND$ 是 Azéma 超鞅的伊藤-渡边分解（即 $N$ 是一个从 $N_0=1$ 开始的连续非负局部鞅， $D$ 是一个连续递减过程，使得 $N$ 和 $D$ 在集合 $\{Z=0\}$ 上均为常数）。因此，$(\rho_{t\wedge\sigma})$ 是一个局部鞅贴现因子，且 $\mathbb{E}(\rho_\sigma)=1$，故为一致可积鞅。因此，扩展市场 $(S_{t\wedge\sigma},\mathbb{G},\mathbb{P})$ 存在一个等价局部鞅测度，其中 $\mathbb{G}=(\mathcal{G}_{t\wedge\sigma}:\ t\geq 0)$，从而 NFLVR 在 $[0,\sigma]=[0,\sigma\wedge 1]$ 上成立。

例子 54。（Emery，也见 Kreher，第 27 页）。设 $W$ 是一个 $\mathbb{F}$-布朗运动，并定义 $\sigma:=\sup\{t\leq 1:\ 2W_t=W_1\}$。那么，相应的 Azéma超鞅为

$$Z_t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{|W_t|}{\sqrt{1-t}}}^{\infty}x^2e^{-x^2/2}dx=m_t-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t\frac{|W_u|}{(1-u)^{3/2}}\exp\left(-\frac{W_u^2}{2(1-u)}\right)du,$$

其中 $m\neq 1$ 是 $Z$ 的 Doob-Meyer分解中的局部鞅部分。现在$\forall n\in\mathbb{N}$ 定义集合

$$B_n=\left\{|W_u|>\sqrt{\frac{2}{n}}\quad\forall u\in[1-\frac{1}{n},1]\right\}.$$

注意，$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(B_n)=\mathbb{P}(W_1\neq 0)=1$，并且在集合 $B_n$ 上，对于所有 $u\in[1-\frac{1}{n},1]$，都有 $\frac{|W_u|}{\sqrt{1-u}}>2$，因此

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{|W_u|}{\sqrt{1-u}}}^{\infty}x^2e^{-x^2/2}dx\leq\int_{\frac{|W_u|}{\sqrt{1-u}}}^{\infty}(x^2-1)e^{-x^2/2}dx=\frac{|W_u|}{\sqrt{1-u}}\exp\left(-\frac{W_u^2}{2(1-u)}\right),$$

并且在 $B_n$ 上，对于上述记号中的 $A = 1 - D$，我们有：

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dA_t}{Z_t} &\geq \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \frac{dA_t}{Z_t} \geq \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \frac{dA_t}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{|W_t|}{\sqrt{1-t}}}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx} \\ &\geq \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \frac{dA_t}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{|W_t|}{\sqrt{1-t}}\exp\left(-\frac{W_t^2}{2(1-t)}\right)} = \frac{1}{2}\int_{1-\frac{1}{n}}^1 \frac{dt}{1-t} = \infty.\end{aligned}$$

因此可知，在集合 $B_n$ 上有 $D_\infty = D_1 = \exp\left(-\int_0^1 \frac{dA_t}{Z_t}\right) = 0$，从而由单调收敛定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(D_\infty \mathbb{I}^{B_n}\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(D_\infty\right) = 0 \Leftrightarrow D_\infty = 0 \quad \mathbb{P} - \text{a.s.}$$

B由上述推论可知，NFLVR 在 $\mathbb{G}$ 上的 $[0, \sigma$ 中成立 ].

例子 55.（Imkeller，2001年）考虑配备了典范维纳过程 $W = (W_t)_{t\geq 0}$ （即坐标过程）的一维典范维纳空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，其中 $\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 是定义在 $\mathbb{R}_+$ 上、从 0 开始的连续函数集合，$\mathcal{F}$ 是关于 $\mathbb{R}_+$ 的紧子集上一致收敛的博雷尔集所构成的 $\sigma$-代数，而 $\mathbb{P}$ 是维纳测度。一个金融市场定义为一对 $(b, \sigma)$，其中 $b$ 是一个逐步可测的平均收益率过程，满足 $\int_0^1 |b_t| dt < \infty$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立；$\sigma$ 是逐步可测的波动率过程，满足 $\int_0^1 \sigma_t^2 dt < \infty$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立。这一对确定了如下给出的（股票）价格过程：

$$\frac{dS_t}{S_t} = \int_0^t b_u du + \int_0^t \sigma_u dW_u$$

若渐进可测过程 $\pi$ 满足 $\int_0^1 |\pi_t b_t| dt < \infty$ $\mathbb{P}$-几乎处处且 $\int_0^1 |\pi_t \sigma_t|^2 dt < \infty$ $\mathbb{P}$-几乎处处，则它是一个投资组合过程。我们还将超额收益过程 $R$ 和收益过程 $C$ 定义为：对所有 $t \in [0, 1]$，$dR_t = \frac{dS_t}{S_t}$ 和 $G_t = \int_0^t \pi_u dR_u$。考虑一个诚实时刻 $L$，以及 $\mathbb{F}$ 的渐进扩张，定义为 $\mathbb{G} := \mathbb{F} \vee \sigma(L)$。那么过程

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t \mathbb{I}^{[0,L]}(s) \frac{\frac{d}{dt}\langle M^L, W\rangle_s}{Z_{s-}^L} ds + \int_0^t \mathbb{I}^{(L,1]}(s) \frac{\frac{d}{dt}\langle M^L, W\rangle_s}{1 - Z_{s-}^L} ds$$

是一个 $\mathbb{G}$-维纳过程，其中 $M^L$ 是 Doob-Meyer分解中

与 $L$相关联的 Azéma超鞅 $Z^L$ 。令

$$\alpha_t = \int_0^t \mathbb{I}^{[0,L]}(s)\frac{\frac{d}{dt}\langle M^L, W\rangle_s}{Z^L_{s-}}ds - \int_0^t \mathbb{I}^{(L,1]}(s)\frac{\frac{d}{dt}\langle M^L, W\rangle_s}{1-Z^L_{s-}}ds.$$

˜从内幕人士的角度来看，新的金融市场由二元组 $(b, \tilde{\sigma})$ 给出，

˜ ˜其中 $b_t = b_t + \sigma_t\alpha_t$，且对于所有 $t \in [0,1]$，相对于 $\mathbb{G}$-维纳过程 $W$，均有 $\tilde{\sigma}_t = \sigma_t$。注意，$R_t = \int_0^t b_u du + \int_0^t \sigma_u dW_u = \int_0^t \tilde{b}_u du + \int_0^t \sigma_u d\widetilde{W}_u$ 满足无免费午餐与无风险套利，当且仅当存在一个等价测度 $\mathbb{Q}$，使得

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{G}_t} = \exp\left(-\int_0^t \theta_s d\widetilde{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right), \quad t \in [0,1],$$

其中 $\theta_t = \frac{\tilde{b}_t}{\sigma_t} = \frac{b_t}{\sigma_t} + \alpha_t$。因此，若 $\int_0^1 \theta_t^2 dt = \infty$ 在一个具有正 $\mathbb{P}$-测度的集合上成立，则内幕人士可以获得免费午餐。可以证明（Imkeller 2002 中的命题 1.1），若 $\int_0^t \alpha_t^2 dt = \infty$ 在一个具有正 $\mathbb{P}$-测度的集合上成立，则 $\int_0^t \theta_t^2 dt = \infty$ 在一个具有正 $\mathbb{P}$-测度的集合上成立，其中 $t \in (0,1]$。一个具体例子可通过考虑诚实时刻 $L = \sup\{t \in [0,1] \text{ 得到: } W_t = a\}$ 对某个 $a \in \mathbb{R}$ 成立。在这种情况下（显式计算见命题 2.1 和 2.2），对于 $t \in [0,1]$

$$Z_t^L := \mathbb{P}(L > t|\mathcal{F}_t) = 1 - F_{1-t}(|W_t - a|)$$

and

$$\alpha_t = -\mathbb{I}^{[0,L]}(t)\frac{p_{1-t}(|W_t-a|)}{1-F_{1-t}(|W_t-a|)}\text{sgn}(W_t-a) - \mathbb{I}^{(L,1]}(t)\frac{p_{1-t}(|W_t-a|)}{F_{1-t}(|W_t-a|)}\text{sgn}(W_t-a),$$

其中， $p_{1-t}$ 和 $F_{1-t}$ 分别是 $|W_t|$的分布的密度和分布函数。随后可以证明（命题 2.3），对于任意 $t \in (0,1]$，我们都有$\int_0^t \alpha_t^2 dt = \infty$ 在正$\mathbb{P}$-测度的集合上成立，因此 $R$ 不满足 NFLVR。

## 2.3 EoF 与 NUPBR/NA1 之间的关系

我们一如既往地从一般原理出发进行论证。众所周知， $S$ 满足无套利1，当且仅当存在一个正的局部鞅 $Z$ ，使得 $ZS$ 是局部鞅。因此可得以下结果（Neufcourt，2017年，第38页，推论2.5，定理

2.6）。

定理56。假设 $S$ 在 $\mathbb{F}$中满足无套利1。那么， $S$ 在 $\mathbb{G}$ 中满足无套利1，当且仅当存在一个正的 $\mathbb{G}$-局部鞅 $Z$ ，使得 $ZM$ 是局部鞅；也就是说， $M$在 $\mathbb{G}$中满足无套利1，其中 $M$ 是 $S$的半鞅分解中的局部鞅。等价地，一个 $\mathbb{F}$-局部鞅 $M$ 在 $\mathbb{G}$ 中满足无套利1，当且仅当存在一个可预测过程 $\alpha$，使得 $M-\int_0^{\cdot}\alpha_s d[M,M]_s$是 $\mathbb{G}$-局部鞅。

现在再次考虑初始扩张框架。回顾一下，在 $\mathcal{J}$ （因此在$\mathcal{E}$）下，存在一个密度过程（$p_t(u)$ $t\geq 0$），它是一个 $\mathbb{F}$-鞅，并且 $\forall t\geq 0$ 测度 $p_t(u)\eta(du)$ 等于 $\mathbb{P}(\zeta\in du|\mathcal{F}_t)$，其中 $\eta$ 是 Jacod 条件中的支配测度。以下定理的证明可见（Aksamit、Jeanblanc，2017年，第97页）。

定理57。假设 $\zeta$ 在 $\mathbb{P}$下满足 Jacod 等价条件 $\mathcal{E}$ 。如果 $S$具有一个局部鞅贴现因子 $Y$（即在 $\mathbb{F}$中满足无免费午餐且风险有界），则 $S$在 $\mathbb{F}^{\sigma(\zeta)}$.中具有 $Y/p(\zeta)$ 作为局部鞅贴现因子

下一个结果涉及初始扩张下 NA1的保持。由于 NA1 等价于无免费午餐且风险有界，前一个定理适用，但我们仍然给出该结果，以明确建立二者之间的联系（Acciaio、Fontana、Kardaras，2015年）。对每个 $x\in E$和 $n\in\mathbb{N}$，在（Ω $\mathbb{F}$）上定义一族停时如下： $\zeta_n^x:=\inf\{t\in\mathbb{R}_+|p_t(x)<1/n\}$，$\zeta^x:=\inf\{t\in\mathbb{R}_+|p_t(x)=0\}$。对每个 $x\in E$，定义 $\Lambda^x:=\{\zeta^x<\infty, p_{\zeta^x-}(x)>0\}$。最后，在（Ω $\mathbb{F}$）上定义一个停时如下：$\eta^x:=\zeta^x_{\Lambda^x}=\zeta^x\mathbb{I}_{\Lambda^x}+\infty\mathbb{I}_{\Omega\setminus\Lambda^x}$对所有 $x\in E$成立；该时刻正是密度过程 $p(x)$ 跳至 0 的时刻。

定理58. 假设 $\mathcal{J}$成立， $\mathbb{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是可分的，且 $\mathbb{P}(\eta^x<\infty,\Delta S_{\eta^x}\neq 0)=0$ $\gamma$-几乎处处 $x\in E$。如果 $S$ 在 $\mathbb{F}$ 中满足无套利 1，那么 $S$ 在 $\mathbb{G}$ 中满足无套利 1。

有两点需要说明。首先，正如各种反例所示，条件 $\mathbb{P}(\eta^x<\infty,\Delta S_{\eta^x}\neq 0)=0$ 不能省略。其次，该定理的陈述针对特定的半鞅 $S$ ，并未讨论对任意半鞅的 NA1 保持性。以下结果解决了这一问题，为此有必要先引入一些记号。我们沿用（Acciaio、Fontana、Kardaras，2015）的记法。记$D^x$为$\mathbb{I}_{\llbracket\eta^x,\,\infty\llbracket}$在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ 上对所有 $x\in E$ 的可预测补偿子。定义 $(S^x)_{x\in E}$为 $S^x:=\mathcal{E}(-D^x)^{-1}\mathbb{I}_{\llbracket 0,\,\eta^x\llbracket}$，对所有 $x\in E$ 成立。过程 $S^J$定义为 $S^J(\omega,t):=S_t^{J(\omega)}(\omega)$

对所有 $(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$，并且它是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ 上的一个半鞅。 $S^J$ 具有特别直观的金融解释：一位内幕人士掌握了 $J$ 的信息，并在时刻 0 对编号为 $J$ 的单单位股票建立头寸，且无限期持有。

定理59。在 $\mathcal{J}$ 条件下，以下结论成立：
(i) 若 $\mathbb{P}(\eta^x < \infty) = 0$ $\gamma$ 几乎处处有 $x \in E$，则任何在 $\mathbb{F}$ 中满足无套利1的 $S$，在 $\mathbb{G}$ 中也满足无套利1。

(ii) 若 $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 可分，且 $\int_E \mathbb{P}(\eta^x < \infty)\gamma(dx) > 0$，则族 $(S^x)_{x\in E}$ 在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上由局部鞅组成，并且 $S^J$ 单调不减，满足 $\mathbb{P}(S^J_t = S^J_0, \forall t \in \mathbb{R}_+) < 1.$。特别地，对于任意 $x \in E$， $S^x$ 在 $\mathbb{F}$ 中满足无套利1，但 $S^J$ 在 $\mathbb{G}$ 中不满足无套利1。

下面我们将通过具体例子说明，在某些情况下，无套利1（或等价地，无免费午餐且风险有界）可能成立，但在初始扩张滤过中通常并不成立。

例60。（Chau等人，2016）考虑两个相互独立、强度为 $\lambda = 1$ 的泊松过程 $N^1$ 和 $N^2$。贴现风险资产价格过程取为 $S_t = e^{N^1_t - N^2_t}$，即

$$dS_t = S_{t-}((e-1)dN^1_t + (e^{-1}-1)dN^2_t), \quad S_0 = 1, t \in [0,T].$$

$\mathbb{F}$ 是由两个泊松过程生成的自然滤过，而 $S$ 在 $\mathbb{F}$ 中满足无免费午餐与无风险套利，其中任意等价局部鞅测度的密度 $Z$ 由下式给出

$$dZ_t = Z_{t-}((\alpha^1_t - 1)(dN^1_t - dt) + (\alpha^2_t - 1)(dN^2_t - dt)),$$

其中 $\alpha^1$ 和 $\alpha^2$ 是正的可积过程，且 $\alpha^1_t = e^{-1}\alpha^2_t$.

现在考虑 $N_t := N^1_t - N^2_t$将原有滤过扩充，并加入终值 $N_T$。这相当于已知（即拥有关于 $S_T$ 的内幕信息）。于是可以证明，对所有 $t \in [0,T)$，条件密度的形式为

$$p_t(x) = \frac{\mathbb{P}(N_T = x|\mathcal{F}_t)}{\mathbb{P}(N_T = x)} = \frac{\sum_{k\geq 0} e^{-(T-t)}\frac{(T-t)^k}{k!} e^{-(T-t)}\frac{(T-t)^{k+x-N_t}}{(k+x-N_t)!}\mathbb{I}^{k+x-N_t\geq 0}}{\sum_{k\geq 0} e^{-T}\frac{T^k}{k!}e^{-T}\frac{T^{x+k}}{(x+k)!}} > 0,$$

且对于 $t = T$

$$p_T(x) = \frac{\mathbb{I}^{N_T=x}}{\sum_{k\geq 0} e^{-T}\frac{T^k}{k!}e^{-T}\frac{T^{x+k}}{(x+k)!}},$$

由此可见，密度过程不会跳至 0，即 $p_t(x)$ 在时间 $T$之前严格为正。这意味着 $S$ 在 $\mathbb{G}$. 中满足无免费午餐且风险有界（无套利1）

例61。（Acciaio 等人，2015年）考虑一个强度为 $\lambda > 0$ 的泊松过程，它定义在时间区间 $[0, T]$ 上，取值于 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$，其中 $T \in$属于 $(0, \infty)$。我们通过终值 $J := N_T$扩张滤过。假设 $\mathcal{J}$ 成立，且已知密度过程为

$$p_t(x) = e^{\lambda t}\frac{(\lambda(T-t))^{x-N_t}}{(\lambda T)^x}\frac{x!}{(x-N_t)!}\mathbb{I}^{\{N_t\leq x\}}, \quad \text{for all} \quad t \in [0, T), \quad p_T(x) = e^{\lambda T}\frac{x!}{(\lambda T)^x}\mathbb{I}^{\{N_T=x\}}.$$

现在考虑过程 $S_t := \exp(N_t - \lambda t(e-1))$，对所有 $t \in [0, T]$均成立。可以证明它是一个严格为正的 $\mathbb{F}$-鞅，这意味着无套利1在 $\mathbb{F}$中成立。为证明它在 $\mathbb{G}$ 中不成立，考虑策略 $(-_{\mathbb{I}^{\mathbb{I}\sigma,\ T\mathbb{I}}})$，其中 $\sigma := \inf\{t \in [0, T] | N_t = N_T\}$。因此，相应的价值过程为

$$(-_{\mathbb{I}^{\mathbb{I}\sigma,T\mathbb{I}}} \cdot S)_t = {}_{\mathbb{I}^{\{t>\sigma\}}}\exp(N_\sigma - \lambda\sigma(e-1))(1 - \exp(-\lambda(t-\sigma)(e-1))).$$

因此可知，$-_{\mathbb{I}^{\mathbb{I}\sigma,\ T\mathbb{I}}} \bullet S$是非递减的，且 $\mathbb{P}(\sigma < T) = 1$，因此在 $\mathbb{G}$中无套利1不成立。仔细考察这个例子可知，条件 $\mathbb{P}(\eta^x < \infty, \Delta S_{\eta^x} \neq 0) = 0$ 对 $\gamma$-几乎处处的 $x \in E$ 均被违反，因为过程 $p(x)$有正概率跳至0（在泊松过程 $N$的跳跃时刻）。

现在我们考虑一种渐进扩张设定，其核心主要在于Azéma超鞅的行为。具体而言，我们考虑一个定义为 $\tau : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ 使得 $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 0$的随机时刻。滤过按如下方式渐进扩张

$$\mathcal{G}_t = \{B \in \mathcal{F} \mid B \cap \{\tau > t\} = B_t \cap \{\tau > t\} \text{ for some } B_t \in \mathcal{F}_t\} \quad \text{for all} \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

因此， $\mathbb{G}$ 将 $\tau$ 变为一个停时。 $\tau$ 的有限性意味着 $Z_\infty := \lim_{t\to\infty} Z_t = 0$几乎处处成立。由此可知， $Z$ 可表示为 $Z = m - A$，其中 $A$ 是${}_{\mathbb{I}^{\mathbb{I}\tau的\infty\mathbb{I}}}$ 对偶可选投影， $m$ 是$(\Omega\ \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 上的某个一致可积鞅，并且 $m_t =$

$\mathbb{E}(A_\infty|\mathcal{F}_t)$。还可以证明，对于任意 $\mathbb{F}$-停时 $\sigma$，我们有 $\Delta A_\sigma = \mathbb{P}(\tau = \sigma|\mathcal{F}_\sigma)$在 $\{\sigma < \infty\}$ 上成立。与初始扩张的情形类似，我们定义若干停时。对每个 $n \in \mathbb{N}$，在$(\Omega, \mathbb{F})$上定义一族停时如下：$\zeta_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+|Z_t < 1/n\}$，$\zeta := \lim_{n\to\infty} \zeta_n = \inf\{t \in \mathbb{R}_+|Z_{t-} = 0 \text{ 或 } Z_t = 0\} = \inf\{t \in \mathbb{R}_+|Z_t = 0\}$。现在定义 $\mathcal{F}_\zeta$-可测事件 $\Lambda := \{\zeta < \infty, Z_{\zeta-} > 0, \Delta A_\zeta = 0\}$，并在$(\Omega, \mathbb{F})$上定义一个停时 $\eta := \zeta_\Lambda = \zeta_{\mathbb{I}^\Lambda} + \infty_{\mathbb{I}^{\Omega\setminus\Lambda}}$。注意到 $Z_\eta = \mathbb{P}(\tau > \eta|\mathcal{F}_\eta) = 0$且 $\mathbb{P}(\tau = \eta < \infty|\mathcal{F}_\eta) = \Delta A_{\eta_{\mathbb{I}^{\{\eta<\infty\}}}} = \Delta A_{\eta_{\mathbb{I}^\Lambda}} = 0$，其中我们使用了 $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 0$这一事实。对于特定的停半鞅 $S^\tau$，以下是一个重要结果：$= (S_{\tau\wedge t})_{t\in\mathbb{R}_+}$。

定理 62. 假设 $S$ 在 $\mathbb{F}$ 中满足无套利1，且 $\mathbb{P}(\eta < \infty, \Delta S_\eta \neq 0) = 0$。那么 $S^\tau$ 在 $\mathbb{G}$ 中满足无套利1。

以下是适用于所有半鞅的一般结果。

定理 63. 以下陈述成立：
(i) 假设 $\mathbb{P}(\eta < \infty) = 0$。那么对于任何在 $\mathbb{F}$ 中满足无套利1的 $S$，可得 $S^\tau$ 在 $\mathbb{G}$ 中满足无套利1。
(ii) 假设 $\mathbb{P}(\eta < \infty) > 0$。那么 $S := \mathcal{E}(-D)^{-1}_{\mathbb{I}^{[\![0,\ \eta[\![}}$ 是一个 $\mathbb{F}$-局部鞅，且 $S^\tau$ 单调不减，并且 $\mathbb{P}(S_\tau > 1) > 0$，其中 $D$ 是 $_{\mathbb{I}^{[\![\eta,\ \infty[\![}}$ 在 $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 上的可预测补偿子。

现在我们通过具体例子说明，在渐进扩张滤过中，无套利1（或等价地，无免费午餐且风险有界）可能成立，也可能不成立。

例 64。（Acciaio 等人，2015年，第1769页）考虑定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量 $\zeta \sim \text{Exp}(1)$。定义 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为满足通常假设且使 $\zeta$ 成为停时的最小滤过。考虑渐进扩张 $\mathbb{G} := \mathbb{F} \vee \sigma(\tau)$，其中 $\tau := \zeta/2$。照例，令 $Z$ 为与 $\tau$ 相关的 Azéma超鞅，令 $A$ 为 $_{\mathbb{I}^{[\![\tau,\infty[\![}}$ 的对偶可选投影。注意，对所有 $t \in \mathbb{R}_+$，$Z_t = \exp(-t)\,\mathbb{I}^{\{t<\zeta\}}$。此外，对所有有界$\mathbb{F}$-停时，$\Delta A_\sigma = \mathbb{P}(\tau = \sigma|\mathcal{F}_\sigma) = \mathbb{P}(\zeta = 2\sigma|\mathcal{F}_\sigma) = 0$，因此 $\Delta A = 0$。注意，$\zeta = \inf\{t \in \mathbb{R}_+|Z_{t-} = 0 \text{ or } Z_t = 0\}$，且 $Z_{\zeta-} = \exp(-\zeta) > 0$；根据 $\eta$ 的构造，我们有 $\eta = \zeta$。注意，$_{\mathbb{I}^{[\![\eta,\infty[\![}}$ 的 $\mathbb{F}$-可预测补偿子为 $D := (\eta \wedge t)_{t\in\mathbb{R}_+}$，且 $\eta = \zeta$ 在 $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 上是全不可达的。由于 $\mathbb{P}(\eta < \infty) = 1$，我们可以应用上述定理的 (ii) 部分，并

得到 $S:=\mathcal{E}(-D)^{-1}{}_{\mathbb{I}}\mathbb{I}_{0,\ \eta\mathbb{I}}=\exp(D)_{\mathbb{I}}\mathbb{I}_{0,\ \eta\mathbb{I}}=(\exp(t)\mathbb{I}^{\{t<\zeta\}})_{t\in\mathbb{R}_+}$。由于 $S$ 是拟左连续的非负鞅，因此它在 $\mathbb{F}$ 中满足无套利1。然而，由于 $S$ 在 $\tau$ 之前严格递增，因此 $S^{\tau}$ 在 $\mathbb{G}$ 中不满足无套利1。

例65。（Acciaio 等人，2015年，第1769页）沿用前一例的记号，考虑一个随机变量 $\zeta:\Omega\ \to\ \mathbb{N}$，其中对所有 $k\in\mathbb{N}$，有 $p_k:=\mathbb{P}(\zeta=k)\in(0,1)$，且 $\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$。令 $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为满足通常假设并使 $\zeta$ 成为一个停时的最小滤过。注意，由于 $\zeta$ 取值于 $\mathbb{N}$，故其是可达的。考虑渐进扩张 $\mathbb{G}:=\mathbb{F}\vee\sigma(\tau)$，其中 $\tau:=\zeta-1$。注意，在 $\{\zeta\le t\}$ 上有 $Z_t=0$，并且

$$Z_t=\mathbb{P}(\tau>t|\mathcal{F}_t)=\mathbb{P}(\zeta>t+1|\mathcal{F}_t)=\mathbb{P}(\zeta>\lceil t+1\rceil|\mathcal{F}_t)=\frac{q_{\lceil t+1\rceil}}{q_{\lceil t\rceil}}\ \text{on}\ \{t<\zeta\},$$

其中，对所有 $k\in\{0,1,2,...\}.$，有 $q_k:=\sum_{n=k+1}^{\infty}p_n$。注意到 $\zeta=\inf\{t\in\mathbb{R}_+|Z_{t-}=0\text{ 或 }Z_t=0\}$，且 $Z_{\zeta-}=\frac{q_{\lceil\zeta\rceil}}{q_{\lceil\zeta-1\rceil}}>0,\quad\Delta A_\zeta=\mathbb{P}(\tau=\zeta|\mathcal{F}_\zeta)=0$。因此，$\eta=\zeta$，并且 $\eta$ 在 $(\Omega\ \mathbb{F},\mathbb{P})$ 上是可达的。

# 3 滤过扩张与测度变换

## 3.1 测度变换下的滤过扩张

上述讨论引出了一个问题：在底层概率测度发生变换时，$\mathcal{H}$ 或 $\mathcal{H}'$ 是否仍然成立？我们从最直观明确的浸入情形开始。以下一般结果由（Jeulin、Yor，1978年）证明。证明另见（Coculescu 等人，2012年，第9页）或（Aksamit、Jeanblanc，2017年，第55页）。

定理66。假设 $\mathbb{F}\hookrightarrow\mathbb{G}$ 在 $\mathbb{P}$下成立。令 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathcal{G}_\infty$上与 $\mathbb{P}$ 等价。对于 $t\in[0,\infty)$，定义 $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{G}_t}=L_t$ 和 $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t}=l_t=\mathbb{E}\left(L_t|\mathcal{F}_t\right)$。
(i) 若 $X$ 在 $\mathbb{Q}$ 下是一个 $\mathbb{F}$-局部鞅，则该过程

$$X_t+\int_0^t\frac{L_{s-}}{L_s}\left(\frac{1}{l_{s-}}d[X,l]_s-\frac{1}{L_s}d[X.L]_s\right)=X_t+\int_0^t\frac{1}{Y_{s-}}d[X,Y]_s,$$

其中 $Y = l/L$ 在 $\mathbb{Q}$. 下是一个 $\mathbb{G}$-局部鞅
(ii) $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$ 在 $\mathbb{Q}$ 下成立，当且仅当对于任意 $\zeta \in L^1(\mathcal{F}_\infty)$，我们有

$$\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\zeta L_\infty|\mathcal{G}_t)}{L_t} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\zeta l_\infty|\mathcal{F}_t)}{l_t}.$$

(iii) 假设 $L$ 是 $\mathbb{F}$-适应的，则 $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$ 在 $\mathbb{Q}$下成立。此外，如果 $\mathbb{G}$ 是由随机时刻 $\tau$ 得到的渐进扩张，那么在 $\mathbb{P}$和 $\mathbb{Q}$下相应的 Azéma 超鞅相等。

We 现在考虑初始扩张下的概率测度变换。

定理 67. 假设 $\zeta$ 满足 Jacod 等价条件，且 $p$ 是通常定义的相应密度过程。则过程 $L := {}^{p_0(\zeta)}\, p(\zeta)$ 是在$\mathbb{P}$下的正 $\mathbb{F}^{\sigma(\zeta)}$-鞅，其中 $L_0 = 1$ 于~~是存~~在一个定义在 $\mathcal{F}_\infty^{\sigma(\zeta)}$上的概率测度 $\mathbb{P}^*$，使得对于任意 $t \geq 0$， $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ 在 $\mathcal{F}_t^{\sigma(\zeta)}$ 上成立，并且

$$d\mathbb{P}^*|_{\mathcal{F}_t^{\sigma(\zeta)}} = L_t d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t^{\sigma(\zeta)}}, \quad \mathbb{P}^*|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}, \quad \mathbb{P}^*|_{\sigma(\zeta)} = \mathbb{P}|_{\sigma(\zeta)}.$$

此外，在 $\mathbb{P}^*$下， $\sigma$-代数 $\sigma(\zeta)$ 与 $\mathcal{F}_\infty$ 在给定 $\mathcal{F}$的条件下相互独立 $_0$.

最后这句话有一个显而易见的推论，而这正是我们关注该结果的原因。

推论 68. $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{F}^{\sigma(\zeta)}$ 在 $\mathbb{P}^*$下。

现在我们考虑渐进扩张下的概率测度变换。以下稳定性结果的证明可见例如（Aksamit、Jeanblanc，2017年，第62页）。假设 $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$ 在 $\mathbb{P}$ 下，并通过 $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(\varphi \bullet Y)_\infty \mathcal{E}(\gamma \bullet M)_\infty$定义一个等价概率测度 $\mathbb{Q}$，其中 $Y$是在 $\mathbb{P}$下的一个 $\mathbb{F}$-鞅， $\varphi$是一个 $\mathbb{F}$-可预测过程，使得 $\mathcal{E}(\varphi \bullet Y)$是一个一致可积的 $\mathbb{G}$-鞅； $\gamma$是一个 $\mathbb{G}$-可预测过程，使得 $\mathcal{E}(\gamma \bullet M)$是一个一致可积的 $\mathbb{G}$-鞅。最后，假设$L = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(\varphi \bullet Y)_\infty \mathcal{E}(\gamma \bullet M)_\infty$是一个正的一致可积 $\mathbb{G}$-鞅。

定理 69。假设在 $\mathbb{P}$ 下满足 $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$ 。令等价概率测度 $\mathbb{Q}$ 由 $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(\varphi \bullet Y)_\infty \mathcal{E}(\gamma \bullet M)_\infty$ 定义。那么，在假设（C）或（A）下， $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$在 $\mathbb{Q}$ 下。

如果我们假设假设（C）和（A）均成立，还可以得到更多结论。我们遵循（Kreher，2016）。下文中，$\sigma$ 表示一个随机时刻，扩张滤过定义为 $\mathcal{G}_t$：$=\cap_{s>t}\left(\mathcal{F}_s \vee \sigma(\mathbb{I}^{\{\sigma>r\}}; r \leq s)\right)$，$\rho$ 是一个非负的、$\mathcal{F}_\infty$-可测的随机变量，且满足 $\mathbb{E}(\rho)=1$，$d\mathbb{Q}=\rho d\mathbb{P}$，$\rho_t := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho|\mathcal{F}_t)$，$\widetilde{\rho}_t := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho|\mathcal{G}_t)$，$h_t := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho_{\mathbb{I}^{\{\sigma>t\}}}|\mathcal{F}_t)$，其中 $t \geq 0$。因此，$h_t$ 在 $\mathbb{P}$ 下是一个 $\mathbb{F}$-超鞅；由众所周知的贝叶斯公式，$h_t = \rho_t \cdot \mathbb{Q}(\sigma > t|\mathcal{F}_t) =: \rho_t Z_t^{\mathbb{Q}}$，故当 $t \to \infty$ 时，$h_t \to 0$ 几乎必然成立。对于严格为正的 $h$，我们还通过 $h=\mathcal{E}(\mu)$ 定义其随机对数 $\mu$。在 $\mathbb{P}$ 下，$\mu$ 也是一个 $\mathbb{F}$-超鞅，其 Doob-Meyer 分解为 $\mu=\mu^L-\mu^F$，其中 $\mu^L \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P},\mathbb{F})$，且 $\mu^F$ 是一个递增有限变差过程。$h$、$\mu$、$\mu^L$ 和 $\mu^F$ 均连续。以下是（Mortimer、Williams，1991）中得到的一个众所周知的结果。

定理70。假设 $h$ 严格为正。设 $U=(U_t)_{t\geq 0}$ 是相对于 $\mathbb{P}$的 $\mathbb{F}$-局部鞅。那么过程 $\left(\mathbb{I}^{\{\sigma>t\}}V_t \exp(\mu_t^F)\right)_{t\geq 0}$是相对于 $\mathbb{Q}$的 $\mathbb{G}$-局部鞅，其中$V:=U-\langle U,\mu\rangle$。此外，过程$\left(\mu^F_{t\wedge\sigma}\right)_{t\geq 0}$是$\left(\mathbb{I}^{\{\sigma\leq t\}}\right)_{t\geq 0}$的$(\mathbb{Q},\mathbb{G})$-对偶可预测投影。

推论71。假设 $h$ 严格为正。如果 $U \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P},\mathbb{F})$，那么 $V_{t\wedge\sigma}=U_{t\wedge\sigma}-\langle U,\mu\rangle_{t\wedge\sigma} \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{Q},\mathbb{G})$。

注意，若设 $\rho\equiv 1$，便可得到前面讨论过的熟悉的扩张公式，即对于任意 $M \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P},\mathbb{F})$，有

$$M_{t\wedge\sigma}-\int_0^{t\wedge\sigma}\frac{d\langle M,Z^{\mathbb{P}}\rangle_s}{Z^{\mathbb{P}}}=M_{t\wedge\sigma}-\int_0^{t\wedge\sigma}\frac{d\langle M,m^{\mathbb{P}}\rangle_s}{Z^{\mathbb{P}}} \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P},\mathbb{G}),$$

其中，与前文一样，$Z$ 是与 $\sigma$ 相关的Azéma超鞅，而 $m$ 是其Doob-Meyer分解中的局部鞅部分。

正性　　可以放宽 $h$ 的正性条件。证明见（Kreher，2016，第4页）。

定理72。设 $U=(U_t)_{t\geq 0}$ 是关于 $\mathbb{P}$的 $\mathbb{F}$-局部鞅。则过程$X=\left(\mathbb{I}^{\{\sigma>t\}}V_t\exp(\mu_t^F)\right)_{t\geq 0}$ 和$(V_{t\wedge\sigma})_{t\geq 0}$ 是关于 $\mathbb{Q}$的 $\mathbb{G}$-局部鞅，其中 $V_{t\wedge\sigma}=U_{t\wedge\sigma}-\langle U、\mu\rangle_{t\wedge\sigma}$。

上述结果讨论的是截至（一般）随机时刻 $\sigma$ 的测度变换。将这些结果推广到 $\sigma$ 之后的困难在于，对于一般随机时刻，并非所有 $\mathbb{F}$-半鞅仍然是 $\mathbb{G}$-半鞅。然而，对于一个非常特殊的子集——诚实时刻——这并不构成限制，因此可以针对整个

时间域获得更广泛的结果。以下假设 $\sigma$ 是一个诚实时间。在 $\mathbb{P}$ 下定义一个 $\mathbb{F}$-次鞅 $k$： $k_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho|\mathcal{F}_t) - h_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho_{\mathbb{I}_{\{\sigma\le t\}}}|\mathcal{F}_t)$。对固定的 $u \ge 0$，用 $\mathcal{M}^u(\mathbb{P},\mathbb{F})$ 表示在 $[u,\infty)$ 上、关于 $\mathbb{P}$ 的 $\mathbb{F}$- 鞅类。由于 $\sigma$ 是一个诚实时间，对固定的 $t \ge 0$，存在一个 $\mathcal{F}_t$- 可测随机变量 $\sigma_t$，使得 $\mathbb{I}^{\{\sigma<t\}\sigma} = \mathbb{I}^{\{\sigma<t\}\sigma_t}$。建立主要结果需要两个辅助结果。证明见（Kreher，2016，第 10–11 页）。

引理 73。固定 $u \ge 0$。令 $Y$ 为一个 $\mathbb{F}$-适应过程，使得 $(\mathbb{I}^{\{\sigma_t\le u\}}k_tY_t)_{t\ge u} \in \mathcal{M}^u_{loc}(\mathbb{P},\mathbb{F})$。则 $Y_t\mathbb{I}^{\{\sigma\le u\}} \in \mathcal{M}^u_{loc}(\mathbb{Q},\mathbb{G})$。

引理 74。令 $(Y_t)$ 为一个取实值的连续 $\mathbb{G}$-适应过程，使得对于所有 $u > 0$，$(\mathbb{I}^{\{\sigma\le u\}}(Y_{t\vee u} - Y_u))_{t\ge 0} \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{Q},\mathbb{G})$。则 $(Y_{t\vee\sigma} - Y_\sigma)_{t\ge 0} \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{Q},\mathbb{G})$。

现在我们可以推导出关于诚实时刻的一般结果。尽管假设 (C) 和 (A) 均成立，但无需使用它们即可证明该结果。采用上述记号，我们有

定理 75。令 $\sigma$ 为一个诚实时刻，并假设 $(U_t)_{t\ge 0}$ 在 $\mathbb{P}$下是一个 $\mathbb{F}$-局部鞅。则过程

$$V_t := U_t - \int_0^{\sigma\wedge t} \frac{d\langle U,h\rangle_s}{h_s} - \int_\sigma^{\sigma\vee t} \frac{d\langle U,k\rangle_s}{k_s}$$

在 $\mathbb{Q}$ 下是一个 $\mathbb{G}$-局部鞅。

## 3.2 作为测度变换的滤过扩张

如前所述，滤过扩张与 Girsanov 型测度变换之间存在许多相似之处，在这类变换中，漂移项会出现或被消除。在显式扩张公式的语境下，这种相似性尤为明显，因为其中的漂移项会被明确识别出来。本节主要探讨将扩张视为测度变换的观点。讨论基本围绕 Ankirchner 的思想展开：扩张与乘积空间上的测度变换相关联，而原始概率空间嵌入其中。更具体地说，一旦我们在乘积空间上构造出所谓的解耦测度（假设该测度支配原始的乘积概率测度），

就可以证明，滤过的变换本质上是从解耦测度变换到被其支配的测度。在这一框架下，可以得到一般性的 Girsanov 型结果。关键在于，众所周知的 Jacod 条件蕴含了解耦测度具有上述支配性质。

考虑概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 和右连续滤子 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 及 $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$，其中 $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$，$\mathcal{H}_\infty = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{H}_t$。我们按通常方式将扩张滤过定义为 $\mathbb{G}\ \mathcal{G}_t = \cap_{s>t}(\mathcal{F}_s \vee \mathcal{H}_s)$，对所有 $t \geq 0$ 均成立。现在考虑定义在底层概率空间的两个相同副本上的这两个滤过，并引入乘积空间 $\Omega\ = \Omega \times \Omega$，其上配备乘积 $\sigma$-代数 $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{H}_\infty$ 和滤过 $\overline{\mathcal{F}}_t = \overline{\cap}_{s>t}(\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{H}_s)$。映射$\psi$: $(\Omega\ \mathcal{F})\ \to (\Omega\ \overline{\mathcal{F}})$（即 $\omega \mapsto (\omega, \omega)$）定义了 Ω 到 Ω 的嵌入。$\mathbb{P}$ 在 $\psi$ 下的像测度定义为 $\overline{\mathbb{P}} := \mathbb{P}_\psi := \mathbb{P} \circ \psi^{-1}$，且等式

$$\int f(\omega, \omega')d\overline{\mathbb{P}}(\omega, \omega') = \int f(\omega, \omega)d\mathbb{P}(\omega)$$

对所有 $\overline{\mathcal{F}}$-可测函数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 均成立。为处理可测性问题，需要若干技术性引理。为便于理解接下来更基本的结果，我们仅列出这些引理；证明见 (Ankirchner, 2005年，第 9–10 页)。请注意，$\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$ 表示用$\mathbb{P}$-零测集对滤过 $\mathcal{F}$ 进行完备化。

引理 76. 若 $\overline{f}$: $\Omega \to \mathbb{R}$ 是 $\overline{\mathcal{F}}_t^{\mathbb{P}}$-可测的，则映射 $\overline{f} \circ \psi$ 是 $\mathcal{G}_t^{\mathbb{P}}$-可测的。

引理 77. 若 $\overline{X}$ 是 $(\overline{\mathcal{F}}_t^{\mathbb{P}})$-可预测的，则 $\overline{X} \circ \psi$ 是 $(\mathcal{G}_t^{\mathbb{P}})$-可预测的。

引理 78. 设 $\overline{Y}$是 $(\overline{\mathcal{F}}_t^{\mathbb{P}})$-适应的。则过程 $Y = \overline{Y} \circ \psi$ 是 $(\mathcal{G}_t^{\mathbb{P}})$-适应的。此外，若 $\overline{Y}$是 $(\overline{\mathcal{F}}_t^{\mathbb{P}}, \overline{\mathbb{P}})$-局部鞅，则 $Y$是 $(\mathcal{G}_t^{\mathbb{P}}, \mathbb{P})$-局部鞅。

现在我们可以陈述一个关于半鞅性质转移的关键定理。

定理 79. 设 $\overline{Y}$是一个 $(\overline{\mathcal{F}}_t^{\mathbb{P}}, \overline{\mathbb{P}})$-半鞅。则 $Y = \overline{Y} \circ \psi$是一个 $(\mathcal{G}_t^{\mathbb{P}}, \mathbb{P})$-半鞅。

证明。设 $\overline{Y}$ 是一个 $(\overline{\mathcal{F}}_t^{\mathbb{P}}, \overline{\mathbb{P}})$-半鞅。那么 $Y = \overline{Y} \circ \psi$ 几乎必然具有右连续左极限路径，且根据上述引理，$Y$ 是 $(\mathcal{G}_t^{\mathbb{P}})$-适应的。根据 Bichteler-Dellacherie-Mokobodzki 定理，只需证明：若一列简单的 $\mathcal{G}_t$-适应被积函数 $(\theta^n)$（即

形式为 $\sum_{1\le i\le n}{}_{]}{}_{]t_i,\ t_{i+1}]}\theta_i$，其中 $\theta_i$ 是 $\mathcal{G}_{t_i}$-可测的）一致收敛到 0，则相应的简单积分 $(\theta^n\cdot Y)$ 关于 $\mathbb{P}$ 依概率收敛到 0。注意 $\mathcal{G}_t=\psi^{-1}(\overline{\mathcal{F}}_t)$，因此存在一列简单的 $(\overline{\mathcal{F}}_t)$-适应被积函数 $(\overline{\theta}^n)$，其一致收敛到 0，且满足 $\overline{\theta}^n\circ\psi=\theta^n$。由于 $\overline{Y}$ 是半鞅，因此 $(\overline{\theta}^n\cdot\overline{Y})$ 关于 $\overline{\mathbb{P}}$ 依概率收敛到 0，所以 $(\theta^n\cdot Y)$ 关于 $\mathbb{P}$ 依概率收敛到 0。

□

以上讨论确立了投影下关键性质的保持性。现在我们来考察嵌入下的保持性。设 $R$ 是 $\mathcal{H}_\infty$上的概率测度。定义所谓的解耦测度为

$$\overline{\mathbb{Q}}:=\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_\infty}\otimes R|_{\mathcal{H}_\infty}. \tag{2}$$

引理 80. 设 $M$ 是右连续的$(\mathcal{F}_t^{\mathbb{P}},\mathbb{P})$-局部鞅。那么过程$\overline{M}(\omega,\omega')=M(\omega)$是$(\mathcal{F}_t^{\overline{Q}},\overline{Q})$-局部鞅。

此处引入了一个关键假设，其思路与 Jacod 条件非常相近。

假设。 $\overline{\mathbb{P}}\ll\overline{\mathbb{Q}}$ 在 $\overline{\mathcal{F}}$上。

当 $R\sim\mathbb{P}$ 且$(\mathcal{G}_t)$是由一个离散随机变量 $G$初始扩张的滤过时，该假设成立；也就是说，当对所有 $t\ge 0$都有 $\mathcal{H}_t=\sigma(G)$时，该假设成立。

注意，在该假设下，上述引理意味着，将一个$(\mathcal{F}_t^{\mathbb{P}},\mathbb{P})$-局部鞅 $M$扩展到乘积空间 Ω 上，记作 $\overline{M}$，仍是$(\overline{\mathcal{F}}_t^{\overline{\mathbb{P}}},\overline{\mathbb{P}})$-半鞅。进而， 由上述主定理可知， $M$ 是$(\mathcal{G}_t^{\mathbb{P}},\mathbb{P})$-半鞅，并且$\mathcal{H}'$ 成立。该假设还使我们能够将滤过扩张解释为本质上等同于在 Ω 上从 $\overline{\mathbb{Q}}$ 到 $\overline{\mathbb{P}}$的测度变换，因此可以得到 Girsanov 型结果。完整证明见 (Ankirchner，2005年)。

我们考虑右连续左极限的（$\overline{\mathcal{F}}_t^{\overline{\mathbb{Q}}}$）-适应密度过程 $\overline{Z}_t:=\frac{d\overline{\mathbb{P}}}{d\overline{\mathbb{Q}}}\big|_{\overline{\mathcal{F}}_t^{\overline{\mathbb{Q}}}}$。上述讨论表明，$Z=\overline{Z}\circ\psi$ 是一个（$\mathcal{G}_t^{\mathbb{P}},\mathbb{P}$）-半鞅。

引理 81。设 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 是（$\overline{\mathcal{F}}_t^{\overline{\mathbb{P}}},\overline{\mathbb{P}}$）-半鞅。若 $X=\overline{X}\circ\psi$ 和 $Y=\overline{Y}\circ\psi$，则 $[\overline{X},\overline{Y}]\circ\psi=[X,Y]$ 关于 $\mathbb{P}$ 在不可区分性意义下成立。

以下定理是主要的 Girsanov 型结果。我们采用标准的

~记号，其中 $\overline{U}_t = \Delta\overline{M}_{\overline{T}}\mathbb{I}_{\{t\leq\overline{T}\}}$, $\overline{T}:=\inf\{t>0\colon\ \overline{Z}_t=0,\overline{Z}_{t-}>0\}$, $U$是 $\overline{U}$ 的补偿子（($(\overline{\mathcal{F}}_t^{\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}})$-可预测投影），且 ^$U=\widetilde{U}\circ\psi$。

定理82. 若 $M$是一个带有 $M_0=0$的$(\mathcal{F}_t^{\mathbb{P}},\mathbb{P})$-局部鞅，则

$$M-\frac{1}{Z}\cdot[M,Z]+\hat{U}$$

是一个$(\mathcal{G}_t^{\mathbb{P}},\mathbb{P})$-局部鞅。

定理83. 若 $M$是一个带有 $M_0=0$的连续$(\mathcal{F}_t^{\mathbb{P}},\mathbb{P})$-局部鞅，则

$$M-\frac{1}{Z}\cdot[M,Z]$$

是一个$(\mathcal{G}_t^{\mathbb{P}},\mathbb{P})$-局部鞅。

# 4 扩大滤过下的鞅表示性质

## 4.1 预备知识与定义

我们先介绍一些记号和定义（更多详情请参阅 Protter，2005年；Medvegyev，2007；或 Cohen、Elliott，2015年）。对于 $p\in[1,\infty)$，用 $\mathcal{H}^p$ 表示满足 $\|M\|_{\mathcal{H}^p}:=\|M_\infty^*\|_p=(\mathbb{E}[\sup_t|M_t|^p])^{1/p}<\infty$ 的鞅空间 $M$。我们用$\mathcal{H}_0^p$ 表示 $\mathcal{H}^p$ 中满足 $M_0=0$ 的过程 $M$，用 $\mathcal{H}^p{}_{\text{loc}}$ 表示局部属于$\mathcal{H}^p$的过程。将停时过程记为 $M^T=(M_t^T)=(M_{t\wedge T})$。

定义 84. 若子空间 $\mathcal{K}\subset\mathcal{H}^p$ 满足以下条件，则称其为稳定的：
(i) 在 $\mathcal{H}^p$-范数拓扑下是闭的；(ii) 在停时运算下是封闭的，即对任意停时 $T$ 和 $M\in\mathcal{K}$，可得$M^T\in\mathcal{K}$；(iii) 若 $M\in\mathcal{K}$ 且 $A\in\mathcal{F}_0$，则 $\mathbb{I}_A M\in\mathcal{K}$。

若 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{H}_0^p$ 的子集，则将 stable($\mathcal{X}$)记为 $\mathcal{H}_0^p$ 中包含 $\mathcal{X}$且对停止操作封闭的最小闭子空间。

定义 85。设 $p \in [1,\infty)$。若 $\mathcal{H}_0^p = \text{stable}(\mathcal{X})$，则称子集 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{H}_0^p$ 具有鞅表示性质（MRP）。

考虑过程集合 $\mathcal{C} := \{X \in \mathcal{H}_0^p : X = H \bullet M, M \in \mathcal{H}_0^p\}$，其中$H \bullet M := \left(\int_0^t H_s dM_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$，可以证明它在 $\mathcal{H}_0^p$ 中是闭的。以下定理是标准结果（例如 Medvegyev，2007，第 343 页）。

定理 86. 设 $(M_i)_{i=1}^n$ 是 $\mathcal{H}_0^p$ 的有限子集。假设对于 $i \neq j$，鞅$M_i$和 $M_j$在局部鞅的意义下强正交（即 $[M_i, M_j] = 0$ 对于$i \neq j$）。那么

$$stable(M_1, ..., M_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n H_i \bullet M_i : H_i \in \mathcal{L}^p(M_i) \right\}.$$

换言之，由有限个强正交 $\mathcal{H}_0^p$ -鞅生成的稳定子空间，是由随机积分 $H_i \bullet M_i$ 生成的线性子空间，其中被积过程 $H_i \in \mathcal{L}^p(M_i)$ 是可预测的，即 $\|H_i\| := \left(\mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_i^p(s)\, d[M_i, M_i]_s\right)\right)^{1/p} < \infty$。

定义 87. 设 $(M_i)_{i=1}^n$ 是 $\mathcal{H}_0^p$ 的有限子集。若对于每个 $X \in \mathcal{H}_0^p$，都有 $X = \sum_{i=1}^n H_i \bullet M_i$，其中存在可预测的 $H_i \in \mathcal{L}^p(M_i)$，则称 $(M_i)_{i=1}^n$ 具有可预测表示性质（PRP）。

鞅（可预测）表示性质在数理金融中发挥着核心作用。回顾一下，如果任何支付都可以实现，就称一个金融市场是完备的。更正式地说（Jarrow，2021）：

定义 88. 假设局部鞅测度集非空，即 $\mathfrak{M}_l \neq \emptyset$（ $\iff$ 无免费午餐与无风险套利）。取 $\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}_l$。若对于任意 $Z_T \in L_+^1(\mathbb{Q})$，都存在一个 $x \geq 0$ 和 $(\alpha_0, \alpha) \in \mathcal{A}(x)$，使得 $x + (\alpha \bullet S)_T = Z_T$，且由 $X_t := x + (\alpha \bullet S)_t$ 定义的价值过程对所有 $t \in [0,T]$ 都是一个 $\mathbb{Q}$- 鞅，即 $X_t = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[Z_T|\mathcal{F}_t]$，则称市场关于 $\mathbb{Q}$ 完备。

在这一框架下，资产定价第二基本定理指出，完备性意味着局部鞅测度的唯一性；反过来（在一定程度上），等价鞅测度的存在意味着完备性。现在不难看出，从本质上说，完备性（即存在一种交易

策略来生成给定的支付）是鞅（可预测）表示性质（即存在一个可用于将我们的鞅表示为随机积分的可预测过程）的金融等价物。

我们想强调，完备性比局部鞅测度的唯一性略强，也就是说，只有当鞅测度集合为单元素集时，才能推出完备性。这本质上源于 Jacod-Yor 定理：集合 $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}_0^1$ 具有鞅表示性质，当且仅当底层概率测度 $\mathbb{P}$ 是 $\mathfrak{M}^1(\mathcal{X})$的一个极值点。这一事实将在下文若干定理所涉及的情形中发挥重要作用，尤其是在渐进扩张的背景下。

现在很自然会问，这一性质在滤过扩张下是否仍能保持。下文将分别讨论初始扩张和渐进扩张。

## 4.2 初始扩张下的鞅表示性质

关于初始扩张下鞅表示性质稳定性的结果有许多，其一般性程度各不相同。我们选择同时介绍广为人知的经典结果和较新的定理，并尽可能采用最一般的框架。这样安排的理由是，有些情形虽非最一般，却蕴含重要思想，能够提供具有独立概念价值的见解。

在初始扩张下保留鞅表示性质的关键条件仍然是 Jacod 判据。我们从讨论（Amedinger，2000）的经典结果开始。考虑一个随机基 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$，其滤过满足通常假设，$\mathcal{F}_0$ 平凡，且 $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_T$ 对所有 $s \geq T$ 以及某个 $T > 0$均成立。考虑一个 $d$ 维右连续有左极限过程 $S = (S^1, ..., S^d)^\top$，并假设存在一个与 $\mathbb{P}$ 等价的概率测度 $\mathbb{Q}^{\mathbb{F}}$，使得 $S$ 的每个分量都属于 $\mathcal{H}^2(\mathbb{Q}^{\mathbb{F}}, \mathbb{F})$。令 $Z^{\mathbb{F}}$为 $\mathbb{Q}^{\mathbb{F}}$ 相对于 $\mathbb{P}$. 的密度过程。考虑对 $\mathbb{F}$ 的扩张，定义为$\mathbb{G} := \mathbb{F} \vee \sigma(G)$，其中 $G$ 是一个取值于波兰空间$(X, \mathscr{X})$的随机变量。假设 Jacod等价准则成立，即给定 $\mathcal{F}_t$、$t \in [0, T]$时 $G$ 的正则条件分布与 $G$ $\mathbb{P}$的分布几乎处处等价，即

$$\mathbb{P}(G \in \cdot | \mathcal{F}_t) \sim \mathbb{P}(G \in \cdot) \text{ for all } t \in [0, T]\ \mathbb{P} - \text{a.s.}$$

正如前几节所述，条件密度过程$(\omega, t, x) \mapsto p_t^x(\omega)$的一个良好版本存在，这是由等价性假设推出的（参见 Jacod，1985年，引理 1.8）。整个推导中的一个重要步骤，是说明随机过程的性质如何通过所谓的保持鞅性质的概率测度，从 $\mathbb{F}$ 传递到 $\mathbb{G}$ （ Amedinger，2000年，定理3.1，第104页）。

定理89。假设 Jacod等价准则成立，且 $p$ 是相应的条件密度过程。那么

(i) $Z^{\mathbb{G}} := \frac{Z^{\mathbb{F}}}{p^G}$ 在 $\mathbb{P}$ 下是一个 $\mathbb{G}$-鞅；(ii) 初始扩张下保持鞅性质的概率测度由下式给出

$$\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}(A) := \int_A \frac{Z_T^{\mathbb{F}}}{p_T^G} d\mathbb{P} \quad for\ A \in \mathcal{G}_T$$

具有以下性质
(a) $\mathcal{F}_T$ 与 $\sigma(G)$ 在 $\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}$ 下相互独立；(b)
$\mathbb{Q}^{\mathbb{G}} = \mathbb{Q}^{\mathbb{F}}$ 在 $(\Omega\ \mathcal{F}_T)$ 上，而 $\mathbb{Q}^{\mathbb{G}} = \mathbb{P}$ 在 $(\Omega\ \sigma(G))$
上，即对于 $A_T \in \mathcal{F}_T$ 和 $B \in \mathscr{X}$，有

$$\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}(A_T \cap \{G \in B\}) = \mathbb{Q}^{\mathbb{F}}(A_T)\mathbb{P}(G \in B) = \mathbb{Q}^{\mathbb{G}}(A_T)\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}(G \in B).$$

证明。证明的关键在于以下等式（F¨ollmer and Imkeller，1993，p.574；Amedinger等，1998，命题2.3）：

$$\mathbb{E}\left[ \mathbb{I}^{\{G \in B\}} \frac{1}{p^{\mathbb{G}_T}} \middle| \mathcal{F}_T \right] = \int_B \frac{1}{p_T^x(\omega)} p_T^x(\omega)\mathbb{P}(G \in dx) = \mathbb{P}(G \in B)$$

我们给出详细论述（参见 Es-Saghouani，2006年），以介绍一些证明技巧。我们从第二个断言开始。考虑集合 $A_T \in \mathcal{F}_T$ 和 $B \in \mathscr{X}$，

关于 $\mathcal{F}_T$ 的条件，利用 $p_T^{\mathbb{G}}$ 的定义和等价条件可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}\left[A_T \cap \{G \in B\}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{I}^{A_T \cap \{G\in B\}} \frac{Z_T^{\mathbb{F}}}{p_T^G}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{I}^{A_T} \mathbb{E}\left[\mathbb{I}^{\{G\in B\}} \frac{Z_T^{\mathbb{F}}}{p_T^G}\middle| \mathcal{F}_T\right]\right] \\
&= \int_{A_T} \mathbb{E}\left[\mathbb{I}^{\{G\in B\}} \frac{Z_T^{\mathbb{F}}}{p_T^G}\middle| \mathcal{F}_T\right](\omega)\mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_{A_T}\int_B \frac{Z_T^{\mathbb{F}}(\omega)}{p_T^x(\omega)}\mathbb{P}(G \in dx|\mathcal{F}_T)\mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_{A_T}\int_B \frac{Z_T^{\mathbb{F}}(\omega)}{p_T^x(\omega)} p_T^x(\omega)\mathbb{P}(G \in dx)\mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_{A_T}\int_B Z_T^{\mathbb{F}}(\omega)\mathbb{P}(G \in dx)\mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_{A_T} Z_T^{\mathbb{F}}(\omega)\int_B \mathbb{P}(G \in dx)\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{Q}^{\mathbb{F}}(A_T)\mathbb{P}(G \in B).
\end{aligned}$$

注意到 $\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}[\Omega \cap \{G \in B\}] = \mathbb{Q}^{\mathbb{G}}[G \in B] = \mathbb{P}(G \in B)$ 且 $\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}[A_T \cap \{G \in X\}] = \mathbb{Q}^{\mathbb{G}}[A_T] = \mathbb{Q}^{\mathbb{F}}(A_T)$，我们得出第二个结论。为证明$Z^{\mathbb{G}} := \frac{Z^{\mathbb{F}}}{p^G}$的鞅性质，取 $0 \le s \le t \le T$, $A_s \in \mathcal{F}_s$, $B \in \mathscr{X}$, $A = A_s \cap \{G \in B\} \in \mathcal{G}_s$并注意到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{I}^A \frac{Z_t^{\mathbb{F}}}{p_t^G}\right] &= \mathbb{Q}^{\mathbb{F}}[A_s]\mathbb{P}[G \in B] = \mathbb{E}\left[\mathbb{I}^{A_s} Z_s^{\mathbb{F}}\mathbb{P}[G \in B]\right] \\
&= \int_{A_s}\int_B \frac{Z_s^{\mathbb{F}}(\omega)}{p_s^x(\omega)} p_s^x(\omega)\mathbb{P}(G \in dx)\mathbb{P}(d\omega) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{I}^{A_s}\mathbb{E}\left[\mathbb{I}^{\{G\in B\}} \frac{Z_s^{\mathbb{F}}}{p_s^G}\middle| \mathcal{F}_s\right]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{I}^A \frac{Z_s^{\mathbb{F}}}{p_s^G}\right].
\end{aligned}$$

由于 $Z^{\mathbb{F}} = 1 = p_0^G$，因此 $\frac{Z^{\mathbb{F}}}{p_0^G} = 1$，于是 $\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}(A) := \int_A \frac{Z_T^{\mathbb{F}}}{p_T^G}$ 确实是 $(\Omega\ \mathcal{G}_T)$ 上的概率测度。 □

下面的定理表明，从 $\mathbb{F}$ 切换到 $\mathbb{G}$ 以及从 $\mathbb{Q}^{\mathbb{F}}$ 切换到 $\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}$时，鞅性质得以保留。

定理 90. 假设 Jacod等价准则成立。那么 $\forall p \in [1, \infty]$ 我们有 $e$

$$\mathcal{H}^p_{(loc)}(\mathbb{Q}^{\mathbb{F}}, \mathbb{F}) = \mathcal{H}^p_{(loc)}(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}, \mathbb{F}) \subseteq \mathcal{H}^p_{(loc)}(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}, \mathbb{G})$$

并且，特别是，

$$\mathcal{M}^p_{(loc)}(\mathbb{Q}^{\mathbb{F}},\mathbb{F}) = \mathcal{M}^p_{(loc)}(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}},\mathbb{F}) \subseteq \mathcal{M}^p_{(loc)}(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}},\mathbb{G}).$$

此外，任何 $(\mathbb{Q}^{\mathbb{F}},\mathbb{F})$-布朗运动也是 $(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}},\mathbb{G})$-布朗运动 .

证明。我们沿用 Amedinger（2000年）的原始证明。由 $\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}$ 下 $\sigma(G)$ 与 $\mathcal{F}_T$ 的独立性，以及 $\mathbb{Q}^{\mathbb{G}} = \mathbb{Q}^{\mathbb{F}}$ 在 $(\Omega\ \mathcal{F}_T)$ 上这一事实可知，任何 $(\mathbb{Q}^{\mathbb{F}},\mathbb{F})$-鞅都是 $(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}},\mathbb{G})$-鞅。注意，$\mathbb{F}$-停时也是 $\mathbb{G}$-停时，因此 $(\mathbb{Q}^{\mathbb{F}},\mathbb{F})$-局部化可推广至 $(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}},\mathbb{F})$ 和 $(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}},\mathbb{G})$。由于 $\mathbb{Q}^{\mathbb{G}} = \mathbb{Q}^{\mathbb{F}}$ 在 $(\Omega\ \mathcal{F}_T)$ 上，$\mathcal{H}^p$ 和 $\mathcal{M}^p$ 所需的可积性条件均得到满足。注意，连续鞅的二次变差是逐路径计算的，不涉及滤过。由于 $\mathbb{Q}^{\mathbb{G}} = \mathbb{Q}^{\mathbb{F}}$ 在 $(\Omega\ \mathcal{F}_T)$ 上，对于 $t \in [0,T]$，我们有

$$\langle W\rangle_t^{(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}},\mathbb{G})} = \langle W\rangle_t^{(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}},\mathbb{F})} = \langle W\rangle_t^{(\mathbb{Q}^{\mathbb{F}},\mathbb{F})} = t$$

因此，W 也是 $(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}},\mathbb{G})$-布朗运动。 □

现在我们可以陈述从 $\mathbb{F}$ 到 $\mathbb{G}$ 的鞅表示性质的转移结果。因此，我们还需要增加一个假设：鞅表示性质一开始就在 $\mathbb{F}$ 中成立。具体而言，我们假设对于任意 $F \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$，存在一个过程 $\phi \in \mathcal{L}^2(S,\mathbb{Q}^{\mathbb{F}},\mathbb{F})$，使得 $F = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\mathbb{F}}}[F] + \int_0^T \phi_s^* dS_s$。那么，以下定理（Amedinger，2000年，定理 4.2，第 106 页）成立。

定理 91. 假设 Jacod等价准则成立，且过程 $S \in \mathcal{H}^2_{(loc)}(\mathbb{Q}^{\mathbb{F}},\mathbb{F})$ 具有鞅表示性质。那么以下陈述成立。
(i) 对于任意 $K \in \mathcal{H}^2(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}},\mathbb{G})$，存在一个过程 $\psi \in \mathcal{L}^2(S,\mathbb{Q}^{\mathbb{G}},\mathbb{G})$，使得

$$K_t = K_0 + \int_0^t \psi_s^* dS_s, \quad t \in [0,T].$$

(ii) 对于任意 $K \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}},\mathbb{G})$，存在一个过程 $\psi \in \mathcal{L}^1_{loc}(S,\mathbb{Q}^{\mathbb{G}},\mathbb{G})$，使得

$$K_t = K_0 + \int_0^t \psi_s^* dS_s, \quad t \in [0,T].$$

证明。我们概述证明过程，详细内容可参见原论文。要证明第一个结论，只需证明任意随机变量 $H \in L^2(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}},\mathcal{G}_T)$ 都可以写成

形式 $H = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}}[H|\mathcal{G}_0] + \int_0^T \psi_s^* dS_s$，其中 $\psi \in \mathcal{L}^2(S, \mathbb{Q}^{\mathbb{G}}, \mathbb{G})$ 是某个过程。由于 $\mathcal{G}_T = \mathcal{F}_T \vee \sigma(G)$，且 $V := \{h \in L^\infty(\mathcal{G}_T) : h = \sum_{i=1}^m f_i g_i \text{ with } f_i \in L^\infty(\mathcal{F}_T)\ g_i \in L^\infty(\sigma(G))\ m \in \mathbb{N}\}$ 在 $L^2(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}, \mathcal{G}_T)$ 中稠密，因此在 $V$ 中存在形如 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sum_{i=1}^{m(n)} F^{i,n} G^{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ 的序列，其中 $F^{i,n} \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$ 以及 $G^{i,n} \in L^\infty(\sigma(G))$，使得 $h_n$ 收敛于 $H \text{ in} L^2(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}})$。由于 $\mathbb{Q}^{\mathbb{G}} = \mathbb{Q}^{\mathbb{F}} \text{ on } (\Omega\ \mathcal{F}_T)$ 且鞅表示性质在 $\mathbb{F}$ 中成立，存在过程 $\phi^{i,n} \in \mathcal{L}^2(S, \mathbb{Q}^{\mathbb{G}}, \mathbb{F})$，使表示 $F^{i,n} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}}[F^{i,n}] + \int_0^T (\phi^{i,n}_s)^* dS_s$ 成立。随后可以论证表示 $h_n = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}}[h_n|\mathcal{G}_0] + \int_0^T (\psi_s^n)^* dS_s$ 成立，其中 $\psi^n := \sum_{i=1}^{m(n)} G^{i,n} \phi^{i,n}$。由于映射 $\theta \mapsto \int \theta^* dS$ 是从 $(\mathcal{L}^2(S, \mathbb{Q}^{\mathbb{G}}, \mathbb{G}) \| \cdot \|_{\mathcal{L}^2(S,\mathbb{Q}^{\mathbb{G}},\mathbb{G})})$ 到 $(\mathcal{H}^2(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}, \mathbb{G}) \| \cdot \|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}},\mathbb{G})})$ 的等距映射，因此随机积分空间 $\left\{ \int_0^T \theta_s^* dS_s : \theta \in \mathcal{L}^2(S, \mathbb{Q}^{\mathbb{G}}, \mathbb{G}) \right\}$ 在 $L^2(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}})$ 中是闭的，从而存在某个过程 $\psi \in \mathcal{L}^2(S, \mathbb{Q}^{\mathbb{G}}, \mathbb{G})$，使得 $\int_0^T (\psi_s^n)^* dS_s$ 收敛于 $\int_0^T \psi_s^* dS_s$ in $L^2(\mathbb{Q}^{\mathbb{G}})$，因此取极限可得 $H = \lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}}[h_n|\mathcal{G}_0] + \int_0^T (\psi_s^n)^* dS_s)$ $= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}}[H|\mathcal{G}_0] + \int_0^T \psi_s^* dS_s$。这就证明了第一个结论。第二个结论由局部化和 $\mathbb{G}.$ 的右连续性得到

□

总结以上结果可知，Jacod等价准则使我们能够在 $\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}$ 下定义 $(\Omega\ \mathcal{F}_T)$ 上具有所谓解耦性质的保持鞅性质的概率测度。在这个新的测度 $\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}$ 下， $\sigma$-代数 $\mathcal{F}_T$ 和 $\sigma(G)$）在 $(\Omega\ \mathcal{F}_T)$ 上变得相互独立，因此，任何在 $\mathbb{Q}^{\mathbb{F}}$ 下的 $\mathbb{F}$- 局部鞅在 $\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}$ 下仍是 $\mathbb{G}$- 局部鞅。

现在我们将讨论在什么条件下，当原始滤过由一个点过程和一个连续鞅（例如布朗运动）生成时，对于 $(\mathbb{P}, \mathbb{F}^{\sigma(\zeta)})$-局部鞅，鞅表示性质得以保持。相关结果见（Grorud、Pontier，2001年），这显著拓展了适用范围，尽管其中假设了更强的Jacod 等价条件。

考虑一个随机基 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$，其中 $\mathbb{F}$ 满足通常假设；再考虑由 $\mathbb{G} = \mathbb{F}^{\sigma(\zeta)} = \mathbb{F} \vee \sigma(\zeta)$ 给出的初始扩张，它被解释为内幕人士在 $t = 0$时可获得的私人信息。假设价格过程满足

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i (b_s^i ds + \sigma_s^i dW_s) + \int_0^t S_{s-}^i \int_O \phi^i(x, s) N(dx, ds), \quad 0 \le t \le T, i = 1, ..., d,$$

其中， $W$ 是一个 $m$维布朗运动， $N$ 是一个强度严格为正的 $\nu(x)dxds$的 $n$维点过程， $x \in O$ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个开集，并且存在

鞅表示性质。我们还假设（假设 $P$）存在两个 $\mathbb{G}$-可预测过程 $l$和 $\delta$，使得

$$B_t = W_t - \int_0^t l_s ds, \quad t < T, \quad \text{is a } (\mathbb{G}, \mathbb{P})\text{-Brownian motion},$$
$$\overline{N_t} = N_t - \int_0^t \int_O \nu(y)(1 + \delta(y, s))dyds, \quad t < T, \quad \text{is a } (\mathbb{G}, \mathbb{P})\text{-martingale}.$$

定理 92. 假设条件 $P$ 成立， $\zeta$ 满足 Jacod等价准则，并且对所有 $t < T$，$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathcal{E}_t(-l \bullet B)\mathcal{E}_t(-\delta \bullet \overline{N})\right) = 1$，其中 $\mathcal{E}(\cdot)$为随机指数。则存在一个与 $\mathbb{P}$ 等价的概率测度 $\mathbb{Q}$，使得在 $\mathbb{Q}$下，$\forall t < T$, $\mathcal{F}_t$与 $\sigma(\zeta)$独立。

$\sigma$-代数之间所蕴含的独立性自然会导出一个鞅表示结果。我们用 $\mathbb{G}_A$ 表示由 $(\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\zeta);\ t \leq A)$ 定义的滤过。

定理 93. 假设以下任一条件成立：

(a) 存在一个与 $\mathbb{P}$ 等价的概率测度 $\mathbb{Q}$，使得在 $\mathbb{Q}$下，$\forall t < T$,$\mathcal{F}_t$ 与 $\sigma(\zeta)$独立；

*or*

(b) 条件 $P$成立，并且 $\mathcal{E}_t(-l \bullet B)\mathcal{E}_t(-\delta \bullet \overline{N})$ 是一个 $(\mathbb{G}_A, \mathbb{P})$-可积鞅；

那么 $\forall A < T$，每个 $(\mathbb{G}_A, \mathbb{Q})$-局部鞅都可以表示为

$$Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z|\mathcal{G}_0) + \int_0^t \chi_s dW_s + \int_0^t \int_O \xi(y, s)(N(dy, ds) - \nu(y)dyds), \quad t \leq A$$

其中 $(\chi, \xi)$ 是唯一的可预测过程。

证明。参见 (Jacod、Shiryaev，2002年，定理 4.34，第 176 页)。 □

实际上可以证明，等价概率测度 $\mathbb{Q}$的存在蕴含假设 $P$，并且存在可预测过程 $l$ 和 $\delta$，使得 $B$ 是 $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-布朗运动，$\overline{N}$是 $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-鞅，并且对所有 $t < T$，$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathcal{E}_t(-l \bullet B)\mathcal{E}_t(-\delta \bullet \overline{N})\right) = 1$。

最后，我们介绍另一项结果（Callegaro 等人，2011），该结果讨论在假设 Jacod等价准则成立时，PRP 在初始扩张（以及渐进扩张）下的稳定性。考虑一个完备随机基 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$，以及由下式给出的扩张

$\mathbb{G} := \mathbb{F} \vee \sigma(\zeta)$. $\mathbb{P}^*$ 表示上文在 Amedinger 的结果中定义的解耦测度。另请回顾，任何 $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$- 局部鞅 $X$ 都是一个 $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$- 半鞅，其典范分解为

$$X_t = \widetilde{X}_t + \int_0^t \frac{d\langle X, p^\zeta \rangle_s}{p^\zeta_{s-}},$$

其中 $\widetilde{X}$ 是一个 $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$-局部鞅， $p$ 是通常的条件密度过程。

定理94. 假设存在一个过程 $Z$ （不一定连续），且该过程对 $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ 具有鞅表示性质。那么每个 $X \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P}^*, \mathbb{G})$ 都存在如下表示:

$$\widetilde{X}_t = \widetilde{X}_0 + \int_0^t \widetilde{\Phi}_s dZ_s,$$

其中 $\widetilde{\Phi} \in \mathcal{L}(Z, \mathbb{P}^*, \mathbb{G})$。在特殊情形下，若 $X \in \mathcal{M}^2(\mathbb{P}^*, \mathbb{G})$，则对所有 $t \geq 0$，都有$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\int_0^t (\widetilde{\Phi}_s)^2 d[Z]_s\right) < \infty$，且该表示唯一。

现在我们放宽 Jacod等价准则，并考虑仅满足绝对连续性的情形。以下是关于初始扩张下可预测表示性质的一个著名结果（参见 Askamit、Jeanblanc，2017年，第92-93页）。

定理95. 假设 $\xi$ 满足 Jacod绝对连续条件，并且存在一个过程 $X \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{F})$，使得每个 $Y \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{F})$都可以表示为 $Y = Y_0 + \phi \bullet X$，其中 $X \in \mathcal{L}(X, \mathbb{F})$，且 $\mathcal{L}(X, \mathbb{F}) = \left\{\phi \text{ 可预测}: \left(\int_0^\cdot \phi_s^2 d[X]_s\right)^{1/2} \text{局部可积}\right\}$。那么，每个 $Y \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{F}^{\sigma(\xi)})$都存在一个表示

$$Y_t = Y_0 + (\Phi \bullet \overline{X})_t,$$

其中， $\Phi \in \mathcal{L}(\overline{X}, \mathbb{F}^{\sigma(\xi)})$ $Y_0 \in \mathcal{F}_0^{\sigma(\xi)}$，且 $\overline{X}$是 $X$的 $\mathbb{F}^{\sigma(\xi)}$-局部鞅分量，其在$\mathbb{F}^{\sigma(\xi)}$-半鞅分解中表示为

$$\overline{X}_t := X_t - \int_0^t \frac{1}{p_{s-}(\zeta)} d[X, p(\zeta)]_s + \left(\sum_{\mathbb{I}[\tilde{R}(u), \infty[\mathbb{I}} \Delta X_{\tilde{R}(u)}\right)^{p,\mathbb{F}}_t |_{u=\zeta},$$

˜其中，$R(u) := R(u)_{\{p_{R(u)-}(u)>0\}}$，且 $R(u) := \inf\{t : p_{t-}(u) = 0\}$，如前一节所定义。

证明。证明过程相当技术性。概要可见（Askamit、Jeanblanc，2017年，第93页，定理 4.34）。完整证明及所有细节见（Fontana，2017年，第13页，定理 2.6）。

□

例 96。（Fontana，2017年，第 9 页）考虑随机基 $(\Omega\ \mathcal{F}_T, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 上的标准布朗运动 $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$，该随机基满足通常条件，并定义过程 $S = (S_t)_{t\in[0,T]} := 1 + W$。考虑离散随机变量 $\xi := \mathbb{I}_{\{\text{下确界}_{t\in[0,T]}S_t>0\}}$。因此，Jacod 判据成立，所以

$$p_t^1 = \frac{\mathbb{P}(\inf_{u\in[0,t]}S_u > 0|\mathcal{F}_t)}{\mathbb{P}(\inf_{u\in[0,t]}S_u > 0)} = 1 + \frac{1}{\mathbb{P}(\inf_{u\in[0,t]}S_u > 0)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sigma\wedge t}\frac{1}{\sqrt{T-s}}\exp\left(-\frac{S_s^2}{2(T-s)}\right)dW_s,$$
$$p_t^0 = \frac{\mathbb{P}(\inf_{u\in[0,t]}S_u \le 0|\mathcal{F}_t)}{\mathbb{P}(\inf_{u\in[0,t]}S_u \le 0)} = 1 + \frac{1}{\mathbb{P}(\inf_{u\in[0,t]}S_u \le 0)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sigma\wedge t}\frac{1}{\sqrt{T-s}}\exp\left(-\frac{S_s^2}{2(T-s)}\right)dW_s,$$

其中 $\sigma = \text{下确界}\{t \in \mathbb{R}_+|S_t = 0\}.$。注意，$p^1$ 和$p^0$ 以连续方式到达 0 的概率为正。注意，$W$ 在 $(\Omega\ \mathcal{F}_T, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 上具有可预测表示性质。由于 $p_t^\xi = p_t^1\mathbb{I}_{\{\sigma>T\}} + p_t^0\mathbb{I}_{\{\sigma\le T\}}$，在扩大的随机基 $(\Omega\ \mathcal{F}_T, \mathbb{F}^{\sigma(\xi)}, \mathbb{P})$ 中，相对于以下过程，可预测表示性质成立

$$\begin{aligned}\overline{S}_t &= S_t - \int_0^t \frac{1}{p_s^\xi}d\langle S, p^x\rangle_s^{\mathbb{F}}|_{x=\xi}\\ &= S_t - \frac{1}{\mathbb{P}(\inf_{u\in[0,t]}S_u > 0)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sigma\wedge t}\frac{1}{\sqrt{T-s}}\exp\left(-\frac{S_s^2}{2(T-s)}\right)dW_s\\ &+ \frac{1}{\mathbb{P}(\inf_{u\in[0,t]}S_u \le 0)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sigma\wedge t}\frac{1}{\sqrt{T-s}}\exp\left(-\frac{S_s^2}{2(T-s)}\right)dW_s.\end{aligned}$$

例 97。（Fontana，2017年，第 8 页）考虑随机基 $(\Omega\ \mathcal{F}_T, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 上的标准泊松过程 $N = (N_t)_{t\in[0,T]}$，该随机基满足通常条件，其跳时序列为 $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。考虑随机变量 $\xi := N_T$。众所周知，

相应的条件密度过程为

$$p_t^n = \frac{\mathbb{P}(\xi = n|\mathcal{F}_t)}{\mathbb{P}(\xi = n)} = e^t \frac{(T-t)^{n-N_t}}{T_n} \frac{n!}{(n-N_t)!} \mathbb{I}^{\{N_t \le n\}}, \text{for all } t < T$$
$$p_T^n = e^T T^{-n} n! \mathbb{I}^{\{N_T = n\}},$$

因此，Jacod 判据得到满足。注意， $p^n$ 在 $\tau_{n+1}$ 处发生跳跃并达到 0（如果 $\tau_{n+1} \le T$），即对于所有 $n \in \mathbb{N}$， $R(n) = \tau_{n+1}$ ，其中 $R$ 的定义如上。由于补偿泊松过程 $S := N - t$ 在 $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 上具有可预测表示性质，因此在扩大的随机基 $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{F}^{\sigma(\xi)}, \mathbb{P})$ 中，相对于以下过程，该性质同样成立（我们省略细节，具体内容可参见原论文）

$$\overline{S}_t = N_t - t - \sum_{n+1}^{N_T} \mathbb{I}^{\{\tau_n \le t\}} \left(1 - \frac{T - \tau_n}{N_t - n + 1}\right) + (t - \tau_{N_T} \wedge t).$$

## 4.3 渐进扩张下的鞅表示性质

在渐进扩张下保持鞅表示性质需要进行更细致的分析，所得结果也不那么一般。例如，众所周知，对于一个相对于其自然滤过不是停时的随机时刻，通过该随机时刻进行渐进扩张后，布朗运动将失去鞅表示性质。与前文一样，我们不局限于立即陈述现有的最一般定理，而是梳理文献中的重要思想与发展脉络。

我们首先给出一些否定性结果，即遵循（Calzolari、Torti，2016a）的研究，我们将更详细地考察鞅表示性质失效的条件。

考虑定义在随机基（$\Omega$ $\mathcal{F}_T$、 $\mathbb{F}$、 $\mathbb{P}$）上的平方可积半鞅 $X$，并令 $\mathbb{G}$ 为 $\mathbb{F}$的任意扩张。记 $\mathfrak{M}$（$X$、 $\mathbb{G}$）为定义在（$\Omega$ $\mathcal{G}_T$）上的概率测度集合，在这些概率测度下， $X$ 是 $\mathbb{G}$-鞅，且它们与 $\mathbb{P}$等价。

定理 98. 假设 $\mathcal{G}_0$ 是 $\mathbb{P}$-平凡的，且 $u := \inf\{t \in [0,T] : \mathcal{F}_t \subsetneq \mathcal{G}_t\} = \min\{t \in [0,T] : \mathcal{F}_t \subsetneq \mathcal{G}_t\}$. 若 $\mathfrak{M}(X, \mathbb{G}) \neq \emptyset$，则对任意 $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}(X, \mathbb{G})$

$$K^2(\Omega, \mathbb{G}, \mathbb{P}, X) \subsetneq L_0^2(\Omega, \mathcal{G}_T, \mathbb{P}),$$

其中 $K^2(\Omega\ \mathbb{G}, \mathbb{P}, X) := \left\{ \int_0^T \xi dX_s, \xi \in \mathcal{L}^2(X, \mathbb{P}, \mathbb{F}) \right\}$。

证明。见（Calzolari、Torti，2016a，定理 3.4，第 6 页）。 □

由前一定理中的严格包含关系可立即得出一个推论：若等价概率测度的集合是单元素集，则扩张会破坏 $X$ 的鞅表示性质，即

推论 99。假设 $\mathfrak{M}(X, \mathbb{F}) = \{\mathbb{P}\}$。那么，在前一定理的假设下，$X$ 在 $\mathbb{G}$ 中不具有鞅表示性质。

在通过随机变量 $\xi$ 进行初始扩张的情形下，假设存在一个与 $\mathbb{P}$ 等价的概率测度 $\mathbb{Q}$，在该测度下 $\mathcal{F}_T$ 与 $\sigma(\xi)$ 独立，可保证鞅表示性质得以保持；而现在，相同的假设却会导致该性质丧失。我们引述一般结果，并讨论如何化解这一悖论（更多细节参见 Calzolari、Torti，2016a，第 17 页）。

定理 100。假设 $\mathfrak{M}(X, \mathbb{F}) = \{\mathbb{P}\}$ 且 $\mathbb{G} := \mathbb{F} \vee \mathbb{K}$，其中 $\mathbb{K}$ 是 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上满足通常假设的滤过，并且对某个 $t \in (0, T]$ 有 $\mathcal{K}_t \neq \mathcal{K}_0$。设 $\mathbb{Q}$ 是 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 上与 $\mathbb{P}$ 等价的概率测度，在该测度下 $\mathcal{F}_T$ 与 $\mathcal{K}_T$ 独立。那么 $X$ 在 $\mathbb{G}$ 中不具有鞅表示性质。

这一悖论的解释在于：初始扩张和渐进扩张对时刻 0 可用信息集的影响有着根本区别。在初始扩张的情况下，$\mathcal{F}_0$ 会因 $\sigma$（$\xi$）中包含的信息而扩充；而在渐进扩张下，$\mathcal{F}_0$ 仍然是平凡的。假设$\mathfrak{M}$（$X$，$\mathbb{F}$）是单元素集，则初始 $\sigma$-代数 $\mathcal{F}_0$ 在 $\mathbb{P}$ 下是平凡的；众所周知，$X$ 在 $\mathbb{P}$下于 $\mathbb{F}$ 中具有鞅表示性质。直观地说，这意味着 $\mathbb{F}$-局部鞅中的所有随机性都包含在 $X$ 中（Calzolari、Torti，2016a，第 17 页）。在扩张滤过中，$X$ 所包含的随机性已不足以表示所有 $\mathbb{G}$-局部鞅。初始扩张会使鞅的初始值成为随机变量，因为 $\mathcal{F}_0$ 不再是平凡的；而渐进扩张则需要额外的随机过程作为随机积分器。

前面的讨论使我们得出结论：需要更多假设才能挽救（某种形式的）鞅表示性质。下面我们将讨论若干结果，其一般性不一定逐步增强（或相互嵌套）。

在前述定理的框架内，设 $X$ 是平方可积半鞅，取 $\mathbb{H}$ 为 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P})$ 上满足通常条件的滤过，其中 $\mathcal{H}_0$ 平凡。取 $Y$ 为平方可积的 $(\mathbb{P},\mathbb{H})$-半鞅，并且在等价概率测度下于 $\mathbb{H}$ 中具有鞅表示性质。记 $M$ 和 $N$ 分别为 $X$ 和 $Y$ 的鞅部分。记 $K^X(\mathbb{F})$ 为集合 $\left\{\int_0^T \xi dX_s,\ \xi\ \mathbb{F}-\text{可预测、简单、有界}\right\}$ 在 $L^1(\Omega\ \mathcal{F}_T,\mathbb{P})$ 中的闭包，$K^Y(\mathbb{H})$ 同理。记 $\alpha$ 为与 $L^2([0,T],\mathcal{B}([0,T])\ d\langle M\rangle_t)$ 相关联的可预测过程，记 $\delta$ 为与 $L^2([0,T],\mathcal{B}([0,T])\ d\langle N\rangle_t)$ 相关联的可预测过程，使得 $A_t=\int_0^t \alpha_s d\langle M\rangle_s, D_t=\int_0^t \delta_s d\langle N\rangle_s$。最后，定义扩张滤过为 $\mathbb{G}:=\mathbb{F}\vee\mathbb{H}$。我们将证明，存在概率测度 $\mathbb{Q}\in\mathfrak{M}(X,Y,[X,Y],\mathbb{G})$，使得 $(X,Y,[X,Y])$ 在 $\mathbb{Q}$ 下于 $\mathbb{G}$ 中具有鞅表示性质。

定理101。假设以下条件成立

(i) $\mathfrak{M}(X,\mathbb{F})=\{\mathbb{P}^X\}, \mathfrak{M}(Y,\mathbb{H})=\{\mathbb{P}^Y\}$ [1]，(ii) $K^X(\mathbb{F})\cap L^1_+(\Omega\ \overline{\mathcal{F}_T,\mathbb{P})}=\{0\}$, $K^Y(\mathbb{H})\cap L^1_+(\Omega\ \overline{\mathcal{H}_T,\mathbb{P})}=\{0\}$，(iii) $\alpha\Delta M<1$ $\mathbb{P}$-几乎处处，$\delta\Delta N<1$ $\mathbb{P}$-几乎处处 (iv)

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \alpha_t^2 d\langle M^c\rangle_t+\int_0^T \alpha_t^2 d\langle M^d\rangle_t\right\}\right]<\infty$$
$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \delta_t^2 d\langle N^c\rangle_t+\int_0^T \delta_t^2 d\langle N^d\rangle_t\right\}\right]<\infty.$$

(v) $M$ 和 $N$ 是$(\mathbb{P},\mathbb{G})$-强正交鞅。

则以下断言成立

(1) $\mathcal{F}_T$ 和 $\mathcal{H}_T$ 在 $\mathbb{P}$下独立，$\mathbb{G}$ 满足通常假设，并且每个$W\in\mathcal{M}^2(\mathbb{P}.\mathbb{G})$都有唯一表示

$$W_t=W_0+\int_0^t \gamma_s^W dM_s+\int_0^t \kappa_s^W dN_s+\int_0^t \phi_s^W d[M,N]_s\quad \mathbb{P}-a.s.,$$

其中 $\gamma^W\in\mathcal{L}^2(M,\mathbb{P},\mathbb{G})$，$\kappa^W\in\mathcal{L}^2(N,\mathbb{P},\mathbb{G})$以及 $\phi^W\in\mathcal{L}^2([M,N],\mathbb{P},\mathbb{G})$;

(2) 存在一个概率测度 $\mathbb{Q}$，定义在 $(\Omega\ \mathcal{G}_T)$ 上，使得 $(X,Y,[X,Y])$ 具有

[1]上标强调了这样一个事实：这些测度是针对不同过程和不同滤过定义的。请注意，这两个集合都是单元素集，并且这两个测度可以是同一个测度 $\mathbb{P}$ 在相应滤过上的限制。

在 $\mathbb{G}$ 下关于 $\mathbb{Q}$ 的鞅表示性质，即每个 $Z \in \mathcal{M}^2(\mathbb{Q}, \mathbb{G})$ 都有唯一表示

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \eta_s^Z dX_s + \int_0^t \theta_s^Z dY_s + \int_0^t \zeta_s^Z d[X,Y]_s \quad \mathbb{Q} - a.s.,$$

其中 $\eta^Z \in \mathcal{L}^2(X, \mathbb{Q}, \mathbb{G})$、$\theta^Z \in \mathcal{L}^2(Y, \mathbb{Q}, \mathbb{G})$ 和 $\zeta^Z \in \mathcal{L}^2([X,Y], \mathbb{Q}, \mathbb{G})$。

证明。参见（Calzolari、Torti，2016a，定理 4.13，第 14 页）。 □

一个重要的特殊情形值得单独作为推论陈述。

推论 102. 在前一定理的假设下，当且仅当（$\mathbb{P}, \mathbb{G}$）-半鞅（$X, Y$）在 $\mathbb{G}$. 中具有鞅表示性质时，$[X,Y]_t \equiv 0$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立

这些结果可以推广到多维情形。然而，由于向量随机积分与多维逐分量随机积分之间存在众所周知的差异，这种推广并非完全直接。我们仅给出主要结果的陈述，完整细节请参见（Calzolari, Torti, 2016b）。

下文中，$X$ 和 $Y$ 分别表示一个 $m$维平方可积的（$\mathbb{P}$，$\mathbb{F}$）-半鞅和一个 $n$维平方可积的（$\mathbb{P}$，$\mathbb{H}$）-半鞅，其典范分解分别为 $X = X_0 + M + A$ 和 $Y = Y_0 + N + D$，其中 $M$ 和 $N$ 为局部鞅，$A$ 和 $D$ 为有限变差过程。$\mathcal{L}^2$（$M$，$\mathbb{P}$，$\mathbb{G}$）表示由 $\mathbb{G}$-可预测的 $m$维过程 $\xi = (\xi_t)_{t\in[0,T]} = ((\xi_t^1, ..., \xi_t^m))_{t\in[0,T]}$ 构成的集合，使得$\|\xi\|_{\mathcal{L}^2}$（$M$，$\mathbb{P}$，$\mathbb{G}$）$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[(\xi \bullet X)_T] < \infty$，其中 $\xi \bullet X$ 表示向量随机积分，因此是一个一维随机过程。Radon-Nikodym 导数过程记为 $L_t^X := \frac{d\mathbb{P}^X}{d\mathbb{P}|\mathcal{F}_t}$，$Y$的情形类似。$[M,N]^V$表示该过程

$$([M^1,N^1], ..., [M^1,N^n], [M^2,N^1], ..., [M^2,N^n], ..., [M^m,N^1], ..., [M^m,N^n]).$$

第一个多维结果与一维情形几乎完全相同，只需将随机积分理解为向量意义下的随机积分。

定理 103. 假设以下条件成立
(i) $\mathfrak{M}(X, \mathbb{F}) = \{\mathbb{P}^X\}$，$\mathfrak{M}(Y, \mathbb{H}) = \{\mathbb{P}^Y\}$；(ii) $L_T^X \in L_{loc}(\Omega\ \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$，$L_T^Y \in L_{loc}(\Omega\ \mathcal{H}_T, \mathbb{P})$；(iii) 对任意 $i \in (1, ..., m)$ 和 $j \in (1, ..., n)$，$M^i$和 $N^j$均为实值的 $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$-强正交鞅。

则以下陈述成立。
(1) $\mathcal{F}_T$ 和 $\mathcal{H}_T$ 在 $\mathbb{P}$下相互独立；(2) $\mathbb{G}$ 满足标准假设；
(3) 每个 $W \in \mathcal{M}^2(\mathbb{P}.\mathbb{G})$都有唯一表示

$$W_t = W_0 + (\gamma^W \bullet M)_t + (\kappa^W \bullet N)_t + (\phi^W \bullet [M,N]^V)_t \quad \mathbb{P}-a.s.,$$

其中 $\gamma^W \in \mathcal{L}^2(M,\mathbb{P},\mathbb{G})$、 $\kappa^W \in \mathcal{L}^2(N,\mathbb{P},\mathbb{G})$和 $\phi^W \in \mathcal{L}^2([M,N]^V,\mathbb{P},\mathbb{G})$；(4) 存在一个定义在$(\Omega\ \mathcal{G}_T)$上的概率测度 $\mathbb{Q}$，使得$(X,Y,[X,Y]^V)$在 $\mathbb{G}$ 中关于 $\mathbb{Q}$具有鞅表示性质（PRP），即每个 $Z \in \mathcal{M}^2(\mathbb{Q},\mathbb{G})$都有唯一表示

$$Z_t = Z_0 + (\eta^Z \bullet X)_t + (\theta^Z \bullet Y)_t + (\zeta^Z \bullet [X,Y])_t \quad \mathbb{Q}-a.s.,$$

其中 $\eta^Z \in \mathcal{L}^2(X,\mathbb{Q},\mathbb{G})$、 $\theta^Z \in \mathcal{L}^2(Y,\mathbb{Q},\mathbb{G})$和 $\zeta^Z \in \mathcal{L}^2([X,Y]^V,\mathbb{Q},\mathbb{G})$。

证明。参见（Calzolari, Torti, 2016b，定理 3.4，第12页）。 □

最后，我们通过一个例子，将上述讨论的思想（例如 Amedinger 2000 年提出的解耦测度）与多维定理结合起来。

例 104。（Calzolari、Torti，2016年（b），命题 4.4，第 20 页）。考虑一个随机基（$\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P}$），令 $\tau$ 为连续随机变量，使得对于每个 $t \in [0,T]$，都有 $\mathbb{P}(\tau \in \cdot|\mathcal{F}_t) \sim \mathbb{P}(\tau \in \cdot)$，$\mathbb{P}$-几乎处处成立。令 $X$ 为一个 $m$ 维平方可积（$\mathbb{P},\mathbb{F}$）半鞅，满足上述条件 (i) 和 (ii)。令 $\mathbb{G}$ 由 $\mathcal{G}_t := \cap_{s>t}\mathcal{F}_s \vee \sigma(\tau \wedge s)$ 定义。定义一个实值过程 $\lambda$，其定义如下

$$\lambda_t = \frac{p_t(t)}{\mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t)}, \quad t \in [0,T],$$

其中，过程 $(p_t(u))_u$ 定义如下

$$\int_t^T p_t(u)du = \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t).$$

Ass设 $\mathbb{F}$ 在 $\mathbb{P}$下浸入 $\mathbb{G}$。那么可以证明， ir

$$\left(M, \mathbb{I}^{\{\tau \le \cdot\}} - \int_0^{\tau \wedge \cdot} \lambda_u du\right)$$

是多维鞅的（$\mathbb{P}$, $\mathbb{G}$）基。我们只关注主要思想。在上述设定中，我们取 $\mathbb{H}$ 为过程（$\mathbb{I}^{\{\tau\leq t\}}$）$_t$的自然滤过，并令过程 $N$ 为

$$N_t = {}_{\mathbb{I}^{\{\tau\leq t\}}} - \int_0^{\tau\wedge t} \frac{dF_u}{1-F_u},$$

其中， $F$是$\tau$的连续累积分布函数。已知 $N$是一个在 $\mathbb{P}|_{\mathcal{H}_T}$下具有 $\mathbb{H}$ 中鞅表示性质的（$\mathbb{P},\mathbb{H}$）-鞅，并且 $M$ 在 $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}$下具有 $\mathbb{F}$ 中的鞅表示性质。由上文所述（Amedinger, 2000年）的结果可知，在 Jacod 等价条件下，$(\Omega\ \mathcal{G}_T)$ 上存在一个解耦概率测度 $\mathbb{P}^*$，使得在该测度下 $\mathbb{F}$与 $\sigma$（$\tau$）独立，并且$\mathbb{P}^*|_{\mathcal{F}_T} = \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}$, $\mathbb{P}^*|_{\mathcal{H}_T} = \mathbb{P}|_{\mathcal{H}_T}$。由于 $\mathcal{H}_T = \sigma$（$\tau$），由独立性可知，在 $\mathbb{P}^*$下，对于任意 $i \in (1, ..., m)$， $M^i$和 $N$是 $\mathbb{G}$中的强正交鞅，因此上述定理适用，且（$M, N$）构成一个（$\mathbb{P}^*,\mathbb{G}$）-多维基。还需要做更多工作才能证明，该结果可从（$M, N$）推广至 $\mathbb{P}$下的这一对 $\left(M, {}_{\mathbb{I}^{\{\tau\leq\cdot\}}} - \int_0^{\tau\wedge\cdot} \lambda_u du\right)$。我们略去这一部分。

我们给出一个源于违约风险建模的另一种表示结果，该结果由（Kusuoka, 1999）提出，比前一个例子略不一般，但其本身也很重要。我们首先建立一些初步结果，这些结果在有关违约时刻的文献中属于标准结果，例如可见（Aksamit、Jeanblanc，2017年，第31—32页）。这里，滤过 $\mathbb{A}$ 是由递增过程 $A_t = {}_{\mathbb{I}^{\{\tau\leq t\}}}$ 生成的自然滤过。

定理 105。由 $M$ 给出的过程

$$M_t \coloneqq A_t - \int_0^{\tau\wedge t} \frac{dF(s)}{1-F(s-)}$$

是一个 $\mathbb{A}$-鞅。

此外，若 $F = \mathbb{P}(\tau \leq t)$ 关于勒贝格测度绝对连续，且密度为 $f$，则由下式给出的过程

$$M_t \coloneqq A_t - \int_0^{\tau\wedge t} \lambda(s)ds = A_t - \int_0^t \lambda(s)(1-A(s))ds$$

是一个 $\mathbb{A}$-鞅，其中 $\lambda(t) = {}^{f_{(t)}\mathbb{1}_{\overline{F(t)=1}}}\mathbb{I}^{\{F(t)<1\}}$ 是 $t$ 的一个确定性非负函数，称为 $\tau$ 的强度率。

这个鞅之所以至关重要，是因为它在 $\mathbb{A}$ 中具有鞅表示性质，以下定理对此作了证明。

定理 106. 任意 $\mathbb{A}$-局部鞅都可以表示为关于上述 $M$ 的随机积分。

考虑一个随机基 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$，其中滤过 $\mathbb{F}$ 取为满足通常条件的 $d$ 维弱布朗滤子，即按定义，存在一个 $d$ 维布朗运动 $\beta$，它在 $\mathbb{F}$ 中具有鞅表示性质，也就是说，每个 $\mathbb{F}$-局部鞅都可以表示为关于 $\beta$ 的随机积分，其中被积过程 $h$ 是可预测的。考虑由 $A_t^i = {}_{\mathbb{I}^{\{\tau_i \le t\}}}$ 给出的随机过程，其中违约时刻 $\tau_i$, $i = 1, 2, ..., N$ 的分布是连续的，并且对所有 $k \neq l$，$\mathbb{P}(\tau_k = \tau_l) = 0$ 成立。

考虑由 $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau_i \wedge t;\ i = 1, 2, ..., N)$ 给出的扩张滤过。假设 H假设成立，并且存在 $\mathbb{G}$-渐进可测过程 $\lambda^i : [0, T) \times \Omega \mapsto [0, T], k = 1, 2, .., N$，使得

$$M^i(t) = A_t^i - \int_0^t (1 - A^i(s))\lambda^i(s)ds$$

在 $\mathbb{P}$ 下是 $\mathbb{G}$-鞅。于是，以下鞅表示结果成立。

定理 107. 对于任意 $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$-平方可积鞅 $(Y_t)_{t\in[0,T]}$，存在 $\mathbb{G}$-可预测过程 $f\colon [0, T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$ 以及 $\tilde{f}^i\colon [0, T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}, i = 1, ..., N$，使得

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |f(t)|^2 dt\right] < \infty, \quad \mathbb{E}\left[\int_0^T |\tilde{f}^i(t)|^2 \lambda^i(t)dt\right] < \infty, \quad i = 1, ..., N$$

并且以下鞅表示性质成立

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \int_0^t f(s)dB(s) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \tilde{f}^i(s)dM^i(s) \\ &= Y_0 + (f \bullet B)_t + (\tilde{f} \bullet M)_t, \quad t \in ]0, T]. \end{aligned}$$

特别地，当 $\mathbb{G}$-鞅 $Y$具有 $\mathbb{E}(X(1-\mathbb{I}_{\{\tau\leq T\}})|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(X\mathbb{I}_{\{T<\tau\}}|\mathcal{G}_t)$ 的形式，其中 $X$ 是 $\mathcal{F}_t$-可测的，或者对于具有 $\mathbb{E}(h_\tau|\mathcal{G}_t)$ 形式的鞅，以下表示成立（另见 Jeanblanc、Yor、Chesney，2009）。

定理 108. 假设 $\mathcal{H}$假设成立， $G = 1 - F$是连续的，其中 $F_t := \mathbb{P}(\tau \leq t|\mathcal{F}_t)$，且每个 $\mathbb{F}$-鞅都是连续的。那么，鞅 $Y_t = \mathbb{E}(h_\tau|\mathcal{G}_t)$（其中 $h$ 是一个 $\mathbb{F}$-可预测过程，满足 $\mathbb{E}|h_\tau| < \infty$）可表示为一个 $\mathbb{G}$-连续鞅与一个 $\mathbb{G}$-纯不连续鞅之和，即

$$Y_t = m_0^h + (G^{-1} \bullet m^h)_{t\wedge\tau} + ((h - J) \bullet M)_{t\wedge\tau},$$

其中 $m^h$ 是由下式给出的连续 $\mathbb{F}$-鞅

$$m_t^h = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty h_u dF_u \middle| \mathcal{F}_t\right),$$

而 $h - J$是 $\mathbb{G}$-纯不连续鞅，其中 $J$由下式给出

$$J_t = G_t^{-1}(m_t^h - \int_0^t h_u dF_u),$$

且 $J_u = H_u$ 在集合 $\{u < \tau\}$上。

假设在 $\mathbb{F}$中，对于一族 $\mathbb{F}$-局部鞅 $X = (X^1, ..., X^n)$，鞅表示性质成立，并且 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$存在一个过程 $X = (X^1, ..., X^n)$，它是 $X$的$\mathbb{G}$-半鞅分解中的 $\mathbb{G}$-局部鞅分量。

在 Jacod 判据下（即对于 $\mathcal{J}$ 次或初始时刻），根据上一节关于初始扩张的讨论可知，$(X, M)$ 在 $\mathbb{G}$ 中具有鞅表示性质，其中 $M = A - (1 - A_-) \frac{1}{Z_-} \bullet A^p$。

我们给出 Callegaro 等人（2011）提出的这一结果的一个版本。考虑一个完备随机基 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$，以及由 $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{A}_t$, $\mathcal{A}_t = \sigma(\mathbb{I}^{\{\tau\leq s\}};\ s \leq t)$ 给出的扩张，即使随机时刻 $\tau$ 成为停时的最小滤过。与上文一样， $\mathbb{P}^*$ 表示解耦测度。按照惯例，我们定义 $(\mathbb{P}^*, \mathbb{G})$-鞅

$$M_t := A_t - \int_0^{\tau \wedge t} \lambda(s)\nu(ds), \quad t \geq 0,$$

其中 $\lambda(t) = \frac{1}{1-F(t)}$， $F(t) = \mathbb{P}(\tau \leq t)$，且 $\nu$ 是 $\tau$ 的分布。

定理109。假设存在一个过程 $Z$ （不一定连续），它对（$\mathbb{P}$， $\mathbb{F}$）具有鞅表示性质。那么，每个 $X \in \mathcal{M}_{loc}$（$\mathbb{P}^*$， $\mathbb{G}$）都可以表示为

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Phi_s dZ_s + \int_0^t \Psi_s dM_s,$$

其中， $\Phi \in \mathcal{L}$（$Z$， $\mathbb{P}^*$， $\mathbb{G}$）和 $\Psi \in \mathcal{L}$（$M$， $\mathbb{P}^*$， $\mathbb{G}$）是某些过程。特别地，当 $X \in \mathcal{M}^2$（$\mathbb{P}^*$， $\mathbb{G}$）时，对所有 $t \geq 0$， $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\int_0^t \Phi_s^2 d[Z]_s\right) < \infty$， $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\int_0^t \Psi_s^2 \lambda\ (s)\ d[M]_s\right) < \infty$，上述表示是唯一的。

正如作者所指出的，直观而言，由于 $\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{A}$ 由两个滤过构成，我们需要另一个鞅来挽救扩张滤过中的鞅表示性质；一个合适的候选对象（事实证明确实有效）似乎是 $A$.的补偿鞅。这是该主题中反复出现的一个主题，称为滤过的重数，其定义为能够实现鞅表示性质的鞅的最小数量。通常，滤过扩张会导致重数增加（Aksamit、Jeanblanc，2017年，第99页）。

关于诚实刻时的经典结果（Barlow，1978年） $\tau$ 指出，在假设 $\widetilde{(C)}$下，所有连续的 $\mathbb{G}$-鞅均由 $X$生成。此外，对于一个诚实刻时 $\tau$，所有平方可积的 $\mathbb{G}$-鞅均由以下族生成 $\left\{\widetilde{X}:\ X \text{是一个有界的 } \mathbb{F}\text{-鞅}\right\}$，且 $\left\{v_{\mathbb{I}\!\mathbb{I}^{[\tau,\infty\mathbb{I}}} - (v_{\mathbb{I}\!\mathbb{I}^{[\tau,\ \infty\mathbb{I}}})^{\mathbb{G},\ p}:\ v \text{是一个有界的 } \mathcal{G}_\tau\text{-可测随机变量}\right\}$。我们仅陈述主要结果，详细内容请参阅原论文。

考虑一个随机基（$\Omega$ $\mathcal{F}$， $\mathbb{F}$， $\mathbb{P}$），其中 $\mathbb{F}$ 满足通常条件，并设有一个诚实刻时 $\tau$ : $\Omega \mapsto [0,\infty]$。令 $\mathbb{G}$ 为 $\mathbb{F}$ 的一个扩张，定义如下:

$$\mathcal{G}_t = \{\Lambda \in \mathcal{F} : \Lambda = (E \cap \{L \leq t\}) \cup (F \cap \{L > t\}) \text{ for some } E, F \in \mathcal{F}_t\} \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}_+.$$

由此可知， $\mathbb{G}$ 也满足通常条件，且 $\tau$ 是一个 $\mathbb{G}$-停时。

现在定义 $A^o$ 和 ${}^oA$ 分别为 $A$ $=(_{\mathbb{I}}\mathbb{I}^{\tau,\ \infty}\mathbb{I})^{t\geq 0}$的适应投影和对偶可选投影。以下定理是推导主要结果的关键组成部分。

$\widetilde{\ }$定理110。设 $M$ 是一个平方可积的 $\mathbb{F}$-鞅，并且 $M$ 定义为

$$\widetilde{M_t} = M_t + \int_0^t \left( \frac{1 - A_{s-}}{1 - A^o_{s-}} - \frac{A_{s-}}{A^o_{s-}} \right) d\langle M, A^o - {}^oA \rangle_s$$

$\widetilde{\ }$那么， $M$ 是一个平方可积的 $\mathbb{G}$-鞅。

定理111。假设 $\{M^i : \ i \in I\}$ 是有限个连续 $\mathbb{F}$-局部鞅的集合，并且在 $\mathbb{F}$中具有鞅表示性质（PRP），即对于任意连续的 $\mathbb{F}$-局部鞅 $Y$，都存在 $\mathbb{F}$-可预测过程 $\phi^i$、 $i \in I$，使得

$$Y_t = \sum_{i \in I} \int_0^t \phi^i_s dM^i_s.$$

$\widetilde{\ }$那么，有限集合 $\{M^i : \ i \in I\}$ 在 $\mathbb{G}$中具有鞅表示性质（PRP）；也就是说，对于任意连续的$\mathbb{G}$-局部鞅 $Z$，都存在 $\mathbb{G}$-可预测过程 $\psi$、 $i \in I$，使得

$$Z_t = \sum_{i \in I} \int_0^t \psi^i_s d\widetilde{M}^i_s.$$

分析还可以扩展到纯不连续的 $\mathbb{G}$-鞅情形。即使要阐述这些结论的全部细节，也会使篇幅过长，因此我们仅给出理解结果所需的基本内容（完整细节见 Barlow，1978 年）。 $\mu$ 是定义在(0， $\infty$) $\times E$上的一个$\mathbb{F}$-适应的整数值随机测度，其中 $E$ 是一个卢津空间，而$\nu$ 是其 $\mathbb{F}$-对偶可预测投影。对于扩张滤过 $\mathbb{G}$，$\widetilde{\mu}$ 和 $\widetilde{\nu}$ 的定义类似。于是有以下结果。

定理112。如果有限集 $\{M^i : i \in I; \mu - \nu\}$ 具有针对 $\mathbb{F}$-鞅的鞅表示性-$\widetilde{\ }$质，那么 $\{M^i : i \in I; \widetilde{\mu} - \widetilde{\nu}\}$ 具有针对 $\mathbb{G}$- 鞅的鞅表示性质。

定理113. 若 $\mu - \nu$ 对纯不连续的 $\mathbb{F}$-鞅具有鞅表示性质，则 $\widetilde{\mu} - \widetilde{\nu}$ 对纯不连续的 $\mathbb{G}$-鞅具有鞅表示性质。

对于一般随机时刻 $\tau$，Jeanblanc、Song 和 2015年证明，当 $\mathbb{F}$浸入 $\mathbb{G}$ 且 $X_\tau$是 $\mathcal{F}_{\tau-}$-可测时， $\mathcal{G}_\tau = \mathcal{G}_{\tau-}$ 和（$X, M$）在 $\mathbb{G}$中具有鞅表示性质，其中$M = A -(1 - A_-)$ $\frac{1}{Z_-} \bullet A^p$。他们还证明，若 $\tau$是诚实时刻且 $\mathbb{F}$ 是布朗滤过，则可以扩充随机过程的集合，以恢复$\mathbb{G}$中的鞅表示性质。具体而言，以下陈述成立（照例，我们在完备随机基 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 上进行讨论）。

定理114. 假设 $\tau$ 是一个 $\mathbb{F}$-诚实时刻， $d$维$\mathbb{F}$-适应右连续有左极限过程 $X$ 具有鞅表示性质，且 $\mathbb{F}$ 是布朗滤过。那么存在一个有界$\sim\mathbb{G}$-鞅 $Y$，使得$(X, M, Y)$在 $\mathbb{G}$.中具有鞅表示性质

证明. 我们概述主要论证，并请读者参阅原论文，以了解缺失的细节和适当的背景。

由于 $\mathbb{F}$ 是布朗滤过，且 $\tau$ 是一个诚实时刻，因此存在一个集合 $A \in \mathcal{G}_\tau$，使得 $\mathcal{G}_\tau = \mathcal{G}_{\tau-} \vee \sigma(A)$，并且任意 $\xi \in \mathcal{G}_\tau$ 都具有表示 $\xi = \xi' \mathbb{I}_A + \xi'' \mathbb{I}_{A^c}$ 若$0 = \xi' p + \xi''(1 - p)$，其中 $p = \mathbb{P}(A|\mathcal{G}_{\tau-})$，则

$$\xi = \left( - \mathbb{I}_{\{p>0\}} \xi'' \frac{1}{p} + \mathbb{I}_{\{p=0\}} \xi' \frac{1}{1-p} \right) ((1-p) \mathbb{I}_A - p \mathbb{I}_{A^c}).$$

定义 $Y = ((1 - p)\, \mathbb{I}_A - p \mathbb{I}_{A^c})H$，其中 $H := \mathbb{I}_{[\![\tau,\ \infty[\![}$，并令 $F$为一个 $\mathbb{F}$-可预测过程，使得 $F_\tau = \left( - \mathbb{I}_{\{p>0\}} \xi'' \frac{1}{p} + \mathbb{I}_{\{p=0\}} \xi' \frac{1}{1-p} \right)$。由此可得， $Y$是一个有界$\mathbb{G}$-鞅， $F$ 是 $Y$-可积的，并且对任意有界$\mathbb{G}$-鞅 $Z$ ，有如下分解公式

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t (J' \mathbb{I}_{\{s \le \tau\}} + J'' \mathbb{I}_{\{\tau < s\}}) d\widetilde{X}_s + \int_0^t K_s \mathbb{I}_{\{0 < s \le \tau\}} dM_s + \int_0^t F_s dY_s,$$

其中我们用到了这样一个事实：对于任意 $\mathbb{G}$-可预测过程 $J$，都存在 $\mathbb{F}$-可预测过程 $J'$ 和 $J''$，使得 $J \mathbb{I}_{(0,\infty)} = J' \mathbb{I}_{(0,\tau]} + J'' \mathbb{I}_{]\tau,\infty)}$。这表明，在 $\mathbb{G}.$中，$(X, M, Y)$ 满足 MRP $\widetilde{}$ □

现在我们再次将注意力转向一般随机时刻。考虑一个随机基（$\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}$）以及一个 $\mathcal{F}$-可测的随机时刻 $\tau$。令 $\mathbb{G}$为由随机时刻 $\tau$对 $\mathbb{F}$ 进行的扩张。回顾过程 $L_t = \mathbb{I}_{\{\tau>0\}} H_t - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{dA_s}{Z_{s-}}$是一个 $\mathbb{G}$-局部鞅，其中 $H := \mathbb{I}_{[\![\tau,\ \infty[\![}$。记 $\mathcal{I}(\mathbb{P}, \mathbb{F}, M)$为多维

$\mathbb{F}$-可预测过程的族，这些过程在 $\mathbb{P}$下是 $M$-可积的。我们还使用以下关于 $\mathcal{H}'$-假设的定义：存在一个映射 $\Gamma$ ，从 $\mathcal{M}_{loc}(\mathbb{F})$映入具有有限变差的右连续有左极限$\mathbb{G}$-可预测过程空间，使得对任意 $X \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{F})$， $\Gamma(X)_0 = 0$且 $\widetilde{X} := X - \Gamma(X)$是一个 $\mathbb{G}$-局部鞅。算子 $\Gamma$ 称为漂移算子。我们始终假设：(i) 鞅表示性质对一个 $d$维的 $\mathbb{F}$-适应右连续有左极限过程 $X$ 成立；以及(ii) $\mathcal{H}'$ 对 $\mathbb{G}$成立。那么，以下一般定理成立（见Jeanblanc、Song，2015年，第8页，定理3.1）。

定理115. 对于任意有界的 $\mathcal{G}_\tau$-可测随机变量 $\zeta$，存在一个 $\mathbb{F}$-可预测过程 $J$，使得$J\mathbb{I}_{[\![0,\tau]\!]} \in \mathcal{I}(\mathbb{P}, \mathbb{G}, X)$且

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\zeta|\mathcal{G}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\zeta|\mathcal{G}_0] + \int_0^t (1 - H_{s-}) J_s d\widetilde{X}_s + \mathbb{I}_{\{\tau>0\}}(\zeta - Y_\tau) H_t - \int_0^t K_s (1 - H_{s-}) \frac{1}{Z_{s-}} dA_s,$$

对于 $t \geq 0$ $K$ $\mathbb{F}$ $K_\tau \mathbb{I}_{\{0<\tau<\infty\}} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\ \zeta -$，其中是一个有界的-可预测过程，使得$Y_\tau$ $Y_t$ $\mathbb{I}_{\{0<\tau<\infty\}}|\mathcal{F}_{\tau-}]$，且：$0 \leq t < \infty$ $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \mathbb{I}_{\{t<\tau}|\mathcal{F}_t]$ $Z_t$ $\mathbb{I}_{\{t<R\}}$，对于。

如果我们进一步假设 $\{0 < \tau < \infty\} \cap G_\tau = \{0 < \tau < \infty\} \cap G_{\tau-}$ 在 $\mathbb{P}$下成立，那么很容易得到，停止过程$(X, L)^\tau$在停止滤过 $\mathbb{G}^\tau$ 中具有鞅表示性质。更具体地说，以下结论成立。

定理116. 在上述假设下，鞅表示性质$(\mathbb{P}, \mathbb{G}^\tau, (X^\tau, L))$成立，且 $\mathbb{I}_{\{0<\tau<\infty\}} X_\tau$是$\mathcal{G}_{\tau-}$-可测的，当且仅当 $\mathbb{P}$下 $\{0 < \tau < \infty\} \cap G_\tau = \{0 < \tau < \infty\} \cap G_{\tau-}$。

在违约时间 $\tau$ 之后保持鞅表示性质是一个更为微妙的问题，我们选择不予讨论。我们以（Jeanblanc、Song，2011，2015）中的一个特别生动的例子结束关于渐进扩张下保持鞅表示性质的讨论。

例 117.（一个演化模型。）考虑一个随机基 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$，其中 $\mathbb{F}$满足通常假设。考虑一个 $\mathbb{F}$适应的连续递增过程 $\Lambda$，以及一个非负的 $\mathbb{F}$局部鞅 $N$，满足 $\Lambda_0 = 0$、 $N_0 = 1$，并且对所有 $0 \leq t < \infty$都有 $0 \leq N_t e^{-\Lambda_t} \leq 1$。定义乘积空间 $([0, \infty] \times \Omega\ \mathscr{B}([0, \infty])$ $\otimes \mathcal{F}_\infty)$，以及相应的典范投影映射 $\pi(s, \omega) = \omega$和 $\tau(s, \omega) = s.$。现在，我们可以通过 $\widehat{\mathbb{F}} = \pi^{-1}(\mathbb{F})$ 将滤过拉回到乘积空间，并通过 $\widehat{\mathbb{P}}(\pi^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A)$ 将 $\pi^{-1}(\mathcal{F}_\infty)$ 上的概率测度拉回，对所有 $A \in \mathcal{F}_\infty.$ 均成立。由此得到一个概率结构 $\widehat{\ }\ \widehat{\ }$ $\widehat{\ }\ \widehat{\ }([0, \infty] \times \Omega\ \mathbb{F}, \mathbb{P})$，它与 $(\Omega\ \mathbb{F}, \mathbb{P})$同构。下文中，$(\mathbb{F}, \mathbb{P})$ 简记为

$(\mathbb{F},\mathbb{P})$，而 $\Omega$ 上一个 $\mathcal{F}_\infty$-可测随机变量 $\xi$ 则视为乘积样本空间 $[0,\infty]\times\Omega$ 上的 $\xi\circ\pi$。在这一设定下，我们提出一个有趣的问题。

问题 $\mathcal{P}^*$ 构造一个概率测度 $\mathbb{Q}$ 于 $([0,\infty]\times\Omega\ \mathscr{B}([0,\infty])\otimes\mathcal{F}_\infty)$，使得

(i) $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_\infty}=\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_\infty}$（限制条件）；

(ii) $\mathbb{Q}[\tau>t|\mathcal{F}_t]=N_te^{-\Lambda_t}$ 对所有 $0\le t<\infty$（投影条件）。

可以证明，在某些假设下，问题 $\mathcal{P}^*$. 存在无穷多个解。例如，对于任意 $(\mathbb{P},\mathbb{F})$-局部鞅 $Y$，以及任意具有有界连续导数的有界可微函数 $f$，且满足 $f(0)=0$，存在一个解 $\mathbb{Q}^\#$，使得对于任意 $u\in\mathbb{R}_+^*$，鞅 $M_t^u=\mathbb{Q}^\#[\tau\le u|\mathcal{F}_t], t\ge u$ 满足以下演化方程

$$\begin{cases} dX_t=X_t\left(-\frac{e^{-\Lambda_t}}{1-Z_t}dN_t+f(X_t-(1-Z_t))dY_t\right), & u\le t<\infty,\\ X_u=1-Z_u, \end{cases}$$

其中 $Z$ 是与 $\tau$ 相关联的 Azéma超鞅，其乘法分解为 $Z=Ne^{-\Lambda}$。

现在考虑由随机时刻 $\tau$ 扩大的乘积空间上的滤过 $\mathbb{G}$，该乘积空间由 $\mathcal{G}_t=\mathcal{F}_t\vee\sigma(\tau\wedge t)$ 给出。于是有以下定理。

定理 118. 假设上述条件成立，并且对于每个 $0<t<\infty$，映射$u\mapsto M_t^u$在 $(0,t]$. 上连续。那么，对于任意 $(\mathbb{P},\mathbb{F})$-局部鞅 $X$，过程

$$\begin{aligned}\Gamma(X)_t\coloneqq&\int_0^t\mathbb{I}^{\{s\le\tau\}}\frac{e^{-\Lambda_s}}{Z_s}d\langle N,X\rangle_s-\int_0^t\mathbb{I}^{\{\tau<s\}}\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_s}d\langle N,X\rangle_s\\&+\int_0^t\mathbb{I}^{\{\tau<s\}}(f(M_s^\tau-(1-Z_s))+M_s^\tau f'(M_s^\tau-(1-Z_s)))d\langle Y,X\rangle_s,\quad 0\le t<\infty,\end{aligned}$$

~是定义良好的 $\mathbb{G}$-可预测有限变差过程，并且过程 $X=X-\Gamma(X)$ 是 $(\mathbb{Q}^\#,\mathbb{G})$-局部鞅。

定理 119. 设 $X$ 为一个 $\mathbb{F}$-适应右连续有左极限过程。假设以下条件成立：

（i）所有（$\mathbb{P}$，$\mathbb{F}$）-局部鞅都是连续的；（ii）对于每个 $0<t<\infty$，映射 $u\mapsto M_t^u$在（0，$t$]上连续；（iii） $X$ 在 $\mathbb{P}$下的 $\mathbb{F}$ 中具有鞅表示性质；

（iv） $0 < Z_t < 1$ 对于 $0 < t < \infty$。

~那么，在 $\mathbb{Q}^{\#}$下，$(X, L)$在 $\mathbb{G}$ 中具有鞅表示性质，其中 $L$ 由下式给出

$$L_t = \mathbb{I}_{\{\tau>0\}} H_t - \int_0^{\tau\wedge t} \frac{dA_s}{Z_{s-}}, \quad t \geq 0,$$

其中 $A$ 是 $Z$ 的 Doob-Meyer分解中的可预测递增过程，且$H := \mathbb{I}_{[\![\tau,\infty)\!)}$.

# 5 莱维过程、独立增量过程和点过程

本节重点介绍若干结果，这些结果或具有更专门的性质（相较于一般半鞅结果），或是我们此前讨论过的一些例子的推广（例如布朗运动框架下的扩张，或 Kusuoka 模型及其由 Calzolari 和 Torti 提出的扩展，仅举数例）。我们决定将这些结果归入一个单独的小节，因为它们围绕着莱维过程、独立增量过程和点过程背景下的滤过扩张思想展开，并共享和运用了相似的数学技巧。与此前一样，我们将在不同的小节中分别讨论半鞅性质和可预测表示性质的保持问题。

## 5.1 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{H}'$ 扩张下的假设

该领域最早的一般结果之一由（Jacod，Protter，1988）确立，以下论述将遵循这一结果。我们首先介绍相关记号和定义。令 $Z$ 表示定义在 $[0,1],$ 上的莱维过程，即具有平稳独立增量和右连续左极限路径的过程，并且 $Z_0 = 0$ 几乎处处成立。 $Z^c$ 将表示相对于其自然滤过 $\mathbb{F}$ 的 $Z$ 的局部鞅部分。因此，排除 $Z^c \equiv 0$ 的退化情形可知，对于某个 $\sigma > 0.$，归一化过程 $Z^c/\sigma$ 是标准维纳过程。

令 $\mu$ 表示由 $Z$ 给出的跳跃测度:

$$\mu(\omega; dt \times dx) = \sum_{s>0, \Delta Z_s(\omega)\neq 0} \varepsilon_{(s, \Delta Z_s(\omega))}(dt \times dx),$$

其中， $\varepsilon_a$ 表示位于 $a$处的狄拉克测度。

跳跃测度的 $\mathbb{F}$-补偿子为

$$\nu(\omega; dt \times dx) = dt \otimes F(dx)$$

对于某个定义在 $\mathbb{R}$ 上的非随机测度 $F$，使得$\int_{\mathbb{R}} \min(x^2, 1) F(dx) < \infty$。因此，对于每个$\alpha > 0$，我们有 $Z$的标准分解

$$Z_t = b_\alpha t + Z_t^c + \int_0^t \int_{|x|\leq\alpha} x(\mu - \nu)(ds \times dx) + \sum_{0<s<t} \Delta Z_s \mathbb{I}_{\{|\Delta Z_s|>\alpha\}},$$

其中 $b_\alpha \in \mathbb{R}$。

我们将滤过 $\mathbb{G}$ 定义为满足通常条件、使得 $Z$ 适应且 $Z_1$ 为 $\mathcal{G}_0$-可测的最小滤过。滤过 $\mathbb{H}$ 定义为满足通常条件、使得 $Z$适应，且对于所有与0保持正距离的博雷尔集 $A$，$Z_1^c$和$\sum_{0<s\leq 1} \mathbb{I}_A(\Delta Z_s)$均为 $\mathcal{H}_0$-可测的最小滤过。注意， $\mathbb{H}$ 大于 $\mathbb{G}$，因为对于所有在0的某个邻域内为零的博雷尔函数 $f$， $\int f(x)\mu((0,1] \times dx) = \sum_{0<s\leq 1} f(\Delta Z_s)$均为 $\mathcal{H}_0$-可测，而上述 $Z$ 的积分表示是以下内容的 $L^2$-极限

$$\int_0^t \int_{1/n<|x|\leq\alpha} x(\mu - \nu)(ds \times dx) = \sum_{0<s\leq t} \Delta Z_s \mathbb{I}_{\{1/n<|\Delta Z_s|\leq\alpha\}} - t \int_{1/n<|x|\leq\alpha} xF(dx)$$

由于 $n \to \infty$，因此 $Z_1$ 是 $\mathcal{H}_0$-可测的。

Jacod 和 Protter 关于扩张的主要结果如下。

定理 120. 设 $Z$ 是一个莱维过程。那么每个 $\mathbb{F}$-半鞅都是 $[0, 1$上的 $\mathbb{H}$-半鞅。

在证明该结果之前，我们先关注一个推广了此前讨论过的布朗运动情形的结果。尽管这一结果在现代文献中相当标准且广为人知，但它概括了初始扩张所涉及的一些核心思想的关键方面

即通过终值进行扩张——从某种意义上说，这一思想是内幕信息概念的基础。此外，这个例子还展示了一种实用的练习：如何推导出“具体的推导过程”，以阐明较为抽象的理论结果（这些结果往往伴随着繁杂的符号和通常与更一般情形相伴的技术条件），因此具有很强的教学价值。该结果出自 E. Kurtz，我们遵循 (Jacod, Protter, 1988, p.624) 中的阐述。

定理121. 假设莱维过程 $Z$ 可积，即对所有 $t$， $\mathbb{E}|Z_t| < \infty$ 。那么

$$M_t = Z_t - \int_0^t \frac{Z_1 - Z_s}{1-s} ds$$

是 $[0,1$ 上的 $\mathbb{G}$-鞅）。

证明。我们先假设一个更强的可积性条件，并要求对所有 $t.$， $\mathbb{E}Z_t^2 < \infty$。接下来定义

$$Y_i = Z_{(i+1)/n} - Z_{i/n}.$$

然后注意到，对于有理数 $0 \le s < t \le 1$、 $s = j/n$、 $t = k/n$，有

$$\begin{aligned} Z_1 - Z_s &= \sum_{i=j}^{n-1} Y_i \\ Z_t - Z_s &= \sum_{i=j}^{k-1} Y_i. \end{aligned}$$

由于 $Z$ 是莱维过程，随机变量 $Y_i$ 是独立同分布的，而且可积。注意

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_t - Z_s | Z_1 - Z_s) &= \mathbb{E}\left( \sum_{i=j}^{k-1} Y_i \middle| \sum_{i=j}^{n-1} Y_i \right) \\ &= \frac{k-j}{n-j} \sum_{i=j}^{n-1} Y_i \\ &= \frac{t-s}{1-s}(Z_1 - Z_s). \end{aligned}$$

根据独立增量性质，对于所有有理数 $0 \le s < t \le 1$，有 $\mathbb{E}(Z_t - Z_s|\mathcal{G}_s) = \mathbb{E}(Z_t - Z_s|Z_1 - Z_s)$，因此 $\mathbb{E}(Z_t - Z_s|\mathcal{G}_s) = \frac{t-s}{1-s}(Z_1 - Z_s)$。由于 $Z_t - \mathbb{E}Z_t$ 是一个 $\mathbb{F}$-鞅，族 $(Z_t)_{0\le t\le 1}$ 一致可积，且 $Z$ 具有右连续左极限路径，因此该等式对所有实数 $0 \le s < t \le 1$ 均成立。现在我们来检验定理陈述中定义的 $M$ 的鞅性质。固定 $0 \le s < t < 1$，由条件富比尼定理可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_t - M_s|\mathcal{G}_s) &= \mathbb{E}(Z_t - Z_s|\mathcal{G}_s) - \int_s^t \frac{1}{1-u}\mathbb{E}(Z_1 - Z_u|\mathcal{G}_s)du \\ &= \frac{t-s}{1-s}(Z_1 - Z_s) - \int_s^t \frac{1}{1-u}\frac{1-u}{1-s}(Z_1 - Z_s)du \\ &= 0.\end{aligned}$$

独立增量和平稳增量性质给出

$$\mathbb{E}|Z_1 - Z_s| \le \mathbb{E}\left[(Z_1 - Z_s)^2\right]^{1/2} \le \alpha(1-s)^{1/2}$$

对于某些 $\alpha$ 和 $0 \le s \le 1$，这给出了界

$$\mathbb{E}\int_0^1 \frac{|Z_1 - Z_s|}{1-s}ds \le \alpha\int_0^1 \frac{\sqrt{1-s}}{1-s}ds < \infty.$$

现在，我们需要将可积性条件放宽为对所有 $0 \le t \le 1.$ 都成立。首先，我们从过程中减去大跳跃。令

$$\begin{aligned}J_t^1 &= \sum_{0<s\le t} \Delta Z_s \mathbb{I}_{\{\Delta Z_s > 1\}}, \\ J_t^2 &= -\sum_{0<s\le t} \Delta Z_s \mathbb{I}_{\{\Delta Z_s < -1\}},\end{aligned}$$

并注意到 $Y = Z - J^1 + J^2$是一个具有有界跳跃的莱维过程，因此平方可积。$Y$、$J^1$ 和 $J^2$的独立性意味着 $Y_t - \int_0^t \frac{Y_1 - Y_s}{1-s}ds$是 $[0,1]$上的 $\mathbb{G}$-鞅。同样可以证明，若 $\mathbb{E}\int_0^1 \frac{|J_1^i - J_s^i|}{1-s}ds < \infty$，则 $J_t^i - \int_0^t \frac{J_1^i - J_s^i}{1-s}ds$是 $[0,1]$上的鞅。为得到所需的界，注意根据独立平稳增量，

我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^1 \frac{|J_1^i - J_s^i|}{1-s}ds &= \mathbb{E}\int_0^1 \frac{J_1^i - J_s^i}{1-s}ds \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}\frac{J_1^i - J_s^i}{1-s}ds \\ &= \alpha_i \int_0^1 \frac{1-s}{1-s}ds = \alpha_i < \infty,\end{aligned}$$

由此可知， $M$ 是 $[0,1]$上的 $\mathbb{G}$-鞅。 □

我们注意到，证明中的一个关键步骤是检查可积性条件，而这通常并非易事。

以下结果也很有意义。

定理 122。设 $Z$ 为一个莱维过程。

（i）过程

$$\widehat{Z}_t^c = Z_t^c - \int_0^t \frac{Z_1^c - Z_s^c}{1-s}ds$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$是 $[0,1]$ 上的 $\mathbb{H}$-鞅，其二次变差为 $\langle Z^c、\ Z^c\rangle = \langle Z^c、\ Z^c\rangle$.

(ii) $\mathbb{H}$关于跳跃测度 $\mu$ 在 $[0,1]$ 上的补偿子为 $\rho$

$$\rho(\omega; dt \times dx) = dt \times \frac{\mu(\omega; (t,1] \times dx)}{1-t}\mathbb{I}^{[0,1)}(t).$$

证明。见（Jacod、Protter，1988，定理 2.9）。 □

现在我们继续证明 Jacod 和 Protter 的主要结果。

证明。（主定理）。只需证明，任意平方可积的 $\mathbb{F}$-鞅 $M$在 $[0,1$上（连续或纯不连续），且满足 $M_0 = 0$，都是 $\mathbb{H}$-半鞅，在 $[0,1$上。分别处理这两种情况。

(i) 设 $M$ 是 $[0,1]$ 上的连续平方可积 $\mathbb{F}$-鞅，且满足 $M_0 = 0$。根据鞅表示定理，存在一个可预测过程 $H$，使得

$$\mathbb{E}\int_0^1 H_s^2 d\langle Z^c, Z^c\rangle_s = \sigma^2\mathbb{E}\int_0^1 H_s^2 ds < \infty,$$

其中

$$M_t = \int_0^t H_s dZ_s^c,$$

这里我们用到了以下事实： $\langle Z^c, Z^c\rangle_t = \sigma^2 t,\ \sigma \geq 0$。

根据上面陈述的结果， $\langle \widehat{Z}^c, \widehat{Z}^c\rangle = \langle Z^c, Z^c\rangle$， 因此 $\widehat{M_t} = \int_0^t H_s d\widehat{Z}_s^c$是良好定义的随机积分，并且是 $[0,1)$上的 $\mathbb{H}$-鞅。令 $C = Z - Z^c$，我们还可以在 $[0,1)$上定义Stieltjes积分$D_t = \int_0^t H_s dC_s$，并得到分解 $M = M + D.$ 。当 $H$有界时，该分解是显式的；这由 Stricker 定理推出，该定理保证$\int_0^1 H_s dZ_s^c$ 在$\mathbb{F}$和 $\mathbb{H}$中取值相同。无界情形通过截断处理，即令 $H^n := H_{\mathbb{I}^{\{|H|\leq n\}}}$, $M_t^n := \int_0^t H_s^n dZ_s^c, \widehat{M_t^n} := \int_0^t H_s^n d\widehat{Z}_s^c$， 以及： $D_t^n := \int_0^t H_s^n dC_s.$。由此得到分解 $M^n = M^n + D^n$, 其中 $M^n, M^n$和 $D^n$分别依概率收敛到 $M, M$和 $D$。

**(ii)** 现在设 $M$ 是定义在 $[0,1$上的纯不连续平方可积 $\mathbb{F}$-鞅，且 $M_0 = 0.$。根据鞅表示定理，存在一个定义在 $\Omega \times [0,1$上的可预测过程 $W \times \mathbb{R}$，使得

$$M_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} W(s,x)(\mu - \nu)(ds \times dx),$$

and

$$\mathbb{E}\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} W(s,x)^2 \mu(ds \times dx) = \mathbb{E}\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} W(s,x)^2 ds F(dx) < \infty,$$

其中， $\mu$、 $\nu$ 和 $F$ 的定义与本节开头相同。此外，下列过程定义良好，并且是定义在 $[0,1$上的 $\mathbb{H}$-鞅。

$$\widehat{M_t} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} W(s,x)(\mu - \rho)(ds \times dx),$$

其中， $\rho$ 如前述定理中的定义。现在我们定义一个随机过程序列

如下所示

$$M_t^n = \int_0^t \int_{|x|>1/n} W(s,x)(\mu-\nu)(ds\times dx),$$
$$\widehat{M}_t^n = \int_0^t \int_{|x|>1/n} W(s,x)(\mu-\rho)(ds\times dx),$$
$$C_t^n = \int_0^t \int_{|x|>1/n} W(s,x)(\rho-\nu)(ds\times dx),$$

$\widehat{\ }$满足 $M_0^n = M_0^n = C_0^n = 0$这些过程在 $[0,t]$上具有有限变差，对任意 $t<1.$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$。注意分解 $M^n = M^n + C^n$，其中 $M_n$是 $[0,1]$上的一个 $\mathbb{F}$-鞅，而 $M^n$是 $[0,1$上的一个 $\mathbb{H}$-鞅。根据随机测度理论的标准结果，当 $n\to\infty$ 趋于 $M_t$ 时， $M_t^n$和 $\widehat{M}_t^n$分别在 $L^2$ 中收敛到 $M_t$ 和 $\widehat{M}_t$，因此 $C_t^n$在 $L^2\widehat{\ }$中收敛到 $C_t = M_t - M_t.$。剩下要证明的是，对于任意$t<1$， $C$ 在 $[0,t]$ 上具有有限变差路径。注意，

$$C_t^n = \int_0^t U_s^n ds,$$

其中 $U$ 由下式给出

$$U_s^n(\omega) \coloneqq \int_{|x|>1/n} \frac{1}{1-s}\mu(\omega;(s,1]\times dx)W(\omega;s,x) - \int_{|x|>1/n} W(\omega;s,x)F(dx)$$

令 $n>m\geq 0$，并采用约定 $1/0=+\infty$，得到

$$N_t^{n,m,s}(\omega) = \frac{1}{1-s}\mathbb{I}^{\{s<t\}}\int_s^t\int_{1/n<|x|\leq 1/m} W(\omega;u,x)(\mu-\nu)(\omega;du\times dx)$$

由于 $N^n,{}_t{}^{m\,s},(\omega)$ 是关于 $\mu-\nu$ 的函数的随机积分

$$(\omega,u,x)\mapsto W^{n,m,s}(\omega;u,x) = \frac{1}{1-s}\mathbb{I}^{\{s<u\}}W(\omega;u,x)_{\mathbb{I}^{\{1/n<|x|\leq 1/m\}}},$$

因此 $N^{n,\ m,\ s}$ 是一个 $\mathbb{F}$-鞅，并且

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_1^{n,m,s})^2 &= \mathbb{E}\int_0^1\int_{\mathbb{R}}(W^{n,m,s}(u,x))^2 duF(dx)\\ &= \frac{1}{1-s}\mathbb{E}\int_{1/n<|x|\le 1/m} W(s,x)^2F(dx).\end{aligned}$$

由于 $N^{n,\ 1}{}^{m\ s} = U_s^n - U_s^m$, 根据构造，对于 $t<1$我们有如下表达式

$$\mathbb{E}\int_0^t (U_s^n - U_s^m)^2 ds = \int_0^t \frac{ds}{1-s}\mathbb{E}\int_{1/n<|x|\le 1/m} W(s,x)^2F(dx),$$

当 $n$、$m\to\infty$时趋于 0，因为 $\mathbb{E}\int_0^1\int_{\mathbb{R}} W(s、\ x)^2\mu(ds\times dx) = \mathbb{E}\int_0^1\int_{\mathbb{R}} W(s、\ x)^2 dsF(dx)$ $<\infty$。这意味着 $U^n$在 $L^2(\Omega\times[0,t]、\ \mathbb{P}(d\omega)\otimes du)$ 中收敛到极限 $U$，并且 $C_t = \int_0^t U_s ds$，由此可得结论。

□

现在我们讨论由 L. Gal'chuk 得到的上述定理向具有独立增量的半鞅的推广。我们将重点介绍主定理及其证明（其遵循 Jacod 和 Protter 证明的相同模式），并陈述不加证明的辅助引理；相关证明可见（Gal'chuk，1993）。

设 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ 是一个随机基，其中 $\mathbb{F}$ 满足通常条件。设 $X$ 是定义在 $[0,T]$ 上、具有独立增量的随机过程 $T<\infty$，且适应于 $\mathbb{F}$；我们将 $\mathbb{F}$ 取为由 $X.$ 生成的自然滤过。我们还假设 $X$ 是一个 $\mathbb{F}$-半鞅，因此具有 Lévy-Khintchine 表示

$$X_t = v_t + X_t^c + \int_{|x|\le 1} x(p-\pi)((0,t],dx) + \int_{|x|>1} xp((0,t],dx),$$

其中 $v$ 是有限变差的连续确定性过程， $X^c$ 是具有独立增量的连续高斯鞅， $p((0,t],A)$ 是一个泊松随机测度，定义为

$$p(\omega,(0,t],A) = \sum_{0<s\le t} \mathbb{I}^{(\omega,s:\Delta X_s\in A)}(\omega,s),\quad A\in\mathcal{B}_0,$$

$\pi=\mathbb{E}p$ 是 $\mathbb{F}$ $p$的补偿子，且 $\mathcal{B}_0$ 是来自 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$、包含于.....的集合族 ay

从 0 开始。扩张滤过 $\mathbb{G}$ 定义为

$$\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_t \vee \sigma\{X_T^c, p((0,T], A), A \in \mathcal{B}_0\}.$$

我们为补偿子引入如下解体公式

$$\pi(dt, dx) = \Pi(t, dx)da_t,$$

其中， $a$ 是某个连续递增函数，而 $\Pi(t, dx)$ 是从 $[0,T]$ 到 $\mathbb{R}$的一个核。我们还将使用记号 $\pi^s(dx) := \pi((s,T], dx)$。此外，我们对 $X$施加一个附加条件。

（C）对于任意固定的 $s \in [0,T]$，测度 $\pi$ 关于$\pi^s \otimes a$ 绝对连续，其密度为

$$\Gamma(s,t,x) = \frac{d\pi}{d(\pi^s \otimes a)}, \quad s \le t \le T.$$

注意，密度 $\Gamma(s,t,x)$ 关于 $(t,x)$ 可测，且关于 $s$连续，因此关于 $(s,t,x)$ 可测。

注意，每个 $\mathbb{F}$-半鞅 $Y$ 都有如下表示

$$Y_t = V_t + \int_0^t f_s dX_s^c + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(s,x)(p-\pi)(ds,dx),$$

其中， $V$ 是一个有限变差过程， $f$ 和 $g$ 是 $\mathbb{F}$-可预测的，并且满足

$$\int_0^T f_s^2 d\langle X^c\rangle_s < \infty, \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}} g^2(s,x)\pi(ds,dx) < \infty \quad a.s.$$

如果 $Y$ 是 $\mathbb{F}$ 上有限变差的半鞅，那么它也是 $[0,T]$ 上有限变差的 $\mathbb{G}$ 半鞅。现在我们可以陈述 Gal'chuk 的主要结果。

定理123. 设 $X = (X_t, t \in [0,T])$ 是一个具有独立增量、依概率连续并满足条件（$C$）的随机过程。

(i) 如果 $Y$ 是 $[0,T]$ 上的连续 $\mathbb{F}$-半鞅，那么它就是$[0,\tau$ 上的 $\mathbb{G}$-半鞅，其中 $\tau = \inf\{s\colon b_s = b_T\}$，其中 $b = \langle X^c\rangle$.

$Y$ 是 $[0,\tau]$ 上的 $\mathbb{G}$-半鞅，当且仅当

$$\int_0^\tau \left|\frac{d\langle Y^c, X^c\rangle}{db}(s)\right| \frac{db_s}{\sqrt{b_T - b_s}} < \infty \quad a.s.$$

(ii) 若 $Y$ 是一个纯不连续的 $\mathbb{F}$-鞅，且其表示为

$$Y_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(s,x)(p-\pi)(ds,dx),$$

并且若

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} g^2(s,x)\Gamma(s,s,x)\pi(ds,dx) < \infty \quad a.s.,$$

则 $Y$在 $[0,T]$.上是一个 $\mathbb{G}$-半鞅

注意，若 $Y$在 $[0,\tau]$上是一个 $\mathbb{G}$-半鞅，则可通过令 $Y_t = Y_\tau$（$\tau, T]$.），将其扩展至整个区间 $[0,T]$，其中 $t \in$

为了证明该定理，我们需要若干辅助引理（其中一些本身也颇有意义），以及我们之前见过的Kurtz定理。

引理 124. 设$(p_t)$是一个泊松过程，其 $\mathbb{F}$-补偿子为$(\pi_t)$ $t \in [0,T]$.。那么，对于 $s \le t \le \delta = \inf\ \{s:\ \pi_s = \pi_T\}$，有

$$\mathbb{E}(p_t - p_s|\mathcal{G}_s) = \frac{p_T - p_s}{\pi_T - \pi_s}(\pi_t - \pi_s) \quad a.s.$$

在条件（$C$）下，对于 $A \in \mathcal{B}_0$、$s \in [0,T]$，设

$$\begin{aligned}
&\delta_A \coloneqq \inf\ (t > 0 : \pi((0,t],A) = \pi((0,T],A))\,,\\
&\pi^s(A) \coloneqq \pi((s,\delta_A],A) = \pi((s,T],A),\\
&p^s(A) \coloneqq p((s,T],A).
\end{aligned}$$

令 $\mu^s(\Delta, A)$ 是条件期望 $\mathbb{E}[p(\Delta, A)|\mathcal{G}_s]$ 的正则版本，$\Delta$ $=$

$(u, v] \subseteq (s, \delta_A]$. 因此，根据上述引理，

$$\mu^s(\Delta, A) = \begin{cases} \frac{p^s(A)}{\pi^s(A)}\pi(\Delta, A), & \text{if} \quad \pi^s(A) \neq 0, \\ 0 \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于 $\Delta \subseteq (\delta_A, \ T]$ 我们设 $0/0 = 0.$最后，对于任意有界正 $\mathcal{B}([0, T])$-可测函数 $f$ 定义

$$\mu^s(f, A) := \int_s^T \frac{p^s(A)}{\pi^s(A)} \int_A f(v)\Gamma(s, v, x)\pi^s(dx)da_v,$$
$$\widehat{\mu}(f, A) := \int_s^T \int_A f(v)\Gamma(s, v, x)p^s(dx)da_v.$$

引理125。对于 $s \in [0, T], \ A \in \mathcal{B}_0, \ p^s(A)$ 几乎处处成立，且对任意正有界的 $\mathcal{B}([0, T])$-可测函数 $f$ ，有

$$\mu^s(f, A) = \widehat{\mu}^s(f, A) \quad a.s.$$

引理126。对于 $A \in \mathcal{B}_0$，由下式给出的过程$(\widehat{p}((0, t], A))$

$$\widehat{p}((0, t], A) := p((0, t], A) - \int_0^t \int_A \Gamma(u, u, x)p((0, t], dx)da_u$$

是 $[0, T]$.上的 $\mathbb{G}$-鞅

引理127。由下式给出的测度

$$\mu(u, dx) = \Gamma(u, u, x)p((0, T], dx)da_u$$

是测度 $p(dt, dx)$的 $\mathbb{G}$-补偿子。

现在我们可以证明 Gal'chuk 定理了。请注意，这一证明的步骤和技巧与 Jacod 和 Protter 的定理十分相似。

证明。只需考虑平方可积的 $\mathbb{F}$-鞅 $m = (m_t)$ $m_0 =$

0，其表示形式已知为

$$m = m^c + m^d,$$

其中

$$m_t^c = \int_0^t f_s dX_s^c,$$
$$m_t^d = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(s,x)(p-\pi)(ds,dx),$$

其中， $f$ 是某个 $\mathcal{P}(\mathbb{F})$-可测函数，而 $g$ 是关于 $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$可测的函数，其中 $\mathcal{P}(\mathbb{F})$是 $\mathbb{F}$-可预测 $\sigma$-代数，并且这些函数满足

$$\mathbb{E}\int_0^T f_s^2 d\langle X^c\rangle_s < \infty, \quad \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} g^2(s,x)\pi(ds,dx) < \infty.$$

与前面一样，我们考虑两种情况。

(i) 当 $Y = m^c$时，由可积性条件$\mathbb{E}\int_0^T f_s^2 d\langle X^c\rangle_s < \infty$、 $t \in [0,T]$可知，$\widehat{Y}_t = \int_0^T f_s d\widetilde{X}_s^c$是良定义的，并且是 $[0,T]$. 上的 $\mathbb{G}$-鞅。根据上面的~引理，过程 $C = X^c - X^c$ 具有有限变差，因此 Stieltjes积分$D_t = \int_0^t f_s dC_s$在 $[0,\tau)$上良定义。还需证明 $Y = \widehat{Y} + D$。根据 Stricker 定理，当 $f$ 有界时，随机积分$\int_0^t f_s dX_s^c$ 在 $\mathbb{F}$和 $\mathbb{G}$中取值相同。在无界的情况下，我们通过如下截断来处理:

$$f^n \coloneqq f_{\mathbb{I}^{\{|f|\le n\}}}, \quad Y_t^n \coloneqq \int_0^t f_s^n dX_s^c,$$
$$\widehat{Y}_t^n \coloneqq \int_0^t f_s^n d\widetilde{X}_s^c, \quad D_t^n \coloneqq \int_0^t f_s^n dC_s.$$

^ ^因此，我们得到分解 $Y^n = Y^n + D^n$，并且 $Y^n$、 $Y_n$、 $D^n$ 当 $n \to \infty$ 时分别依概率^收敛到 $Y$、 $Y$、 $D$，这证明了该分解的有效性。

(ii) 当 $Y = m^d$ 时，定义一个过程如下

$$\widehat{Y}_t \coloneqq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(s,x)(p-\mu)(ds,dx), \quad t \in [0,T].$$

^为了证明该对象定义良好且 $Y$ 是一个 $\mathbb{G}$-鞅，我们需要检验

$$J_t = \mathbb{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} g^2(s,x)\mu(ds,dx) < \infty, \quad t \in [0,T].$$

根据测度 $\mu$ 的定义和 Fubini定理，我们有

$$\begin{aligned} J_t &= \mathbb{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} g^2(s,x)\Gamma(s,s,x)p((s,T],dx)da_s \\ &= \mathbb{E}\int_0^t \int_0^T \int_{\mathbb{R}} g^2(s,x)\Gamma(s,s,x)_{\mathbb{I}^{\{s<u\le T\}}}p(du,dx)da_s \\ &= \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^t g^2(s,x)\Gamma(s,s,x)_{\mathbb{I}^{\{s<u\le T\}}}da_s\right] p(du,dx). \end{aligned}$$

由于函数 $\int_0^t g^2(s,x)\Gamma(s,s,x)_{\mathbb{I}^{\{s<u\le T\}}}da_s$ 是可预测且为正的，并且 $\pi$ 是测度 $p$ 的$\mathbb{F}$-补偿子，因此

$$J_t = \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^t g^2(s,x)\Gamma(s,s,x)_{\mathbb{I}^{\{s<u\le T\}}}da_s\right] \pi(du,dx).$$

再次应用 Fubini定理，可得

$$\begin{aligned} J_t &= \mathbb{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} g^2(s,x)\Gamma(s,s,x)\pi((s,T],dx)da_s \\ &= \mathbb{E}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} g^2(s,x)\pi(ds,dx) < \infty. \end{aligned}$$

^与之前一样，现在只需证明过程 $Y - Y$ 具有有限变差。令$n \in \mathbb{N}$ 和 $A^n := \{x : |x| > 1/n\}$. 与 Jacod 和 Protter 的证明类似，定义

$$\begin{aligned} Y_t^n &:= \int_0^t \int_{A^n} g(s,x)(p-\pi)(ds,dx), \\ \widehat{Y}_t^n &:= \int_0^t \int_{A^n} g(s,x)(p-\mu)(ds,dx), \\ C_t^n &:= \int_0^t \int_{A^n} g(s,x)(\mu-\pi)(ds,dx), \quad t \in [0,T], \\ Y_0^n &= \widehat{Y}_0^n = C_0^n = 0. \end{aligned}$$

注意，这些过程具有有限变差， $Y^n$ 是平方可积的 $\mathbb{F}$-鞅，$\widehat{Y}^n$ 是平方可积的 $\mathbb{G}$-鞅，并且 $Y^n_t, \widehat{Y}^n_t, C^n_t$在 $L^2$ 中当 $n \to \infty$ 时分别收敛到$\curvearrowright Y_t, Y_t, C_t$。 $t \leq T$. 为证明 $C$ 具有有限变差，注意

$$C^n_t = \int_0^t \int_{A^n} g(s,x)\Gamma(s,s,x)\left[p((s,T],dx) - \pi((s,T],dx)\right] da_s,$$

并且，对于 $n > m, A^{mn} := \{1/n < |x| \leq 1/m\}$，我们有

$$\begin{aligned} C^n_t - C^m_t &= \int_0^t \int_{A^{mn}} g(s,x)\Gamma(s,s,x)\left[p((s,T],dx) - \pi((s,T],dx)\right] da_s \\ &= \int_0^t \left[\int_s^T \int_{A^{mn}} g(s,x)\Gamma(s,s,x)(p-\pi)(du,dx)\right] da_s. \end{aligned}$$

由于对于固定的 $s$，过程 $\int_s^t \int_{A^{mn}} g(s,x)\Gamma(s,s,x)(p-\pi)(du,dx)$ $s \leq t \leq T$ 是一个平方可积鞅，我们可以按如下方式估计 $|C^n_t - C^m_t|$ 在 $[0,t]$ 上的变差

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|C^n_t - C^m_t|^2 &\leq a_t \int_0^t da_s \mathbb{E}\left|\int_s^T \int_{A^{mn}} g(s,x)\Gamma(s,s,x)(p-\pi)(du,dx)\right|^2 \\ &\leq a_t \mathbb{E}\int_0^t da_s \int_s^T \int_{A^{mn}} g^2(s,x)\Gamma^2(s,s,x)\pi(du,dx) \\ &= a_t \mathbb{E}\int_0^t \int_{A^{mn}} g^2(s,x)\Gamma^2(s,s,x)\pi((s,T],dx)da_s \\ &= a_t \mathbb{E}\int_0^t \int_{A^{mn}} g^2(s,x)\Gamma(s,s,x)\pi(ds,dx) < \infty, \end{aligned}$$

其中我们利用了 $\Gamma(s,s,x)\pi((s,T],dx)da_s = \pi(ds,dx)$ 这一事实。因此，在每个区间 $[0,t]$, $t \leq T$ 上，当 $n, m \to \infty$ 时， $|C^n_t - C^m_t|$ 的变差依概率收敛于 0，因而 $C$ 在 $[0,T]$. 上具有有限变差。Gal'chuk 定理第 (i) 部分的最后一个结论由以下命题得出；我们不作证明，详情请参阅原论文。

□

定理 128. 设 $Y$ 是一个连续的 $\mathbb{F}$-局部鞅，其积分表示为

$$Y_t = \int_0^t f_s dX^c_s,$$

其中 $f$是一个 $\mathbb{F}$-可预测过程，满足 $\int_0^T f_s^2 db_s < \infty$ 几乎处处成立，其中 $b = \langle X^c \rangle$。

那么，以下陈述等价：

(a) $Y$在 $[0, \tau]$上是一个 $\mathbb{G}$-半鞅；

*(b)*

$$\int_0^T |f_s| \frac{|X_T^c - X_s^c|}{b_T - b_s} db_s < \infty \quad a.s.$$

*(c)*

$$\int_0^t |f_s| (b_T - b_s)^{-1/2} db_s < \infty \quad a.s.,$$

其中 $\tau := \inf \{s : b_s = b_T\}$. 此外，若这些条件成立，则 $Y$在 $\mathbb{G}$中具有以下典范分解

$$Y_t = \int_0^t f_s d\widetilde{X}_s^c + \int_0^t f_s \frac{X_T^c - X_s^c}{b_T - b_s} db_s,$$

其中 $\widetilde{X}_t^c = X_t^c - \int_0^t \frac{X_T^c - X_u^c}{b_T - b_u} db_u$.

## 5.2 鞅表示定理

我们首先考察在渐进扩大的 Lévy 过滤中可预测表示性质（鞅表示性质）的保持问题。本小节基于 Di Tella 和 Engelbert（2020年）的研究，该研究包含了迄今为止可获得的一些最一般结果。

按照惯例，我们在完备随机基 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 上工作，其中 $\mathbb{F}$ 满足通常条件。 $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ 表示 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中 $\mathbb{F}$-可预测子集构成的 $\sigma$-代数。令$\tau$ 为一个随机时刻，并定义 $\mathbb{G} := \mathbb{F} \vee \mathbb{H}$，其中 $\mathbb{H}$ 是由违约过程 $\mathbb{I}_{[\tau, \infty)}$生成的滤过。以下全文中，我们假设 $\tau$ 满足以下两个关键假设：

($\mathcal{A}$) $\tau$ 避开 $\mathbb{F}$ 停时，即对每个 $\mathbb{F}$ 停时 $\eta$， $\mathbb{P}[\tau = \eta < \infty] = 0$；($\mathcal{H}$) $\mathbb{F}$ 浸入于 $\mathbb{G}$，即每个 $\mathbb{F}$ 鞅都是 $\mathbb{G}$ 鞅。

设 $L$ 为一个莱维过程，即一个 $\mathbb{F}$ 适应的随机连续过程，具有独立且平稳的增量。定义 $\mathbb{F}^L$ 为由 $L$ 生成并满足通常条件的滤过。记 $\mu$ 为 $L$ 的跳跃测度，即相对于 $\mathbb{F}^L$ 的齐次泊松随机测度。$\mu$ 的可预测补偿子是确定性的，记为 $\lambda_+ \otimes \nu$，其中 $\lambda_+$ 是 $\mathbb{R}_+$ 上的勒贝格测度，$\nu$ 是 $L$ 的莱维测度，满足 $\nu(\{0\}) = 0$，且 $x \mapsto x^2 \wedge 1$ 可积。补偿泊松随机测度记为 $\overline{\mu} := \mu - \lambda_+ \otimes \nu$。$W^\sigma$ 表示 $L$ 的高斯部分，即一个 $\mathbb{F}^L$ 布朗运动，且 $\mathbb{E}(W_t^\sigma)^2 = \sigma^2 t$, $\sigma \geq 0$。$\beta \in \mathbb{R}$ 表示 $L$ 的漂移参数。因此，三元组 $(\beta, \sigma^2, \nu)$ 表示 $L.$ 的 $\mathbb{F}$ 特征。对每个 $t \geq 0$, $L_t$ 的特征函数为

$$\mathbb{E}\exp(iuL_t) = \exp(t\psi(u)),$$

其中

$$\psi(u) := i\beta u - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}}(e^{iux} - 1 - iux\mathbb{I}_{\{|x|\leq 1\}})\nu(dx),\ u \in \mathbb{R}.$$

我们引入一些专用于本段讨论的记号。用 $\mathcal{G}^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ 表示由 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{F})$-可测映射构成的线性空间 $G$，其中递增过程 $\sum_{s\leq \cdot} G^2(s, \omega, \Delta L_s(\omega))\mathbb{I}_{\{\Delta L_s(\omega)\neq 0\}}$ 是局部可积的。于是，对于 $G \in \mathcal{G}^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$，随机积分 $\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} G(s,x)\overline{\mu}(ds,dx)$ 定义为满足下述条件的唯一纯不连续鞅 $Z \in \mathcal{H}^2_{0,\ \mathrm{loc}}(\mathbb{F})$：

$$\Delta Z_t(\omega) = G(t, \omega, \Delta L_t(\omega))\mathbb{I}_{\{\Delta L_t(\omega)\neq 0\}},\ t \geq 0.$$

注意，对于任意 $f \in L^2(\nu)$ $t \geq 0$，确定性函数 $G_f(s,x) :^{=} \mathbb{I}^{[0,t]}(s)f(x)$ 属于 $\mathcal{G}^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$，因为

$$\mathbb{E}\sum_{s\leq t} G_f^2(s, \omega, \Delta L_s(\omega))\mathbb{I}_{\{\Delta L_s(\omega)\neq 0\}} = \mathbb{E}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} G_f^2(s,x)\mu(ds,dx) = t\int_{\mathbb{R}} f^2(x)\nu(dx) < \infty$$

最后，我们可以通过以下方式定义过程 $X^f \in \mathcal{H}^2_{0,\ \mathrm{loc}}(\mathbb{F})$

$$X_t^f := \int_{[0,t]\times\mathbb{R}} f(x)\overline{\mu}(ds,dx),\ t \geq 0.$$

现在，我们给出陈述本小节主要结果所必需的一些定理和引理。证明可在所引用的论文中找到。

定理 129。设 $(L,\mathbb{F})$ 是一个莱维过程，其 $\mathbb{F}$-特征为 $(\beta,\sigma^2,\nu)$。对于任意$f\in L^2$，下列结论成立：

(i) $(X^f,\mathbb{F})$ 是一个莱维过程且为真鞅；

(ii) 对每个 $t\geq 0$，恒等式 $\mathbb{E}(X_t^f)^2 = t\int_{\mathbb{R}} f^2 d\nu < \infty$ 成立。因此，对于每个确定性的 $T\in\mathbb{R}_+$，停时过程 $(X^f_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ 属于 $\mathcal{H}_0^2(\mathbb{F})$。

(iii) 对每个 $f$， $\langle X^f, X^g\rangle_t = t\int_{\mathbb{R}} fg d\nu(\nu)\ t\geq 0.$

(iv) 当且仅当 $f,g\in L^2(\nu)$ 是正交函数时， $X^f$ 和 $X^g$ 是正交鞅。

对于 $\mathcal{J}\subseteq L^2(\nu)$，我们定义

$$\mathscr{X}_{\mathcal{J}} := \{W^\sigma\}\cup\{X^f, f\in\mathcal{J}\}.$$

我们还回顾一下可允许被积函数的记号，其定义如下

$$L^2(\mathbb{F},X) = \left\{K : K \text{ is } \mathbb{F}\text{-predictable and } \mathbb{E}[K^2\bullet\langle X,X\rangle_\infty] < \infty\right\}.$$

定理 130. 设 $\mathcal{J}:=\{f_n, n\geq 1\}\subseteq L^2(\nu)$ 是一个标准正交基。那么族$\mathscr{X}_{\mathcal{J}}$ 相对于 $\mathbb{F}^L$ 具有鞅表示性质（PRP），即每个 $X\in\mathcal{H}^2(\mathbb{F}^L)$ 都可以写成

$$X_t = X_0 + Z\cdot W_t^\sigma + \sum_{n=1}^\infty V^n\bullet X_t^{f_n},$$
$$Z\in L^2(\mathbb{F}^L,W^\sigma), V^n\in L^2(\mathbb{F}^L, X^{f_n}),\ n\geq 1,\ t\geq 0.$$

定义 131. 令 $l^2$ 表示由满足以下条件的序列 $v=(v^n)_{n\geq 1}$ 构成的希尔伯特空间：其范数 $\|v\|_{l^2}^2:=\sum_{n=1}^\infty (v^n)^2$ 有限。记 $M^2(\mathbb{F},l^2)$ 为 $l^2$ 值的 $\mathbb{F}$-可预测过程 $V$所构成的空间，其中 $\int_0^\infty \|V_s\|_{l^2}^2 ds$ 可积。

N请注意，当且仅当 $\sum_{n=1}^\infty V^n\bullet X^{f_n}\in\mathcal{H}_0^2(\mathbb{F})$ 时， $V=(V^n)_{n\geq 1}\in M^2(\mathbb{F},l^2$ ）。由于

照常，我们令 $\Lambda^{\mathbb{G}}$ 为 $\mathbb{G}$可预测补偿子，即 $H=\llbracket\tau,\ \infty)$ 给定 $\mathbb{I}$ by

$$\Lambda^{\mathbb{G}} = \int_0^{t\wedge\tau}\frac{1}{A_{s-}} dH_s^p,$$

其中 $A := {}^{o}(1-H) = (\mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t)\ t \geq 0)$ 是 Azéma超鞅，并且可以证明，在 $\tau$ 的假设下，$H^p = H^o = (1-A)$。另请回顾由下式给出的 $\mathbb{G}$局部鞅 $M$

$$M_t := H_t - \Lambda_t^{\mathbb{G}}, \quad t \geq 0.$$

注意，这意味着 $M \in \mathcal{H}_0^2(\mathbb{G})$ 和 $\langle M, M\rangle = \Lambda^{\mathbb{G}}$.

定理132. 假设随机时刻 $\tau$ 满足上述条件 $(\mathcal{A})$ 和 $(\mathcal{H})$。设 $(L, \mathbb{F}^L)$ 是一个具有 $\mathbb{F}^L$-特征 $(\beta, \sigma^2, \nu)$ 的莱维过程。设 $\mathcal{J} \subseteq L^2(\nu)$ 是一个标准正交基。那么，

(i) $(L, \mathbb{G})$ 是一个具有 $\mathbb{G}$-特征 $(\beta, \sigma^2, \nu)$ 的莱维过程；

(ii) $\mathscr{X} := \mathscr{X}_{\mathcal{J}} \cup \{M\}$ 是一个 $\mathbb{G}$-鞅族，满足 $\mathbb{E}X_t^2 < \infty, X \in \mathscr{X}, t \geq 0$；(iii) 对每个 $X \in \mathscr{X}_{\mathcal{J}}$，恒等式 $[X, M] = 0$ 成立（除去一个逸散集）。特别地，$\mathscr{X}$ 由两两正交的 $\mathbb{G}$-鞅组成。

Lemma 133. 设 $(\zeta^k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个在 $L^2(\Omega\ \mathcal{G}_\infty, \mathbb{P})$ 中收敛到 $\zeta$. 的序列。如果

$$\zeta^k = \mathbb{E}\zeta^k + Z^k \bullet W_\infty^\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} V^{n,k} \bullet X_\infty^{f_n} + U^k \bullet M_\infty,$$
$$Z^k \in L^2(\mathbb{G}, W^\sigma), V^k \in M^2(\mathbb{G}, l^2), U^k \in L^2(\mathbb{G}, M), k \in \mathbb{N},$$

则存在 $Z \in L^2(\mathbb{G}, W^\sigma)$ $V \in M^2(\mathbb{G}, l^2)$ $U \in L^2(\mathbb{G}, M)$，使得

$$\zeta = \mathbb{E}\zeta + Z \bullet W_\infty^\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} V^n \bullet X_\infty^{f_n} + U \bullet M_\infty.$$

现在我们已准备好陈述关于在逐步扩大的 Lévy 滤过 $\mathbb{G}$. 中保持可预测表示性质的主要结果

定理134。设 $(L, \mathbb{F}^L)$ 是一个具有 $\mathbb{F}^L$-特征 $(\beta, \sigma^2, \nu)$ 的莱维过程。记 $\mathcal{J} = \{f_n, n \geq 1\}$ 为 $L^2(\nu)$ 的标准正交基，$\mathscr{X}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{H}^2_{0,\ loc}(\mathbb{F}^L)$ 为与 $\mathcal{J}$ 相关联的鞅族。假设随机时刻 $\tau$ 满足假设 $(\mathcal{A})$ 和 $(\mathcal{H})$，并令 $\mathbb{G}$ 为由 $\tau$ 对 $\mathbb{F}^L$ 作渐进扩张所得的滤过。那么，$\mathbb{G}$-鞅正交族 $\mathscr{X} = \mathscr{X}_{\mathcal{J}} \cup \{M\} \subseteq \mathcal{H}^2_{0,\ loc}(\mathbb{G})$ 关于

$\mathbb{G}$，即每个 $X \in \mathcal{H}^2(\mathbb{G})$ 都可表示为

$$X_t = X_0 + Z \bullet W_t^\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} V^n \bullet X_t^{f_n} + U \bullet M_t, \quad t \geq 0,$$

其中 $Z \in L^2(\mathbb{G}, W^\sigma)$ $V \in M^2(\mathbb{G}, l^2)$ $U \in L^2(\mathbb{G}, M)$。此外，该表示是唯一的，即若存在另一个三元组 $Z' \in L^2(\mathbb{G}, W^\sigma)$ $V' \in M^2(\mathbb{G}, l^2)$ $U' \in L^2(\mathbb{G}, M)$，使得对于 $(Z', V', U')$ 而非 $(Z, V, U)$，上述表示仍然成立，则有

$$\|Z - Z'\|_{L^2(\mathbb{G}, W^\sigma)} = 0, \ \|V - V'\|_{M^2(\mathbb{G}, l^2)} = 0, \ \|U - U'\|_{L^2(\mathbb{G}, M)} = 0.$$

事实上，上述定理的证明适用于任何满足通常条件的滤过 $\mathbb{F}$，以及任何在 $\mathbb{F}$ 中具有鞅表示性质（PRP）的两两正交的 $\mathbb{F}$-鞅可数族 $\mathscr{X} = \{X^n, n \geq 1\} \subseteq \mathcal{H}^2(\mathbb{F})$。我们将其表述为这一背景下最一般的结果。

定理 135. 设 $\mathbb{F}$ 是一个满足通常条件的滤过。设 $\mathscr{X} = \{X^n, n \geq 1\} \subseteq \mathcal{H}^2(\mathbb{F})$ 是一个任意的两两正交的 $\mathbb{F}$-鞅族，且相对于 $\mathbb{F}$ 具有鞅表示性质（PRP）。假设随机时刻 $\tau$ 满足假设 $(\mathcal{A})$ 和 $(\mathcal{H})$，并令 $\mathbb{G}$ 为由 $\tau$ 对 $\mathbb{F}$ 进行渐进扩张所得的滤过。那么，

(i) $\mathscr{X}$ 是平方可积 $\mathbb{G}$-鞅的正交族；

(ii) 对每个 $n \geq 1$，恒等式 $[X^n, M] = 0$ 成立。因此，$X^n$和 $M \in \mathcal{H}^2(\mathbb{F})$相互正交；

(iii) 每个 $X \in \mathcal{H}^2(\mathbb{G})$都可以表示为

$$X_t = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V^n \bullet X_t^n + U \bullet M_t, \quad t \geq 0,$$

其中 $V^n \in L^2(\mathbb{G}, X^n)$ $n \geq 1$，$U \in L^2(\mathbb{G}, M)$。此外，$V^n$ 和 $U$ 分别在 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$上 $\langle X^n$、$X^n \rangle \otimes \mathbb{P}$-几乎处处以及 $\langle M$、$M \rangle \otimes \mathbb{P}$-几乎处处唯一。

我们以讨论一个非常有趣的结果结束本小节：该结果涉及由点过程生成的滤过的扩大，见（Di Tella、Jeanblanc，2020年）。对于上述在不同情形下引入的记号，因其含义可由上下文清楚看出，我们不再重复。

设 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ 是一个完备随机基，其中 $\mathbb{F}$ 满足通常条件。$\mathcal{O}(\mathbb{F})$ 和 $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ 分别表示 $\Omega\times\mathbb{R}_+$ 上的 $\sigma$- 代数，即 $\mathbb{F}$- 适应集和 $\mathbb{F}$- 可预测集的 $\sigma$- 代数。 $\mathscr{A}^+=\mathscr{A}^+(\mathbb{F})$ 是 $\mathbb{F}$- 适应的可积递增过程空间，即满足 $\mathbb{E}X_\infty<\infty.$ 的递增过程 $X$ 所构成的空间。通常，$\mathscr{A}^+\,\mathrm{loc}\ =\mathscr{A}^+\,\mathrm{loc}\,(\mathbb{F})$ 表示 $\mathscr{A}^+.$ 的局部化版本。回顾一下，如果 $X\in\mathscr{A}^+\,\mathrm{loc}$，则存在唯一的 $\mathbb{F}$-可预测过程 $X^{p,\mathbb{F}}\in\mathscr{A}^+\,\mathrm{loc}$，使得 $X-X^{p,\mathbb{F}}\in\mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}\,(\mathbb{F})$。 $X^{p,\mathbb{F}}$ 称为 $\mathbb{F}$- 补偿子，或称为 $X$ 的 $\mathbb{F}$-对偶可预测投影，并定义 $\overline{X}^{\mathbb{F}}:=X-X^{p,\mathbb{F}}.$。关于 $\mathbb{F}$ 的点过程 $X$ 是一个取值于 $\mathbb{N}$、 $\mathbb{F}$-适应的递增过程，并且其关联跳跃过程满足 $\Delta X\in\{0,1\}.$。由于点过程是局部有界的，因此 $X\in\mathscr{A}^+\,\mathrm{loc}\cdot\mu$ 表示定义在 $\mathbb{R}_+\times E$ 上的非负随机测度，其中 $E$ 或它的某个博雷尔子集为 $\mathbb{R}^d$。我们假设 $\mu(\omega,\{0\}\times E)\equiv 0.$。定义 $\widetilde{\Omega}:=\Omega\times\mathbb{R}_+\times E,$ $\widetilde{\mathcal{O}}(\mathbb{F}):=\mathcal{O}(\mathbb{F})\otimes\mathcal{B}(E)$，以及 $\widetilde{\mathcal{P}}(\mathbb{F}):=\mathcal{P}(\mathbb{F})\otimes\mathcal{B}(E)$。从 $\Omega$ 到 $\mathbb{R}$ 的 $\widetilde{\mathcal{O}}(\mathbb{F})$-可测（分别为 $\widetilde{\mathcal{P}}(\mathbb{F})$-可测）映射 $W$ 称为 n $\mathbb{F}$-适应（分别为 $\mathbb{F}$-可预测）函数。对于一个 $\mathbb{F}$-适应函数 $W$，我们定义

$$W*\mu(\omega)_t:=\begin{cases}\int_{[0,t]\times E}W(\omega,t,x)\mu(\omega,dt,dx),\ \text{if}\ \int_{[0,t]\times E}|W(\omega,t,x)|\mu(\omega,dt,dx)<\infty\\ +\infty,\quad \text{else.}\end{cases}$$

$\mu$ 称为 $\mathbb{F}$-适应的（分别为 $\mathbb{F}$-可预测）随机测度，如果对于每个 $\mathbb{F}$-适应的（分别为 $\mathbb{F}$-可预测）函数 $W.$， $W*\mu$ 是 $\mathbb{F}$-适应的（分别为 $\mathbb{F}$-可预测的）。对于一个取 $\mathbb{R}^d$值的 $\mathbb{F}$ -半鞅 $X$， $\mu^X$ 表示其跳跃测度，定义为

$$\mu^X(\omega,dt,dx)=\sum_{s>0}\mathbb{I}^{\{\Delta X_s(\omega)\neq 0\}}\delta_{(s,\Delta X_s(\omega))}(dt,dx),$$

其中， $\delta_a$ 表示在 $a$处的狄拉克点质量。我们回顾一下， $\mu^X$ 相对于 $\mathbb{F}$ 是一个整数值随机测度，特别地，是一个 $\mathbb{F}$-适应的随机测度。此外，如果对于每个 $\omega\in\Omega$和 $t\in\mathbb{R}_+$，$\mu^X(\omega;[0,t]\times\mathbb{R}^d)<\infty$，那么 $\mu^X$相对于 $\mathbb{F}$是一个取 $\mathbb{R}^d$值的带标记点过程。（$B^X$、 $C^X$、 $\nu^X$）表示$X$的 $\mathbb{F}$-可预测特征。注意， $\nu^X$ 是一个可预测随机测度，其由以下两个性质刻画：对于任意满足$|W|*\mu^X\in\mathscr{A}^+_{\text{局部}}$的 $\mathbb{F}$-可预测映射 $W$，有$|W|*\nu^X\in\mathscr{A}^+_{\text{局部}}$，且 $W*\mu^X-W*\nu^X\in\mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}\,(\mathbb{F})$。关于这些概念的证明和讨论（以及更多内容）可参见（Jacod、Shiryaev，2002年，第2章）。

设 $X$ 为一个点过程， $\mathbb{X}=(\mathscr{X}_t)_{t\geq 0}$ 为由其生成的滤过。我们记

为 $\mathscr{R}$ 一个 $\sigma$-域，并称其为初始 $\sigma$-域。初始扩张滤过 $\mathbb{F}$ 通过 $\mathcal{F}_t := \mathscr{R} \vee \mathscr{X}_t$定义。注意， $X$ 相对于 $\mathbb{F}$仍为点过程；然而，一般而言，可预测补偿子 $X^{p,\ \mathbb{X}}$ 并不与 $X^{p,\ \mathbb{F}}$ 相同。以下引理广为人知（(i) Jacod，1979年；(ii) Jacod、Shiryaev，2002年）。

引理 136. 在上述设定下，有

(i) $\mathbb{F}$ 是右连续的；

(ii) 对于每个 $Y \in \mathcal{H}^1_{loc}(\mathbb{F})$，存在 $K \in L^1_{loc}(\overline{X}^{\mathbb{F}})$，使得 $Y$ 可以表示为

$$Y = Y_0 + K \bullet \overline{X}^{\mathbb{F}},$$

即， $\mathbb{F}$-局部鞅 $\overline{X}^{\mathbb{F}} := X - X^{p,\ \mathbb{F}}$ 相对于 $\mathbb{F}$具有鞅表示性质 .

现在考虑另一个点过程 $H$ 及其生成的滤过 $\mathbb{H}$。我们将 $\mathbb{G} := \mathbb{F} \vee \mathbb{H}$ 记为由 $\mathbb{H}$对 $\mathbb{F}$ 进行的渐进扩张。

值得注意的是，我们此前多次遇到的违约过程 $H := \mathbb{I}_{[\tau,\infty)}$ 是此处所考虑的点过程 $H$ 的一个特例。我们知道，$\overline{X}^{\mathbb{F}}$ 在 $\mathbb{F}$ 中具有鞅表示性质，而 $\overline{H}^{\mathbb{H}}$ 在 $\mathbb{H}$中具有鞅表示性质。(Di Tella、Jeanblanc，2020) 中得到的一般结果涉及鞅表示性质在 $\mathbb{G}$中的保持。现在我们给出若干定理和引理，以便陈述（并证明）他们的主定理，以及本小节关于点过程的最一般结果。

定理137. 设 $X$ 和 $H$ 分别是关于 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{H}$的两个点过程。那么，过程 $X - [X,H]$、$H - [X,H]$ 和 $[X,H]$ 都是关于 $\mathbb{G}$的点过程。此外，它们两两之间没有共同跳跃。

定理138. 考虑 $\mathbb{R}^2$值的 $\mathbb{G}$半鞅 $\widetilde{X} = (X,H)^T$. 那么，以下陈述成立

(i) $\mathbb{R}_+ \times E$上 $\widetilde{X}$的跳跃测度 $\mu^{\widetilde{X}}$由下式给出，其中 $E := \{(1,0);(0,1);(1,1)\}$，

$$\begin{aligned}\mu^{\widetilde{X}}(dt,dx_1,dx_2) =& d(X_t - [X,H]_t)\delta_{(1,0)}(dx_1,dx_2) + \\ & d(H_t - [X,H]_t)\delta_{(0,1)}(dx_1,dx_2) + d[X,H]_t\delta_{(1,1)}(dx_1,dx_2).\end{aligned}$$

~此外， $\mu^X$ 是相对于 $\mathbb{G}$的一个取值于 $\mathbb{R}^2$的带标记点过程。

~(ii) $\mathbb{G}$-补偿子 $\nu^X$ 由 $\mu^X$ 给出

$$\begin{aligned}\nu^{\widetilde{X}}(dt,dx_1,dx_2) =& d(X_t-[X,H]_t)^{p,\mathbb{G}}\delta_{(1,0)}(dx_1,dx_2)+\\ & d(H_t-[X,H]_t)^{p,\mathbb{G}}\delta_{(0,1)}(dx_1,dx_2)+d[X,H]_t^{p,\mathbb{G}}\delta_{(1,1)}(dx_1,dx_2).\end{aligned}$$

~ ~记 $\mathbb{G}$ 为使 $\mu^X$ 适应的最小右连续滤过，并记~$\mathbb{G}^*$ 为其初始扩张，定义为 $\mathcal{G}_t^* := \mathscr{R}\vee\mathcal{G}_t$。

引理 139。 $\mathbb{G}^*$ 与 $\mathbb{G}$重合。

我们区分鞅的两种表示：一种是相对于补偿随机测度的表示，另一种是相对于以下三个局部有界的 $\mathbb{G}$-局部鞅的表示

$$Z^1 := \overline{X-[X,H]}^{\mathbb{G}},\ Z^2 := \overline{H-[X,H]}^{\mathbb{G}},\ Z^3 := \overline{[X,H]}^{\mathbb{G}},$$

其中 $\overline{Z}^{\mathbb{G}} := Z - Z^{p,\ \mathbb{G}}$.

最后，我们可以陈述本小节的主要结果。关于证明和详细讨论，请参阅原论文。

定理 140。设 $Y\in\mathcal{H}^1_{loc}(\mathbb{G})$。则下列陈述成立

~(i) 存在一个 $\mathbb{G}$-可预测函数 $W$，使得 $|W|*\mu^X\in\mathscr{A}^+_{loc}(\mathbb{G})$，且 $Y$可以表示为

$$Y = Y_0 + W*\mu^{\widetilde{X}} - W*\nu^{\widetilde{X}}.$$

(ii) $Y$ 也有如下表示

$$Y = Y_0 + K^1\bullet Z^1 + K^2\bullet Z^2 + K^3\bullet Z^3,$$

其中 $K^i\in L^1_{loc}(Z^i,\mathbb{G})$ $i=1$，2，3。

正如作者所指出的，这一结果推广了我们之前介绍过的（Calzolari、Torti, 2016）的结果，因为后者作出了一个非常强的假设：

$\overline{X}^{\mathbb{F}}$ 和 $\overline{H}^{\mathbb{H}}$ 仍是 $\mathbb{G}$-局部鞅，且在 $\mathbb{G}$中彼此正交。此外，要使鞅表示性质扩展到 $\mathbb{G}$ 成立，并不要求 $\mathcal{F}_0$ 是平凡的。上述定理还推广了文献中许多我们未曾介绍过的相关结果。感兴趣的读者可以自行将当前结果与（Di Tella，2020年）、（Aksamit、Jeanblanc、Rutkowski，2019年）以及（Xue，1993）的结果进行比较。

我们通过陈述一个主定理的推论来结束讨论。该推论涉及由局部鞅集合 $\mathscr{Z}:=\{Z^1,Z^2,Z^3\}$ in$\mathcal{H}_0^p(\mathbb{G})$ 生成的稳定子空间，对于 $p\geq 1$，记为 $\mathscr{L}_{\mathbb{G}}^p(\mathscr{Z})$。

推论141。设 $p\geq 1$ and $\mathscr{Z}:=\{Z^1,Z^2,Z^3\}$。则

(i) 恒等式 $\mathscr{L}_{\mathbb{G}}^p(\mathscr{Z})=\mathcal{H}_0^p(\mathbb{G})$ 成立；

(ii) 此外，若 $p=2$ 且局部鞅 $Z^1$、$Z^2$、$Z^3\in\mathcal{H}_{0,\ loc}^2(\mathbb{G})$ 两两正交，则每个 $Y\in\mathcal{H}^2(\mathbb{G})$ 都可以表示为

$$Y=Y_0+K^1\bullet Z^1+K^2\bullet Z^2+K^3\bullet Z^3,$$

其中 $K^i\in L^2(Z^i,\mathbb{G})$ $i=1$、2、3，这是 $Y$in $(\mathcal{H}^2(\mathbb{G})$ $\|\cdot\|_2$ 的一个正交分解 ).

# 6 结论

我们详细介绍了当前文献中关于滤过扩张及其在数理金融领域应用的研究现状。正如分解公式所清楚表明的，滤过扩张处于随机分析基本结果的交汇处，这些基本结果包括伊藤定理、Doob-Meyer分解、测度变换技术以及（马尔可夫）桥过程。我们对扩张理论与数理金融基本定理之间联系的阐述，揭示了在何种条件下扩张会导致套利机会的产生，以及何时能够保持无套利性质。同样，我们还研究了确保市场中的鞅表示性质得以保持的条件。值得注意的是，我们的综述显示，过去几十年间，文献关注的重点一直是扩张，而滤过缩减则是一个研究得少得多的现象，尤其是在金融领域。我们计划通过一系列后续论文弥补这一空白。

# 参考文献

[1] Acciaio, B., Fontana, C., Kardaras, C., 2015年，第一类套利与半鞅金融模型中的滤过扩张。[2] Aksamit, A., Jeanblanc, M., 2017年，《面向金融的滤过扩张》。施普林格。[3] Aksamit, A., Jeanblanc, M., Rutkowski, M., 2018年，滤过渐进扩张中鞅的积分表示。[4] Aksamit, A., Jeanblanc, M., Rutkowski, M., 2019年，泊松滤过渐进扩张的可预测表示性质。[5] Amedinger, J., 2000年，初始扩张滤过的鞅表示定理。[6] Amedinger, J., Imkeller, P., Schweizer, M., 1998年，内幕人士的额外对数效用。[7] Ankirchner, S., 2005年，《信息与半鞅》。博士论文。[8] Ankirchner, S., Imkeller, P., 2005年，具有非对称信息和价格动态结构性质的金融市场中的有限效用。[9] Barlow, M.T., 1978年，包含诚实时刻的扩张滤过研究。[10] Callegaro, G., Jeanblanc, M., Zargari, B., 2011，迦太基扩张。[11] Calzolari, A., Torti, B., 2016a，滤过扩张与半鞅的可预测表示性质。[12] Calzolari, A., Torti, B., 2016年（b），通过半鞅的参考滤过进行渐进扩张中的鞅表示：多维情形注记。[13] Coculescu, D., Jeanblanc, M., 2012年，Nikeghbali A. 违约时刻、无套利条件与概率测度变换。

[14] Cohen, S.N., Elliott, R.J., 2015年, 《随机微积分及其应用》。Birkh¨auser。[15] Corcuera, J.M., Valdivia, A., 2012年, 《滤过扩张及其应用》。[16] Chau, H.N., Runggaldier, W.J., Tankov, P., 2016, 《含内幕人士的市场模型中的套利与效用最大化》。[17] D'Auria, B., Salmeron, J.A., 2019, 《内幕信息及其与套利条件和效用最大化问题的关系》。[18] Delbaen, F., Schachermayer, W., 1994, 《资产定价基本定理的一般形式》。[19] Di Tella, P., 2020, 《关于渐进扩张滤过中的弱表示性质及其在指数效用最大化中的应用》。[20] Di Tella, P., Engelbert, H-J., 2020, 《渐进扩张莱维滤过中的鞅表示》。[21] Di Tella, P., Jeanblanc, M., 2020, 《点过程生成的滤过扩张中的鞅表示》。[22] Ernst, P.A., Rogers, L.C.G., Zhou, Q., 2017, 《预知的价值》。[23] Es-Saghouani, A., 2006, 《滤过扩张与内幕交易》。学位论文。[24] F¨ollmer, H., Imkeller, P., 1993, 《通过吉尔萨诺夫变换取消预期：维纳空间上的一个悖论》。[25] Fontana, C., 2017, 《密度假设下初始扩张滤过中的强可预测表示性质》。[26] Fontana, C., 2014, 《连续金融市场中的弱无套利条件与强无套利条件》。[27] Fontana, C., Grbac, Z., Jeanblanc, M., Li, Q., 2014, 《变点资产价格模型中的信息、无套利与完备性》。[28] Galchuk, L.I., 1993, 《独立增量过程的半鞅与滤过扩张》。

[29] Grorud, A., Pontier, M., 2001年, 《非对称信息与不完全市场》。[30] Jacod, J., 1985, 《初始扩张、假设（H'）与吉尔萨诺夫定理》。[31] Jacod, J., 1979年, 《随机演算与鞅问题》。[32] Jacod, J., Protter, P., 1988, 《莱维过程上的时间反演》。[33] Jacod, J., Shiryaev, A., 2002年, 《随机过程的极限定理》。施普林格。[34] Jarrow, R.A., 2021, 《连续时间资产定价理论：基于鞅的方法》。施普林格。[35] Jeanblanc, M., Song, S., 2011, 《具有给定存活概率的违约时间显式模型》。[36] Jeanblanc, M., Song, S., 2015年, 《渐进扩张滤过中的鞅表示性质》。[37] Jeanblanc, M., Yor, M., Chesney, M., 2009, 《金融模型的数学方法》。施普林格。[38] Jeulin, T., Yor, M., 1978年, 《关于滤过扩张的新结果》。[39] Imkeller, P., 2001年, 《内幕人士可以获得免费午餐的随机时刻》。[40] Imkeller, P., Perkowski, N., 2013, 《支配局部鞅测度的存在性》。[41] Karatzas, I., Kardaras, C., 2007, 《半鞅金融模型中的计价基准投资组合》。[42] Kreher, D., 2016, 《截至随机时刻的测度变换：细节》。[43] Kusuoka, S., 1999, 《关于违约风险模型的评论》。[44] Mansuy, R., Yor, M., 2006, 《布朗情形下的随机时刻与滤过扩张》。施普林格。[45] Medvegyev, P., 2007, 《随机积分理论》。牛津大学出版社。

[46] Mortimer, T., Williams, D., 1991，随机时刻之前的测度变换：理论。[47] Neufcourt, L., 2017，利用随机过程扩张滤过。博士论文。[48] Nikeghbali, A., 2006, 随机过程一般理论论述。[49] Nikeghbali, A., Yor, M., 2006，Doob 极大恒等式、乘法分解与滤过扩张。[50] Ouwehand, P., 2007，滤过扩张：入门指南。[51] Pikovsky, I., Karatzas, I., 1996，预见性投资组合优化。[52] Protter, P.E., 2005年, 随机积分与微分方程。施普林格。[53] Xue, X., 1993，两个独立半鞅的鞅表示定理。