arXiv:2303.03575v1 [stat.ME] 7 Mar 2023

面向6G超可靠低时延通信系统的自适应重要性抽样与拟蒙特卡罗方法

XX. Ke、Houying Zhu、Kai Yi、Gaoning He、Ganghua Yang、Yu Guang Wang

摘要—本文提出一种基于自适应重要性抽样的高效仿真方法，该方法可根据先前的样本，在高斯族中自动寻找最优提议分布，以评估比特误码率（BER）或字误码率（WER）的概率。这两项指标涉及高维黑盒积分和稀有事件采样，可用于表征编码调制的性能。我们进一步将准蒙特卡罗方法融入该框架，以提高收敛速度。仿真结果表明，在加性高斯白噪声场景下，所提出的重要性采样算法的效率远高于标准蒙特卡罗方法。

索引词—自适应重要性抽样、蒙特卡罗、准蒙特卡罗、比特误码率、误差概率

一、引言

在无线通信中，可靠性通过测量在规定时间内成功送达的特定大小数据包的比例来评估。对于单个用户，N 可以根据业务需求指定要发送的数据包，测量数据包传输时延，并通过记录数据包传输时延是否在规定时间内来评估可靠性。传统移动宽带（MBB）系统（2G/3G/4G）中的数据包传输可靠性（或成功率）通常为 0.1 或 0.01 量级。这是因为它们主要服务于人与人之间的语音和视频传输，而人类对时延相对不敏感。除移动宽带外，5G/6G 还引入了超可靠低时延通信系统，旨在支持人类与机器等“智能体”之间的通信，这类通信对可靠性的要求更高，达到 10^{-6} 甚至达到 10^{-9} [1]。这使得许多未来应用成为可能，例如远程手术、机器人协作以及机器远程控制。然而，评估高可靠性系统的效率正成为一个关键问题，因为以极低概率生成错误数据包属于稀有事件，因此进行蒙特卡洛仿真十分耗时。例如，假设可靠性目标值为 99.999 %（32 字节 @ x 毫秒），并假设发送 100,000 个数据包；若其中 99,999 个数据包的传输时延小于或等于 x 毫秒，则在 x 毫秒内传输 32 字节数据包的可靠性为 99.999%。对于整个系统，所需统计量是满足 99.999% 可靠性的用户占所有仿真用户的比例。接下来，10^6 需要采样点来找出错误数据包

X. Ke和K. Yi任职于澳大利亚新南威尔士大学；H. Zhu任职于澳大利亚麦考瑞大学；G. He和G. Yang任职于中国上海华为技术有限公司；Y. G. Wang任职于中国上海交通大学。邮箱：yuguang.wang@sjtu.edu.cn

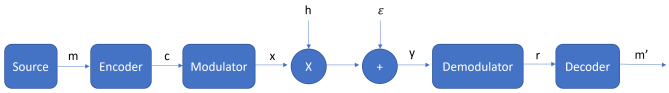

图 1. 系统模型示意图

采用传统抽样方法将造成难以承受的巨大成本。

重要性抽样（IS）技术提供了一种解决方案：通过平移或缩放原始目标分布，将其作为提议分布，从而降低蒙特卡洛估计量的方差。实际中的目标函数通常较为复杂，例如带噪声的调制码字。采用重要性抽样后，得到的偏置分布中稀有事件的发生频率会更高。随后利用重要性权重对该偏置分布进行校正。由于最优提议分布取决于黑盒积分函数，因此并不为人所知。事实上，即使已知最优提议分布，通常也难以从中抽样。因此，恰当选择提议分布族及其参数，对于找到次优提议分布至关重要。有关重要性抽样在通信系统中的作用的简要介绍，请参阅 [2]。

在通信系统相关文献中，两类分布常被用作提议分布。[3], [4]使用伯努利分布作为重要性抽样的提议分布，以评估二进制线性分组码的性能。 [3] 还提出了一种自适应方法，用于更新伯努利提议分布的参数。 [5] 使用高斯提议分布进行重要性抽样，以估计随机编码并集（RCU）界，并给出了该估计量的渐近分析。然而，RCU 界 [6] 仅表示在给定码长和误差概率下可实现的理论最大信道编码速率，与实际情况仍有一定距离。高斯提议分布也被用于评估加性高斯白噪声信道 [7]和瑞利衰落信道 [8]中的低密度奇偶校验码（LDPC）性能。然而，这两项工作都没有讨论如何确定高斯提议分布的参数。

本文有两项主要贡献。首先，我们基于 Bugallo 等人 [9] 的工作，提出了一种自适应重要性抽样方案，用于更新高斯提议分布的参数。其次，我们不再依赖传统的随机数生成器，而是采用准蒙特卡洛 (QMC) 和随机化准蒙特卡洛方法，从高斯提议分布中抽样。QMC 和 RQMC 可替代科学计算和金融分析中广泛使用的

蒙特卡罗方法 [10]–[12]。与采用随机抽样方法的 MonteCarlo 不同，QMC 使用确定性规则生成点。因此，QMC 能以更少的点达到相同的积分误差，从而提高积分过程的效率，进而提升重要性抽样的效率。本文关注在省略编码器和解码器时链路级仿真中的加性高斯白噪声 (AWGN)，见图1。

II. 模型设定与性能度量

设 $m \in \mathcal{X}^k$ 为消息向量。通过对该消息字进行编码，可得到码字 $c \in \mathcal{X}^n$。信号 X 是码字 c调制后的序列。在信道输出端，经过噪声扰动、尚未解调的字 $r \in \mathcal{X}^n$ 就是实际中可观测到的信号。解码器将尝试把观测值 r 恢复为原始消息 m。在通信系统建模中，可以采用二进制相移键控（BPSK）调制，并使用加性高斯白噪声（AWGN）信道或瑞利衰落信道。例如，在图1中，当我们设定 $h \equiv 1$ 和 ϵ服从高斯分布时，可得到加性高斯白噪声信道。

代码的性能通过某种度量指标来衡量：对由联合分布 $\pi(Y|X)\pi(X)$独立抽样生成的所有字 r 求平均，然后经解调器处理。例如，对0-1损失求平均（即，如果接收字被错误解码，则损失为1，否则为0），便可得到字错误概率（WER）。一般而言，我们可以写作 $P_e = E_{\pi(Y)}[I(Y)] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I(y_i)$，其中 $y_i \sim \pi(Y)$。由于解调器和解码器的结构复杂，且码长较长，我们无法明确写出示性函数 $I(Y)$的有效区域。因此，需要使用蒙特卡罗模拟来计算这一高维积分。当信噪比较高时，P_e 可能非常小。对于WER，相对误差可近似表示为 $\frac{\sqrt{Var[\hat{P}_e]}}{P_e} \approx \frac{1}{\sqrt{P_e N}}$，这表明，在稀有事件抽样中，需要较大的样本量才能保持准确性。

III. 重要性抽样

对稀有事件进行抽样，一种不错的候选方案是重要性抽样（IS）

$$\hat{P}_e \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I(y_i)\frac{\pi(y_i)}{g(y_i)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I(y_i)w(y_i), \tag{1}$$

其中 $w(y_i) = \frac{\pi(y_i)}{g(y_i)}$、$y_i \sim g(Y)$ 和 $g(Y)$ 是提议分布的概率密度，该分布产生误差的概率更高。重要性抽样还存在另一种估计量：通过对重要性权重进行归一化，只需知道提议分布和目标分布（均精确到一个归一化常数）即可：$\hat{P}_e \approx \frac{\sum_{i=1}^{N} I(y_i)w(y_i)}{\sum_{i=1}^{N} w(y_i)}$。注意，实际中 $\pi(Y) = \int \pi(Y|X)\pi(X)dx$ 没有闭式表达式。例如，在加性高斯白噪声信道中，$\pi(Y|X)$ 是 $\prod_{i=1}^{n} N(y_i, \sigma^2)$ 的概率密度函数，而 X 可以服从离散均匀分布。因此，我们有两种策略：

1）根据提议分布 $g(Y, X) = g(Y|X)\pi(X)$ 联合抽取 Y 和 X。在这种情况下，重要性权重变为 $w(y_i, x_i) = \frac{\pi(y_i|x_i)}{g(y_i|x_i)}$。

2) 我们采用条件重要性抽样方法[13], [14]，首先对 $x_i \sim \pi(X)$ 进行抽样，然后在给定 x_i的条件下，使用重要性抽样来计算 S 估计量 $E_{\pi(Y)}[I(Y)|X]$. In this case, we have the I

$$\begin{aligned} P_e &= E_{\pi(X)}[E_{\pi(Y|X)}[I(Y)|X]] \\ &\approx \frac{1}{S}\sum_{j=1}^{S} \frac{\sum_{i=1}^{N} I(Y_{ij})w(y_{ij}, x_j)}{\sum_{i=1}^{N} w(y_{ij}, x_j)}. \end{aligned} \tag{2}$$

如果误差主要由噪声 ϵ 导致，而码字 x 对误差的影响较小，那么这个估计量的效果会很好。例如，当损失函数为字误码率（WER）时，我们可以得到

$$E_{\pi(Y|X)}[I(Y)^2|X] = E_{\pi(Y|X)}[I(Y)|X] \approx p_e. \tag{3}$$

然后，根据全方差公式，

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}_{\pi(Y)}[I(Y)] &= E_{\pi(X)}[\mathbf{Var}_{\pi(Y|X)}[I(Y)|X]] \\ &\quad + \mathbf{Var}_{\pi(X)}[E_{\pi(Y|X)}[I(Y)|X]] \\ &\approx E_{\pi(X)}[\mathbf{Var}_{\pi(Y|X)}[I(Y)|X]] \\ &\approx \mathbf{Var}_{\pi(Y|X)}[I(Y)|X] = p_e - p_e^2. \end{aligned} \tag{4}$$

换言之，式（2）中重要性抽样估计量的方差接近于我们已知 $\pi(y_i)$解析形式时的情况。这意味着我们可以对 x_i 进行抽样，使得 $S \ll N$。在极端情况下，$S = 1$。

给定 X，最优提议分布为

$$g^*(Y|X) = \frac{I(Y)\pi(Y|X)}{E_{\pi(Y|X)}[I(Y)|X]}, \tag{5}$$

但无法对其进行抽样。重要性抽样的关键问题是设计次优提议分布。我们需要在以下四点之间取得平衡。

1) 与目标分布相比，提议分布能够高效地对稀有事件进行抽样。2) 能够快速计算重要性权重。3) 易于从提议分布中抽样。4) 有效样本量不应过小。

IV. 加性高斯白噪声信道下的重要性抽样

若码字 x 通过加性高斯白噪声信道发送，则条件目标分布为 $y|x \sim N(x, \sigma^2 I_n)$。为解决稀有事件模拟问题，我们考虑两种构造提议分布的方法。

A. 指数倾斜

在用于稀有事件仿真的蒙特卡罗估计中，会采用指数倾斜来改变目标分布。假设 $\pi(Y, X)$ 是正态分布的概率密度函数 $N(x, \sigma^2 I_n)$，则倾斜密度 $g_\theta(y)$ 为 $N(x+\theta, \sigma^2 I_n)$，其中 $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ 是需要调整的倾斜参数向量。那么，未归一化的重要性权重为

$$\frac{\pi(y_i|x_i)}{g_\theta(y_i|x_i)} = \exp\left[-\frac{(y_i - x_i)^T\theta}{\sigma^2}\right]\exp\left[\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{6}$$

由此得到的重要性抽样估计量为

$$\hat{p}_e \approx \frac{\sum_{i=1}^{N} \exp\left[-\frac{(y_i-x_i)^T\theta}{\sigma^2}\right] I(y_i)}{\sum_{i=1}^{N} \exp\left[-\frac{(y_i-x_i)^T\theta}{\sigma^2}\right]}, \tag{7}$$

或者，如果我们使用条件重要性抽样，

$$\hat{p}_e \approx \frac{1}{S}\sum_{j=1}^{S} \frac{\sum_{i=1}^{N} \exp\left[-\frac{(y_{ij}-x_j)^T\theta}{\sigma^2}\right] I(y_{ij})}{\sum_{i=1}^{N} \exp\left[-\frac{(y_{ij}-x_j)^T\theta}{\sigma^2}\right]}. \tag{8}$$

重要性抽样的方差为

$$\begin{aligned}&\mathbf{Var}_{g(Y|X)\pi(X)}\left[I(Y)\frac{\pi(Y|X)}{g(Y|X)}\right]\\ =&E_{\pi(Y|X)\pi(X)}\left[I(Y)\frac{\pi(Y|X)}{g(Y|X)}\right]-p_e^2,\end{aligned} \tag{9}$$

这是无法获得的。但我们的问题是寻找倾斜参数 θ，以最小化上述方差。由于方程（9）中只有第一项依赖于 θ，因此我们可以找到一个替代目标函数，即 IS 的二阶矩估计量。

引理1。 指数倾斜情况下 *IS* 的二阶矩估计量为

$$E_\theta[\hat{p}_e^2] = \frac{\sum_{i=1}^{N} I(y_i)^2 \exp\left[\frac{-2(y_i-x_i)^T\theta+\|\theta\|_2^2}{2\sigma^2}\right]}{N} \tag{10}$$

其导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_\theta[\hat{p}_e^2]}{\partial\theta} =&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I(y_i)^2 \exp\left[\frac{-2(y_i-x_i)^T\theta+\|\theta\|_2^2}{2\sigma^2}\right]\\ &\times\left[\frac{-2(y_i-x_i)+2\theta}{2\sigma^2}\right],\end{aligned} \tag{11}$$

其中 (x_i, y_i) 从目标分布 $\pi(Y,X)$ 中抽样得到。此外，对于所有 $\frac{\partial^2 E_\theta[\hat{p}_e^2]}{\partial\theta^2} > 0$，都有 θ_i，这意味着式（(10)）中的 *IS* 二阶矩估计量关于变量 θ 是一个凸函数。

因此，我们有以下定理。

定理2. 使下式给出的重要性抽样估计量的方差达到最小的最优倾斜参数 θ (7) 或 (8) 为

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{N} I(y_i)^2(y_i-x_i)\exp[-\frac{(y_i-x_i)^T\hat{\theta}}{\sigma^2}]}{\sum_{i=1}^{N} I(y_i)^2\exp[-\frac{(y_i-x_i)^T\hat{\theta}}{\sigma^2}]}, \tag{12}$$

其中，(x_i, y_i) 是从 $\pi(Y,X)$中采样得到的。因此，当 $N\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}\hat{\theta} \to_{a.s} &\frac{E_{g(Y,X)}\left[I(Y)^2(Y-X)\frac{\pi^2(Y,X)}{g^2(Y,X)}\right]}{E_{g(Y,X)}\left[I(Y)^2\frac{\pi^2(Y,X)}{g^2(Y,X)}\right]}\\ \approx &\frac{\sum_{i=1}^{N} I(y_i)^2(y_i-x_i)\exp\left[-\frac{2(y_i-x_i)^T\hat{\theta}}{\sigma^2}\right]}{\sum_{i=1}^{N} I(y_i)^2\exp\left[-\frac{2(y_i-x_i)^T\hat{\theta}}{\sigma^2}\right]},\end{aligned} \tag{13}$$

其中，对于任意 θ，$g(Y|X)$ 可以是 $N(x+\theta, \sigma^2 I_n)$ 的概率密度函数，而 (x_i, y_i) 是从 $g(Y|X)\pi(X)$中采样得到的。

注. 引理 *1* 和定理 (12) 中的公式 *2* 表明，无法得到 $\hat{}$ 的闭式表达式 θ，但可以通过梯度下降得到数值结果，且凸性保证了收敛性 $E_\theta[\hat{}\, p_e^2]$。然而，根据公式 (11)计算梯度需要从目标分布中抽取稀有事件。当信噪比较高时，根据(11)计算得到的蒙特卡罗梯度可能不可靠。公式(13) 的一个显著推论是，使用任意指数倾斜正态分布，都可以得到关于 $\hat{}\theta$ 的无偏重要性抽样估计量。这有两点优势：*1.* 从倾斜 $\hat{}$分布中抽取稀有事件更容易。*2.* 我们可以根据先前提议分布中的采样器来更新估计量 θ 。

B. 方差缩放

另一种对稀有事件进行抽样的方法是缩放目标分布的方差。在这种情况下，尺度密度$g_c(y)$为 $N(x,\ c\sigma^2 I_n)$，其中 $c>1$ 是需要调节的缩放参数。于是，未归一化的重要性权重为

$$\frac{\pi(y_i|x_i)}{g_\theta(y_i|x_i)} = c^{\frac{n}{2}}\exp\left[\left(\frac{1}{c}-1\right)\frac{\|y_i-x_i\|_2^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{14}$$

与指数倾斜类似，我们可以利用方差缩放获得最优的重要性抽样估计量。

引理3。 在方差缩放情况下，重要性抽样的二阶矩估计量为

$$E_c[\hat{p}_e^2] = \frac{c^{\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^{N} I(y_i)^2\exp\left[\left(\frac{1}{c}-1\right)\frac{\|y_i-x_i\|_2^2}{2\sigma^2}\right]}{N} \tag{15}$$

其导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_c[\hat{p}_e^2]}{\partial c} =& \frac{n}{2}c^{\frac{n}{2}-1}\frac{\sum_{i=1}^{N} I(y_i)^2\exp\left[\left(\frac{1}{c}-1\right)\frac{\|y_i-x_i\|_2^2}{2\sigma^2}\right]}{N}\\ &-c^{\frac{n}{2}-2}\frac{\sum_{i=1}^{N} I(y_i)^2\exp\left[\left(\frac{1}{c}-1\right)\frac{\|y_i-x_i\|_2^2}{2\sigma^2}\right]\frac{\|y_i-x_i\|_2^2}{2\sigma^2}}{N},\end{aligned} \tag{16}$$

其中(x_i, y_i) 从目标分布 $\pi(Y,X)$中抽样得到。

定理4。 通过设置 $\frac{\partial E_c[\hat{}\, p_e^2]}{\partial c} = 0$，驻点 $\hat{c}$满足

$$\hat{c} = \frac{2\sum_{i=1}^{N} I(y_i)^2\exp\left[\left(\frac{1}{c}-1\right)\frac{\|y_i-x_i\|_2^2}{2\sigma^2}\right]\frac{\|y_i-x_i\|_2^2}{2\sigma^2}}{n\sum_{i=1}^{N} I(y_i)^2\exp\left[\left(\frac{1}{c}-1\right)\frac{\|y_i-x_i\|_2^2}{2\sigma^2}\right]}, \tag{17}$$

其中，(x_i, y_i) 是从 $\pi(Y,X)$中采样得到的。因此，当 $N\to\infty$时，

$$\begin{aligned}\hat{c} \to_{a.s} &\frac{2E_{g(Y,X)}\left[I(Y)^2\frac{\|Y-X\|_2^2}{2\sigma^2}\frac{\pi^2(Y,X)}{g^2(Y,X)}\right]}{nE_{g(Y,X)}\left[I(Y)^2\frac{\pi^2(Y,X)}{g^2(Y,X)}\right]}\\ \approx &\frac{2\sum_{i=1}^{N} I(y_i)^2\exp\left[\left(\frac{1}{c}-1\right)\frac{\|y_i-x_i\|_2^2}{\sigma^2}\right]\frac{\|y_i-x_i\|_2^2}{2\sigma^2}}{n\sum_{i=1}^{N} I(y_i)^2\exp\left[\left(\frac{1}{c}-1\right)\frac{\|y_i-x_i\|_2^2}{\sigma^2}\right]},\end{aligned} \tag{18}$$

其中， $g(Y|X)$ 是 $N(x, c\sigma^2 I_n)$ 的概率密度函数，适用于任意 c； 而(x_i, y_i)是从 $g(Y|X)\pi(X)$中采样得到的。

注。 定理 *4* 略弱于定理 *2* ， 因为无法保证 $\partial^2 E_c[\hat{}$ $\frac{p_e^2]}{\partial c^2} > 0$。因此， $\hat{c}$ 在方程 (18) 中只是驻点。在每次更新中， 我们令 $c^* = \max\{1+\delta, \hat{c}\}$， 其中 $\delta > 0$。这保证了提议分布的方差始终大于目标分布的方差。

C. 自适应重要性抽样

自适应重要性抽样 [15]是一种迭代过程，通过生成提议密度来降低重要性抽样的方差。该过程包含三个基本步骤：从提议分布中生成样本、计算每个样本的重要性权重（加权），以及更新提议分布族中的参数，从而为下一次迭代生成新的提议分布（适配）。如前所述，适配方式取决于具体问题。已有许多方法 [16]–[18]可用于合并来自不同提议分布的样本。这里我们选择一种直接的方法，即对来自所有提议分布的所有样本的加权交叉项进行归一化。下面的算法1实现了我们的自适应重要性抽样策略。

Algorithm 1 Adaptive Importance Sampling

Input Number of proposals J, Number of samples from each proposal N
Initialization: η_1
for $j = 1 \cdots J$ **do**
  Sampling: Draw $\{x_{ij}, y_{ij}\}_{i=1}^N$ from $g_{\eta_j}(Y|X)\pi(X)$
  Weighting: Calculate the weight $\{w_{ij}\}_{i=1}^N$
  Adaptation: Updating η_j based on equation (13) or (18)
end for
Reweighting: $\bar{w}_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^N w_{ij}}$
Output: $\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^N \bar{w}_{ij} I(y_i)$

五、准蒙特卡罗方法

蒙特卡罗方法是模拟概率分布时最广泛使用的数值方法之一。它是克服维数灾难问题的关键步骤，因为计算操作不会呈指数级增长，而是保持在可控范围内，并与数据集的规模成正比。然而，一个主要缺点是，蒙特卡罗方法产生的是概率预测，而非确定性答案。应用蒙特卡罗方法时，另一个关键问题是随机样本的生成。尽管蒙特卡罗方法通常假设输入为真正的随机数，但实际上这些数是确定性的。这些输入称为伪随机数，其设计目的是模拟真正的随机数。准蒙特卡罗方法是蒙特卡罗方法的确定性对应方法，它依赖于使用具有更均匀空间填充性质的低差异序列，而非随机序列[10]。因此，在

蒙特卡罗	准蒙特卡罗
随机	确定性
$N^{-1/2}$ 收敛	接近 N^{-1} 收敛
概率误差界	确定性误差界

使用准蒙特卡罗进行高维积分以实现更快的显式收敛速率时，能够获得显著提升。此外，当需要反复求解类似问题时，准蒙特卡罗更加可靠；定价应用中通常就是这种情况，在此类应用中，拟蒙特卡罗方法已受到极大关注 [19]–[21]。

在近似计算积分时，蒙特卡罗和准蒙特卡罗采用相同的形式，即 $\int_{[0,1]^s} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f(\boldsymbol{x}_i)$，其中 $\boldsymbol{x}_i \sim \mathrm{U}([0,1]^s)$ 是用于蒙特卡罗方法的独立随机样本。相比之下，准蒙特卡罗方法使用确定性的低差异序列来代替这些随机样本。上表总结了这两种方法的比较，便于快速参考。

准蒙特卡罗方法可以使用等权重，对 d 维欧几里得空间的超立方体中的连续函数进行积分，其收敛率为 $\mathcal{O}(N^{-1}(\log N)^{d-1})$；也就是说，对于定义在 $[0,1]^d$ 上的连续函数 f，

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f(x_i) - \int_{[0,1]^d} f(x)dx\right| \le C_f \frac{(\log N)^{d-1}}{N}, \quad (19)$$

其中 $x_{i}{}_{i=1}^N$ 是来自低差异序列的点，C_f 是仅取决于函数 f 的常数。粗略来说，低差异序列的设计方式确保不会出现大的空区域或聚集点。与随机点不同，该序列会系统地填补任意初始片段中的空隙。因此，与传统蒙特卡罗方法相比，其性能有所提升。

回想一下，码字 x 通过加性高斯白噪声信道发送后，条件目标分布 $y|x \sim N(x, \sigma^2 I_n)$，其中 $y_i \sim \pi(Y)$。转而采用准蒙特卡罗方法，我们将在高斯分布的抽样过程中使用低差异点。低差异序列是一类广泛应用于数值计算和统计分析的序列，包括 Halton 型序列、Sobol 点、数字网 [22], 和格点规则 [23] 及其变体。关于低差异序列的开创性研究见 [24]。对这些序列应用随机平移或扰乱等随机化技术后，它们便成为随机化准蒙特卡罗（RQMC）序列。随机化准蒙特卡罗估计量是无偏的，与普通蒙特卡罗方法相比，可以降低方差。此外，正如 [12] 及其中的参考文献所述，随机化准蒙特卡罗为分析准蒙特卡罗相关方法提供了一个概率框架。图 2展示了蒙特卡罗点与一些准蒙特卡罗点之间的区别。显然，与蒙特卡罗点相比，准蒙特卡罗点在单位正方形内的分布更加均匀。

低差异序列也已被整合到马尔可夫链蒙特卡罗（MCMC）方法中，相关描述见

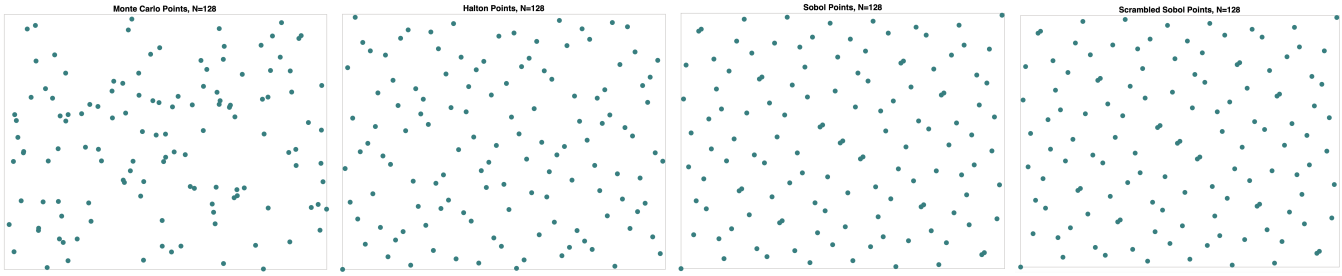

图2。从左到右：蒙特卡罗点，以及准蒙特卡罗点，包括 Halton、Sobol 和随机化 Sobol。每种情况下，点的数量均为 $N = 128$。

在 [25], [26]中。统计采样器的确定性版本，例如接受-拒绝采样器 [27] 和重要性抽样 [28], ，都已得到研究；研究发现，使用准蒙特卡罗点能够提升其在各种应用中的性能。

A. 在重要性抽样中使用准蒙特卡罗

在重要性抽样框架中，至少有两种方法可以提升算法性能：设计更有效的提议分布，以及从提议分布中获取更好的样本。本节重点讨论后一方面，具体而言，即从选定的提议分布中获取更好的样本。为此，我们将使用准蒙特卡罗方法，从而获得专为所选提议分布设计的低差异样本。与使用蒙特卡罗方法获得的样本相比，这些样本具有更好的空间填充性质。

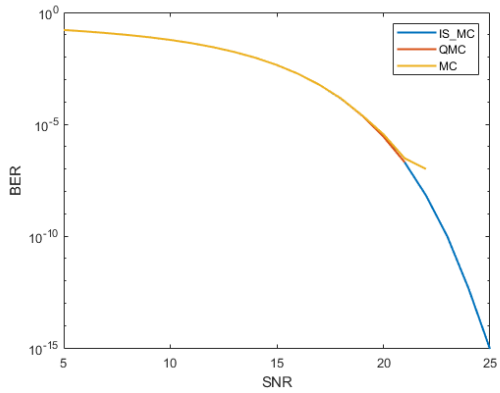

图3. 三种抽样方法下的信噪比与比特误码率对比：蒙特卡罗、准蒙特卡罗和基于蒙特卡罗的重要性采样。

先前研究已探索在重要性抽样框架中使用准蒙特卡罗点，例如 [28],，其中观察到数值积分任务的性能显著提升。较新的研究（如 [29,定理 3.1], ）表明，在重要性抽样框架中针对高斯提议分布使用随机化准蒙特卡罗，可使均方根误差达到 $N^{-1+\epsilon}$ 的阶，且 $\epsilon > 0$ 可任意小。在重要性抽样框架中，可以使用准蒙特卡罗点从提议分布中抽样，以取代蒙特卡罗点。与蒙特卡罗方法相比，准蒙特卡罗方法具有更高的积分精度，因此估计比特误码率所需的采样点更少。不过，不同类型的准蒙特卡罗点可能会带来略有差异的性能。在我们的实验中，我们将考虑几种常用的准蒙特卡罗点集；未来还可以进一步研究如何为重要性采样算法构造最优的准蒙特卡罗/随机化准蒙特卡罗点。这将留待未来工作。

第六节 实验

本节展示在抽样次数较大的情况下，不同抽样方法在6G无线通信场景中估计比特错误的表现。我们仅针对加性高斯白噪声信道采用所提出的方法。首先，随机生成一些码字 x，并将其调制到潜空间中。然后，从参数为 η 的 $g_\eta(y \mid x)$ 中抽取 y。具体做法是，基于提议分布添加高斯噪声，对调制后的码字重复这一过程数次。每次都根据方程（ η 18）更新参数。完成抽样后，我们对所有样本的重要性权重重新加权。接下来，将含噪信号解调回来，并计算每种抽样器的比特误码率。通过计算比特误码率的加权和，得到重要性采样估计量。参见算法1。我们通过重复多次仿真来评估比特误码率。实验中比较了三种方法：普通蒙特卡罗、准蒙特卡罗，以及基于缩放方差的重要性抽样。所有实验均使用 Matlab 进行仿真。

A. 蒙特卡罗点和准蒙特卡罗点

在实验中，我们使用蒙特卡罗和准蒙特卡罗采样点。图 2 从左到右展示了通过伪随机算法生成的蒙特卡罗点，以及通过 Sobol、Halton 和扰乱方法生成的准蒙特卡罗点。所有方法都在 $n = 128$ 单位正方形 $[0, 1]^2$中抽取点。最左侧的蒙特卡罗点在 $[0, 1]^2$中随机散布。与蒙特卡罗点相比，准蒙特卡罗点在单位正方形中的排列更为规则，并且在采样点数量相同的情况下具有更高的积分精度。Sobol 和 Halton 是典型的准蒙特卡罗点，而扰乱的 Sobol 点则属于随机化准蒙特卡罗方法。这里的“随机化”是指每个扰乱点都是经过微小扰动的 Sobol 点。如前所述，扰乱点的积分精度介于蒙特卡罗方法和准蒙特卡罗方法之间。

B. 蒙特卡罗方法的重要性抽样

我们展示了使用方差缩放对噪声概率密度函数进行偏置的仿真结果，以及用准蒙特卡罗方法替代蒙特卡罗方法的仿真结果。

我们评估信噪比（SNR，dB）从 5 到 25 时各种抽样方法的比特误码率，其中比特误码率通过 BER $= \frac{\sum_{i=1}^{N}\left|m_i - m_i'\right|}{N}$ 计算。我们假设输入信号 x 包含 5000 个码字和 100 个数据包，噪声 ϵ服从均值为零、方差为 $0.5 \times 10^{-\frac{\mathrm{SNR}}{10}}$ 的高斯分布。实验评估了三种方法：普通蒙特卡罗（MC）方法、准蒙特卡罗（QMC）方法，以及蒙特卡罗重要性抽样（IS-MC）。在 IS-MC 中，提议分布的 SNR 是使用算法1将原始 SNR 降低 5 得到的。

我们在图3的半对数图中展示 SNR 与比特误码率的关系，其中 x 轴表示从 0 到 25 的 SNR，y 轴表示比特误码率。在仿真中，我们使用 $N_s = 100$ 个数据包和$N = 5000$ 个数据包，qammod 的阶数为16。因此，采样点数量为500,000。我们观察到，在采样数量固定时，重要性抽样方法取得了显著改进。当 SNR 小于20时，这三种方法的性能相近。然而，当 SNR 大于 20 时，蒙特卡罗方法和准蒙特卡罗方法都无法估计比特误码率。重要性抽样方法则能通过 10^{-15} 次 500,000 次抽样，精确估计约为

C. 蒙特卡罗方法与准蒙特卡罗方法的比较

我们通过将蒙特卡罗方法和准蒙特卡罗方法分别与重要性抽样进行比较，来评估这两种方法。由于重要性抽样方法在信噪比不超过 25 时的方差都较小，因此我们将重要性抽样的结果视为真实值，并计算普通蒙特卡罗方法、准蒙特卡罗方法和随机化准蒙特卡罗方法的相对误差。准蒙特卡罗方法（或随机化准蒙特卡罗方法）提供（近似）等面积点，可通过对每个点的范数进行划分，用于抽取高斯分布的点。图4 展示了蒙特卡罗抽样、基于 Sobol 的拟蒙特卡洛抽样和基于扰乱 Sobol 序列的随机化拟蒙特卡洛抽样各自与重要性抽样-蒙特卡罗抽样所得比特误码率之间的差异。当信噪比小于 15 时，蒙特卡罗方法和准蒙特卡罗方法的误差都很小。当信噪比较高、误差概率较小时，这两种方法的方差都会增大。当采样点数量有限时（此时信噪比较高），准蒙特卡罗方法的方差小于普通蒙特卡罗方法。随机化准蒙特卡罗方法的性能与准蒙特卡罗方法相近。

VII. 结论与讨论

我们提出了一种新颖高效的抽样方法，用于评估对可靠性要求极高的无线通信，尤其是6G系统。我们的方法基于一种自适应重要性抽样算法，该算法的更新规则在简化的加性高斯白噪声情况下具有理论保证的最小方差。结果表明，所提出的重要性抽样方法比传统蒙特卡罗方法效率显著更高：通过500,000次抽样即可达到10^{-15} 的比特误码率，而蒙特卡罗方法则在

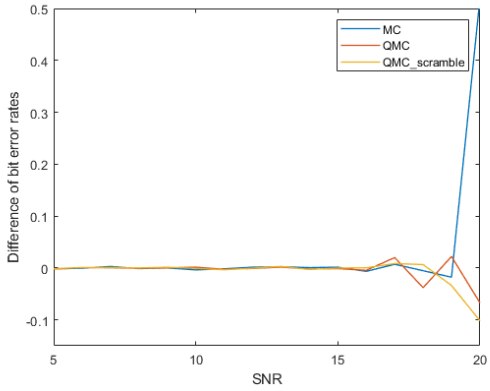

图 4. MC 与 QMC（左）以及 MC 与 RQMC（右）的比较。纵轴表示 MC、QMC 或 RQMC 与 IS-MC 之间的比特误码率差异。QMC 抽样使用 Sobol 点，而 RQMC 基于扰乱Sobol点。

10^{-6}时仍无法达到。准蒙特卡罗和随机化准蒙特卡罗方法在高维积分中已展现出更高的精度，因此也有望在我们的重要性抽样框架中取代蒙特卡罗方法。

虽然我们主要致力于提出一种用于模拟 6G 超可靠低时延通信系统中稀有事件的新概念和框架，但在未来的工作中，我们将进一步开展实证评估，以比较所提方法与现有方法的性能和效率。此外，我们认为，该框架可以推广到更复杂的场景，例如瑞利信道以及更一般的衰落信道。

参考文献

[1] W. Tong 和 P. Zhu，《6G：下一个前沿：从万物互联到智能互联》。剑桥大学出版社，2021年。[2] P. J. Smith、M. Shafi 和 H. Gao，“快速仿真：通信系统中重要性抽样技术综述”，《IEEE通信领域精选期刊》，第15卷，第4期，第597–613页，1997年。[3] G. Romano 和 D. Ciuonzo，“用于快速仿真二元对称信道上线性分组码的最小方差重要性采样伯努利估计量”，《IEEE无线通信汇刊》，第13卷，第1期，第486–496页，2013年。[4] A. Mahadevan 和 J. M. Morris，“用于线性分组码硬判决译码性能的信噪比不变重要性采样”，《IEEE通信汇刊》，第55卷，第1期，第100–111页，2007年。[5] J. Font-Segura、A. Martinez 和 A. G. i F`abregas，“编码调制误差概率估计中的重要性抽样”，《IEEE通信汇刊》，第68卷，第1期，第289–300页，2019年。[6] Y. Polyanskiy、H. V. Poor 和 S. Verd´u，“有限码长区间内的信道编码速率”，《IEEE信息论汇刊》，第56卷，第5期，第2307–2359页，2010年。[7] E. Cavus、C. L. Haymes 和 B. Daneshrad，“通过对陷阱集应用重要性抽样估计低密度奇偶校验码的低比特误码率性能”，《IEEE通信汇刊》，第57卷，第7期，第1886–1888页，2009年。[8] S.-K. Ahn、K. Yang 和 D. Har，“利用重要性抽样评估低密度奇偶校验码在瑞利衰落信道上的低误差率性能”，《IEEE通信汇刊》，第61卷，第6期，第2166–2177页，2013年。[9] M. F. Bugallo、V. Elvira、L. Martino、D. Luengo、J. Miguez 和 P. M. Djuric，“自适应重要性抽样：过去、现在与未来”，《IEEE信号处理杂志》，第34卷，79，2017年4，60期，第–页。

[10] H. Niederreiter，《随机数生成与拟蒙特卡罗方法》。工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州，1992年，第63卷。[11] G. Leobacher 和 F. Pillichshammer，《准蒙特卡罗积分与应用导论》。Birkh¨auser/施普林格，尚贝里，2014年。[12] C. Lemieux，《蒙特卡罗与准蒙特卡罗抽样》。施普林格，纽约，2009年。[13] J. A. Bucklew，“条件重要性抽样估计量”，IEEE《信息论汇刊》，第51卷，第1期，第143–153页，2005年。[14] M. Rowland、A. Harutyunyan、H. Hasselt、D. Borsa、T. Schaul、R. Munos 和 W. Dabney，“离策略学习中的条件重要性抽样”，载于《国际人工智能与统计学会议》。PMLR，2020年，第45–55页。[15] M. F. Bugallo、L. Martino 和 J. Corander，“信号处理中的自适应重要性抽样”，《数字信号处理》，第47卷，第36–49页，2015年。[16] O. Capp´e、A. Guillin、J.-M. Marin 和 C. P. Robert，“群体蒙特卡罗”，《计算与图形统计学杂志》，第13卷，第4期，第907–929页，2004年。[17] J.-M. Cornuet、J.-M. Martin、A. Mira 和 C. P. Robert，“自适应多重重要性抽样”，《斯堪的纳维亚统计学杂志》，第39卷，第4期，第798–812页，2012年。[18] L. Martino、V. Elvira、D. Luengo 和 J. Corander，“自适应群体重要性采样器：从不确定性中学习”，IEEE信号处理汇刊，第63卷，第16期，第4422–4437页，2015年。[19] J. Dick、F. Y. Kuo 和 I. H. Sloan，“高维积分：准蒙特卡罗之道”，《数值学报》，第22卷，第133–288页，2013年。[20] J. Xiang 和 X. Wang，“用于美式期权敏感度分析的准蒙特卡罗模拟”，《计算与应用数学杂志》，第413卷，文章编号114268，2022年。[21] C. Zhang、X. Wang 和 Z. He，“计算金融中准蒙特卡罗方法的高效重要性抽样”，《SIAM科学计算杂志》，第43卷，第1期，第B1–B29页，2021年。[22] J. Dick 和 F. Pillichshammer，《数字网与序列》。剑桥大学出版社，剑桥，2010年。[23] I. H. Sloan 和 S. Joe，《多重积分的格方法》。牛津大学出版社，纽约，1994年。[24] L. Kuipers 和 H. Niederreiter，《序列的均匀分布》。Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], 纽约-伦敦-悉尼，1974年。[25] S. Chen、J. Dick 和 A. B. Owen，“连续状态空间上马尔可夫链准蒙特卡罗的一致性”，《统计年鉴》，第39卷，第2期，第673–701页，2011年。[26] J. Dick、D. Rudolf 和 H. Zhu，“一致遍历马尔可夫链准蒙特卡罗的差异界”，《应用概率年鉴》，第26卷，第5期，第3178–3205页，2016年。[27] H. Zhu 和 J. Dick，“维度超过 $N^{-1/2}$ 1时确定性接受-拒绝采样器的差异界”，《统计学与计算》，第27卷，第4期，第901–911页，2017年。[28] J. Dick、D. Rudolf 和 H. Zhu，“准蒙特卡罗重要性抽样的加权差异界”，《统计与概率快报》，第149卷，第100–106页，2019年。[29] Z. He、Z. Zheng 和 X. Wang，“关于随机化准蒙特卡罗重要性抽样的误差率”，Arxiv：2203 03220，2022年。