arXiv:2303.03582v1 [stat.ME] 7 Mar 2023

多模态成像数据复杂依赖关系的统计推断*

Jinyuan Chang[a, b]，Jing He[a]、Jian Kang[c]和Mingcong Wu[a]

[a]数据科学与商业智能联合实验室，西南财经大学，中国成都[b]中国科学院数学与系统科学研究院，中国北京[c]密歇根大学生物统计学系，美国密歇根州安娜堡

摘要

多模态成像数据的统计分析是一项具有挑战性的任务，因为这类数据具有高维性、强空间相关性和复杂的数据结构。本文提出严格的统计检验程序，用于推断多模态成像数据的复杂依赖关系。受人类连接组计划（HCP）研究中多任务功能磁共振成像数据分析的启发，我们重点探讨三个假设检验问题：（a）检验不同脑区之间成像模态的独立性；（b）检验同一成像模态内脑区之间的独立性；（c）检验不同模态间脑区之间的独立性。针对这三种检验的一般形式，我们开发了全局检验程序和一种控制错误发现率的多重检验程序。我们研究了所提检验方法的理论性质，并开发了一种计算高效的分布式算法。所提出的方法和理论具有普适性，可用于许多统计问题，例如检验具有任意依赖结构的高维随机向量各分量之间的独立性结构。我们还通过大量模拟以及对HCP研究中五张任务功能磁共振成像对比图的分析，展示了所提出的方法。

关键词：错误发现率控制、高维推断、独立性检验、多模态神经影像学。

*所有合著者对本文的贡献相同。我们感谢编辑、执行编辑和三位审稿人提出的建设性意见和建议。Chang、He 和 Wu 获得了中国国家自然科学基金委员会的部分资助（项目编号：71991472、72125008、11871401 和 11701466）。Chang 还获得了西南财经大学统计研究中心的资助。Kang 获得了美国国立卫生研究院项目 R01DA048993、R01MH105561、R01GM124061 以及美国国家科学基金会项目 IIS2123777 的部分资助。

1 引言

过去几十年间，神经影像学研究呈指数级增长。近年来，不同神经影像技术取得了进展，例如磁共振成像（MRI）、正电子发射断层成像（PET）和脑电图（EEG）产生了大量多模态成像数据，从不同方面直接或间接地测量脑功能和结构，细致程度前所未有。这为研究人员提供了重要工具，使他们能够更好地了解人脑病理学以及神经精神疾病的病因学（Liu 等，2015）。多模态成像数据的分析颇具挑战，因为这类数据具有高维性、强空间相关性和复杂的数据结构，而且不同模态的数据类型、范围和尺度可能大不相同。

本文旨在对多模态成像数据的复杂依赖关系进行统计推断。我们的研究动机是分析来自人类连接组计划（Van Essen et al. 2012，HCP）的多项任务态功能磁共振成像数据。HCP 的主要目标是了解健康成年人大脑中结构和功能连接的模式。除了收集结构成像数据和静息态功能磁共振成像数据外，HCP 还收集了行为测量，包括认知、感觉和情绪过程方面的测量，以及不同类型的任务态功能磁共振成像数据，以了解认知加工的神经生物学基础中的个体差异与功能连接之间的关系（Barch et al. 2013）。功能磁共振成像任务包括工作记忆任务、语言加工任务和社会认知任务。在多模态任务态功能磁共振成像数据的分析中，我们希望了解不同功能磁共振成像任务的脑激活模式在每个感兴趣脑区内是否相互独立。例如，已有研究表明，额下回与认知控制（Drobyshevsky et al. 2006）、语言加工（Binder et al. 2011）和社会认知（Castelli et al. 2000）有关，但这三类脑活动在额下回内是否彼此依赖仍属未知。另一个有趣的课题是研究每种任务态功能磁共振成像数据中不同脑区之间的脑激活依赖性。研究不同模态下脑区对之间的依赖关系也很有意义

（Xia et al. 2020）。为制定解决这些问题的正式统计推断程序，我们重点分析由任务态功能磁共振成像数据得出的五张统计参数图（Friston et al. 2011）或对比图。不过，我们提出的方法和理论也可用于一般的多模态影像数据分析。

针对多任务功能磁共振成像数据的分析，人们提出了不同的统计方法，例如联合独立成分分析（Calhoun 等，2006）和联合稀疏表示分析（Ramezani 等，2014）。这些方法侧重于估计联合脑激活模式，而非进行检验。针对多模态神经影像数据，也有一些统计检验程序。例如，有研究提出了多模态磁共振成像的体素水平检验程序（Naylor 等，2014），用于定位脑活动，而非检验模态之间的关联。另有研究针对多模态正电子发射断层成像分析提出了同时协方差推断程序（Xia 等，2020）。尽管该方法具有通用性，可用于不同类型的神经影像数据分析，但它仅关注两种模态之间的区域对独立性，无法直接用于回答我们感兴趣的所有科学问题。

具体而言，在成像数据中，对于每个受试者收集了 J 种不同模态的脑图像。令 j ($j = 1, \ldots, J$)表示图像类型的索引。所有图像均配准到同一个标准脑模板上，该模板总共包含 V 个体素。令 $\mathcal{R} = \{1, \ldots, V\}$ 表示全脑模板中体素索引的集合，并以 $v \in \mathcal{R}$ 为体素编索引。全脑 $\mathcal{R}$ 被划分为 G 个预定义的脑区，记为 $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_G$，使得 $\mathcal{R} = \cup_{g=1}^{G} \mathcal{R}_g$ 且对于 $g \neq g'$ 有 $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{R}_{g'} = \emptyset$。不同的成像模态可能侧重于测量不同类型的功能性脑活动，因此同一区域内感兴趣的体素取决于图像类型。令 $Y_j(v)$ 表示图像类型 j 在体素 $v \in \mathcal{R}$ 处的图像信号。对于每个 $g = 1, \ldots, G$，令 $Y_{j,\,g}$ 表示一个由 Y_j 个 v 构成的向量，其中体素 v 为图像类型 j 在区域 $\mathcal{R}_g$ 内感兴趣的体素。假设数据集由 n 个独立受试者组成。我们假设所有图像在不同受试者之间相互独立。在神经影像学研究中，根据具体的研究目标，人们考虑了不同类型的假设检验

问题。特别是，检验不同成像模态在每个脑区内是否独立具有重要意义。原假设可表述为

(a) 对于每个脑区 $g = 1, \ldots\ldots, G$,

$$H_{0,g}^{(a)} : Y_{1,g}, \ldots, Y_{J,g} \text{ are mutually independent}. \tag{1.1}$$

神经影像学研究中另一类备受关注的问题，是检验同一模态内不同脑区之间，或不同模态之间成像测量的独立性。相应的原假设如下。

(b) 对于每对 (g, g')，其中 $g \neq g'$,

$$H_{0,g,g'}^{(b)} : Y_{j,g} \text{ and } Y_{j,g'} \text{ are independent for each modality } j = 1, \ldots, J. \tag{1.2}$$

(c) 对于每对 (g, g')，其中 $g, g' = 1, \ldots\ldots, G$,

$$H_{0,g,g'}^{(c)} : Y_{j,g} \text{ and } Y_{j',g'} \text{ are independent for all modality pairs } j \neq j'. \tag{1.3}$$

正如我们稍后将提到的，假设 (a)–(c) 的检验均可统一表述为检验一个随机向量各分量之间的独立结构；这一结构极为基础，与许多统计问题相关。在大样本量的复杂多模态成像数据应用中，随机向量的维度可能极其庞大。

检验两个随机向量 $X \in \mathbb{R}^{p_x}$ 和 $Y \in \mathbb{R}^{p_y}$ 之间的独立性，可视为以下检验问题的一个特例：(a) 带有 $J = 2$, (b) 带有 $J = 1$ ，以及 (c) 带有 $J = 2$。当 $p_x = p_y = 1$ 时，经典检验旨在检验皮尔逊相关系数（Pearson 1920）、斯皮尔曼秩相关系数（Spearman 1904）、肯德尔秩相关系数（Kendall 1938）、Blum-Kiefer-Rosenblatt 的 R（Blum 等人 1961）以及最大信息系数（Reshef 等人 2011）是否等于零。当 $p_x, p_y > 1$ 时，在正态性假设下，Wilks（1935）提

出了基于样本相关的检验，而 Hotelling（1936）提出了基于典型相关的检验。为摆脱正态性假设，人们提出了一些基于非线性依赖度量的非参数检验，例如距离协方差/相关（Sz´ekely 等人 2007）、Hilbert-Schmidt 独立性准则（Gretton 等人 2008，HSIC）和符号协方差（Bergsma 和 Dassios 2014）。另请参见 Heller 等人（2013）和 Gieser 和 Randles（1997），前者分别介绍了基于样本间成对距离秩和象限统计量的检验；Taskinen 等人（2005）则将肯德尔秩相关系数和斯皮尔曼秩相关系数统计量推广到多变量情形。近期，Shi 等人（2022）提出了一种将距离协方差与中心向外秩与符号（Hallin 等人 2021）相结合的分布无关检验，Deb 和 Sen（2021）则利用最优传输为多变量秩检验建立了一个更一般的框架。另请参见 Berrett 等人（2021），其介绍了基于 U 统计量的置换检验。当 p_x 和 p_y 随样本量 n 增大而发散时，Gao 等人（2021）考虑了基于偏差校正距离相关的检验，Zhu 等人（2020）提出了基于边际样本距离协方差与 HSIC 聚合的检验，而 Chakraborty 和 Zhang（2021）则建议采用基于一些新提出的依赖度量的检验。Zhu 等人（2017）使用平方投影协方差刻画两个任意维数随机向量之间的依赖性；当且仅当这两个随机向量相互独立时，该度量才等于零。

一个更一般且值得关注的问题是检验 k 个随机向量$X^{(1)}$、……、 $X^{(k)}$是否相互独立；这与固定 g时我们的检验问题（a）相同。当 $X^{(1)}$、……、 $X^{(k)}$ 为单变量时，Blum 等人（1961）和 Nagao（1973）的方法可用于 k固定的情形。对于正态分布的（$X^{(1)}$、……、 $X^{(k)}$）$^\top$，Bai 等人（2009）、Ledoit 和 Wolf（2002）以及 Schott（2005）考虑了 $k/n \to c$ 为某个常数 $c > 0$ 的情形；这些方法均旨在检验（$X^{(1)}$、……、 $X^{(k)}$）$^\top$ 的协方差矩阵是否为单位矩阵。Han 等人（2017）研究了两类分布无关检验统计量，它们允许k 在 n中以指数速度发散。Leung 和 Drton（2018）以及 Yao 等人（2018）提出了

分别基于成对秩相关和成对距离协方差的检验。当$X^{(1)}$、.....、 $X^{(k)}$为多变量时，Pfister 等人（2018）和 Jin 和 Matteson（2018）分别提出了基于 k变量 HSIC 和广义距离协方差的检验，其中 k固定。另见 Chakraborty 和 Zhang（2019）提出的基于高阶距离协方差的检验。

针对假设 (a)–(c) 进行全局检验和多重检验都十分重要。然而，目前尚无正式统计推断程序能够通过联合分析复杂多模态成像数据来解决这些问题。我们的研究设定比上述方法所考虑的情形更为复杂。对于分别对应 (a)–(c) 的三个全局原假设 (i) $H_0^{(a),\,g}$对所有 $g = 1$、.....、 G均成立，(ii) $H_0^{(b),\,g,\,g'}$对所有满足 $g \neq g'$的成对指标 (g, g') 均成立，以及 (iii) $H_0^{(c),\,g,\,g'}$对所有满足g, $g' = 1$、.....、 G的成对指标 (g, g') 均成立，上述方法均无法直接应用。尽管其中一些方法可用于计算假设 (a) 中每个 $H_0^{(a),\,g}$ 的 p值，但相关多重检验程序的有效性仍属未知。同时，这些方法均无法处理假设 (b) 和 (c) 的多重检验。为弥补这一不足，我们在本文中提出了严格的统计检验程序。

对于向量 X 和指标集 $\mathcal{S}$，用 $X_{\mathcal{S}}$ 表示 X 的子向量，该子向量包含 X 中由 $\mathcal{S}$ 索引的所有分量。正如我们将在第2.1节中说明的，检验问题 (a)–(c) 均可纳入以下一般形式 $H_{0,\,q}$：对于任意 ($\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$) $\in \mathcal{K}_q$, $X_{\mathcal{S}_1}$ 与 $X_{\mathcal{S}_2}$ 独立，其中 $q = 1, \ldots, Q$，且 $\mathcal{K}_q$ 是由所有我们感兴趣的 ($\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$) 组成的集合，并满足 $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$。对于每个 ($\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$) $\in \mathcal{K}_q$，我们采用 Zhu 等人（2017）提出的平方投影协方差来刻画 $X_{\mathcal{S}_1}$ 与 $X_{\mathcal{S}_2}$之间的成对依赖关系，并提出一种计算高效的方法来估计平方投影协方差，而不采用 Zhu 等人（2017）所考虑的 U 统计量型估计。对于满足 $H_{0,\,q}$ 对所有 $q = 1, \ldots, Q$ 均成立的全局检验问题，我们首先基于平方投影协方差的估计值提出一种 L 统计量型检验统计量，然后用某个正态随机向量的函数的分布来近似其零假设分布；这种方法允许 (i) X 的各分量之间存在任意依赖关系，且 (ii) $d = \sum_{q=1}^{Q} |\mathcal{K}_q|$ 随样本量 n 以指数速度发散。对于

对于旨在识别哪些 $H_{0,\ q}$ 不成立的多重检验问题，我们也将 L 统计量用作每个 $H_{0,\ q}$ 的边际检验统计量。由于这些边际检验统计量不是枢轴量，且它们之间的依赖关系十分复杂，因此要为相应的错误发现率控制程序建立理论保证颇具挑战性。在大多数错误发现率控制研究中，边际检验统计量的极限分布通常有明确形式（例如正态分布、 t 分布、卡方分布），因此很容易得到边际假设的 p 值。然而，在我们的设定下，所提出的边际检验统计量的极限分布通常没有明确形式（甚至可能不存在）。我们需要通过高斯近似技术（Chernozhukov等人 2013, Chang等人 2021）来近似其零假设分布，进而得到相应的 p 值；高斯近似所产生的近似误差在我们对错误发现率控制方法进行理论分析时起着关键作用。为此，我们需要推导这些近似在 $q = 1, \ \ldots, \ Q$ 上的一致非渐近误差界。关于高斯近似技术的一些近期进展，可参见 Deng和 Zhang（2020）、Chernozhukov等人（2022）以及 Lopes（2022）。

我们提出的方法和理论具有多项创新贡献。受神经影像应用的启发，我们提出了一种通用且统一的方法，用于分析超高维随机向量各分量之间的独立性结构。我们的方法为研究多模态成像数据中的复杂依赖结构提供了有力工具。它能够汇总区域对或模态对的局部检验结果，从而构建脑依赖网络。为实现所提出的检验方法，我们开发了一种计算高效的分布式算法，使我们的方法能够扩展至大规模高分辨率成像数据的分析。据我们所知，在错误发现率控制文献中，我们的理论分析首次尝试运用高斯近似技术，基于复杂的检验统计量推导边际假设的 p 值，并为相关的错误发现率控制方法建立理论保证。

本文其余部分安排如下。第2节介绍方法，其中

包括全局检验、错误发现率控制下的多重检验方法，以及用于实现本文所提出方法的分布式算法。第3节研究所提方法在有限样本下的表现。第4节展示对 HCP 数据的分析。第5节通过简短讨论总结全文。所有技术性证明均放在补充材料中。本节末尾，我们介绍全文通用的一些记号。对于任意正整数 N 和 a，记 $[N]:=\{1,\ldots,N\}$ 和 $[N]+a:=\{1+a,\ldots,N+a\}$。记号 $I(\cdot)$ 表示指示函数，1_n 表示所有元素均为 1 的 n 维向量。对于 $v_1\times v_2$ 矩阵 $A=(a_{i,j})_{v_1\times v_2}$，定义 $|A|_\infty=\max_{i\in[v_1],j\in[v_2]}|a_{i,j}|$，并记 $A_{\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2}=(a_{i,j})_{i\in\mathcal{V}_1,j\in\mathcal{V}_2}$，其中 $\mathcal{V}_1\subset[v_1]$ 和 $\mathcal{V}_2\subset[v_2]$。对于 $v\times v$ 矩阵 B，令 $\mathrm{diag}(B)$ 为仅保留 B 主对角线元素的 $v\times v$ 矩阵。对于 k 维向量 $X=(X_1,\ldots,X_k)^\top$ 及指标集 $\mathcal{V}\subset[k]$，令 $X_{\mathcal{V}}$ 为由 $\mathcal{V}$ 所索引分量构成的 X 子向量。对于任意集合 $\mathcal{S}$，令 $|\mathcal{S}|$ 表示其基数。对于两个非零向量 $X,Y\in\mathbb{R}^k$，记 $\angle(X,Y)=\arccos\{X^\top Y/(|X|_2|Y|_2)\}$ 为它们之间的夹角，其中 $|\cdot|_2$ 表示向量的 l_2 范数。若 $X=0$ 或 $Y=0$，则定义 $\angle(X,Y)=0$。对于两个正数序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，若对某个正的常数 c 有 $\limsup_{n\to\infty}a_n/b_n\le c$，则记 $a_n\lesssim b_n$ 或 $b_n\gtrsim a_n$；若 $\lim_{n\to\infty}a_n/b_n=0$，则记 $a_n\ll b_n$ 或 $b_n\gg a_n$。

2 方法

2.1 预备知识

令 $X\sim F$ 为一个一般的 p维随机向量。第 1 节中定义为 (1.1)–(1.3) 的原假设 (a)–(c) 均可表述为以下一般形式:

$$H_{0,q}: X_{\mathcal{S}_1} \text{ is independent of } X_{\mathcal{S}_2} \text{ for any } (\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)\in\mathcal{K}_q\,, \tag{2.1}$$

其中，$q\in[Q]$ 和 $\mathcal{K}_q$ 是由所有我们感兴趣的 $(\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2)$ 组成的集合，且满足 $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2=\emptyset$。这里允许对于不同的 q，$\mathcal{K}_q$ 可能有所不同。

记 $X=(Y_{1,1}^\top,\ldots\ldots,Y_{1,G}^\top,\ldots\ldots,Y_{J,1}^\top,\ldots\ldots,Y_{J,G}^\top)^\top$，其中 $Y_{j,g}$ 已在（1.1）中定义。检验问题（a）中给出的原假设 $H_0^{(a)}{}_{,g}$ 可改写为（2.1），其中 $Q=G$、$q=g$ 以及

$\mathcal{K}_q = \{(\mathcal{S}_{q,1}, \mathcal{S}_{q,-1}) : j \in [J]\}$ 满足 $X_{\mathcal{S}_{q,1}} = Y_{j,g}$、$X_{\mathcal{S}_{q,-1}} = (Y_1^\top, g, \ldots\ldots, Y_{j-1}^\top, g, Y_{j+1}^\top, g, \ldots\ldots, Y_J^\top, g)^\top$以及 $|\mathcal{K}_q| = J$。记 $\mathcal{G}_1 = \{(g, g') : g, g' \in [G], \text{其中 } g < g'\}$ 和 $Q = |\mathcal{G}_1|$。存在一个双射 $\psi_1 : \mathcal{G}_1 \to [Q]$。对于给定的 $(g, g') \in \mathcal{G}_1$，令 $q = \psi_1(g, g')$，则检验问题（b）中给出的相关原假设$H_0^{(b)}$、g、g' 可表述为（2.1），其中 $\mathcal{K}_q = \{(\mathcal{S}_{q,j}, 1, \mathcal{S}_{q,j}, 2) : j \in [J]\}$ 满足 $X_{\mathcal{S}_{q,j,1}} = Y_{j,g}$、$X_{\mathcal{S}_{q,j,2}} = Y_{j,g'}$以及 $|\mathcal{K}_q| = J$。令 $\mathcal{G}_2 = \{(g, g') : g, g' \in [G], \text{其中 } g \le g'\}$和 $Q = |\mathcal{G}_2|$。我们还可以构造一个双射 $\psi_2 : \mathcal{G}_2 \to [Q]$。对于给定的 $(g, g') \in \mathcal{G}_2$，令 $q = \psi_2(g, g')$，则检验问题（c）中给出的相关原假设 $H_0^{(c)}$、g、g' 可表述为（2.1），其中 $\mathcal{K}_q = \{(\mathcal{S}_{q,j}, 1, \mathcal{S}_{q,j'}, 2) : j \ne j'\}$ 满足 $X_{\mathcal{S}_{q,j,1}} = Y_{j,g}$、$X_{\mathcal{S}_{q,j',2}} = Y_{j',g'}$以及 $|\mathcal{K}_q| = J(J-1)I(g \ne g') + 2^{-1}J(J-1)I(g = g')$。

为了刻画两个随机向量 $X_{\mathcal{S}_1}$ 和 $X_{\mathcal{S}_2}$之间的依赖，我们考虑使用平方投影协方差（Zhu 等人，2017），其定义如下

$$\begin{aligned}\mathrm{Pcov}^2(X_{\mathcal{S}_1}, X_{\mathcal{S}_2}) = \int_{|\alpha|_2=1}\int_{|\beta|_2=1}\int_{(u,v)\in\mathbb{R}^2} &\mathrm{cov}^2\{I(\alpha^\top X_{\mathcal{S}_1} \le u), I(\beta^\top X_{\mathcal{S}_2} \le v)\} \\ &\times \mathrm{d}F_{\alpha^\top X_{\mathcal{S}_1}, \beta^\top X_{\mathcal{S}_2}}(u,v)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,, \qquad (2.2)\end{aligned}$$

其中 $F_{\alpha^\top X_{\mathcal{S}_1}, \beta^\top X_{\mathcal{S}_2}}(\cdot, \cdot)$ 是 $(\alpha^\top X_{\mathcal{S}_1}, \beta^\top X_{\mathcal{S}_2})$ 的联合分布函数。如此定义的 $\mathrm{Pcov}^2(X_{\mathcal{S}_1}, X_{\mathcal{S}_2})$ 有两个优点：(i) $\mathrm{Pcov}^2(X_{\mathcal{S}_1}, X_{\mathcal{S}_2}) \ge 0$ 和 $\mathrm{Pcov}^2(X_{\mathcal{S}_1}, X_{\mathcal{S}_2}) = 0$ 当且仅当 $X_{\mathcal{S}_1}$ 与 $X_{\mathcal{S}_2}$相互独立；(ii) $\mathrm{Pcov}^2(X_{\mathcal{S}_1}, X_{\mathcal{S}_2})$ 不要求 $X_{\mathcal{S}_1}$ 和 $X_{\mathcal{S}_2}$ 具有相同的维数，并允许 $X_{\mathcal{S}_1}$ 和 $X_{\mathcal{S}_2}$具有任意维数。第二个优点在高维问题中很有用，因为实际应用中 $X_{\mathcal{S}_1}$ 和 $X_{\mathcal{S}_2}$ 的维数可能相当大。正如 Zhu 等人（2017）所示，定义为 (2.2) 的 $\mathrm{Pcov}^2(X_{\mathcal{S}_1}, X_{\mathcal{S}_2})$ 具有以下显式形式：

$$\begin{aligned}\mathrm{Pcov}^2(X_{\mathcal{S}_1}, X_{\mathcal{S}_2}) = {} & \mathbb{E}\big\{\angle(X_{\mathcal{S}_1}^{(1)} - X_{\mathcal{S}_1}^{(3)}, X_{\mathcal{S}_1}^{(4)} - X_{\mathcal{S}_1}^{(3)}) \cdot \angle(X_{\mathcal{S}_2}^{(1)} - X_{\mathcal{S}_2}^{(3)}, X_{\mathcal{S}_2}^{(4)} - X_{\mathcal{S}_2}^{(3)})\big\} \\ & + \mathbb{E}\big\{\angle(X_{\mathcal{S}_1}^{(1)} - X_{\mathcal{S}_1}^{(3)}, X_{\mathcal{S}_1}^{(4)} - X_{\mathcal{S}_1}^{(3)}) \cdot \angle(X_{\mathcal{S}_2}^{(2)} - X_{\mathcal{S}_2}^{(3)}, X_{\mathcal{S}_2}^{(5)} - X_{\mathcal{S}_2}^{(3)})\big\} \qquad (2.3) \\ & - 2\mathbb{E}\big\{\angle(X_{\mathcal{S}_1}^{(1)} - X_{\mathcal{S}_1}^{(3)}, X_{\mathcal{S}_1}^{(4)} - X_{\mathcal{S}_1}^{(3)}) \cdot \angle(X_{\mathcal{S}_2}^{(2)} - X_{\mathcal{S}_2}^{(3)}, X_{\mathcal{S}_2}^{(4)} - X_{\mathcal{S}_2}^{(3)})\big\}\,,\end{aligned}$$

其中 $(X_{\mathcal{S}_1}^{(1)}, X_{\mathcal{S}_2}^{(1)})$ ..., $(X_{\mathcal{S}_1}^{(5)}, X_{\mathcal{S}_2}^{(5)})$ 是 $(X_{\mathcal{S}_1}, X_{\mathcal{S}_2})$ 的五个独立副本。基于（2.3），对于给定的独立同分布观测值 $\{X_1, \ldots, X_n\} \sim F$，Zhu 等人（2017）

建议通过以下方式估计 Pcov²($X_{\mathcal{S}_1}, X_{\mathcal{S}_2}$)

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\mathrm{Pcov}^2}(X_{\mathcal{S}_1}, X_{\mathcal{S}_2}) \\
&\quad = \frac{1}{n^3} \sum_{i,k,l=1}^{n} \angle(X_{i,\mathcal{S}_1} - X_{k,\mathcal{S}_1}, X_{l,\mathcal{S}_1} - X_{k,\mathcal{S}_1}) \cdot \angle(X_{i,\mathcal{S}_2} - X_{k,\mathcal{S}_2}, X_{l,\mathcal{S}_2} - X_{k,\mathcal{S}_2}) \\
&\qquad + \frac{1}{n^5} \sum_{i,j,k,l,r=1}^{n} \angle(X_{i,\mathcal{S}_1} - X_{k,\mathcal{S}_1}, X_{l,\mathcal{S}_1} - X_{k,\mathcal{S}_1}) \cdot \angle(X_{j,\mathcal{S}_2} - X_{k,\mathcal{S}_2}, X_{r,\mathcal{S}_2} - X_{k,\mathcal{S}_2}) \qquad (2.4) \\
&\qquad - \frac{2}{n^4} \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \angle(X_{i,\mathcal{S}_1} - X_{k,\mathcal{S}_1}, X_{l,\mathcal{S}_1} - X_{k,\mathcal{S}_1}) \cdot \angle(X_{j,\mathcal{S}_2} - X_{k,\mathcal{S}_2}, X_{l,\mathcal{S}_2} - X_{k,\mathcal{S}_2}) .
\end{aligned}
$$

当 $X_{\mathcal{S}_1}$ 和 $X_{\mathcal{S}_2}$ 的维度都相当大时，即使样本量 n适中，计算 U-统计量型估计量（2.4）也需要很高的计算成本和很大的存储空间，因为所有观测值都需要一次性从文件中读取，并保存为一个非常大的矩阵。在我们所研究的HCP任务功能磁共振成像数据中，样本量 $n = 922$以及标准2mm MNI脑模板中的体素数量 $V = 185,405$。在该数据集中，我们有五种不同的fMRI对比图（2back-0back、task-rest、story-math、mental、random）和来自自动解剖学标注（AAL）（Tzourio-Mazoyer等，2002年）的116个预定义脑区。如果我们对（1.1）中给出的前90个脑区和‘story-math’与‘mental’这两种模态的检验问题（a）感兴趣，则对于每个 $q = 1, \ldots, 90$，可将该问题表述为（2.1），其中 $Q = 90$ 和$|\mathcal{K}_q| = 1$。在一台配备两枚Intel(R) Xeon(R) Platinum 8160 CPU、主频为@ 2.10GHz的服务器上，利用全部922个观测值，根据（2.4）计算 $H_{0,\,q}$ 对应的Pcov²（$X_{\mathcal{S}_1}$，$X_{\mathcal{S}_2}$）所需的时间，对于 $q = 1, \ldots, 90$而言，从185.65秒到1768.08秒不等。

为提高计算效率，我们考虑将 n 观测值 $\{X_1, \ldots, X_n\}$划分为若干个滑动子组，并在这些子组内计算相应的平方投影协方差。令 $B \geq 5$ 表示每个子组的长度，并记 $M = n - B + 1$。对于任意 $m \in [M]$，令 $\mathcal{B}_m = \{X_m, \ldots, X_{m+B-1}\}$ 为第 m个滑动子组。给定 $q \in [Q]$ 和（$\mathcal{S}_1$，$\mathcal{S}_2$）$\in \mathcal{K}_q$，我们以与式（2.4）相同的方式，根据 $\mathcal{B}_m$ 估计 Pcov²（$X_{\mathcal{S}_1}$，$X_{\mathcal{S}_2}$），但将 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ 替换为 $\mathcal{B}_m$，并将相应的估计记为$U_{m,\,q,\,\mathcal{S}_1,\,\mathcal{S}_2}$。汇总

所有滑动子组中的估计值后，我们最终通过以下方式估计 Pcov^2（$X_{\mathcal{S}_1}$， $X_{\mathcal{S}_2}$）：

$$\bar{U}_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} U_{m,q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2} \tag{2.5}$$

对于任意 $q \in [Q]$ 以及（$\mathcal{S}_1$、$\mathcal{S}_2$）$\in \mathcal{K}_q$。这样一来，我们每次只需读取 $\mathcal{B}_m$ 的 B 个观测值，即可计算 $U_{m、q、\mathcal{S}_1、\mathcal{S}_2}$，从而大幅降低计算成本。该方法在使用全部922个观测值时的计算时间介于2.72秒和33.30秒之间，适用于 $q = 1$、.....、90，相较于 Zhu 等人（2017）的方法可节省98%的计算成本。正如我们将在后文第 2.4 节中讨论的那样，我们的方法便于针对（2.5）开发分布式算法，以进一步提高计算效率。这是我们所提出方法的另一项优势。我们的理论分析允许 B 固定且B发散。大量数值研究表明，即使我们选择 $B = 5$，该方法仍然表现良好。

¯我们在（2.5）中提出的估计量$U_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$ 在解决假设检验问题（2.1）时还有另一项便利之处。对于（2.4）中给出的 U-统计量型估计量 Pcov^2($X_{\mathcal{S}_1}, X_{\mathcal{S}_2}$)，Zhu⁀等人（2017）证明，在原假设 n下，Pcov^2($X_{\mathcal{S}_1}$,$X_{\mathcal{S}_2}$)依分布收敛于独立卡方分布的加权无穷和。若基于 {Pcov^2($X_{\mathcal{S}_1}, X_{\mathcal{S}_2}$) }$_{(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)\in\mathcal{K}_q}$构造用于检验（2.1）中指定的原假设$H_{0,q}$的检验统计量，将会遇到两个障碍。首先，若 $|\mathcal{K}_q| > 1$，刻画不同⁀Pcov^2($X_{\mathcal{S}_1}, X_{\mathcal{S}_2}$)之间的依赖关系极其困难（甚至不可能），因为它们的极限分布过于复杂。其次，基于 Pcov^2($X_{\mathcal{S}_1}, X_{\mathcal{S}_2}$)进行推断通常需要采用随机置换方法，计算成本极高。注意到，对于任意 $q \in [Q]$ 以及($\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$) $\in \mathcal{K}_q$，$U_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$ 与 Pcov^2($X_{\mathcal{S}_1}, X_{\mathcal{S}_2}$)相合。因此，max$_{(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)\in\mathcal{K}_q}$ $\sqrt{M}\bar{U}_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}/\hat{}\sigma_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$为检验（2.1）中指定的原假设$H_{0,q}$ 提供了一个自然的检验统计量，其中$\hat{}\sigma_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$ 是$\sqrt{M}\bar{U}_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$标准差的估计。由于对于任意($\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$) $\in \mathcal{K}_q$，$\sqrt{M}\bar{U}_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}/\hat{}\sigma_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2} \to_d \mathcal{N}(0, 1)$，利用高斯近似技术可知，max$_{(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)\in\mathcal{K}_q}$ $\sqrt{M}\bar{U}_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}/\hat{}\sigma_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$ 的零假设分布始终可以用一个 $|\mathcal{K}_q|$维零均值正态分布随机向量中最大分量的分布来近似。因此，

¯基于$\{U_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}\}_{(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)\in\mathcal{K}_q}$的检验统计量的推断可以轻松且高效地实现。详情参见第2.2–2.4节。

2.2 全局检验程序

In t本节首先考虑如何检验以下全局原假设:

$$H_0 : H_{0,q} \text{ given in (2.1) holds for all } q \in [Q]\,. \tag{2.6}$$

由于 $\mathbb{E}(\bar{U}_{q,\ \mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}) = \mathrm{Pcov}^2(X_{\mathcal{S}_1},\ X_{\mathcal{S}_2})$，较大的$\bar{U}_{q,\ \mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}$表明有证据反对边际原假设，即对于给定的 $(\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2) \in \mathcal{K}_q$，$X_{\mathcal{S}_1}$ 与 $X_{\mathcal{S}_2}$ 相互独立。记 $\sigma_{q,\ \mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}$ 为 $\sqrt{M}\bar{U}_{q,\ \mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}$ 的标准差，并令 $\hat{}\sigma_{q,\ \mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2}$ 为其相合估计，具体形式见下文（2.10）。于是定义标准化统计量

$$T_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2} = \frac{\sqrt{M}\bar{U}_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}}{\hat{\sigma}_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}} \tag{2.7}$$

对于任意 $q \in [Q]$ 和 $(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2) \in \mathcal{K}_q$。为检验全局原假设（2.6），我们利用 $\{T_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}\}_{q\in[Q],(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)\in\mathcal{K}_q}$ 中最大的 L 个值的信息来计算全局检验统计量。具体而言，对于每个 $q \in [Q]$，我们首先将 $\{T_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}\}_{(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)\in\mathcal{K}_q}$ 堆叠成一个 $|\mathcal{K}_q|$ 维向量 $T_{(q)n} = (T_{(q)\,n,1},\ldots,T_{(q)\,n,|\mathcal{K}_q|})^\top$。随后得到一个 d 维向量 $T_n = (T_{n,1},\ldots,T_{n,d})^\top = (T^{(1)}_{,n}{}^\top,\ldots,T_{(Q)n}{}^\top)^\top$，其中 $d = \sum_{q=1}^{Q}|\mathcal{K}_q|$。给定一个预先确定的整数 L，用于检验（2.6）的全局检验统计量定义为

$$W_{n,L} = \max_{1\le j_1<\cdots<j_L\le d}\sum_{s=1}^{L} T_{n,j_s}\,, \tag{2.8}$$

这是一个 L-统计量。Zhang (2015) 和 Fan等人 (2018) 也曾使用这类将若干个最大信号结合起来的统计量来解决其他问题。根据 $W_{n,\ L}$，若满足以下条件，我们将在显著性水平 $\alpha \in (0,1)$ 下正式拒绝式 (2.6) 中的全局原假设 H_0

$$W_{n,L} > \mathrm{cv}_{L,\alpha}\,, \tag{2.9}$$

其中，$\mathrm{cv}_{L,\ \alpha}$ 是满足 $\mathbb{P}_{H_0}(W_{n,\ L} > \mathrm{cv}_{L,\ \alpha}) \to \alpha$ 当 $n \to \infty$ 时的临界值。

为确定 $\mathrm{cv}_{L,\alpha}$，我们需要研究 $W_{n,L}$ 的零假设分布。当 $L = 1$,

$W_{n,1} = \max_{j\in[d]} T_{n,j}$ 是最大型检验统计量。由于在 H_0 下，每个 $T_{n,j} \to_d \mathcal{N}$ 均服从 $(0,1)$，我们可以考虑用某种极值分布来近似 $W_{n,1}$ 的零假设分布。然而，这种近似高度依赖于 $T_n = (T_{n,1}, \ldots, T_{n,d})^\top$ 的渐近协方差矩阵所满足的结构假设，而这些假设限制性很强，在实践中也难以验证。另一方面，即使这种近似有效，其收敛速度通常也较慢，往往会导致检验水平失真。以 I 型极值分布为例，其收敛速度仅为 $O\{\log(\log n)/\log n\}$ 阶。与 $W_{n,1}$ 相比，$W_{n,L}$ 搭配 $L > 1$ 能汇集更多信息，从而在备择假设下增强检验效能。

据我们所知，文献中很少研究 $W_{n,L}$ 在 $L > 1$ 和 $d \gg n$ 条件下的零假设分布。注意，(2.7) 中的 $U_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$ 是相关序列 $\{U_{m,q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}\}_{m=1}^M$ 的平均值。推导 $W_{n,L}$ 的零假设分布颇具挑战。本文提出一种新颖的方法，用于近似 $W_{n,L}$ 在一般 $L \geq 1$ 下的零假设分布，其中 $L \geq 1$ 可随 n 发散。我们的方法无需对 T_n 的渐近协方差矩阵施加任何结构假设，并允许 T_n 的各分量之间存在任意依赖关系。

对于每个 $m \in [M]$，我们将 $\{U_{m,q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}\}_{q\in[Q],(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)\in\mathcal{K}_q}$ 堆叠成一个 d 维向量，记作 $U_m = (U_{m,1}, \ldots, U_{m,d})^\top$，其顺序与 $T_n = (T_{n,1}, \ldots, T_{n,d})^\top$ 相同。记 $\Sigma_n = \mathrm{Cov}(\sqrt{M}\bar{U})$，其中 $\bar{U} = M^{-1}\sum_{m=1}^M U_m$。那么，$\{\sigma^2_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}\}_{q\in[Q],(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)\in\mathcal{K}_q}$ 是 Σ_n 主对角线上的 d 个元素。令 $R_n = D_n^{-1/2}\Sigma_n D_n^{-1/2}$，其中 $D_n = \mathrm{diag}(\Sigma_n)$。对于一个 d 维向量 $Z = (Z_1, \ldots, Z_d)^\top$，我们按降序排列其分量，得到 $Z_{(1)} \geq \cdots \geq Z_{(d)}$，并定义函数

$$f_L(Z) = \sum_{j=1}^{L} Z_{(j)}\,.$$

于是 $W_{n,\,L} = f_L(T_n)$。命题1(i)表明，式 (2.9) 中的临界值 $\mathrm{cv}_{L,\,\alpha}$ 可以选择为 $f_L(\xi)$ 分布的 $(1-\alpha)$-分位数，其中 $\xi \sim \mathcal{N}(0,\ R_n)$。

在实践中，我们需要估计 R_n。由于 $\{U_m\}_{m=1}^M$ 是一个 d 维（$B-1$）相关

过程，因此 $\Sigma_n = M^{-1}\sum_{|m_1-m_2|<B}\mathrm{Cov}(U_{m_1}, U_{m_2})$，这表明

$$\hat{\Sigma}_n = \sum_{j=-B+1}^{B-1} \hat{H}_j\,, \tag{2.10}$$

其中，$\hat{H}_j = M^{-1}\sum_{m=j+1}^{M}(U_m - \bar{U})(U_{m-j} - \bar{U})^\top$ 用于 $j \geq 0$，$\hat{H}_j = M^{-1}\sum_{m=-j+1}^{M}(U_{m+j} - \bar{U})(U_m - \bar{U})^\top$ 用于 $j < 0$，可提供 Σ_n 的估计。令 $D_n = \mathrm{diag}(\Sigma_n)$，由此可得到 $\{\sigma^2_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}\}_{q\in[Q],\ (\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)\in\mathcal{K}_q}$ 的估计。记 $\hat{R}_n = \hat{D}_n^{-1/2}\hat{\Sigma}_n\hat{D}_n^{-1/2}$ 以及 $\hat{F}(t) = \mathbb{P}\{f_L(\hat{\xi}) \leq t \,|\, X_1, \ldots\ldots, X_n\}$，其中 $\hat{\xi}\,|\,X_1, \ldots\ldots, X_n \sim \mathcal{N}(0, \hat{R}_n)$。命题1(ii)表明，$\mathrm{cv}_{L,\alpha}$ 可近似为

$$\hat{\mathrm{cv}}_{L,\alpha} = \inf\left\{t \in \mathbb{R} : \hat{F}(t) \geq 1-\alpha\right\},$$

给定 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ 时，$f_L(\xi)$ 的条件分布的 $(1-\alpha)$ 分位数。实际操作中，我们可以从 $\mathcal{N}(0, \hat{R}_n)$ 中独立抽取 d 维随机向量 $\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N$，其中 $\hat{N}$ 是某个较大的整数，并使用 $f_L(\xi_1)\ldots, f_L(\xi_N)$ 中第 $\lfloor N\alpha \rfloor$ 大的值来近似 $\hat{\mathrm{cv}}_{L,\alpha}$。这种检验方法有若干优点：(i) 它适用于 $d \gg n$ 的情形；(ii) 它允许 Σ_n 具有任意依赖结构；(iii) 它的实现相当简单，只需生成若干个 d 维正态随机向量。记 $\mathcal{F} = \{v = (v_1, \ldots, v_d)^\top$：对于每个 $j \in [d]$，以及 $|v|_0 = L\}$ 和 $D_n = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_d^2)$。

命题*1.* 假设存在一个普适常数 $c_1 > 0$，使得 $\min_{k\in[d]}\sigma_k^2 \geq c_1$ *and* $\min_{v\in\mathcal{F}} v^\top R_n v \geq c_1$。令 $\xi \sim \mathcal{N}(0, R_n)$ *and* $\hat{\xi} \sim \mathcal{N}(0, \hat{R}_n)$。在式 *(2.6)* 中给出的全局原假设 H_0 下，我们有：*(i)* $\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(W_{n,L} > z) - \mathbb{P}\{f_L(\xi) > z\}| = o(1)$，条件是 $B^4L^{13}(\log d)^7 = o(n)$ *and* $B^4L^{-2}(\log B)^3(\log d)^{-2} = o(n)$；*(ii)* $\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(W_{n,L} > z) - \mathbb{P}\{f_L(\hat{\xi}) > z \,|\, X_1, \ldots, X_n\}| = o_{\mathrm{p}}(1)$，条件是 $B^4L^{13}(\log d)^7 = o(n)$ *and* $B^5L^8(\log d)^4\log(dB) = o(n)$。

条件 $\min_{k\in[d]}\sigma_k^2 \geq c_1$ 和 $\min_{v\in\mathcal{F}} v^\top R_n v \geq c_1$ 要求序列 $\{U_{m,k}\}_{m=1}^M$ 和 $\{v^\top U_m\}_{m=1}^M$ 的长期方差在 $k \in [d]$ 和 $v \in \mathcal{F}$ 上一致地有正下界。这在实践中是较弱的条件；当我们应用纳扎罗夫不等式来界定正态向量取值落在小区域内的概率时，将会用到这些条件。当我们选择

B（即每个子组的长度）为固定常数时，只要 $L^{13}(\log d)^7 = o(n)$，命题1便成立。这要求 L-统计量W_n中涉及的预先确定整数 L 满足 $L = o(n^{1/13})$，其中L 定义为 (2.8)。此外，若也将 L 选为固定常数，只要 $\log d = o(n^{1/7})$，命题 1 便成立，这允许 $d = \sum_{q=1}^{Q} |\mathcal{K}_q|$ 随样本量 n 指数增长。由命题1(i)，为证明命题1(ii)，只需证明 $\hat{\delta}_n := \sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}\{f_L(\xi) > z\} - \mathbb{P}\{f_L(\xi) > z \,|\, X_1, \ldots, X_n\}| = o_{\mathrm{p}}(1)$。如补充材料中的 (S.15) 所示，$\delta_n \lesssim \Delta_n^{1/3}\{1 \vee \log(d^L/\Delta_n)\}^{2/3}$，其中 $\Delta_n = \max_{v_1, v_2 \in \mathcal{F}} |v_1^\top (R_n - \hat{R}_n) v_2|$。由于 $\Delta_n \le L^2 |\hat{R}_n - R_n|_\infty$，只要 $|\hat{R}_n - R_n|_\infty = o_{\mathrm{p}}\{L^{-4}(\log d)^{-2}\}$，便有 $\delta_n = o_{\mathrm{p}}(1)$。对于我们建议的、在 (2.10) 下方指定的 R_n，只要 $B^5 L^8 (\log d)^4 \log(dB) = o(n)$，这一要求便能轻易满足，且无需对 R_n施加任何结构假设；这对任意 d 维相关矩阵 R_n 都成立。高斯近似的这一优势也见于 Chernozhukov等（2013）、Chang等（2017）和 Chang等（2021）等研究。接下来的定理将阐述所提出的全局检验的理论保证。

定理1. 在命题1的条件下，若 $B^4 L^{13}(\text{对数}\, d)^7 = o(n)$ 且 $B^5 L^8 (\text{对数}\, d)^4\, \text{对数}(dB) = o(n)$，则 $\mathbb{P}_{H_0}(W_{n,L} > \hat{\mathrm{cv}}_{L,\alpha}) \to \alpha$ 当 $n \to \infty$ 时成立。

定理1表明，所提出的全局检验具有正确的尺寸控制。定理1中对 (B, L, d, n) 的限制与命题1(ii)中的限制相同。若我们将 B和L 选为固定常数，则只要 $\log d = o(n^{1/7})$，所提出的全局检验便有效。记$\mathbb{E}(U_m) = (\mu_1, \ldots, \mu_d)^\top$。定理2表明，所提出的全局检验在某些局部备择下是一致检验。

定理 *2.* 令 $\rho = \max_{v\in\mathcal{F}} v^\top R_n v$ *and* $\lambda(|\mathcal{F}|, \alpha) = (2 \log |\mathcal{F}|)^{1/2} + \{2 \log(1/\alpha)\}^{1/2}$。在命题*1*的条件下，若在备择假设 H_1 下，$\max_{1\le j_1 < \cdots < j_L \le d} \sum_{l=1}^{L} \sigma_{j_l}^{-1} \mu_{j_l} \ge \rho^{1/2}(1 + \epsilon_n) n^{-1/2} \lambda(|\mathcal{F}|, \alpha)$，且 $\epsilon_n > 0$ 满足 $(\log |\mathcal{F}|)^{-1/2} \ll \epsilon_n \ll 1$，则当 $n \to \infty$时，$\mathbb{P}_{H_1}(W_{n,L} > \hat{c}v_{L,\alpha}) \to 1$，前提是 $B^5 L^4 \log(dB)(\log |\mathcal{F}|)^2 = o(n)$ 且 $B^3 L^2 \{\log(dB)\}^2 \log |\mathcal{F}| = o(n)$。

回顾一下， $d=\sum_{q=1}^{Q}|\mathcal{K}_q|$ 和 U_m,1, . . . ,$U_{m,d}$（ U_m 的 d 个分量）是集合 $\{U_{m,q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$ 中 d 个元素的一个排列： $q\in[Q]$, $(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)\in\mathcal{K}_q\}$。对于任意 $j\in[d]$，存在 $q'\in[Q]$，且 $(\mathcal{S}_1',\mathcal{S}_2')\in\mathcal{K}_{q'}$，使得 $\mu_j=\mathbb{E}(U_{m,q',\mathcal{S}_1',\mathcal{S}_2'})=\mathrm{Pcov}^2(X_{\mathcal{S}_1'},X_{\mathcal{S}_2'})$。因此，式 (2.6) 中的全局原假设$H_0$ 等价于 $\mathbb{E}(U_m)=(\mu_1,\ldots,\mu_d)^\top=0$；而式 (2.8) 中给出的检验统计量 $W_{n,L}$，则基于观测数据 $U_1,\ldots,U_M$，检验这种等价关系是否成立。这实质上将原始假设检验问题表述为一个 d维均值向量检验问题。条件 $\max_{1\le j_1<\cdots<j_L\le d}\sum_{l=1}^{L}\sigma_{j_l}^{-1}\mu_{j_l}\ge\rho^{1/2}(1+\epsilon_n)n^{-1/2}\lambda(|\mathcal{F}|,\alpha)$ 对均值向量 $(\mu_1,\ldots,\mu_d)^\top$ 施加了限制；在此条件下，所提出的全局检验的检验效能趋于 1。回顾 $\mathcal{F}=\{v=(v_1,\ldots,v_d)^\top$：对于每个 $j\in[d]$， $v_j\in\{0,1\}$，且 $|v|_0=L\}$。当 L 固定时，下界 $\rho^{1/2}(1+\epsilon_n)n^{-1/2}\lambda(|\mathcal{F}|,\alpha)$ 的阶为 $n^{-1/2}(\log d)^{1/2}$，这是针对 d 维均值向量的任意检验的极小极大最优分离率（Cai 等，2014）。在这种情况下，我们的检验具有极小极大最优性质。由于 $|\mathcal{F}|=\binom{d}{L}\le d^L$，$B^5L^6\log(dB)(\log d)^2=o(n)$ 为定理 2 中关于 (B,L,d,n) 的限制提供了一个充分条件。若我们将 B（每个子组的长度）选为固定常数，则当 $L^6(\log d)^3=o(n)$ 时，定理 2 成立；这要求预先确定的整数 L（涉及 L-统计量 $W_{n,L}$）满足 $L=o(n^{1/6})$。此外，若 L 也选为固定常数，则只要 $\log d=o(n^{1/3})$，定理 2 即成立，这允许 d 随样本量 n 指数增长。结合定理 1 下方的讨论，我们得出结论：当 $\log d=o(n^{1/7})$ 时，所提出的全局检验在 B 和 L 固定的情况下，能够将第一类错误控制在预设的显著性水平，并且在某些局部备择下检验效能趋于 1。

2.3 一种错误发现率控制的多重检验方法

第2.2节考察所有在（2.1）中给出的 $H_{0,1},\ldots,H_{0,Q}$ 是否同时成立的全局检验。当全局原假设 H_0 被拒绝时，我们希望确定哪些 $H_{0,q}$不成立。注意，在（2.7）中定义的 $T_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$ 为边际原假设 $H_{0,q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$ 提供了一个有效的检验统计量：给定（$\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2$）$\in\mathcal{K}_q$时， $X_{\mathcal{S}_1}$ 与 $X_{\mathcal{S}_2}$ 独立。对于

$T_{(q)n} = (T_{(q)n,1}, \ldots, T_{(q)n,|\mathcal{K}_q|})^\top$ 在下文（2.7）中定义，我们可以将其表述如下:

$$T_n^{(q)} = \sqrt{M}\{\hat{D}_n^{(q)}\}^{-1/2}\bar{U}^{(q)},$$

其中，$\bar{U}_{(q)} = M^{-1}\sum_{m=1}^{M} U_{(q)m}$，$U_{(q)m}$和 $\hat{D}_n^{(q)}$分别是 U_m的子向量以及$\hat{}$ D_n 的子矩阵，其中包含与$\{T_{q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}\}_{(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)\in\mathcal{K}_q}$相关的相应分量。令 $\Sigma_n^{(q)}$ =Cov($\sqrt{M}\bar{U}^{(q)}$)，并以与式（2.10）中给出的$\hat{}$ Σ_n相同的方式定义其估计量$\hat{}\Sigma_n^{(q)}$，但将 $\{U_m\}_{m=1}^M$ 替换为 $\{U_m^{(q)}\}_{m=1}^M$。$H_{0,q}$ 的检验统计量可选为

$$W_{n,L}^{(q)} = \max_{1\le j_1<\cdots<j_L\le|\mathcal{K}_q|}\sum_{s=1}^{L} T_{n,j_s}^{(q)}. \tag{2.11}$$

若 $|\mathcal{K}_q| = 1$，我们只能选择 $L = 1$。那么 $W_{n\,L}^{(q)}$,也可以表示为 $W_n^{(q)}{}_{,L} = f_L(T_{(q)n})$，其中$f_L(\cdot)$定义于第2.2节。当 $W_{n\,L}^{(q)}$,取较大值时，我们拒绝$H_{0,q}$。

令 $\mathcal{H}_0$ 为所有真实原假设的集合 $H_{0,\,q}$ 其中 $Q_0 = |\mathcal{H}_0|$。对于每个 $q \in [Q]$，从 $\mathcal{N}(0,\ \hat{}$ $R_n^{(q)})$ 中独立生成 $\hat{}\xi_1^{(q)}$，…，$\hat{}\xi_N^{(q)}$，其中 $\hat{}R_n^{(q)} = \{\hat{}D_n^{(q)}\}^{-1/2}\hat{}\Sigma_n^{(q)}\{\hat{}D_n^{(q)}\}^{-1/2}$。与命题1相同，我们也可以证明

$$\max_{q\in\mathcal{H}_0}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\{W_{n,L}^{(q)} > z\} - \mathbb{P}\{f_L(\hat{\xi}^{(q)}) > z \,|\, X_1,\ldots,X_n\}\right| = o_{\mathrm{p}}(1). \tag{2.12}$$

那么，第 q 个假设检验的 p值 $H_{0,\,q}$为 $\mathrm{pv}_L^{(q)} = \mathbb{P}\{f_L(\hat{}\xi^{(q)}) \ge W_{(q)n,\ L} \,|\, X_1,\ \ldots,\ X_n\}$其中 $\hat{}$ $\xi^{(q)} \sim \mathcal{N}(0,\ \hat{}R_n^{(q)})$，其正态分位数变换形式为 $V_{(q)n,\ L} = \Phi^{-1}(1-\mathrm{pv}_L^{(q)})$。在实际应用中，$\mathrm{pv}_L^{(q)}$可以近似为 $\hat{}\mathrm{pv}_L^{(q)} = N^{-1}\sum_{j=1}^{N} I\{f_L(\hat{}\xi_j^{(q)}) \ge W_{(q)n,\ L}\}$其中 N 为某个较大的整数。对于任意 $t \in \mathbb{R}$，错误发现比例（FDP）定义为

$$\mathrm{FDP}(t) = \frac{\sum_{q\in\mathcal{H}_0} I\{V_{n,L}^{(q)} \ge t\}}{1 \vee \sum_{q=1}^{Q} I\{V_{n,L}^{(q)} \ge t\}}$$

且错误发现率 (FDR)定义为 FDR(t) $= \mathbb{E}\{$错误发现比例(t)$\}$。

给定预先规定的水平 $\alpha \in (0,\ 1)$，这里的关键目标是找到使 FDR($\hat{}t$) $\le \alpha$ 成立的最小 $\hat{}$ t。为此，我们首先考虑 FDP(t)。由于真实原假设集合 $\mathcal{H}_0$ 未知，我们需要估计 FDP(t) 的分子。根据（2.12），有 $\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)} \ge t\} =$

$1-\Phi(t)+o(1)$ 对任意 $q\in\mathcal{H}_0$ 均成立。FDP(t) 的理想估计量可以选择为

$$\widetilde{\mathrm{FDP}}(t)=\frac{Q_0\{1-\Phi(t)\}}{1\vee\sum_{q=1}^{Q}I\{V_{n,L}^{(q)}\geq t\}}.$$

由于未知 Q_0，实际中无法计算错误发现比例(t)，我们只能通过一种更保守的方式估计错误发现比例(t)：

$$\widehat{\mathrm{FDP}}(t)=\frac{Q\{1-\Phi(t)\}}{1\vee\sum_{q=1}^{Q}I\{V_{n,L}^{(q)}\geq t\}}. \tag{2.13}$$

对于给定的 $\alpha\in(0,1)$，我们选择

$$\hat{t}=\inf\left\{0<t\leq(2\log Q-2\log\log Q)^{1/2}:\widehat{\mathrm{FDP}}(t)\leq\alpha\right\}. \tag{2.14}$$

若在 (2.14) 中定义的 $\hat{t}$ 不存在，则令 $\hat{t}=(2\log Q)^{1/2}$。然后我们拒绝所有$H_{0,q}$'s，使得 $V_{(q)\,n,L}\geq\hat{t}$.

检验统计量 $\{W_{n,L}^{(q)}\}_{q\in[Q]}$ 之间的依赖关系，在分析所提出的多重检验程序的理论性质时起着关键作用。由于 $W_{n\,L}^{(q)}$ 的极限分布不是枢轴分布，且没有显式形式，因此刻画 $\{W_{n,L}^{(q)}\}_{q\in[Q]}$之间的依赖关系并非易事。记 $F_q(\cdot)$为 $W_{(q)\,n,L}$的分布函数。注意，$\eta^{(q)}=\Phi^{-1}\{F_q(W_{n\,L}^{(q)},)\}$ 服从标准正态分布。我们可以通过 $W_{(q)\,n,L}$与 $W^{(q')}{}_{n,L}$之间经变换后 $\eta^{(q)}$和 $\eta^{(q')}$的相关性来衡量它们之间的依赖关系；后者对我们的理论分析至关重要。显然，$W_{n\,L}^{(q)}$与 $W^{(q')}{}_{n,L}$之间的独立性等价于 $\mathrm{Corr}\{\eta^{(q)},\eta^{(q')}\}=0$。定义集合

$$\mathcal{A}_q(\gamma)=\left\{q'\in[Q]:q'\neq q,|\mathrm{Corr}\{\eta^{(q)},\eta^{(q')}\}|\geq(\log Q)^{-2-\gamma}\right\}$$

对于 $\gamma>0$和 $q\in[Q]$。对于第 q 个检验统计量 $W_{(q)\,n,L}$，我们可以将其余 $Q-1$个检验统计量 $\{W_{n}^{(q')},_{L}\}_{q'\in[Q]\setminus\{q\}}$ 分为两部分：(i) 不属于 $\mathcal{A}_q(\gamma)$ 的检验统计量与 $W_{(q)\,n,L}$ 的依赖性很弱；(ii) 属于 $\mathcal{A}_q(\gamma)$ 的检验统计量与 $W_{n\,L,}^{(q)}$ 的依赖性相对较强。为了构建所提出的多重检验程序的理论保证，通常会采用不同的技术工具分别分析这两部分。另请参阅 Liu (2013),

Chang 等（2016）和 Xia 等（2020）。下一个定理表明，我们的多重检验程序渐近地能够将错误发现率和错误发现比例都控制在 $\alpha Q_0/Q$ 水平。

定理 *3.* 令命题*1*中的条件成立。假设 $\max_{1\le q\neq q'\le Q}|\mathrm{Corr}\{\eta^{(q)},\eta^{(q')}\}|\le r$ 对某个常数 $r\in(0,1)$ 成立，并且 $\max_{q\in[Q]}|\mathcal{A}_q(\gamma)|=o(Q^{\nu})$ 对某些常数 $\gamma>0$ 和 $0<\nu<(1-r)/(1+r)$ 成立。如果 $Q^{12}B^5L^4$ 对数 $(nBK_{\max})\max\{(L$ 对数 $K_{\max})^4,($ 对数 $n)^4\}=o(n)$ 以及 $Q^{12}B^4L^{13}($ 对数 $K_{\max})^7=o(n)$，其中 $K_{\max}=\max_{q\in\mathcal{H}_0}|\mathcal{K}_q|$，则对于任意 $\varepsilon>0$，$\limsup_{n,Q\to\infty}$ 错误发现率$(\hat{t})\le\alpha Q_0/Q$，且 $\lim_{n,Q\to\infty}\mathbb{P}\{$错误发现比例$(\hat{t})\le\alpha Q_0/Q+\varepsilon\}=1$。

关于 $\mathrm{Corr}\{\eta^{(q)},\eta^{(q')}\}$ 和 $\mathcal{A}_q(\gamma)$ 的条件在文献中很常见，用于界定出现在 FDP(t) 分子中的 $\sum_{q\in\mathcal{H}_0}I\{V_{n,L}^{(q)}\ge t\}$ 的方差。例如，参见 Liu (2013)、Chang 等（2016）和 Xia 等（2020）。具体而言，条件 $\max_{1\le q\neq q'\le Q}|\mathrm{Corr}\{\eta^{(q)},\eta^{(q')}\}|\le r$，其中某个常数 $r\in(0,1)$，对不同 $\eta^{(q)}$ 和 $\eta^{(q')}$ 之间相关性的大小施加了限制。条件 $\max_{q\in[Q]}|\mathcal{A}_q(\gamma)|=o(Q^{\nu})$ 控制高度相关的配对数量 $\{\eta^{(q)},\eta^{(q')}\}$。回顾一下，$B$ 和 L 分别是每个子组的长度，以及涉及 L-统计量$W_{n,L}^{(q)}$ 的预先设定整数，该统计量定义见式（2.11）。当 B 和 L 选为固定常数时，若$Q^{12}(\log K_{\max})^7=o(n)$ 且 $Q^{12}\log(nK_{\max})\max\{(\log K_{\max})^4,(\log n)^4\}=o(n)$，则定理 3 成立。在实践中，若满足温和条件 $K_{\max}\lesssim n^{\kappa}$（其中常数 $\kappa>0$ 足够大），则这些限制可简化为 $Q^{12}(\log n)^7=o(n)$，这要求多重检验的数量 Q 满足$Q=o\{n^{1/12}(\log n)^{-7/12}\}$。

2.4 分布式算法

生成多元正态随机向量是实现我们所提出检验的关键步骤。例如，在全局检验 (2.6) 中，我们需要独立地生成 ξ_1、……、ξ_N，使其服从 $\mathcal{N}(0,\hat{R}_n)$，以确定临界值 $\hat{\mathrm{cv}}_{L,\alpha}$，其中 $\hat{R}_n$ 是一个具有 $d=\sum_{q=1}^{Q}|\mathcal{K}_q|$ 的 $d\times d$ 矩阵。生成一个 s 维随机向量 $\zeta\sim\mathcal{N}(0,\Xi)$ 的标准方法包括三个步骤：(i) 对 $s\times s$ 矩阵 $\Xi=A^{\top}A$ 进行乔列斯基分解；(ii) 生成 s 个相互独立的 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机变量 $z=(z_1$、……、$z_s)^{\top}$；(iii) 进行变换 $\zeta=A^{\top}z$。

从计算角度来看，这是一个 s^3-难问题。实际中， Q 和 $|\mathcal{K}_q|$ 可能很大，因此生成服从 $\mathcal{N}(0, \hat{R}_n)$ 的 d 维随机向量需要付出极高的计算成本。为克服这一挑战并进一步提高所提方法的计算效率，本节提出一种分布式算法，避免直接生成高维正态分布随机向量。

我们以全局检验（2.6）为例来说明我们的思路。首先，我们将完整数据集划分为 K 个区块，其中第 k 个区块 $\mathcal{I}_k$ 包含 n_k 个观测值。给定 $B \geq 5$，我们可以在第 k 个区块 $\mathcal{I}_k$ 中获得 $M_k = n_k - B + 1$ 个滑动子组，并按照与（2.5）中出现的 $U_{m,q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$、$U^{(k)}_{m,q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$、$\tilde{U}^{\text{dist}}_{m,q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$ 相同的方式计算 $U^{(k),\text{dist}}_{m,q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$，但将 $\{X_m, \ldots, X_{m+B-1}\}$ 替换为第 k 个区块 $\mathcal{I}_k$ 中的第 m 个子组，适用于 $m \in [M_k]$、$(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) \in \mathcal{K}_q$ 以及 $q \in [Q]$。对于给定的 $k \in [K]$ 和 $m \in [M_k]$，我们将 $\{U^{(k),\text{dist}}_{m,q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}\}_{q\in[Q],\,(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)\in\mathcal{K}_q}$ 堆叠成一个 d 维向量 $U^{(k),\text{dist}}_m = (U^{(k),\text{dist}}_{m,1,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}, \ldots, U^{(k),\text{dist}}_{m,Q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2})^\top$。记 $\bar{U}^{(k),\text{dist}} = (\bar{U}^{(k),\text{dist}}_1, \ldots, \bar{U}^{(k),\text{dist}}_d)^\top = M_k^{-1}\sum_{m=1}^{M_k} U^{(k),\text{dist}}_m$。然后，我们将（2.8）中规定的全局检验统计量 $W_{n,L}$ 的分布式对应量定义如下：

$$W^{\text{dist}}_{n,L} = \max_{1\leq j_1<\cdots<j_L\leq d} \sum_{s=1}^{L} \frac{n_{\text{dist}}^{-1/2}\sum_{k=1}^{K} M_k \bar{U}^{(k),\text{dist}}_{j_s}}{[n_{\text{dist}}^{-1}\sum_{k=1}^{K} M_k\{\hat{\sigma}^{(k),\text{dist}}_{j_s}\}^2]^{1/2}}, \tag{2.15}$$

其中，$n_{\text{dist}} = \sum_{k=1}^{K} M_k$ 和 $\hat{\sigma}^{(k),\text{dist}}_j$ 是 $\sqrt{M_k}\bar{U}^{(k),\text{dist}}_j$ 的标准差估计。以与式(2.10)中给出的 $\hat{\Sigma}_n$ 相同的方式定义 $\hat{\Sigma}^{(k),\text{dist}}$，但将 $\{U_m\}_{m=1}^{M}$ 替换为 $\{U^{(k),\text{dist}}_m\}_{m=1}^{M_k}$。我们可以选择 $\{\hat{\sigma}^{(k),\text{dist}}_j\}^2$ 作为 $\hat{\Sigma}^{(k),\text{dist}}$ 主对角线上相应的元素。

与命题1相同，我们还可以证明，$W^{\text{dist}}_{n,L}$ 的零假设分布可由 $f_L(\check{\xi})$ 的分布近似，其中 $f_L(\cdot)$ 按第2.2节定义，且 $\check{\xi} \sim \mathcal{N}(0, \check{R}_n)$ 对于某个 $d \times d$ 矩阵 R_n。为避免生成 d 维正态分布随机向量 ξ，我们考虑按如下方式生成 d 维 ξ：

$$\mathring{\xi} = (\tilde{D}^{\text{dist}}_n)^{-1/2}\sum_{k=1}^{K} \varepsilon_k n_{\text{dist}}^{-1/2} M_k\{\bar{U}^{(k),\text{dist}} - \bar{U}^{\text{dist}}\} \tag{2.16}$$

其中 $\tilde{D}^{\text{dist}}_n = \text{diag}[n^{-1}\text{分布}\sum_{k=1}^{K} M_k\{\tilde{\sigma}^{(k),\text{dist}}_1\}^2, \ldots\ldots, n^{-1}\text{分布}\sum_{k=1}^{K} M_k\{\tilde{\sigma}^{(k),\text{dist}}_d\}^2]$，其中 $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{K}$ 是独立的拉ademacher随机变量，满足 $\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = 1/2$，$\bar{U}\text{分布} = (\bar{U}\text{分布}1, \ldots\ldots, \bar{U}^{\text{dist}}_d)^\top =$

n^{-1}分布 $\sum_{k=1}^{K} M_k \bar{U}_{(k)}$分布，并且 $\tilde{\sigma}^{(k)}_{,j}{}^{\mathrm{dist}}$是 $\sqrt{M_k}\{\bar{U}_j^{(k),\mathrm{dist}} - \bar{U}_j^{\mathrm{dist}}\}$ 标准差的估计值，可采用与式 (2.15) 中 $\hat{}\sigma^{(k)}_{,j}{}^{\mathrm{dist}}$ 相同的方法确定，但将数据 $\{U_m^{(k),\mathrm{dist}}\}_{m=1}^{M_k}$替换为 $\{\varepsilon_k U_{(k)}{}_m{}' - \varepsilon_k \bar{U}$分布 分布$\}_{m=1}^{M_k}$。与生成 $\check{} \xi \sim \mathcal{N}(0, \check{} R_n)$相比，新方法 (2.16) 只需生成 K 个独立的拉ademacher随机变量ε_1，……，ε_K，从而可大幅降低计算成本。令 $R_n^{\mathrm{dist}} = (D_n^{\mathrm{dist}})^{-1/2}\Sigma_n^{\mathrm{dist}}(D_n^{\mathrm{dist}})^{-1/2}$满足 $\Sigma_n^{\mathrm{dist}} = \mathrm{Cov}(n^{1/2}$分布 $\bar{U}^{\mathrm{dist}})$，且 $D_n^{\mathrm{dist}} = \mathrm{diag}(\Sigma_n^{\mathrm{dist}}) = \mathrm{diag}\{(\sigma_1^{\mathrm{dist}})^2, \ldots\ldots, (\sigma_d^{\mathrm{dist}})^2\}$。命题 2 为这种方法提供了理论保证。

命题 *2.* 对任意 $k \in [K]$ 和 $j \in [d]$，记 $\sigma^{(k)}_{,j}{}^{\mathrm{dist}} = Var^{1/2}(M_k^{-1/2}\sum_{m=1}^{M_k} U_{(k)}, dist_{\,m,j})$。令 $min_{k\in[K]}\, n_k \asymp max^{k\in[K]}\, n_k$。假设存在普适常数 $c_2 > 0$，使得 $min_{v\in\mathcal{F}}\, v^\top R_n^{\mathrm{dist}} v \geq c_2$ 且 $min^{k\in[K]} min_{j\in[d]}\, \sigma^{(k)}_{,j}{}^{\mathrm{dist}} \geq c_2$。在 *(2.6)* 中给出的全局原假设 H_0 下，只要满足 $B^5L^8K\, log(dBK)(log\ d)^4 = o(n)$、$B^3L^{13}\{log(dK)\}^3(log\ d)^7 = o(K)$ 和 $B^4K^{3/2}L^{-2}\{log(dBK)\}^3(log\, d)^{-2} = o(n)$，我们就有 $sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(W_n^{\mathrm{dist}}{}_L > z) - \mathbb{P}\{f_L(\mathring{\xi}) > z \,|\, X_1, \ldots, X_n\}| = o_{\mathrm{p}}(1)$。

当我们将 B 选为固定常数时，只要满足 $L^8K\log(dK)(\log d)^4 = o(n)$、$L^{13}\{\log(dK)\}^3(\log d)^7 = o(K)$ 和 $K^{3/2}L^{-2}\{\log(dK)\}^3(\log\ d)^{-2} = o(n)$，命题 2 即成立；这要求预先确定的整数 L 应满足 $L \ll \min\{n^{1/8}, K^{1/13}\}$。此外，若也将 L 选为固定常数，只要满足 $\{\log(dK)\}^3(\log d)^7 = o(K)$ 和$K^{3/2}\{\log(dK)\}^3(\log d)^{-2} = o(n)$，命题 2 即成立。另外，在限制 K（即分布式算法中涉及的数据集分块数）满足 $K = o(d)$ 的条件下，对于任意满足 $(\log\ d)^{10} \ll K \ll \min\{d, n^{2/3}(\log\ d)^{-2/3}\}$ 的 K，命题 2 均成立；这使得 $\log\ d = o(n^{1/16})$ 可以随样本量 n 指数级增长。为了为实践中选择 K 提供指导，我们进行了模拟，以评估所提出检验方法在不同 K 下的统计性质。第 3 节中的模拟设置与实际应用具有相近的样本量和图像分辨率。例如，$V = 200^2$ 和 $V = 500^2$ 分别对应于 3mm 和 2mm MNI标准脑模板中的体素数。对于样本量较大的数据集，例如 $n \geq 900$，所提出的检验方法在很宽的 K 范围内表现良好

($K=20$，30，40)。对于样本量中等或较小的数据集，即 $n \le 600$，较小的 K （例如 $K=20$）可能比其他选择带来略高的检验效能，同时仍能将经验检验水平控制在约 0.05。更多详情请参见第 3 节。除了考虑统计性质外，我们还可以根据可用的计算资源来选择 K ，包括处理器数量、存储空间和计算速度。较小的 K 可能需要较少的处理器，但每个处理器需要更多本地内存，从而导致计算时间更长。较大的 K 可能需要较多的处理器，但所需本地内存较少，因此可以缩短总计算时间。

令$\hat{F}^{\mathrm{dist}}(t) = \mathbb{P}\{f_L(\mathring{\xi}) \le t \mid X_1, \ldots\ldots, X_n\}$对于 $\mathring{\xi}$定义如式（2.16）。若$W_{n,L}^{\mathrm{dist}} > \hat{\mathrm{cv}}_{L\alpha}^{\mathrm{dist}}$，其中$\hat{\mathrm{cv}}_{L,\alpha}^{\mathrm{dist}} = \inf\{t \in \mathbb{R} : \hat{F}_{\mathrm{dist}}(t) \ge 1-\alpha\}$，则可在显著性水平 $\alpha \in$（0，1)下拒绝式（2.6）中的全局原假设 H_0。在实践中，对于某个足够大的 N，令 $\mathring{\xi}_1, \ldots\ldots, \mathring{\xi}_N$为遵循式（2.16）的独立随机向量，我们可以用 $f_L(\xi_1)\ldots\ldots, f_L(\xi_N)$中第 $\lfloor N\alpha \rfloor$大的值近似$\hat{\mathrm{cv}}_{L\alpha}^{\mathrm{dist}}$。

在多重检验中，下面式（2.12）所指定的p值$\mathrm{pv}_L^{(q)}$ 的分布式对应量也可类似地定义。给定 $q \in [Q]$、 $k \in [K]$ 和 $m \in [M_k]$，我们将 $\{U_{m,q,\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}^{(k),\mathrm{dist}}\}_{(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)\in\mathcal{K}_q}$堆叠成一个 $|\mathcal{K}_q|$维向量 $U_{m,q}^{(k),\mathrm{dist}}$，$(q) = (U(k),\mathrm{dist}_{m,q},1, \ldots, U(k),\mathrm{dist}_{m,q,|\mathcal{K}_q|})^\top$。对于第 q个假设$H_{0,q}$，检验统计量 $W_{n,L}^{(q),\mathrm{dist}}$可按与 $W\mathrm{dist}_{n,L}$在式（2.15）中相同的方式定义，但将$\{U_{m,q}^{(k),\mathrm{dist}}\}_{m=1}^{M_k}$ dist替换为 $\{U(k),\mathrm{dist}_{m,(q)}\}_{m=1}^{M_k}$。记 $\bar{U}_{\mathrm{dist}(q)}^{(k)} = M_k^{-1}\sum_{m=1}^{M_k} U(k),\mathrm{dist}_{m,(q)}$，并令 $\bar{U}\mathrm{dist}(q) = n^{-1}\mathrm{dist}\sum_{k=1}^{K} M_k \bar{U}_{\mathrm{dist}(q)}^{(k)}$。随后，可按与式（2.16）中生成 $\mathring{\xi}$ 相同的方式生成 $|\mathcal{K}_q|$维向量 $\mathring{\xi}^{(q)}$，但将 $\bar{U}(k)$dist和 $\bar{U}$dist分别替换为 $\bar{U}(k),\mathrm{dist}(q)$和 $\bar{U}_{(q)}^{\mathrm{dist}}$。$H_{0,q}$的p值的分布式对应量定义为$\mathrm{pv}_L^{(q)\,\mathrm{dist}} = \mathbb{P}\{f_L, (\mathring{\xi}^{(q)}) \ge W_{n,L}^{(q),\mathrm{dist}} \mid X_1, \ldots, X_n\}$。在实际应用中，对于某个足够大的 N，我们生成独立随机向量 $\mathring{\xi}_1^{(q)}, \ldots, \mathring{\xi}_N^{(q)}$，$\mathrm{pv}_L^{(q)\,\mathrm{dist}}$可用$\hat{\mathrm{pv}}_L^{(q)\,\mathrm{dist}} = N^{-1}\sum_{j=1}^{N} I\{f_L, (\mathring{\xi}_j^{(q)}) \ge W(q)_L\}\mathrm{dist}_{n,}$近似。

3 模拟

本节中，我们通过模拟评估所提出检验的有限样本性能。我们考虑以下多模态成像数据的数据生成过程。

假设每位受试者有 J种不同的成像模态。令 $\mathcal{R} = \{1, \ldots, V\}$ 表示二维（2D）图像的索引集合，该图像通过 k-均值聚类方法划分为 G 个预定义脑区 $\mathcal{R}_1$，……，$\mathcal{R}_G$；令 $v \in \mathcal{R}$ 表示体素的索引。体素 v 的坐标记为 $h_v \in \mathbb{R}^2$，区域 $\mathcal{R}_g$ 中心的坐标记为 $\bar{h}_g$。对于每个 $i \in [n]$，令 $Y_j^{(i)}(v)$ 表示受试者 i在体素 v处类型为j的图像信号。假设 $Y(i)\,j(v) = b_j^{(i)}(v) + \sum_{j'=1}^{J} d_j,\ j'(v)\alpha_{j\,j'}^{(i)},\ (v) + \epsilon_j^{(i)}(v)$，其中$b_j^{(i)}(v) = \sum_{g=1}^{G} \beta_j^{(i)},\ {}_gI(v \in \mathcal{R}_g)$和$d_j,\ j'(v) = \sum_{g=1}^{G} \delta_j,\ j',\ {}_gI(v \in \mathcal{R}_g)$，且$\delta_j,\ j',\ {}_g = \delta_{j'},\ j,\ {}_g \geq 0$ 适用于 $j < j'$。这里，$d_j,\ j'(v)$是回归系数，$b_j^{(i)}(v)$和 $\alpha_{j\,j'}^{(i)},\ (v)$是一些随机变量。对于每个 $i \in [n]$，记 $\beta^{(i)} = \{\beta_1^{(i),\top}, \ldots, \beta_J^{(i),\top}\}^\top$，其中 $\beta_j^{(i)} = \{\beta_{j,1}^{(i)}, \ldots, \beta_{j,G}^{(i)}\}^\top$。我们从正态分布 $\mathcal{N}(0, E)$中独立生成 $\beta^{(i)}$，其中 $E = (E^j,\ {}^{j'})_j,\ {}_{j' \in [J]}$，且 $E^j,\ {}^{j'} = (e^j,\ {}_{g\,g'},\ )_g,\ {}_{g' \in [G]}$。对于任意 $i \in [n]$ 以及满足 $j \leq j'$的$(j,\ j')$，$\{\alpha_{j,j'}^{(i)}(v)\}_{v \in \mathcal{R}}$ 由高斯过程 $\mathcal{GP}(0, \kappa_\alpha)$独立生成，其协方差函数为 $\kappa_\alpha(v,\ v') = \sum_{g=1}^{G} \exp\{-0.001(|h_v - \bar{h}_g|_2^2 + |h_{v'} - \bar{h}_g|_2^2) - 10|h_v - h_{v'}|_2^2\} I(v,\ v' \in \mathcal{R}_g)$。对于 $j > j'$，令 $\alpha_{j\,j'}^{(i)},\ (v) = \alpha_{j'}^{(i)},\ {}_j(v)$。我们将考虑回归系数$d_j,\ j'(v)$以及 $\beta^{(i)}$ 的协方差矩阵 E 的若干种情景，以模拟原假设和备择假设；具体设定将在后文给出。给定回归系数$d_j,\ j'(v)$、生成的 $b_j^{(i)}(v)$和 $\alpha_{j\,j'}^{(i)},\ (v)$后，$\epsilon_j^{(i)}(v)$独立地从 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$中生成，其中 σ^2 的取值使决定系数为 0.95。

在模拟中，我们设定 $J = 3$、$G \in \{16, 25\}$ 和 $V \in \{100^2, 200^2, 500^2\}$。我们考虑样本量 $n \in \{300, 600, 900\}$，并将观测值平均分成 $K = 30$ 个区块，将每个区块放在一个处理器上，以使用 $N = 5000$ 实施第 2.4 节中介绍的分布式计算程序。所有模拟结果均基于 1000 次重复试验。我们还在模拟中尝试了 $K = 20$和 40，得到的结果与 $K = 30$ 相似。我们只展示基于 $K = 30$ 的结果。基于 $K = 20$ 和 40 的结果见补充材料。

我们分别针对式 (1.1)–(1.3) 中的原假设 (a)–(c)，考虑全局检验和多重检验。为评估经验尺寸，我们设 $\delta_{j,j',g} = 0$ 和 $e^{j}{}_{,g}{}^{j'}{}_{,g'} = I(j = j')I(g = g')$

对于任意 $j, j' \in [J]$ 和 $g, g' \in [G]$。为评估经验检验效能，我们考虑以下三种情景 (M1)–(M3)，它们分别对应检验问题 (a)–(c)。

（M1）令 $e^{j}{}_{,g}{}^{j'}{}_{,g'} = I(j = j')I(g = g')$ 和 $\delta_{j,j',g} = \{I(j = j') + 6I(|j - j'| = 1)\}I(1 \le g \le 4)$。（M2）令 $e^{j}{}_{,g}{}^{j'}{}_{,g'} = I(j = j')\{I(g = g') + 0.4I(|g - g'| = 1) - 0.6I(|g - g'| = 1)I(j = 2)\}$ 和 $\delta_{j,j',g} = 0$。（M3）令 $e^{j}{}_{,g}{}^{j'}{}_{,g'} = I(j = j')I(g = g') + I(g' = g + 1)\{0.4I(j = 1, j' = 2) - 0.4I(j = 1, j' = 3) + 0.2I(j = 2, j' = 3)\}$，对于 $j \le j'$，以及 $e^{j}{}_{,g}{}^{j'}{}_{,g'} = e^{j'}{}_{,g'}{}^{j}{}_{g}$，对于 $j > j'$，并且还令 $\delta_{j,j',g} = 0$。

对于全局检验，我们将显著性水平设为 $\alpha = 5\%$。在（a）–（c）的全局检验中，当 $G = 16$ 时，$d = 48$分别为360和768。当 $G = 25$时，$d = 75$分别为900和1875。关于 d 的定义，见（2.8）式上方。所提出的全局检验的经验检验水平和检验功效列于表1，其中 $L = 1$，3和5。对于 $L = 1$，当样本量 n 从300增加到900时，在这三个检验问题中，所提出检验的尺寸均能在5%左右得到良好控制，其检验功效也迅速提高至1。与具有 $L = 1$的所提出检验相比，我们发现，当 d 较小时（检验问题（a）），具有 $L > 1$ 的所提出检验仍能在5%左右实现良好的尺寸控制；而当 d 较大时（检验问题（b）和（c）），其检验略显保守，但相应的检验功效会随着 L 的增加而提高。

所提出多重检验的经验假发现率和检验功效报告于表2中。由于在我们的设定中模态的数量为 $J = 3$，我们知道对于(a)–(b)的多重检验中的所有 $q \in [Q]$，(2.1)中的 $|\mathcal{K}_q| = 3$，并且我们只能考虑满足 $L \le 3$ 的所提出检验统计量。对于检验问题(a)–(c)，当 $G = 16$ 时，(Q, Q_0) =(16, 12)、(120, 105)和(136, 121)；当 $G = 25$ 时，(Q, Q_0) =(25, 21)、(300, 276)和(325, 301)，分别对应上述三种情形。给定显著性水平 $\alpha = 5\%$，我们可以在第 r 次模拟重复中获得按式(2.14)定义的 $\hat{t}_r$。对于每个$q \in [Q]$，记 $V_{n\,L}^{(q)}{}_{,,r}$ 为第 r 次模拟重复中 $H_{0,q}$ 的p值的正态分位数变换。其定义见下文式(2.12)。我们将所提出多重检验的经验检验效能定义为 $\frac{1}{1000}\sum_{r=1}^{1000}\frac{1}{Q-Q_0}\sum_{q\notin\mathcal{H}_0} I\{V(q)_{n,L,r} > \hat{t}_r\}$。定理 3 表明，错误发现率应控制在 $\alpha Q_0/Q$，对于检验问题(a)–(c)，当 $G = 16$ 时分别为3.75%、4.38%和4.45%，当 $G = 25$ 时分别为4.20%、4.60%和4.63%。表2显示，

所提出的多重检验具有良好的错误发现率控制表现，并且当样本量 n 从300增加到900时，经验检验功效显著提高。

正如我们在第1节中提到的，一些现有方法也可用于计算问题（a）中每个$H_0^{(a)}$、$_g$ 的 p 值。基于这些方法得到的 p 值，我们可以按照第2.3节所述与本文相同的方式，采用相应的多重检验程序。这里考虑三种方法：（i）Pfister 等人（2018）提出的 k元 HSIC 检验（dHSIC）；（ii）Jin 和 Matteson（2018）提出的基于广义距离协方差的检验（GdCov）；以及（iii）Chakraborty 和 Zhang（2019）提出的基于高阶距离协方差的检验。dHSIC 检验和 GdCov 检验分别通过调用 R软件包 `dHSIC` 和 `EDMeasure`中的 R函数 `dhsic.test` 和 `mdm test`实现。Chakraborty 和 Zhang（2019）提出了三种检验统计量。这里，我们按照作者的建议，选择其采用$c = 2$ 的偏差校正学生化检验统计量（JdCov）。JdCov 检验的代码可在 Chakraborty 和 Zhang（2019）的补充材料中找到。表2还列出了问题（a）_ 中基于这三种竞争方法的多重检验程序的经验假发现率和检验功效，结果表明，我们提出的方法与这三种方法的表现相近。然而，这三种竞争方法无法用于处理问题（b）和（c）中的多重检验。由于 JdCov 检验的实现依赖于计算成本较高的自助法程序，表2中的 JdCov 结果仅基于100次重复试验，其对应的 $V = 500^2$ 结果未予列出。与这里在 $Y_j^{(i)}$ （v）之间考虑的线性依赖不同，我们还针对问题（a）考虑了在 $Y_j^{(i)}$ 之间设定非线性依赖的模拟情形。详见补充材料第 A.2 节。结果表明：（i）所提出的方法显著优于这三种竞争方法；（ii）所提出的方法对 V具有稳健性；（iii）随着 V增加，这三种竞争方法的检验功效明显下降。

表1： 在（1.1）–（1.3）中分别给出的检验问题（a）–（c）下，所提出的采用 $K = 30$ 的全局检验的经验尺寸和检验功效。以下报告的所有数值均乘以 100。

				问题（a）			问题（b）			问题（c）		
	G	n	V	$L=1$	$L=3$	$L=5$	$L=1$	$L=3$	$L=5$	$L=1$	$L=3$	$L=5$
全局尺寸	16	300	100^2	5.70	5.70	3.90	6.00	3.50	2.10	5.10	4.00	2.90
			200^2	6.30	4.80	3.80	6.50	4.40	2.20	5.20	4.00	3.10
			500^2	5.20	4.50	4.40	6.20	3.50	1.70	7.60	5.70	3.70
		600	100^2	4.40	4.40	4.00	3.90	3.30	2.30	3.90	2.90	2.30
			200^2	4.70	5.10	4.40	4.30	3.00	1.90	4.80	2.50	1.80
			500^2	5.20	4.90	3.70	5.10	3.70	2.30	5.10	2.90	2.50
		900	100^2	4.90	4.40	4.60	2.90	2.90	2.60	4.70	2.80	2.30
			200^2	6.00	5.30	5.20	4.10	2.30	2.00	2.90	2.40	2.00
			500^2	5.20	5.10	4.90	4.40	2.30	2.50	3.70	2.30	1.90
	25	300	100^2	6.20	4.80	3.20	5.40	3.10	1.50	6.20	3.50	2.10
			200^2	7.40	5.50	4.40	7.20	3.50	1.60	7.50	4.30	3.10
			500^2	7.50	6.10	5.60	6.20	3.00	1.90	7.20	5.10	3.20
		600	100^2	7.20	5.30	5.80	4.70	3.10	2.20	3.90	3.00	2.50
			200^2	4.90	4.70	3.80	4.60	2.80	1.50	3.60	2.40	1.20
			500^2	4.50	4.70	4.40	4.70	2.80	2.30	4.90	2.80	1.00
		900	100^2	2.90	3.80	4.20	3.40	2.50	1.70	3.30	1.90	1.00
			200^2	3.90	3.90	3.70	3.00	2.10	1.50	3.70	2.20	1.30
			500^2	4.50	4.40	3.80	6.10	2.70	2.10	2.40	1.80	1.50
全局检验功效	16	300	100^2	100.00	100.00	100.00	93.30	99.40	99.90	88.90	98.20	99.30
			200^2	100.00	100.00	100.00	92.70	99.10	99.40	86.90	96.30	97.70
			500^2	100.00	100.00	100.00	94.40	99.00	99.60	86.20	97.70	99.40
		600	100^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			200^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			500^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
		900	100^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			200^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			500^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
	25	300	100^2	100.00	100.00	100.00	93.50	99.50	99.90	85.00	98.40	99.50
			200^2	100.00	100.00	100.00	94.60	99.40	99.90	85.50	98.40	99.50
			500^2	100.00	100.00	100.00	93.00	99.20	99.70	82.50	94.80	96.10
		600	100^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			200^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			500^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
		900	100^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			200^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			500^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

4 HCP 数据分析

我们使用所提出的检验程序，对作为研究动机的 HCP 任务态功能磁共振成像数据进行了分析。所有数据均采集自 HCP-1200发布版（Van Essen 等人，2013）。我们采用 HCP最小预处理流程（Glasser 等人，2013）对功能磁共振成像时间序列数据进行预处理。具体而言，该流程包括运动校正、失真校正、基于脑边界的线性配准、向标准MNI 2毫米空间进行非线性配准，以及强度归一化。我们的分析聚焦于922名受试者的三个功能磁共振成像任务领域：工作记忆（n-back）、语言加工（故事和数学）和社会认知。关于这些任务的详细信息，请参阅 Barch 等人（2013）。为了根据功能磁共振成像时间序列数据生成受试者特异性对比图，我们拟合了固定效应模型，以估计平均值

表2： 在式（1.1）–（1.3）中分别给出的检验问题（a）–（c）下，所提出的带有 $K = 30$ 的多重检验方法及三种竞争方法（JdCov、dHSIC、GdCov）的经验假发现率和检验功效。以下报告的所有数值均乘以 100。

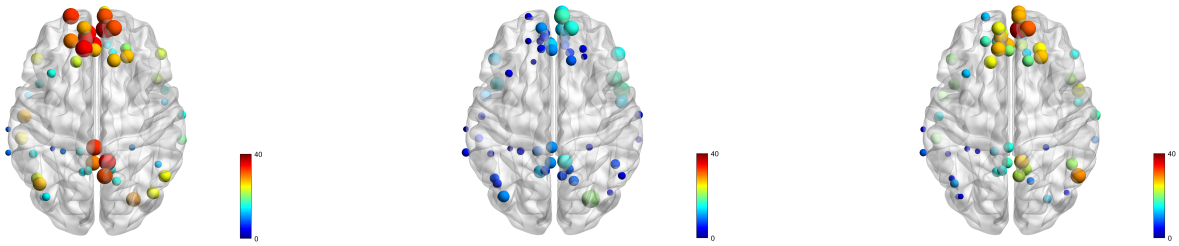
				问题（a）					问题（b）		问题（c）	
	G	n	V	$L=1$	$L=3$	JdCov	dHSIC	GdCov	$L=1$	$L=3$	$L=1$	$L=3$
经验 FDRs	16	300	100^2	1.96	2.19	2.80	1.83	3.83	4.09	2.43	4.11	2.32
			200^2	2.44	2.09	3.53	1.89	3.26	3.75	2.55	4.50	2.57
			500^2	1.93	2.46	NA	1.81	3.22	3.10	2.52	4.08	1.46
		600	100^2	2.37	2.42	2.73	1.76	2.23	3.75	5.11	2.99	3.32
			200^2	2.77	2.67	2.33	2.04	1.75	3.44	4.98	2.12	2.73
			500^2	2.31	2.57	NA	2.09	1.96	3.58	4.95	2.35	2.98
		900	100^2	2.27	2.86	1.80	1.60	1.95	4.00	5.47	3.16	3.39
			200^2	2.43	2.67	2.13	2.04	2.88	3.88	5.28	3.21	3.33
			500^2	2.37	2.52	NA	1.93	2.49	3.83	5.39	3.59	3.59
	25	300	100^2	2.67	2.31	2.20	1.54	3.88	4.31	3.88	4.29	1.79
			200^2	2.55	2.49	1.60	1.58	3.38	3.83	4.08	4.55	2.00
			500^2	2.40	2.65	NA	1.53	3.81	3.91	4.02	5.70	3.38
		600	100^2	2.69	2.79	1.60	1.56	3.97	4.47	5.74	3.72	3.92
			200^2	2.59	2.71	3.80	1.69	3.74	4.00	5.53	3.65	3.83
			500^2	2.37	2.62	NA	1.74	3.89	4.13	5.79	3.69	4.14
		900	100^2	2.72	3.30	2.13	1.80	3.43	4.40	6.47	3.13	4.16
			200^2	3.07	3.09	3.13	1.83	4.18	4.33	6.53	3.25	4.22
			500^2	2.45	2.83	NA	1.87	3.77	4.29	6.37	3.38	4.30
经验 检验功效	16	300	100^2	99.78	98.80	100.00	100.00	100.00	18.57	41.80	14.63	22.96
			200^2	99.88	99.70	100.00	100.00	100.00	19.10	42.93	14.07	22.03
			500^2	99.93	99.73	NA	100.00	100.00	18.87	42.48	14.12	23.73
		600	100^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	87.21	96.95	72.99	91.04
			200^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	87.00	96.82	68.83	88.44
			500^2	100.00	100.00	NA	100.00	100.00	86.83	96.99	68.66	89.43
		900	100^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	99.44	99.89	97.63	99.20
			200^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	99.36	99.85	97.63	99.25
			500^2	100.00	100.00	NA	100.00	100.00	99.45	99.91	97.90	99.36
	25	300	100^2	99.95	99.78	100.00	100.00	100.00	12.67	41.88	8.93	15.28
			200^2	99.93	99.58	100.00	100.00	100.00	12.80	40.80	8.92	15.30
			500^2	99.90	99.50	NA	100.00	100.00	12.38	40.90	9.03	15.23
		600	100^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	86.85	96.00	78.22	91.86
			200^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	87.39	95.77	78.43	91.77
			500^2	100.00	100.00	NA	100.00	100.00	87.20	95.76	78.99	90.88
		900	100^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	99.00	99.79	98.34	99.42
			200^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	99.07	99.76	98.51	99.47
			500^2	100.00	100.00	NA	100.00	100.00	99.05	99.81	97.85	99.32

使用 FSL（Jenkinson 等，2012）分析脑激活随时间的变化。对于某些任务，除了标准的实验条件与对照条件外，还创建了多个对比图。我们分析了五张对比图：工作记忆任务的两张（2back-0back、task-rest），语言加工任务的一张（story-math），以及社会认知任务的两张（mental、random）。我们的分析表明，语言加工、工作记忆和社会认知相关的脑活动存在显著的强依赖关系，且这种关系在额下回的大部分区域均具有统计显著性。更多详情请参阅补充材料中的 B 节。

在分析 HCP 功能性磁共振成像对比图时，我们考虑了三个检验问题 (a)–(c)，分别定义为 (1.1)–(1.3)。我们通过将前 900 名受试者平均分配给 30 个处理器，并将其余 22 个观测值分配给第 31 个

过程 处理器，按照第 2.4 节给出的方法计算临界值 .

区域间模态独立性检验：在检验问题（a）中，我们检验了三种功能磁共振成像任务（即工作记忆（2back-0back）、语言加工（story-math）和社会认知（mental））的脑激活在 90 个 AAL区域中的独立性。全局检验中，$d = 270$ 拒绝了三种脑激活类型在全部 90 个脑区中相互独立的原假设，p 值为 < 0.0001。值得注意的是，我们对 L 取了不同的值：1，5，10 和 15；对应的 p 值均小于 0。0001。我们在 90 个 AAL区域中分别针对同一原假设进行了多重检验，并将错误发现率控制在 0。001，且 $L = 1$。当相应的 p 值$\leq 1.35 \times 10^{-3}$ 时，便拒绝该检验。我们确定了 90 个 AAL区域中的 30 个脑区，在这些脑区中，三种功能磁共振成像任务活动存在显著依赖。这一结果为脑功能与人类行为之间的关系提供了一些新见解。



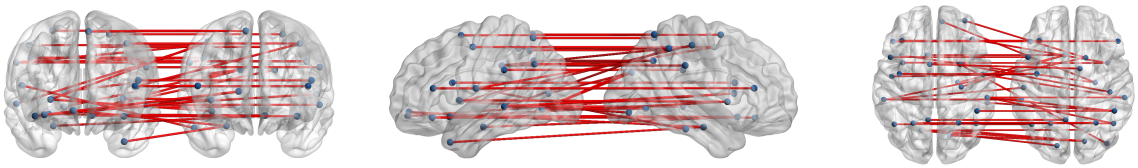
(a) 工作记忆　(b) 语言加工　(c) 社会认知

图 1： 默认模式网络中节点（脑区）的度数。节点的尺寸与节点度数成正比。

模态内区域间独立性检验：在检验问题（b）中，我们主要关注评估默认模式网络（Raichle 2015，默认模式网络）中不同脑区之间功能磁共振成像任务活动的独立性。在我们的分析中，我们采用了Power等人（2011）的脑分区方案，其中包含264个脑区，默认模式网络占58个。默认模式网络最初是针对实验参与者清醒静息时的脑活动提出的；在社会认知和工作记忆任务中，默认模式网络也可能处于活动状态（Spreng 2012）。在这个问题中，我们检验了58个默认模式网络脑区在三项功能磁共振成像任务中的脑区独立性，即工作记忆（2back-

0back）、语言加工（story-math）和社会认知（mental）。全局检验中，$d = 4959$，对于三个功能磁共振成像任务对比，拒绝了默认模式网络中所有脑区对之间脑活动相互独立的原假设；当 $L = 1$为5、10和15时，p值为 < 0.0001，5，10和15。此外，我们还希望分别找出在工作记忆任务（$j = 1$）、语言加工任务（$j = 2$）和社会认知任务（$j = 3$）中具有统计学显著相关性的脑区。对于每个 $j \in \{1, 2, 3\}$，我们考虑检验以下原假设：$H_{0,\ j,\ g,\ g'}$：$Y_{j,\ g}$ 和$Y_{j,\ g'}$ 相互独立。由于 $g < g'$，共有 $\binom{58}{2} = 1653$ 个原假设。多重检验的错误发现率控制在0.001，并采用 $L = 1$。对于工作记忆任务（2back-0back）、语言加工（story-math）任务和社会认知（mental）任务，若相应的p值 $\leq 5.91 \times 10^{-5}$，则拒绝该检验。工作记忆任务（2back-0back）、语言加工（story-math）任务和社会认知（mental）任务中，分别有627、227和494个区域对被识别为脑活动存在强依赖。每个检验结果都可以表示为无向图，其中默认模式网络中的脑区为节点，每个显著脑区对之间以一条边相连。鉴于图非常稠密，图1展示了每个脑区的度，即默认模式网络中与该脑区存在显著依赖的其他脑区数量。工作记忆任务中默认模式网络内的脑激活依赖性远强于语言加工任务。内侧前额叶皮层在所有三项任务中都与其他脑区存在相对较强的共同激活交互。在社会认知任务中，与后扣带皮层和楔前叶相比，左角回与其他脑区的共同激活交互较弱。

检验不同模态脑区之间的独立性：在检验问题 (c) 中，我们考虑检验工作记忆（2back-0back）任务与语言加工（story-math）任务中 90 个 AAL区域之间脑活动的独立性。全局检验中，$d = 8100$ 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，以 p 值 < 0.0001 拒绝了两个任务的功能性磁共振成像激活在全部 90 个脑区中相互独立的原假设



(a) 冠状面视图　(b) 矢状面视图　(c) 轴面视图

图 2: 工作记忆（2back-0back）任务（左）和语言加工（story-math）任务（右）中脑区间独立性的检验结果二部图。两个节点之间的边表示显著相关，且相应的 p 值均为 < 0.0001。

对于 $L = 1$，5，10 和 15。为确定工作记忆活动（$j = 1$）与语言加工活动（$j' = 2$）之间存在统计显著相关性的脑区，我们针对原假设 $H_{0,\ g,\ g'}$: $Y_{1,\ g}$ 和 $Y_{2,\ g'}$ 相互独立，进行了多重检验。由于 g，$g' = 1$，……，90，因此共有 $90 \times 90 = 8100$ 个原假设。多重检验采用错误发现率控制，控制水平为 0.001，并且 $L = 1$。当相应的 p 值 $\leq 1.10 \times 10^{-5}$ 时，拒绝该检验。我们的检验结果表明，两类任务的功能性磁共振成像激活在 14 个脑区中显著相互依赖（p 值 < 0.0001），并且在 23 个不同的区域对之间显著相互依赖（p 值 < 0.0001）。这些结果为多任务功能性磁共振成像活动带来了一些新发现。例如，额下回因其在语言理解和语言产生中的作用而广为人知（Tyler 等，2011），但它也与工作记忆有关（Nissim 等，2017）。我们发现，左侧岛盖部和左侧三角部额下回中的工作记忆活动与语言加工活动高度相关。此外，左侧三角部额下回中的工作记忆活动与右侧三角部额下回中的语言加工活动高度相关。图 2 展示了完整的二部图，表示工作记忆任务（2back-0back）与语言加工（story-math）任务之间脑激活的依赖关系。

5 讨论

本文提出了一种用于检验超高维随机向量各组成部分之间独立结构的新方法。针对一般形式的原假设，我们利用高斯近似，提出了全局检验程序和具有错误发现率控制的多重检验程序。

为大幅提高计算效率，我们开发了一种可扩展至超高维数据的分布式算法。我们进行了严谨的理论分析和广泛的模拟，以证明这些检验在各种维度和样本量范围内均具有良好性质。在人类连接组计划研究的任务态功能磁共振成像数据分析中，我们将所提出的方法应用于组水平上五种不同对比图的三类复杂依赖关系检验。我们针对一些具有科学意义的发现获得了显著证据，为理解不同认知任务下不同脑区脑活动之间的关联提供了新的见解。我们强调了所提出方法的若干优势。与可能对数据依赖结构敏感的现有检验相比，所提出的检验尤其适用于分析多模态成像数据；这类数据往往具有噪声、空间依赖、高维以及与解剖结构和模态复杂关联等特征。与其他方法相比，可扩展的计算算法是所提出检验的另一项重要贡献。据我们所知，我们是最早提出在神经影像学研究中针对高维体素水平数据（≈200,000 个体素）开发具有理论保证且计算可行的独立性检验的方法之一。除成像应用外，所提出的检验还可作为检验许多其他统计问题中独立性的一般工具。例如，多组学研究可能会收集SNP基因型、基因表达、DNA拷贝数改变、DNA甲基化变化以及其他遗传信息。检验多模态基因组数据之间的独立性同样具有重要意义。我们提出的方法为解决这一问题提供了有用工具。

参考文献

Bai, Z.、Jiang, D.、Yao, J.-F. 和 Zheng, S.（2009），“利用随机矩阵理论修正大维协方差矩阵的似然比检验”，*Ann. Statist.* **37**，3822–3840。Barch, D. M.、Burgess, G. C.、Harms, M. P.、Petersen, S. E.、Schlaggar, B. L.、Corbetta, M. 等（2013），“人类连接组中的功能：任务功能磁共振成像与行为中的个体差异”，*NeuroImage* **80**，169–189。Bergsma, W. 和 Dassios, A.（2014），“一种基于与 Kendall 秩相关系数相关的符号协方差的独立性一致检验”，*Bernoulli* **20**，1006–1028。

Berrett, T. B.、Kontoyiannis, I. 和 Samworth, R. J.（2021），“通过 U 统计量置换检验进行独立性检验的最优速率”，*Ann. Statist.* **49**，2457–2490。Binder, J. R.、Gross, W. L.、Allendorfer, J. B.、Bonilha, L.、Chapin, J.、Edwards, J. C. 等（2011），“利用功能性磁共振成像绘制前颞叶语言区：一项多中心常模研究”，*Neuroimage* **54**，1465–1475。Blum, J. R.、Kiefer, J. 和 Rosenblatt, M.（1961），“基于样本分布函数的无分布独立性检验”，*Ann. Math. Statist.* **32**，485–498。Cai, T. T.、Liu, W. 和 Xia, Y.（2014），“依赖条件下高维均值的双样本检验”，*J. R. Statist. Soc. B* **76**，349–372。Calhoun, V. D.、Adalı, T.、Kiehl, K. A.、Astur, R.、Pekar, J. J. 和 Pearlson, G. D.（2006），“一种应用于精神分裂症的多任务功能性磁共振成像数据融合方法”，*Hum. Brain Mapp.* **27**，598–610。Castelli, F.、Happ´e、Frith, U. 和 Frith, C.（2000），“运动与心智：对复杂有意运动模式的感知和解释进行的一项功能成像研究”，*Neuroimage* **12**，314–325。Chakraborty, S. 和 Zhang, X.（2019），“用于测量联合依赖性的距离度量及其在因果推断中的应用”，*J. Am. Statist. Assoc.* **114**，1638–1650。Chakraborty, S. 和 Zhang, X.（2021），“高维中基于距离和核的度量的新框架”，*Electron. J. Statist.* **15**，5455–5522。Chang, J.、Chen, X. 和 Wu, M.（2021），“高维相关数据的中心极限定理”，*arXiv:2104.12929* 。Chang, J.、Shao, Q.-M. 和 Zhou, W.-X.（2016），“具有学生化双样本 u 统计量应用的 Cram´er 型中等偏差”，*Ann. Statist.* **44**，1931–1956。Chang, J.、Zheng, C.、Zhou, W.-X. 和 Zhou, W.（2017），“协方差异质性下高维均值的基于模拟的假设检验”，*Biometrics* **73**，1300–1310。Chernozhukov, V.、Chetverikov, D. 和 Kato, K.（2013），“高维随机向量和的最大值的高斯近似与乘子自助法”，*Ann. Statist.* **41**，2786–2819。Chernozhukov, V.、Chetverikov, D.、Kato, K. 和 Koike, Y.（2022），“高维中改进的中心极限定理和自助法近似”，*Ann. Statist.* **50**，2562–2586。Deb, N. 和 Sen, B.（2021），“利用测度传输进行基于多元秩的无分布非参数检验”，*J. Am. Statist. Assoc.* **in press**。Deng, H. 和 Zhang, C.-H.（2020），“超越高斯近似：独立随机向量和的最大值的自助法”，*Ann. Statist.* **48**，3643–3671。

Drobyshevsky, A., Baumann, S. B. 和 Schneider, W.（2006），‘用于绘制视觉、运动、认知和情绪功能的快速功能磁共振成像任务测验组’，*Neuroimage* **31**, 732–744。Fan, J., Shao, Q.-M. 和 Zhou, W.-X.（2018），‘发现是否是伪相关？最大伪相关的分布及其应用’，*Ann. Statist.* **46**, 989–1017。Friston, K. J., Ashburner, J. T., Kiebel, S. J., Nichols, T. E. 和 Penny, W. D.（2011），功能性脑图像的统计参数映射分析，学术出版社。Gao, L., Fan, Y., Lv, J. 和 Shao, Q.-M.（2021），‘高维距离相关推断的渐近分布’，*Ann. Statist.* **49**, 1999–2020。Gieser, P. W. 和 Randles, R. H.（1997），‘两个向量之间独立性的非参数检验’，*J. Am. Statist. Assoc.* **92**, 561–567。Glasser, M. F., Sotiropoulos, S. N., Wilson, J. A., Coalson, T. S., Fischl, B., Andersson, J. L. 等（2013），‘人类连接组计划的最简预处理流程’，*Neuroimage***80**, 105–124。Gretton, A., Fukumizu, K., Teo, C. H., Song, L., Sch¨olkopf, B. 和 Smola, A. J.（2008），‘一种核独立性统计检验’，载于神经信息处理系统进展，编者：J. C. Platt、D. Koller、Y. Singer 和 S. T. Roweis，纽约州雷德胡克：Curran Associates, Inc.，第 585–592 页。Hallin, M., del Barrio, E., Cuesta-Albertos, J. 和 Matr´an, C.（2021），‘维度 d 中的分布函数与分位数函数、秩和符号：一种测度传输方法’，*Ann. Statist.***49**, 1139–1165。Han, F., Chen, S. 和 Liu, H.（2017），‘高维中的无分布独立性检验’，*Biometrika* **104**, 813–828。Heller, R., Heller, Y. 和 Gorfine, M.（2013），‘一种基于距离秩的一致多变量关联检验’，*Biometrika* **100**, 503–510。Hotelling, H.（1936），‘两组变量之间的关系’，*Biometrika* **28**, 321–377。Jenkinson, M., Beckmann, C. F., Behrens, T. E., Woolrich, M. W. 和 Smith, S. M.（2012），‘FSL’，*Neuroimage* **62**, 782–790。Jin, Z. 和 Matteson, D. S.（2018），‘通过完全和不完全 V 统计量推广距离协方差，以度量和检验多变量相互依赖’，*J. Mult. Anal.* **168**, 304–322。Kendall, M. G.（1938），‘一种新的秩相关度量’，*Biometrika* **30**, 81–93。Ledoit, O. 和 Wolf, M.（2002），‘当维度相对于样本量较大时协方差矩阵的一些假设检验’，*Ann. Statist.* **30**, 1081–1102。Leung, D. 和 Drton, M.（2018），‘利用秩相关之和检验高维中的独立性’，*Ann. Statist.* **46**, 280–307。

Liu, S., Cai, W., Liu, S., Zhang, F., Fulham, M., Feng, D. 等（2015），‘多模态神经影像计算：其在神经精神障碍中的应用综述’，*Brain Inform.* **2**, 167。Liu, W.（2013），‘在错误发现率控制下估计高斯图模型’，*Ann.Statist.* **41**, 2948–2978。Lopes, M. E.（2022），‘高维中的中心极限定理与自助法近似：通过隐式平滑实现近 $1/\sqrt{n}$ 速率’，*Ann. Statist.* **50**, 2492–2513。Nagao, H.（1973），‘关于协方差矩阵的一些检验准则’，*Ann. Statist.* **1**, 700–709。Naylor, M. G., Cardēnas, V. A., Tosun, D., Schuff, N., Weiner, M. 和 Schwartzman, A.（2014），‘多模态磁共振成像的体素水平多变量分析’，*Hum. BrainMapp.* **35**, 831–846。Nissim, N. R., O'Shea, A. M., Bryant, V., Porges, E. C., Cohen, R. 和 Woods, A. J.（2017），‘老年人工作记忆表现的额叶结构神经相关因素’，*Front.Aging Neurosci.* **8**, 328。Pearson, K.（1920），‘关于相关历史的札记’，*Biometrika* **13**, 25–45。Pfister, N., B¨uhlmann, P., Sch¨olkopf, B. 和 Peters, J.（2018），‘联合独立性的基于核的检验’，*J. R. Statist. Soc. B* **80**, 5–31。Power, J. D., Cohen, A. L., Nelson, S. M., Wig, G. S., Barnes, K. A., Church, J. A. 等（2011），‘人脑的功能网络组织’，*Neuron* **72**, 665–678。Raichle, M. E.（2015），‘大脑的默认模式网络’，*Annu. Rev. Neurosci.* **38**, 433–447。Ramezani, M., Marble, K., Trang, H., Johnsrude, I. S. 和 Abolmaesumi, P.（2014），‘多任务功能磁共振成像数据中脑活动模式的联合稀疏表示’，*IEEE Trans. Med. Imag.***34**, 2–12。Reshef, D. N., Reshef, Y. A., Finucane, H. K., Grossman, S. R., McVean, G., Turnbaugh, P. J. 等（2011），‘在大型数据集中检测新关联’，*Science* **334**, 1518–1524。Schott, J. R.（2005），‘检验高维中的完全独立性’，*Biometrika* **92**, 951–956。Shi, H., Drton, M. 和 Han, F.（2022），‘通过中心向外秩和符号实现分布无关的一致独立性检验’，*J. Am. Statist. Assoc.* **117**, 395–410。Spearman, C.（1904），‘两个事物之间关联的证明与测量’，*Am. J.Psychol.* **15**, 72–101。Spreng, R. N.（2012），‘“任务负网络”这一谬误’，*Front. Psychol.* **3**, 145。Sz´ekely, G. J., Rizzo, M. L. 和 Bakirov, N. K.（2007），‘通过距离相关测量和检验依赖’，*Ann. Statist.* **35**, 2769–2794。

Taskinen, S., Oja, H. 和 Randles, R. H.（2005），‘独立性的多变量非参数检验’，*J. Am. Statist. Assoc.* **100**，916–925。Tyler, L. K., Marslen-Wilson, W. D., Randall, B., Wright, P., Devereux, B. J., Zhuang, J. 等（2011），‘左侧额下回皮层与句法：左半球损伤患者的功能、结构和行为’，*Brain* **134**，415–431。Tzourio-Mazoyer, N., Landeau, B., Papathanassiou, D., Crivello, F., Etard, O., Delcroix, N. 等（2002），‘使用MNI磁共振成像单受试者脑的宏观解剖分区，对SPM中的激活进行自动解剖标注’，*Neuroimage* **15**，273–289。Van Essen, D. C., Smith, S. M., Barch, D. M., Behrens, T. E., Yacoub, E. 和 Ugurbil, K.（2013），‘WU-Minn人类连接组计划概述’，*Neuroimage* **80**，62–79。Van Essen, D. C., Ugurbil, K., Auerbach, E., Barch, D., Behrens, T. E., Bucholz, R. 等（2012），‘人类连接组计划：数据采集视角’，*Neuroimage* **62**，2222–2231。Wilks, S. S.（1935），‘关于k组正态分布统计变量的独立性’，*Econometrica* **3**，309–326。Xia, Y., Li, L., Lockhart, S. N. 和 Jagust, W. J.（2020），‘多模态整合分析的协方差同步推断’，*J. Am. Statist. Assoc.* **115**，1279–1291。Yao, S., Zhang, X. 和 Shao, X.（2018），‘通过距离协方差检验高维情形下的相互独立性’，*J. R. Statist. Soc. B* **80**，455–480。Zhang, X.（2015），‘稀疏条件下的高维均值检验’，*arXiv:1509.08444* 。Zhu, C., Zhang, X., Yao, S. 和 Shao, X.（2020），‘高维情形下基于距离和基于再生核希尔伯特空间的依赖度量’，*Ann. Statist.* **48**，3366–3394。Zhu, L., Xu, K., Li, R. 和 Zhong, W.（2017），‘两个随机向量之间的投影相关’，*Biometrika* **104**，829–843。

《多模态成像数据复杂依赖关系的统计推断》补充材料

在这份补充材料中，我们展示了一些额外的模拟结果、HCP数据分析的更多细节，以及论文主要结果的证明。在整个补充材料中，我们用 C 表示一个一般的正数，该数在不同用法中可能有所不同。

A 补充模拟结果

A.1 $K = 20$ 和40的模拟结果

我们首先在表 S1（$K = 20$）和表 S3（$K = 40$）中展示全局检验的经验检验水平和检验功效，并在表 S2（$K = 20$）和表 S4（$K = 40$）中报告多重检验的经验假发现率和检验功效。

A.2 新的模拟设置

我们考虑一种新的模拟设置，以比较所提出的多重方法与 JdCov、dHSIC 和 GdCov 方法在问题（a）检验中的表现。我们首先将整个图像模板的 V个体素划分为 G 个预定义脑区 $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_G$，每个脑区 $\mathcal{R}_g$ 包含相同数量的体素 $p_r = V/G$ ；然后使用 k- 均值聚类方法，将每个脑区 $\mathcal{R}_g$ 划分为 S 个子区域$\mathcal{R}_g^{(1)}, \ldots, \mathcal{R}_g^{(S)}$，其中 $S = p_r/10$。令 $v \in [V]$ 表示体素的索引。体素 v 的坐标记为 $h_v \in \mathbb{R}^2$， $\mathcal{R}_g^{(s)}$中心的坐标记为 $\bar{h}_g^{(s)}$。令 $Y_j^{(i)}$ （v）表示受试者 i在体素 v 处的 j 型图像信号。对于每个 $i \in [n]$、 $j \in [J]$ 和 $v \in [V]$，假设 $Y_{(i)\,j}$ （v）由以下方式生成

$$Y_j^{(i)}(v) = \sum_{j'=1}^{J} d_{j,j'}(v) f_{j,j'}\{\alpha_{j,j'}^{(i)}(v)\}\,, \tag{S.1}$$

其中 $d_{j,\ j'}(v) = \sum_{g=1}^{G} \delta_{j,\ j',\ g} I(v \in \mathcal{R}_g)$，其中 $\delta_{j,\ j',\ g} \geq 0$ 对任意 j， $j' \in [J]$均成立。对任意 $i \in [n]$ 以及满足 $j \leq j'$ 的 $(j,\ j')$， $\{\alpha_{j,j'}^{(i)}(v)\}_{v \in \mathcal{R}}$ 均由高斯过程独立生成，使用

表 S1： 针对式（1.1）–（1.3）中问题（a）–（c）的检验问题，所提出的全局检验在 $K = 20$ 下的经验尺寸和检验功效。以下报告的所有数值均乘以 100。

				问题（a）			问题（b）			问题（c）		
	G	n	V	$L=1$	$L=3$	$L=5$	$L=1$	$L=3$	$L=5$	$L=1$	$L=3$	$L=5$
全局尺寸	16	300	100^2	6.30	5.30	5.20	6.90	4.60	4.20	7.80	5.50	3.30
			200^2	7.50	7.10	5.60	10.20	5.90	3.80	8.30	6.10	4.90
			500^2	8.60	7.50	7.30	11.10	7.10	4.40	9.40	6.00	3.40
		600	100^2	6.30	6.20	5.40	6.80	4.50	3.40	2.90	2.30	1.60
			200^2	5.80	6.30	6.30	4.30	2.30	1.70	4.00	2.60	1.90
			500^2	6.50	5.90	5.40	5.60	3.90	2.40	4.30	2.50	1.50
		900	100^2	5.90	4.80	5.50	3.30	2.40	2.00	4.60	2.60	2.50
			200^2	3.70	4.30	4.40	3.10	2.10	2.00	3.70	2.60	2.00
			500^2	3.70	4.10	3.70	4.20	3.00	2.40	3.90	1.90	1.50
	25	300	100^2	9.60	8.50	7.10	8.20	5.00	3.00	9.00	5.80	3.70
			200^2	8.90	7.30	5.70	7.90	5.30	3.70	11.60	7.60	4.90
			500^2	9.40	6.20	5.40	8.70	6.70	4.70	11.90	10.60	8.80
		600	100^2	4.90	4.40	3.80	4.80	4.00	2.10	6.90	3.20	2.20
			200^2	5.50	5.60	5.90	4.40	2.60	1.90	5.90	3.50	2.20
			500^2	6.00	5.00	4.60	3.70	3.20	2.20	5.10	2.70	1.90
		900	100^2	5.50	4.60	4.70	3.20	2.20	1.70	4.60	2.80	2.20
			200^2	3.90	3.40	3.30	3.90	2.10	2.30	3.90	2.80	2.20
			500^2	5.10	5.10	4.60	4.20	2.20	1.80	3.80	3.20	2.50
全局检验功效	16	300	100^2	100.00	100.00	100.00	98.50	99.80	99.90	94.00	99.10	99.70
			200^2	100.00	100.00	100.00	98.40	100.00	100.00	93.70	99.10	99.60
			500^2	100.00	100.00	100.00	98.40	100.00	100.00	99.70	99.60	99.80
		600	100^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			200^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			500^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
		900	100^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			200^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			500^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
	25	300	100^2	100.00	100.00	100.00	99.10	100.00	100.00	99.10	99.80	99.90
			200^2	100.00	100.00	100.00	99.70	99.90	100.00	96.80	99.10	99.20
			500^2	100.00	100.00	100.00	99.20	99.90	100.00	97.20	99.20	99.30
		600	100^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			200^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			500^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
		900	100^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			200^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			500^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

表 S2： 对于式（1.1）–（1.3）中分别给出的问题（a）–（c），所提出的带有 $K = 20$ 的多重检验的经验假发现率和检验功效。以下报告的所有数值均乘以 100。

			经验假发现率						经验功效					
			问题（a）		问题（b）		问题（c）		问题（a）		问题（b）		问题（c）	
G	n	V	$L=1$	$L=3$	$L=1$	$L=3$	$L=1$	$L=3$	$L=1$	$L=3$	$L=1$	$L=3$	$L=1$	$L=3$
16	300	100^2	2.29	2.62	3.47	4.70	7.20	2.16	99.95	99.65	29.09	56.11	22.07	32.05
		200^2	3.06	2.92	3.54	4.27	7.58	2.18	99.95	99.78	28.65	55.48	22.07	32.20
		500^2	2.45	2.82	3.34	4.57	6.02	3.30	99.98	99.83	29.29	55.60	19.35	29.89
	600	100^2	3.29	3.50	4.39	6.63	4.58	5.06	100.00	100.00	91.01	97.89	81.35	92.26
		200^2	2.92	3.14	4.61	6.51	4.54	5.10	100.00	100.00	91.03	97.98	81.45	92.53
		500^2	2.90	3.49	4.83	6.62	3.17	4.15	100.00	100.00	91.64	97.95	79.49	92.04
	900	100^2	2.96	3.53	5.06	7.32	4.96	6.37	100.00	100.00	99.57	99.87	99.18	99.81
		200^2	3.38	3.72	5.28	7.19	4.97	6.25	100.00	100.00	99.60	99.89	99.20	99.82
		500^2	3.47	3.82	5.13	7.02	4.19	5.55	100.00	100.00	99.61	99.89	99.16	99.66
25	300	100^2	3.47	3.70	5.24	7.80	6.13	3.25	100.00	100.00	23.91	59.96	16.07	26.85
		200^2	3.84	3.71	5.87	7.98	8.58	3.77	99.95	99.78	24.51	61.25	15.30	26.88
		500^2	4.01	3.71	5.69	8.17	8.98	3.25	100.00	99.80	24.52	60.31	15.40	26.26
	600	100^2	4.06	4.68	5.49	8.66	4.53	5.18	100.00	100.00	90.72	96.98	84.18	93.35
		200^2	3.77	3.67	5.59	8.52	4.33	5.13	100.00	100.00	90.20	97.20	84.79	93.25
		500^2	3.63	4.07	5.64	8.46	4.11	5.29	100.00	100.00	91.00	97.19	85.04	93.40
	900	100^2	3.55	4.26	5.31	8.79	4.56	6.09	100.00	100.00	99.27	99.86	98.57	99.52
		200^2	3.95	4.71	5.89	9.04	4.35	6.09	100.00	100.00	99.24	99.83	98.68	99.58
		500^2	3.68	4.05	5.49	9.25	4.31	5.52	100.00	100.00	99.28	99.86	98.50	99.55

表 S3： 在（1.1）–（1.3）中分别给出的检验问题（a）–（c）下，所提出的采用 $K = 40$ 的全局检验的经验尺寸和检验效能。下文报告的所有数值均乘以 100。

				问题（a）			问题（b）			问题（c）		
	G	n	V	$L=1$	$L=3$	$L=5$	$L=1$	$L=3$	$L=5$	$L=1$	$L=3$	$L=5$
全局尺寸	16	300	100^2	6.30	5.70	5.50	3.40	2.80	2.30	4.80	1.90	1.00
			200^2	4.70	4.00	4.10	3.30	2.50	1.80	3.80	2.00	0.80
			500^2	4.80	3.90	3.50	3.30	1.50	1.40	4.20	2.20	1.60
		600	100^2	3.40	3.00	2.60	4.50	2.20	1.50	4.10	2.40	2.10
			200^2	4.80	4.80	4.40	4.60	2.40	1.70	3.80	2.40	1.80
			500^2	4.50	4.50	4.30	4.20	2.50	1.80	2.40	1.90	1.60
		900	100^2	4.60	4.00	3.40	2.90	1.40	0.90	3.80	2.10	1.60
			200^2	4.00	4.70	4.20	3.40	2.30	1.90	3.30	2.80	2.50
			500^2	4.40	4.10	4.00	4.90	3.60	2.60	3.30	1.90	1.30
	25	300	100^2	5.90	5.90	4.90	4.50	2.50	1.20	3.50	2.10	0.90
			200^2	5.60	5.20	4.80	4.80	2.60	2.10	4.80	2.00	0.80
			500^2	5.50	5.00	3.70	5.00	3.60	1.80	5.60	3.30	2.30
		600	100^2	3.70	3.40	3.50	4.40	2.40	1.70	4.70	3.20	2.20
			200^2	3.50	3.00	2.60	4.80	2.10	1.60	3.90	2.30	1.80
			500^2	6.10	4.60	4.00	4.00	2.40	1.70	5.10	3.10	2.10
		900	100^2	3.60	3.50	3.10	4.30	1.80	1.60	2.30	1.20	0.70
			200^2	5.20	4.00	3.50	2.60	1.90	2.00	3.10	2.30	1.50
			500^2	4.60	4.30	4.00	3.80	2.30	1.90	3.80	1.80	0.70
全局检验功效	16	300	100^2	100.00	100.00	100.00	83.90	97.70	99.10	75.10	91.70	94.90
			200^2	100.00	100.00	100.00	84.70	97.40	99.20	77.00	92.30	96.10
			500^2	100.00	100.00	100.00	83.30	97.30	99.30	74.60	91.70	94.10
		600	100^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			200^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			500^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
		900	100^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			200^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			500^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
	25	300	100^2	100.00	100.00	100.00	82.30	96.10	98.50	70.10	89.70	94.80
			200^2	100.00	100.00	100.00	83.10	97.20	99.00	71.10	88.70	92.00
			500^2	100.00	100.00	100.00	83.20	97.60	98.80	69.40	86.70	92.40
		600	100^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			200^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			500^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
		900	100^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			200^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
			500^2	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

表 S4： 针对公式 (1.1)–(1.3) 中分别给出的问题（a）–（c），采用 $K = 40$ 的所提出多重检验的经验假发现率和检验功效。以下报告的所有数值均乘以 100。

			经验假发现率						经验功效					
			问题（a）		问题（b）		问题（c）		问题（a）		问题（b）		问题（c）	
G	n	V	$L=1$	$L=3$	$L=1$	$L=3$	$L=1$	$L=3$	$L=1$	$L=3$	$L=1$	$L=3$	$L=1$	$L=3$
16	300	100^2	2.21	2.50	3.14	2.92	5.58	2.47	99.28	98.18	16.02	39.53	12.00	20.41
		200^2	2.40	2.18	2.95	2.54	5.70	2.68	99.60	99.05	16.29	39.91	11.54	20.54
		500^2	2.39	2.66	3.34	2.95	6.07	2.63	99.73	99.18	16.25	39.70	11.61	20.21
	600	100^2	2.41	2.53	2.65	4.25	1.58	1.78	100.00	100.00	80.49	95.47	59.57	81.41
		200^2	1.89	2.17	2.56	4.34	1.54	1.98	100.00	100.00	81.11	95.41	59.49	80.79
		500^2	2.36	2.39	2.77	3.96	1.60	2.15	100.00	100.00	79.79	95.34	58.75	82.34
	900	100^2	2.13	2.42	3.41	4.63	2.69	2.87	100.00	100.00	99.25	99.85	97.83	99.18
		200^2	2.21	2.23	3.09	4.18	2.63	2.82	100.00	100.00	99.06	99.82	97.91	99.27
		500^2	1.95	1.86	3.35	4.42	3.16	3.09	100.00	100.00	99.09	99.80	97.98	99.51
25	300	100^2	2.50	3.11	3.18	3.58	5.60	4.29	99.88	99.58	10.46	36.50	6.75	13.74
		200^2	2.87	2.89	5.34	3.87	6.67	4.26	99.63	99.08	10.54	36.57	6.46	13.16
		500^2	2.39	2.70	4.28	4.06	5.29	4.21	99.73	99.08	10.33	36.62	6.44	13.14
	600	100^2	2.17	2.09	3.45	4.72	3.60	3.21	100.00	100.00	82.83	94.35	71.10	87.27
		200^2	2.29	2.56	3.61	4.71	3.51	2.76	100.00	100.00	83.18	94.46	73.20	87.73
		500^2	2.12	2.31	3.43	4.86	3.18	3.36	100.00	100.00	83.15	94.56	73.08	87.67
	900	100^2	2.36	2.48	3.66	5.11	2.77	3.06	100.00	100.00	98.74	99.65	97.50	99.25
		200^2	2.82	2.84	3.49	5.14	2.96	3.16	100.00	100.00	98.66	99.75	97.59	99.25
		500^2	2.49	2.85	3.62	5.03	2.87	3.18	100.00	100.00	98.75	99.71	97.25	98.98

Karhunen-Lo`eve 展开方法，采用 31 个基函数和协方差函数

$$\kappa_\alpha(v,v') = \sum_{g=1}^{G}\sum_{s=1}^{S} \exp\{-0.001(|h_v - \bar{h}_g^{(s)}|_2^2 + |h_{v'} - \bar{h}_g^{(s)}|_2^2) - 0.01|h_v - h_{v'}|_2^2\} I(v,v' \in \mathcal{R}_g^{(s)}) .$$

对于 $j > j'$，令 $\alpha_{j\,j'}^{(i)}$、(v) $= \alpha_{j'\,j}^{(i)}$、(v)。我们设定 $J = 3$、 $G = 25$ 和 $n \in \{300, 600, 900\}$。令影像尺寸为 100、150、200、250 和 300，则分别为 $V = 100^2$、1502、2002、2502 和 300^2,。考虑模态之间的非线性依赖，其中 f_{j}、$_{j'}$(x) $= x^2$ 对于 (j, j′) =(2, 1)，而 f_{j}、$_{j'}$(x) $= x$ 在其他情况下成立。对于任意 j、 $j' = 1$、 2 、 3 和 $g = 1$，.....25，令

$$\delta_{j,j',g} = \{I(j = 1, j' = 2) + I(j = 3, j' = 3)\} I(1 \le g \le 25) + I(j = 2, j' = 1) I(1 \le g \le 5) + I(j = 2, j' = 2) I(6 \le g \le 25),$$

这表明，只有当 $g \in \{1, \ldots, 5\}$ 时，三个模态才不是相互独立的。

所提出的多重检验和三种对比方法的经验假发现率和检验功效见表S5。所提出的检验通过分布式算法实现，使用$K = 30$ 和 $N = 5000$。除 JdCov 的结果仅基于 100 次重复试验（因为其计算时间过长）外，所有模拟结果均基于 1000 次重复试验。对于检验问题 (a)，在此设置下有 (Q， Q_0) =(25，20)，根据定理 3，错误发现率应控制在 $\alpha Q_0/Q = 4.00$%以内。可以观察到，尽管当 $n = 300$ 时，所提出方法的经验假发现率略高于 4。00%，但当 n 增至 600 和 900 时，其假发现率均得到良好控制，维持在 4。00% 左右。GdCov 和 JdCov 方法在大多数情景下也能控制经验假发现率，而 dHSIC 检验得到的经验假发现率则非常低。然而，三种竞争方法的经验检验效能会随着 V 增大而下降。 V 增大时，所提出的方法不会遭受明显的检验功效损失。

B HCP 数据分析的更多细节

区域间模态独立性检验 对于多重检验，图 S1 展示了各脑区的负对数$_{10}$(p 值)，其中当 p 值 < 0.0001时，数值设为 5。根据我们的分析，语言加工、工作记忆和社会认知

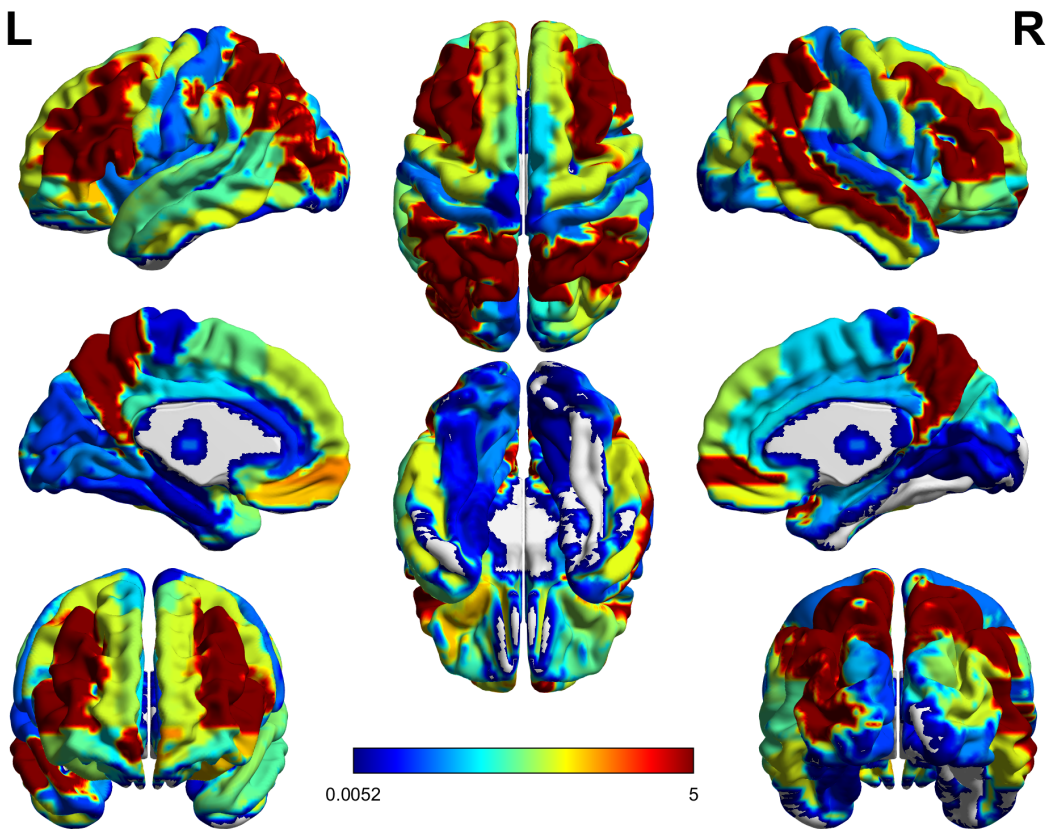


图 S1： 逐脑区的“–对数$_{10}$(p 值)”，用于检验工作记忆（2bk-0bk）、语言加工（story-math）和社会认知（mental）脑活动在各脑区是否存在依赖关系。若 p值 < 0.0001，则设置 –对数$_{10}$(p 值) $= 5$ 。灰色区域在分析中不予考虑。

表S5： 对于检验问题（a），所提出的多重检验方法（ $K = 30$和 $L = 1$）及三种竞争方法（JdCov、dHSIC、GdCov）的经验假发现率和检验功效。以下所有数值均乘以100。除JdCov的结果仅基于100次重复试验外，所有模拟结果均基于1000次重复试验。

		经验假发现率				经验功效			
n	V	所提出的方法	JdCov	dHSIC	GdCov	提出的	JdCov	dHSIC	GdCov
300	100^2	6.74	10.08	0.10	4.01	72.32	16.40	0.30	66.24
	150^2	6.96	8.33	0.00	5.30	76.26	4.40	0.00	45.82
	200^2	6.00	8.00	0.00	7.10	76.84	1.60	0.00	36.46
	250^2	5.60	10.00	0.00	8.44	78.70	1.00	0.00	33.50
	300^2	5.58	5.00	0.00	7.93	78.98	0.60	0.00	30.18
600	100^2	3.66	4.22	0.07	3.13	98.28	70.40	78.48	95.08
	150^2	4.24	6.42	0.10	4.90	99.02	13.20	0.02	68.46
	200^2	4.04	12.00	0.00	6.20	99.18	4.20	0.00	50.84
	250^2	3.80	9.33	0.00	6.32	99.36	1.60	0.00	41.56
	300^2	4.27	6.50	0.00	7.56	99.28	1.20	0.00	37.56
900	100^2	3.58	2.85	0.18	3.38	99.96	97.00	99.96	99.72
	150^2	3.39	7.68	0.00	3.72	100.00	36.80	8.28	85.66
	200^2	3.62	8.33	0.00	4.43	100.00	11.80	0.00	64.28
	250^2	3.65	11.33	0.00	5.63	100.00	5.00	0.00	51.64
	300^2	3.31	12.50	0.00	7.56	99.96	3.20	0.00	43.26

在额下回的大部分区域（左额下回盖部、左额下回三角部、右额下回三角部），脑活动之间存在具有统计显著性的强依赖关系；而在扣带皮层的大部分区域（左前扣带回、右前扣带回、左中扣带回、右中扣带回、左后扣带回、右后扣带回），三种脑活动之间的依赖关系在统计上并不显著，这表明扣带皮层中的三种功能磁共振成像任务活动存在更多个体差异。众所周知，额下回（Becker 2013）和前扣带皮层（Lenartowicz and McIntosh 2005）分别与语言加工和工作记忆任务（Barch et al 2013）相关。

C 辅助引理

引理 1. 如果 $B\{\text{对数}(dB)\}^2 = o(n)$，则有 $|\hat{}\Sigma_n - \Sigma_n|_\infty = O_{\mathrm{p}}[n^{-1/2}B^{3/2}\{\text{对数}(dB)\}^{1/2}] + O_{\mathrm{p}}[n^{-1}B^2\{\text{对数}(dB)\}^2]$。

证明。 注意，对于任意 $m \in [M]$， $\mathbb{E}(U_m)$ 都是一个常向量。记 $\mu = \mathbb{E}(U_m)$，并定义 $H_j = M^{-1}\sum_{m=j+1}^{M}\mathbb{E}\{(U_m - \mu)(U_{m-j} - \mu)^\top\}$，其中 $j \geq 0$，以及 $H_j = M^{-1}\sum_{m=-j+1}^{M}\mathbb{E}\{(U_{m+j} - \mu)(U_m - \mu)^\top\}$，其中 $j < 0$。于是 $\Sigma_n = \sum_{j=-B+1}^{B-1} H_j$。记 $H_j = (H_{j,\ k,\ l})_{k,\ l\in[d]}$， $\hat{}H_j = (\hat{} H_{j,\ k,\ l})_{k,\ l\in[d]}$，

$\bar{U} = (U_1, \ldots, U_d)^\top$ 以及 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)^\top$。对于任意 $j \in \{0\} \cup [B-1]$ 和 $k, l \in [d]$，有

$$\begin{aligned}\hat{H}_{j,k,l} - H_{j,k,l} = \frac{1}{M}\sum_{m=j+1}^{M}\{U_{m,k}U_{m-j,l} - \mathbb{E}(U_{m,k}U_{m-j,l})\} \\ - \frac{M-j}{M}\big[\bar{U}_l\{\bar{U}_{k,(j+1)} - \mu_k\} + \bar{U}_k\{\bar{U}_l^{(M-j)} - \mu_l\}\big] \\ + \frac{M-j}{M}(\bar{U}_l - \mu_l)(\bar{U}_k - \mu_k)\end{aligned}$$

其中 $\bar{U}_{k,\,(j+1)} = (M-j)^{-1}\sum_{m=j+1}^{M} U_{m,\,k}$ 以及 $\bar{U}_l^{(M-j)} = (M-j)^{-1}\sum_{m=j+1}^{M} U_{m-j,\,l}$。注意，$\max_{m\in[M]}\max_{j\in[d]}|U_{m,\,j}| \le C$。于是我们有

$$\begin{aligned}|\hat{H}_j - H_j|_\infty &= \max_{k,l\in[d]}|\hat{H}_{j,k,l} - H_{j,k,l}| \\ &\lesssim \max_{k,l\in[d]}\left|\frac{1}{M-j}\sum_{m=j+1}^{M}\{U_{m,k}U_{m-j,l} - \mathbb{E}(U_{m,k}U_{m-j,l})\}\right| \\ &\quad + \max_{k\in[d]}|\bar{U}_{k,(j+1)} - \mu_k| + \max_{l\in[d]}|\bar{U}_l^{(M-j)} - \mu_l| + \max_{l\in[d]}|\bar{U}_l - \mu_l|^2 \\ &=: I_{1,j} + I_{2,j} + I_{3,j} + I_4\,. \end{aligned} \tag{S.2}$$

接下来，我们分别对 (S.2) 中的 $I_{1,\,j}$、$I_{2,\,j}$、$I_{3,\,j}$ 以及 I_4 进行界定。注意，$\{U_m - \mu_m\}$ 是一个 $(B-1)$-相关序列，且其分量一致有界。回顾 $M \asymp n$。应用 Chang、Chen 和 Wu (2021) 的引理 7，取 $(B_{\tilde{n}},\ L_{\tilde{n}},\ j_{\tilde{n}},\ r_1,\ r_2) = (1,\ B-1,\ 0,\ 2,\ \infty)$，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\bigg(\max_{l\in[d]}|\bar{U}_l - \mu_l| \ge z\bigg) &\le \sum_{l=1}^{d}\mathbb{P}\big(|\bar{U}_l - \mu_l| \ge z\big) \\ &\lesssim d\exp(-CB^{-1}nz^2) + d\exp(-CB^{-1/2}n^{1/2}z^{1/2})\end{aligned}$$

对于任意 $z > 0$，这意味着

$$\mathbb{P}(I_4 \ge z) \lesssim d\exp(-CB^{-1}nz) + d\exp(-CB^{-1/2}n^{1/2}z^{1/4}) \tag{S.3}$$

对于任意 $z > 0$。类似地，由于 $B = o(n)$，我们也有

$$\mathbb{P}\bigg(\max_{j\in\{0\}\cup[B-1]} I_{1,j} \ge z\bigg) \lesssim d^2B\exp(-CB^{-1}nz^2) + d^2B\exp(-CB^{-1/2}n^{1/2}z^{1/2})\,,$$

$$\mathbb{P}\left(\max_{j\in\{0\}\cup[B-1]} I_{2,j} \geq z\right) \lesssim dB\exp(-CB^{-1}nz^2) + dB\exp(-CB^{-1/2}n^{1/2}z^{1/2}),$$
$$\mathbb{P}\left(\max_{j\in\{0\}\cup[B-1]} I_{3,j} \geq z\right) \lesssim dB\exp(-CB^{-1}nz^2) + dB\exp(-CB^{-1/2}n^{1/2}z^{1/2})$$

对于任意 $z>0$。结合 (S.3)，(S.2) 可得

$$\mathbb{P}\left(\max_{j\in\{0\}\cup[B-1]} |\hat{H}_j - H_j|_\infty \geq z\right) \lesssim d^2B\exp(-CB^{-1}nz^2) + d^2B\exp(-CB^{-1/2}n^{1/2}z^{1/2})$$

对于任意 $z=o(1)$。同样，我们也有

$$\mathbb{P}\left(\max_{-j\in[B-1]} |\hat{H}_j - H_j|_\infty \geq z\right) \lesssim d^2B\exp(-CB^{-1}nz^2) + d^2B\exp(-CB^{-1/2}n^{1/2}z^{1/2})$$

对于任意 $z=o(1)$。注意到 $\hat{\Sigma}_n - \Sigma_n = \sum_{j=-B+1}^{B-1}(\hat{H}_j - H_j)$。因此，

$$\mathbb{P}(|\hat{\Sigma}_n - \Sigma_n|_\infty \geq z) \lesssim d^2B\exp(-CB^{-3}nz^2) + d^2B\exp(-CB^{-1}n^{1/2}z^{1/2}) \tag{S.4}$$

对于任意 $z=o(B)$，这意味着 $|\hat{\Sigma}_n - \Sigma_n|_\infty = O_{\mathrm{p}}[n^{-1/2}B^{3/2}\{\text{对数}(dB)\}^{1/2}] + O_{\mathrm{p}}[n^{-1}B^2\{\text{对数}(dB)\}^2]$，前提是 $B\{\text{对数}(dB)\}^2 = o(n)$。 □

D 命题1的证明

定义 $\mathring{T}_n = \sqrt{M}D_n^{-1/2}\bar{U}$ 和 $\mathring{W}_{n,L} = f_L(\mathring{T}_n)$。回顾 $\mathcal{F} = \{v = (v_1,\ldots,v_d)^\top : v_j \in \{0,1\}$ 对于每个 $j\in[d]$，以及 $|v|_0 = L\}$。由于集合 $\mathcal{F}$的可数性，我们可以按某种顺序将 $\mathcal{F}$ 中的所有元素依次编号为 $\{\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_{|\mathcal{F}|}\}$，并定义一个新的序列 $\{U_m^\dagger\}_{m=1}^M$，其中$U_m^\dagger = (U_m^\dagger, 1, \ldots, U_{m,|\mathcal{F}|}^\dagger)^\top := (\tilde{v}_1^\top D_n^{-1/2}U_m, \ldots, \tilde{v}_{|\mathcal{F}|}^\top D_n^{-1/2}U_m)^\top$。记 $S_{U^\dagger} = M^{-1/2}\sum_{m=1}^M U_m^\dagger = (S_{U^\dagger,1}, \ldots, S_{U^\dagger,|\mathcal{F}|})^\top$。我们有

$$\{\mathring{W}_{n,L} \leq z\} = \left\{\max_{v\in\mathcal{F}} \sqrt{M}v^\top D_n^{-1/2}\bar{U} \leq z\right\} = \{S_{U^\dagger} \leq z\cdot 1_{|\mathcal{F}|}\}, \tag{S.5}$$

其中，$1_{|\mathcal{F}|}$ 是一个 $|\mathcal{F}|$维向量，所有分量均为 1。回顾 $R_n = D_n^{-1/2}\Sigma_n D_n^{-1/2}$。令 $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_d)^\top \sim \mathcal{N}(0, R_n)$，且 $g = V^\top\xi$满足 $V = (\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_{|\mathcal{F}|})$。那么 $\mathrm{Cov}(S_{U^\dagger}) =$

$V^\top R_n V = \mathrm{Cov}(g)$。与 (S.5) 相同，我们还有

$$\{f_L(\xi) \le z\} = \left\{ \max_{j\in[|\mathcal{F}|]} \tilde{v}_j^\top \xi \le z \right\} = \{g \le z \cdot 1_{|\mathcal{F}|}\}\,. \tag{S.6}$$

回想一下，$\{U_m^\dagger\}_{m=1}^M$也是一个（$B-1$）相关序列，且 $\max_{m\in[M],j\in[|\mathcal{F}|]} |U_{m,j}^\dagger| \le CL$。注意，$\mathrm{Var}(S_{U^\dagger,j}) = \tilde{v}_j^\top R_n \tilde{v}_j \ge \min_{v\in\mathcal{F}} v^\top R_n v \ge C$对所有满足 $|\mathcal{F}| = C_d^L = d!/\{L!(d-L)!\}$的 $j \in |\mathcal{F}|$ 一致成立。应用 Chang、Chen 和 Wu（2021）的推论1，令 $B_n = CL$ 和$m = B-1$，可得

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^{|\mathcal{F}|}} \left|\mathbb{P}(S_{U^\dagger} \le y) - \mathbb{P}(g \le y)\right| \lesssim \frac{B^{2/3}L(\log|\mathcal{F}|)^{7/6}}{n^{1/6}} \lesssim \frac{B^{2/3}L^{13/6}(\log d)^{7/6}}{n^{1/6}}\,. \tag{S.7}$$

结合（S.5）和（S.6），可得

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} \left|\mathbb{P}\big(\mathring{W}_{n,L} \le z\big) - \mathbb{P}\{f_L(\xi) \le z\}\right| \lesssim \frac{B^{2/3}L^{13/6}(\log d)^{7/6}}{n^{1/6}}\,. \tag{S.8}$$

对于任意 $z \in \mathbb{R}$ 和 $\epsilon > 0$，有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_{n,L} > z) &= \mathbb{P}(W_{n,L} > z, |W_{n,L} - \mathring{W}_{n,L}| > \epsilon) + \mathbb{P}(W_{n,L} > z, |W_{n,L} - \mathring{W}_{n,L}| \le \epsilon) \\ &\le \mathbb{P}(|W_{n,L} - \mathring{W}_{n,L}| > \epsilon) + \mathbb{P}(\mathring{W}_{n,L} > z - \epsilon)\,.\end{aligned}$$

因此，由（S.8）和纳扎罗夫不等式（Chernozhukov、Chetverikov 和 Kato，2017，引理 A.1），可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_{n,L} > z) - \mathbb{P}\{f_L(\xi) > z\} &\le \mathbb{P}(|W_{n,L} - \mathring{W}_{n,L}| > \epsilon) + \mathbb{P}\{z - \epsilon < f_L(\xi) \le z\} \\ &\quad + \mathbb{P}(\mathring{W}_{n,L} > z - \epsilon) - \mathbb{P}\{f_L(\xi) > z - \epsilon\} \\ &\lesssim \mathbb{P}(|W_{n,L} - \mathring{W}_{n,L}| > \epsilon) + \frac{B^{2/3}L^{13/6}(\log d)^{7/6}}{n^{1/6}} + \epsilon(L\log d)^{1/2}\end{aligned} \tag{S.9}$$

对于任意 $z \in \mathbb{R}$ 和 $\epsilon > 0$。另一方面，可以推导出

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_{n,L} > z) &\ge \mathbb{P}(W_{n,L} > z, \mathring{W}_{n,L} > z + \epsilon) \\ &= \mathbb{P}(\mathring{W}_{n,L} > z + \epsilon) - \mathbb{P}(W_{n,L} \le z, \mathring{W}_{n,L} > z + \epsilon)\end{aligned}$$

$$\geq \mathbb{P}(\mathring{W}_{n,L} > z + \epsilon) - \mathbb{P}(|W_{n,L} - \mathring{W}_{n,L}| > \epsilon)\,.$$

再次应用纳扎罗夫不等式和 (S.8)，可得

$$\mathbb{P}(W_{n,L} > z) - \mathbb{P}\{f_L(\xi) > z\} \gtrsim -\mathbb{P}(|W_{n,L} - \mathring{W}_{n,L}| > \epsilon) - \frac{B^{2/3}L^{13/6}(\log d)^{7/6}}{n^{1/6}} - \epsilon(L\log d)^{1/2}$$

对于任意 $z \in \mathbb{R}$ 和 $\epsilon > 0$。结合 (S.9)，可得

$$\begin{aligned}&\sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(W_{n,L} > z) - \mathbb{P}\{f_L(\xi) > z\}| \\ &\qquad \lesssim \mathbb{P}(|W_{n,L} - \mathring{W}_{n,L}| > \epsilon) + \frac{B^{2/3}L^{13/6}(\log d)^{7/6}}{n^{1/6}} + \epsilon(L\log d)^{1/2}\,. \end{aligned} \tag{S.10}$$

回忆 $D_n = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots\ldots, \sigma_d^2)$ 和 $\hat{} D_n = \mathrm{diag}(\hat{}\sigma_1^2, \ldots\ldots, \hat{}\sigma_d^2)$。可得 $|T_n - \mathring{T}_n|_\infty \leq \sqrt{M}|\hat{} D_n^{-1/2} - D_n^{-1/2}|_\infty |\bar{U}|_\infty$，这意味着 $|W_{n,\ L} - \mathring{W}_{n,\ L}| \leq L|T_n - \mathring{T}_n|_\infty \leq L\sqrt{M}|\hat{} D_n^{-1/2} - D_n^{-1/2}|_\infty |\bar{U}|_\infty$。为了对某个 $\epsilon = o(1)$ 下的 $\mathbb{P}(|W_{n,\ L} - W_{n,\ L}| > \epsilon)$ 进行界定，只需分别给出任意 $z = o(1)$ 下 $\mathbb{P}(|\hat{} D_n^{-1/2} - D_n^{-1/2}|_\infty > z)$ 和 $\mathbb{P}(|\bar{U}|_\infty > z)$ 的上界。注意，在 H_0 下，$\mathbb{E}(\bar{U}) = 0$。正如我们在引理 1 的证明中所示，在 H_0 下可得

$$\mathbb{P}(|\bar{U}|_\infty > z) \lesssim\ d\exp(-CB^{-1}nz^2) + d\exp(-CB^{-1/2}n^{1/2}z^{1/2})$$

对于任意 $z > 0$。另一方面，由于 $\max_{l\in[d]} |\hat{}\sigma_l^2 - \sigma_l^2| \leq |\hat{}\Sigma_n - \Sigma_n|_\infty$，由 (S.4) 可得

$$\mathbb{P}\left(\max_{l\in[d]} |\hat{\sigma}_l^2 - \sigma_l^2| \geq z\right) \lesssim d^2B\exp(-CB^{-3}nz^2) + d^2B\exp(-CB^{-1}n^{1/2}z^{1/2})$$

对于任意 $z = o(B)$。由于 $\min_{l\in[d]} \sigma_l^2 \geq c_1$，因此我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\min_{l\in[d]} \hat{\sigma}_l^2 \leq \frac{c_1}{2}\right) &\leq \mathbb{P}\left\{\min_{l\in[d]}(\hat{\sigma}_l^2 - \sigma_l^2) + \min_{l\in[d]}\sigma_l^2 \leq \frac{c_1}{2}\right\} \\ &\leq \mathbb{P}\left(\max_{l\in[d]} |\hat{\sigma}_l^2 - \sigma_l^2| \geq \frac{c_1}{2}\right) \lesssim d^2B\exp(-CB^{-3}n) + d^2B\exp(-CB^{-1}n^{1/2})\,. \end{aligned} \tag{S.11}$$

若 $B^2\log(dB)\cdot\max\{B,\log(dB)\} = o(n)$，我们知道事件 $\mathcal{E} = \{\min_{l\in[d]} \hat{}\sigma_l^2 > c_1/2\}$ 以趋近于 1 的概率发生。在事件 $\mathcal{E}$ 的条件下，我们有 $\max_{l\in[d]} |\hat{}\sigma_l^{-1} - \sigma_l^{-1}| \leq$

$\tilde{c}\max_{l\in[d]}|\hat{\sigma}_l^2-\sigma_l^2|$，其中 $\tilde{c}>0$ 是某个普适常数。因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\bigg(\max_{l\in[d]}|\hat{\sigma}_l^{-1}-\sigma_l^{-1}|\geq z\bigg)&\leq\mathbb{P}\bigg(\max_{l\in[d]}|\hat{\sigma}_l^2-\sigma_l^2|\geq\tilde{c}^{-1}z\bigg)+\mathbb{P}\bigg(\min_{l\in[d]}\hat{\sigma}_l^2\leq\frac{c_1}{2}\bigg)\\&\lesssim d^2B\exp(-CB^{-3}nz^2)+d^2B\exp(-CB^{-1}n^{1/2}z^{1/2})\end{aligned}\tag{S.12}$$

对于任意 $z=o(1)$。由于 $|W_{n,L}-\mathring{W}_{n,L}|\leq LM^{1/2}|\hat{D}_n^{-1/2}-D_n^{-1/2}|_\infty|\bar{U}|_\infty\leq Ln^{1/2}|\bar{U}|_\infty$ 最大 $_{l\in[d]}|\hat{\sigma}_l^{-1}-\sigma_l^{-1}|$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(|W_{n,L}-\mathring{W}_{n,L}|>\epsilon\big)&\leq\mathbb{P}\bigg(\max_{l\in[d]}|\hat{\sigma}_l^{-1}-\sigma_l^{-1}|>B^{1/2}L^{-1/2}n^{-1/4}\epsilon^{1/2}\bigg)\\&\quad+\mathbb{P}(|\bar{U}|_\infty>B^{-1/2}L^{-1/2}n^{-1/4}\epsilon^{1/2})\\&\lesssim d^2B\exp(-CB^{-2}L^{-1}n^{1/2}\epsilon)+d^2B\exp(-CB^{-3/4}L^{-1/4}n^{3/8}\epsilon^{1/4})\end{aligned}$$

对于任意 $\epsilon=o(1)$。由 (S.10)，可得

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(W_{n,L}>z)-\mathbb{P}\{f_L(\xi)>z\}|&\lesssim d^2B\exp\bigg(-\frac{Cn^{1/2}\epsilon}{B^2L}\bigg)+d^2B\exp\bigg(-\frac{Cn^{3/8}\epsilon^{1/4}}{B^{3/4}L^{1/4}}\bigg)\\&\quad+\frac{B^{2/3}L^{13/6}(\log d)^{7/6}}{n^{1/6}}+\epsilon(L\log d)^{1/2}.\end{aligned}$$

取 $\epsilon=n^{-1/6}B^{2/3}L^{5/3}(\log d)^{2/3}$，我们有

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(W_{n,L}>z)-\mathbb{P}\{f_L(\xi)>z\}|&\lesssim d^2B\exp\{-CB^{-4/3}n^{1/3}L^{2/3}(\log d)^{2/3}\}\\&\quad+d^2B\exp\{-CB^{-7/12}n^{1/3}L^{1/6}(\log d)^{1/6}\}\\&\quad+\frac{B^{2/3}L^{13/6}(\log d)^{7/6}}{n^{1/6}}.\end{aligned}\tag{S.13}$$

因此，$\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(W_{n,L}>z)-\mathbb{P}\{f_L(\xi)>z\}|=o(1)$，只要 $B^4L^{13}(\log d)^7=o(n)$，$B^4L^{-2}(\log B)^3\cdot(\log d)^{-2}=o(n)$ 和 $B^{7/4}L^{-1/2}(\log B)^3(\log d)^{-1/2}=o(n)$。我们完成了命题1 (i) 部分的证明。

记 $\mathcal{X}_n=\{X_1,\ldots,X_n\}$。要证明命题1的(ii)部分，只需证明 $\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}\{f_L(\xi)>z\}-\mathbb{P}\{f_L(\hat{\xi})>z\,|\,\mathcal{X}_n\}|=o_{\mathrm{p}}(1)$。回忆 $\xi\sim\mathcal{N}(0,R_n)$ 和 $\hat{\xi}\,|\,\mathcal{X}_n\sim\mathcal{N}(0,\hat{R}_n)$。我们定义 $\Delta_n=\max_{\check{v}_1,\check{v}_2\in\mathcal{F}}|\check{v}_1^\top(R_n-\hat{R}_n)\check{v}_2|$，并记 $\Gamma_n=D_n^{-1/2}$ 和 $\hat{\Gamma}_n=\hat{D}_n^{-1/2}$。对于任意 $\check{v}_1,\check{v}_2\in\mathcal{F}$，它

由三角不等式可得

$$|\check{v}_1^\top(R_n-\hat{R}_n)\check{v}_2| = |\check{v}_1^\top(\Gamma_n\Sigma_n\Gamma_n-\hat{\Gamma}_n\hat{\Sigma}_n\hat{\Gamma}_n)\check{v}_2|$$
$$\le |\check{v}_1^\top\Gamma_n\Sigma_n(\Gamma_n-\hat{\Gamma}_n)\check{v}_2| + |\check{v}_1^\top\Gamma_n(\Sigma_n-\hat{\Sigma}_n)\hat{\Gamma}_n\check{v}_2| + |\check{v}_1^\top(\Gamma_n-\hat{\Gamma}_n)\hat{\Sigma}_n\hat{\Gamma}_n\check{v}_2|\,,$$

这意味着

$$\Delta_n \le \max_{\check{v}_1,\check{v}_2\in\mathcal{F}}|\check{v}_1^\top\Gamma_n\Sigma_n(\Gamma_n-\hat{\Gamma}_n)\check{v}_2| + \max_{\check{v}_1,\check{v}_2\in\mathcal{F}}|\check{v}_1^\top\Gamma_n(\Sigma_n-\hat{\Sigma}_n)\hat{\Gamma}_n\check{v}_2| + \max_{\check{v}_1,\check{v}_2\in\mathcal{F}}|\check{v}_1^\top(\Gamma_n-\hat{\Gamma}_n)\hat{\Sigma}_n\hat{\Gamma}_n\check{v}_2|$$
$$=: I_1+I_2+I_3\,. \tag{S.14}$$

注意，$I_1 \le |\Sigma_n|_\infty \max_{\check{v}_1\in\mathcal{F}}|\Gamma_n\check{v}_1|_1 \max_{\check{v}_2\in\mathcal{F}}|(\Gamma_n-\hat{\Gamma}_n)\check{v}_2|_1 \lesssim BL^2|\Gamma_n-\hat{\Gamma}_n|_{\infty\circ}$ 根据 (S.12)，我们有 $I_1 = O_{\mathrm{p}}[n^{-1/2}B^{5/2}L^2\{\log(dB)\}^{1/2}]+O_{\mathrm{p}}[n^{-1}B^3L^2\{\log(dB)\}^2]$，前提是 $B^2\log(dB)\max\{B,\log(dB)\} = o(n)$。同样，我们还有 $I_2 = O_{\mathrm{p}}[n^{-1/2}B^{3/2}L^2\{\log(dB)\}^{1/2}]+O_{\mathrm{p}}[n^{-1}B^2L^2\{\log(dB)\}^2]$，以及 $I_3 = O_{\mathrm{p}}[n^{-1/2}B^{5/2}L^2\{\log(dB)\}^{1/2}]+O_{\mathrm{p}}[n^{-1}B^3L^2\{\log(dB)\}^2]$。因此，$\Delta_n = O_{\mathrm{p}}[n^{-1/2}B^{5/2}L^2\{\log(dB)\}^{1/2}]+O_{\mathrm{p}}[n^{-1}B^3L^2\{\log(dB)\}^2] = o_{\mathrm{p}}(1)$，若 $B^3L^2\log(dB)\cdot\max\{B^2L^2,\log(dB)\} = o(n)$。由 Chernozhukov、Chetverikov 和 Kato (2013) 的引理 3.1 可得

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}\{f_L(\xi)>z\}-\mathbb{P}\{f_L(\hat{\xi})>z\,|\,\mathcal{X}_n\}|$$
$$= \sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left(\max_{v\in\mathcal{F}}v^\top\xi\le z\right)-\mathbb{P}\left(\max_{v\in\mathcal{F}}v^\top\hat{\xi}\le z\,|\,\mathcal{X}_n\right)\right| \tag{S.15}$$
$$\lesssim \Delta_n^{1/3}\{1\vee\log(d^L/\Delta_n)\}^{2/3} = o_{\mathrm{p}}(1)$$

前提是 B^5L^8(对数 d)^4 对数$(dB) = o(n)$。 □

E 定理1的证明

ˆ 注意到 ˆcv$_{L,\alpha}$ 是给定 $\{X_1,\ldots,X_n\}$ 时 $f_L(\xi)$ 的 $(1-\alpha)$ 分位数，其中 ˆ $\xi\,|\,X_1,\ldots,X_n \sim \mathcal{N}(0,\hat{R}_n)$。根据命题1的(ii)部分，我们有 $\mathbb{P}_{H_0}(W_{n,L} > \hat{\mathrm{cv}}_{L,\alpha}) = \alpha+o(1)$，由此完成定理1的证明。 □

F 定理 2 的证明

记 $\mathcal{X}_n = \{X_1, \ldots, X_n\}$。回顾 $V = (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{|\mathcal{F}|}) \in \mathbb{R}^{d \times |\mathcal{F}|}$，其中 $\mathcal{F} = \{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{|\mathcal{F}|}\}$。令 $\hat{} g = V^\top \hat{} \xi$，其中 $\hat{} \xi \,|\, \mathcal{X}_n \sim \mathcal{N}(0, \hat{} R_n)$。则 $\hat{} g \,|\, \mathcal{X}_n \sim \mathcal{N}(0, V^\top \hat{} R_n V)$，并且

$$\mathbb{E}\big(|\hat{g}|_\infty \,|\, \mathcal{X}_n\big) \le \{1 + (2\log|\mathcal{F}|)^{-1}\}(2\log|\mathcal{F}|)^{1/2} \max_{j \in [|\mathcal{F}|]} (\tilde{v}_j^\top \hat{R}_n \tilde{v}_j)^{1/2}. \tag{S.16}$$

如 Borell（1975）所示，对于任意 $u > 0$，有

$$\mathbb{P}\big\{|\hat{g}|_\infty \ge \mathbb{E}\big(|\hat{g}|_\infty \,|\, \mathcal{X}_n\big) + u \,|\, \mathcal{X}_n\big\} \le \exp\bigg(-\frac{u^2}{2\max_{j \in [|\mathcal{F}|]} \tilde{v}_j^\top \hat{R}_n \tilde{v}_j}\bigg). \tag{S.17}$$

回顾 $D_n = \mathrm{diag}(\Sigma_n) = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots\ldots, \sigma_d^2)$ 和 $\hat{} D_n = \mathrm{diag}(\hat{}\Sigma_n) = \mathrm{diag}(\hat{}\sigma_1^2, \ldots\ldots, \hat{}\sigma_d^2)$。对于任意$v > 0$，定义

$$\mathcal{E}(v) = \bigg\{ \max_{j \in [|\mathcal{F}|]} \bigg| \frac{(\tilde{v}_j^\top \hat{R}_n \tilde{v}_j)^{1/2}}{(\tilde{v}_j^\top R_n \tilde{v}_j)^{1/2}} - 1 \bigg| \le v, \max_{k \in [d]} \bigg| \frac{\hat{\sigma}_k}{\sigma_k} - 1 \bigg| \le v \bigg\}.$$

我们已在 D 节证明 $\max_{j \in [|\mathcal{F}|]} |\tilde{v}_j^\top (\hat{} R_n - R_n) \tilde{v}_j| = O_{\mathrm{p}}[n^{-1/2} B^{5/2} L^2 \{\text{对数}(dB)\}^{1/2}] + O_{\mathrm{p}}[n^{-1} B^3 L^2 \{\text{对数}(dB)\}^2]$。由于 $\min_{j \in [|\mathcal{F}|]} \tilde{v}_j^\top R_n \tilde{v}_j \ge C$，我们有

$$\max_{j \in [|\mathcal{F}|]} \bigg| \frac{(\tilde{v}_j^\top \hat{R}_n \tilde{v}_j)^{1/2}}{(\tilde{v}_j^\top R_n \tilde{v}_j)^{1/2}} - 1 \bigg| = O_{\mathrm{p}}[n^{-1/2} B^{5/2} L^2 \{\log(dB)\}^{1/2}] + O_{\mathrm{p}}[n^{-1} B^3 L^2 \{\log(dB)\}^2].$$

另一方面，由引理 1 可得 $\max_{k \in [d]} |\hat{} \sigma_k^2 - \sigma_k^2| = O_{\mathrm{p}}[n^{-1/2} B^{3/2} \{\text{对数}(dB)\}^{1/2}] + O_{\mathrm{p}}[n^{-1} B^2 \{\text{对数}(dB)\}^2]$。由于 $\min_{k \in [d]} \sigma_k^2 \ge C$，我们有

$$\max_{k \in [d]} \bigg| \frac{\hat{\sigma}_k}{\sigma_k} - 1 \bigg| = O_{\mathrm{p}}[n^{-1/2} B^{3/2} \{\log(dB)\}^{1/2}] + O_{\mathrm{p}}[n^{-1} B^2 \{\log(dB)\}^2].$$

选择 $v \asymp \eta_n [n^{-1/2} B^{5/2} L^2 \{\text{对数}(dB)\}^{1/2} + n^{-1} B^3 L^2 \{\text{对数}(dB)\}^2] \to 0$，对于某个 $\eta_n \to \infty$，我们有 $\mathbb{P}\{\mathcal{E}(v)\} \to 1$，当 $n \to \infty$ 时。在 $\mathcal{E}(v)$ 上作限制，(S.16) 和 (S.17) 得到

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{cv}}_{L,\alpha} &\le (1+v)[\{1 + (2\log|\mathcal{F}|)^{-1}\}(2\log|\mathcal{F}|)^{1/2} + \{2\log(1/\alpha)\}^{1/2}] \max_{j \in [|\mathcal{F}|]} (\tilde{v}_j^\top R_n \tilde{v}_j)^{1/2} \\ &\le \{1 + (\log|\mathcal{F}|)^{-1}\} \lambda(|\mathcal{F}|, \alpha) \max_{j \in [|\mathcal{F}|]} (\tilde{v}_j^\top R_n \tilde{v}_j)^{1/2} \end{aligned} \tag{S.18}$$

其中 $\lambda(|\mathcal{F}|, \alpha) = (2 \text{ 对数 } |\mathcal{F}|)^{1/2} + \{2 \text{对数}(1/\alpha)\}^{1/2}$，前提是 $B^5 L^4 \text{对数}(dB)(\text{对数 } |\mathcal{F}|)^2 = o(n)$ 并且

$B^3L^2\{$对数$(dB)\}^2$ 对数 $|\mathcal{F}| = o(n)$。

令 $\tilde{U} = M^{-1}\sum_{m=1}^{M}(U_m - \mu) =: (\tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_d)^\top$，其中 $\mu = \mathbb{E}(U_m) = (\mu_1, \ldots, \mu_d)^\top$。对于任意 $j \in [d]$，记$\tilde{T}_{n,j} = \mu_j/\sigma_j$，并将 $\{\tilde{T}_{n,j}\}_{j=1}^d$ 按降序排列为 $\tilde{T}_{n,j_1^*} \geq \cdots \geq \tilde{T}_{n,j_d^*}$。限制在 $\mathcal{E}(v)$ 上，我们有

$$
\begin{aligned}
W_{n,L} \geq \sum_{\ell=1}^{L} T_{n,j_\ell^*} &= \sqrt{M}\sum_{\ell=1}^{L}\frac{\tilde{U}_{j_\ell^*}}{\hat{\sigma}_{j_\ell^*}} + \sqrt{M}\sum_{\ell=1}^{L}\frac{\mu_{j_\ell^*}}{\hat{\sigma}_{j_\ell^*}} \\
&\geq \sqrt{M}\sum_{\ell=1}^{L}\frac{\tilde{U}_{j_\ell^*}}{\hat{\sigma}_{j_\ell^*}} + \sqrt{M}\sum_{\ell=1}^{L}\frac{\mu_{j_\ell^*}}{(1+v)\sigma_{j_\ell^*}}\,.
\end{aligned}
$$

给定满足 $\epsilon_n \to 0$ 且 ϵ_n^2 对数 $|\mathcal{F}| \to \infty$ 的 $\epsilon_n > 0$，我们选择满足 $(1+v)\{1+$(对数 $|\mathcal{F}|)^{-1} + u\}(M^{-1}n)^{1/2} = 1 + \epsilon_n$ 的 $u > 0$。于是 $u \sim \epsilon_n$。由于 $\max_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_L\leq d}\sum_{l=1}^{L}\mu_{j_l}/\sigma_{j_l} \geq (1+\epsilon_n)n^{-1/2}\lambda(|\mathcal{F}|,\alpha)\max_{j\in[|\mathcal{F}|]}(\tilde{v}_j^\top R_n\tilde{v}_j)^{1/2}$，我们知道

$$
\sqrt{M}\sum_{\ell=1}^{L}\frac{\mu_{j_\ell^*}}{(1+v)\sigma_{j_\ell^*}} \geq \{1 + (\log|\mathcal{F}|)^{-1} + u\}\lambda(|\mathcal{F}|,\alpha)\max_{j\in[|\mathcal{F}|]}(\tilde{v}_j^\top R_n\tilde{v}_j)^{1/2}\,. \tag{S.19}
$$

记 $\aleph = \max_{j\in[|\mathcal{F}|]}(\tilde{v}_j^\top R_n\tilde{v}_j)^{1/2}$。因此，由（S.18）和（S.19）可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{H_1}(W_{n,L} > \hat{\mathrm{cv}}_{L,\alpha}) \\
&\quad\geq \mathbb{P}_{H_1}\left\{\sqrt{M}\sum_{\ell=1}^{L}\frac{\tilde{U}_{j_\ell^*}}{\hat{\sigma}_{j_\ell^*}} + \sqrt{M}\sum_{\ell=1}^{L}\frac{\mu_{j_\ell^*}}{(1+v)\sigma_{j_\ell^*}} > \{1 + (\log|\mathcal{F}|)^{-1}\}\lambda(|\mathcal{F}|,\alpha)\aleph,\ \mathcal{E}(v)\right\} \\
&\quad\geq \mathbb{P}\left\{\sqrt{M}\sum_{\ell=1}^{L}\frac{\tilde{U}_{j_\ell^*}}{\hat{\sigma}_{j_\ell^*}} > -u\lambda(|\mathcal{F}|,\alpha)\aleph,\ \mathcal{E}(v)\right\} \\
&\quad\geq 1 - \mathbb{P}\left\{\sqrt{M}\sum_{\ell=1}^{L}\frac{\tilde{U}_{j_\ell^*}}{\hat{\sigma}_{j_\ell^*}} \leq -u\lambda(|\mathcal{F}|,\alpha)\aleph\right\} - \mathbb{P}\{\mathcal{E}(v)^c\}\,.
\end{aligned} \tag{S.20}
$$

对于每个 $m \in [M]$，我们定义 $\hat{}U_m^\dagger := \{\tilde{v}_1^\top\hat{}D_n^{-1/2}(U_m - \mu)\ldots, \tilde{v}_{|\mathcal{F}|}^\top\hat{}D_n^{-1/2}(U_m - \mu)\}^\top$。记 $S\hat{}_{U^\dagger} = M^{-1/2}\sum_{m=1}^{M}\hat{}U_m^\dagger =: (S\hat{}_{U^\dagger,1}, \ldots, S\hat{}_{U^\dagger,|\mathcal{F}|})^\top$。基于 $(j_1^*, \ldots, j_d^*)$ 的定义，存在某个$j_* \in [|\mathcal{F}|]$，使得 $\sqrt{M}\sum_{\ell=1}^{L}\tilde{U}_{j_\ell^*}/\hat{}\sigma_{j_\ell^*} = S\hat{}_{U^\dagger,j_*}$。由于 $(\tilde{v}_{j_*}^\top R_n\tilde{v}_{j_*})^{-1/2}S\hat{}_{U^\dagger,j_*} \to \mathcal{N}(0,1)$ 在分布

中，且 $u\lambda(|\mathcal{F}|,\ \alpha)\aleph(\tilde{v}_{j_*}^\top R_n \tilde{v}_{j_*})^{-1/2} \gtrsim \epsilon_n$(对数 $|\mathcal{F}|)^{1/2} \to \infty$，那么

$$\mathbb{P}\left\{\sqrt{M}\sum_{\ell=1}^{L}\frac{\tilde{U}_{j_\ell^*}}{\hat{\sigma}_{j_\ell^*}} \le -u\lambda(|\mathcal{F}|,\alpha)\aleph\right\} = o(1)\,.$$

结合 (S.20)，我们有 $\mathbb{P}_{H_1}(W_{n,L} > \hat{}\mathrm{cv}_{L,\alpha}) \to 1$当 $n \to \infty$ 时。由此完成定理 2 的证明。

□

G 定理 3 的证明

令 $\xi^{(q)} = \{\xi_1^{(q)}, \ldots, \xi_{|\mathcal{K}_q|}^{(q)}\}^\top \sim \mathcal{N}\{0, R_n^{(q)}\}$ 并记 $\mathcal{X}_n = \{X_1, \ldots, X_n\}$。回顾 $V_{(q)\,n,L} = \Phi^{-1}\{1-\mathrm{pv}_L^{(q)}\}$，其中 $\mathrm{pv}_L^{(q)} = \mathbb{P}[f_L\{\hat{}\xi^{(q)}\} \ge W_{(q)\,n,L} \,|\, \mathcal{X}_n]$。令 $F_q(z) = \mathbb{P}\{W_{(q)\,n,L} \le z\}$，对任意 $z \in \mathbb{R}$。

我们首先证明，对任意 $q \in \mathcal{H}_0$，均有 $\mathbb{P}\{V_{(q)\,n,L} \ge t\} = 1 - \Phi(t) + o(1)$。与 (S.13) 相同，我们有

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\{W_{n,L}^{(q)} > z\} - \mathbb{P}[f_L\{\xi^{(q)}\} > z]\right| &\le C_*|\mathcal{K}_q|^2 B\exp\{-CB^{-4/3}n^{1/3}L^{2/3}(\log|\mathcal{K}_q|)^{2/3}\}\\ &\quad + C_*|\mathcal{K}_q|^2 B\exp\{-CB^{-7/12}n^{1/3}L^{1/6}(\log|\mathcal{K}_q|)^{1/6}\}\\ &\quad + \frac{C_* B^{2/3}L^{13/6}(\log|\mathcal{K}_q|)^{7/6}}{n^{1/6}}\end{aligned}$$

对于任意 $q \in \mathcal{H}_0$，其中 C_* 与 q 独立。给定 $W_{n\,L}^{(q)}$，其中 $q \in \mathcal{H}_0$，定义事件

$$\mathcal{E}_{n,1}^{(q)} = \left\{\left|1 - F_q\{W_{n,L}^{(q)}\} - \mathbb{P}\left[f_L\{\hat{\xi}^{(q)}\} > W_{n,L}^{(q)} \,|\, \mathcal{X}_n\right]\right| \le \bar{C}_1\mathcal{I}_n^{(q)}\right\}$$

对于某个充分大的常数 $C_1 > 0$，该常数与 q 独立，其中

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_n^{(q)} &= \Delta_{n,q}^{1/3}\{1 \vee \log(|\mathcal{K}_q|^L\Delta_{n,q}^{-1})\}^{2/3} + |\mathcal{K}_q|^2 B\exp\{-CB^{-4/3}n^{1/3}L^{2/3}(\log|\mathcal{K}_q|)^{2/3}\}\\ &\quad + |\mathcal{K}_q|^2 B\exp\{-CB^{-7/12}n^{1/3}L^{1/6}(\log|\mathcal{K}_q|)^{1/6}\} + \frac{B^{2/3}L^{13/6}(\log|\mathcal{K}_q|)^{7/6}}{n^{1/6}}\end{aligned}$$

并以与命题1证明中出现的 Δ_n 相同的方式定义 $\Delta_{n,q}$，但将 $\mathcal{F}$、R_n 和 $\hat{}\,R_n$ 分别替换为 $\mathcal{F}_q$、$R_n^{(q)}$ 和 $\hat{}R_n^{(q)}$。记 $\Gamma_n^{(q)} = \{D_n^{(q)}\}^{-1/2}$ 和 $\hat{}\Gamma_n^{(q)} = \{\hat{}D_n^{(q)}\}^{-1/2}$。与 (S.14) 相同，有

$$\begin{aligned}\Delta_{n,q} \le &\max_{\check{v}_1,\check{v}_2\in\mathcal{F}_q}|\check{v}_1^\top\Gamma_n^{(q)}\Sigma_n^{(q)}\{\Gamma_n^{(q)} - \hat{\Gamma}_n^{(q)}\}\check{v}_2| + \max_{\check{v}_1,\check{v}_2\in\mathcal{F}_q}|\check{v}_1^\top\Gamma_n^{(q)}\{\Sigma_n^{(q)} - \hat{\Sigma}_n^{(q)}\}\hat{\Gamma}_n^{(q)}\check{v}_2|\\ &+ \max_{\check{v}_1,\check{v}_2\in\mathcal{F}_q}|\check{v}_1^\top\{\Gamma_n^{(q)} - \hat{\Gamma}_n^{(q)}\}\hat{\Sigma}_n^{(q)}\hat{\Gamma}_n^{(q)}\check{v}_2|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \max_{\check{v}_1 \in \mathcal{F}_q} |\Gamma_n^{(q)} \check{v}_1|_1 \cdot |\Sigma_n^{(q)}|_\infty \cdot \max_{\check{v}_2 \in \mathcal{F}_q} |\{\Gamma_n^{(q)} - \hat{\Gamma}_n^{(q)}\}\check{v}_2|_1 \\
&\quad + \max_{\check{v}_1 \in \mathcal{F}_q} |\Gamma_n^{(q)} \check{v}_1|_1 \cdot |\hat{\Sigma}_n^{(q)} - \Sigma_n^{(q)}|_\infty \cdot \max_{\check{v}_2 \in \mathcal{F}_q} |\hat{\Gamma}_n^{(q)} \check{v}_2|_1 \\
&\quad + \max_{\check{v}_1 \in \mathcal{F}_q} |\{\hat{\Gamma}_n^{(q)} - \Gamma_n^{(q)}\}\check{v}_1|_1 \cdot |\hat{\Sigma}_n^{(q)}|_\infty \cdot \max_{\check{v}_2 \in \mathcal{F}_q} |\hat{\Gamma}_n^{(q)} \check{v}_2|_1 .
\end{aligned}
$$

定义 $\mathcal{E} = \{\min_{l \in [d]} \hat{\sigma}_l > c_1/2, |\hat{\Sigma}_n - \Sigma_n|_\infty \le 1\}$。限制在 $\mathcal{E}$ 上，我们有 $\Delta_{n,q} \le \bar{C}_2 B L^2 |\hat{\Gamma}_n^{(q)} - \Gamma_n^{(q)}|_\infty + \bar{C}_2 L^2 |\hat{\Sigma}_n^{(q)} - \Sigma_n^{(q)}|_\infty$，其中 $\bar{C}_2 > 0$ 是与 q 无关的某个普适常数。由 (S.4) 和 (S.11),

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\max_{q \in \mathcal{H}_0} \Delta_{n,q} > \epsilon \Big) &\le \mathbb{P}(\mathcal{E}^c) + \sum_{q \in \mathcal{H}_0} \mathbb{P}\big\{ \bar{C}_2 B L^2 |\hat{\Gamma}_n^{(q)} - \Gamma_n^{(q)}|_\infty + \bar{C}_2 L^2 |\hat{\Sigma}_n^{(q)} - \Sigma_n^{(q)}|_\infty > \epsilon \big\} \\
&\lesssim \sum_{q \in \mathcal{H}_0} \mathbb{P}\Big\{ \bar{C}_2 B L^2 |\hat{\Gamma}_n^{(q)} - \Gamma_n^{(q)}|_\infty > \frac{\epsilon}{2} \Big\} + \sum_{q \in \mathcal{H}_0} \mathbb{P}\Big\{ \bar{C}_2 L^2 |\hat{\Sigma}_n^{(q)} - \Sigma_n^{(q)}|_\infty > \frac{\epsilon}{2} \Big\} \\
&\quad + d^2 B \exp(-C B^{-3} n) + d^2 B \exp(-C B^{-1} n^{1/2})
\end{aligned}
$$

对任意 $\epsilon > 0$。记 $K_{\max} = \max_{q \in \mathcal{H}_0} |\mathcal{K}_q|$。与 (S.4) 和 (S.12) 相同，我们有

$$
\begin{aligned}
\max_{q \in \mathcal{H}_0} \mathbb{P}\Big\{ \bar{C}_2 B L^2 |\hat{\Gamma}_n^{(q)} - \Gamma_n^{(q)}|_\infty > \frac{\epsilon}{2} \Big\} &\lesssim K_{\max}^2 B \exp(-C B^{-5} L^{-4} n \epsilon^2) \\
&\quad + K_{\max}^2 B \exp(-C B^{-3/2} L^{-1} n^{1/2} \epsilon^{1/2}) , \\
\max_{q \in \mathcal{H}_0} \mathbb{P}\Big\{ \bar{C}_2 L^2 |\hat{\Sigma}_n^{(q)} - \Sigma_n^{(q)}|_\infty > \epsilon \Big\} &\lesssim K_{\max}^2 B \exp(-C B^{-3} L^{-4} n \epsilon^2) \\
&\quad + K_{\max}^2 B \exp(-C B^{-1} L^{-1} n^{1/2} \epsilon^{1/2})
\end{aligned}
$$

对任意 $\epsilon = o(1)$。因此,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\max_{q \in \mathcal{H}_0} \Delta_{n,q} > \epsilon \Big) &\lesssim d^2 B \exp(-C B^{-3} n) + d^2 B \exp(-C B^{-1} n^{1/2}) \\
&\quad + Q_0 K_{\max}^2 B \exp(-C B^{-5} L^{-4} n \epsilon^2) + Q_0 K_{\max}^2 B \exp(-C B^{-3/2} L^{-1} n^{1/2} \epsilon^{1/2})
\end{aligned}
$$

对任意 $\epsilon = o(1)$。与 (S.15) 相同，我们有 $\mathbb{P}\{\mathcal{E}_{n,1}^{(q)}\} = 1$ 对任意 $q \in \mathcal{H}_0$。因此，成立：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\big\{ V_{n,L}^{(q)} \ge t \big\} &= \mathbb{P}\Big(\mathbb{P}\big[f_L\{\hat{\xi}^{(q)}\} \ge W_{n,L}^{(q)} \,|\, \mathcal{X}_n \big] \le 1 - \Phi(t) \Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\mathbb{P}\big[f_L\{\hat{\xi}^{(q)}\} \ge W_{n,L}^{(q)} \,|\, \mathcal{X}_n \big] \le 1 - \Phi(t), \mathcal{E}_{n,1}^{(q)} \Big) \qquad \text{(S.21)}
\end{aligned}
$$

$$\leq \mathbb{P}\Big[1 - F_q\{W_{n,L}^{(q)}\} \leq 1 - \Phi(t) + \bar{C}_1 \mathcal{I}_n^{(q)}\Big]$$
$$= \mathbb{P}\big[W_{n,L}^{(q)} \geq F_q^{-1}\{\Phi(t) - \bar{C}_1 \mathcal{I}_n^{(q)}\}\big] .$$

给定 $\epsilon = o(1)$，定义 $\mathcal{E}_{n,\ 2} = \{$最大值$_{q \in \mathcal{H}_0} \Delta_{n,\ q} \leq \epsilon\}$。回顾一下 $\mathcal{I}_n^{(q)} = \Delta_n^{1/3,\ q}\{1 \vee$ 对数$(|\mathcal{K}_q|^L \Delta_{n,\ q}^{-1})\}^{2/3} +|\mathcal{K}_q|^2 B$ 指数$\{-CB^{-4/3} n^{1/3} L^{2/3}$(对数 $|\mathcal{K}_q|)^{2/3}\} + |\mathcal{K}_q|^2 B$ 指数$\{-CB^{-7/12} n^{1/3} L^{1/6}$ (对数 $|\mathcal{K}_q|)^{1/6}\} + n^{-1/6} \cdot B^{2/3} L^{13/6}$(对数 $|\mathcal{K}_q|)^{7/6}$。在 $\mathcal{E}_{n,\ 2}$ 条件下，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_n^{(q)} &\leq \epsilon^{1/3}\{\log(|\mathcal{K}_q|^L \epsilon^{-1})\}^{2/3} + |\mathcal{K}_q|^2 B \exp\{-CB^{-4/3} n^{1/3} L^{2/3} (\log|\mathcal{K}_q|)^{2/3}\} \\
&\quad + |\mathcal{K}_q|^2 B \exp\{-CB^{-7/12} n^{1/3} L^{1/6} (\log|\mathcal{K}_q|)^{1/6}\} + \frac{B^{2/3} L^{13/6} (\log|\mathcal{K}_q|)^{7/6}}{n^{1/6}} \\
&=: \Omega_q .
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big[W_{n,L}^{(q)} \geq F_q^{-1}\{\Phi(t) - \bar{C}_1 \mathcal{I}_n^{(q)}\}\big] \\
&\leq \mathbb{P}\big[W_{n,L}^{(q)} \geq F_q^{-1}\{\Phi(t) - \bar{C}_1 \mathcal{I}_n^{(q)}\}, \mathcal{E}_{n,2}\big] + \mathbb{P}(\mathcal{E}_{n,2}^c) \\
&\leq \mathbb{P}\big[W_{n,L}^{(q)} \geq F_q^{-1}\{\Phi(t) - \bar{C}_1 \Omega_q\}\big] + \bar{C}_3 d^2 B \exp(-CB^{-3} n) + \bar{C}_3 d^2 B \exp(-CB^{-1} n^{1/2}) \\
&\quad + \bar{C}_3 Q_0 K_{\max}^2 B \exp(-CB^{-5} L^{-4} n\epsilon^2) + \bar{C}_3 Q_0 K_{\max}^2 B \exp(-CB^{-3/2} L^{-1} n^{1/2} \epsilon^{1/2}) \qquad \text{(S.22)} \\
&\leq 1 - \Phi(t) + \bar{C}_1 \Omega_q + \bar{C}_3 d^2 B \exp(-CB^{-3} n) + \bar{C}_3 d^2 B \exp(-CB^{-1} n^{1/2}) \\
&\quad + \bar{C}_3 Q_0 K_{\max}^2 B \exp(-CB^{-5} L^{-4} n\epsilon^2) + \bar{C}_3 Q_0 K_{\max}^2 B \exp(-CB^{-3/2} L^{-1} n^{1/2} \epsilon^{1/2})
\end{aligned}$$

其中 $\bar{C}_3 > 0$ 是一个独立于 q 和 t的普适常数。同样，我们还有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big\{V_{n,L}^{(q)} \geq t\big\} &= \mathbb{P}\Big(\mathbb{P}\big[f_L\{\hat{\xi}^{(q)}\} \geq W_{n,L}^{(q)} \,|\, \mathcal{X}_n\big] \leq 1 - \Phi(t), \mathcal{E}_{n,1}^{(q)}\Big) \\
&\geq \mathbb{P}\Big(1 - F_q\{W_{n,L}^{(q)}\} \leq 1 - \Phi(t) - \bar{C}_1 \mathcal{I}_n^{(q)}\Big) \\
&= \mathbb{P}\big[W_{n,L}^{(q)} \geq F_q^{-1}\{\Phi(t) + \bar{C}_1 \mathcal{I}_n^{(q)}\}\big] \\
&\geq 1 - \Phi(t) - \bar{C}_1 \Omega_q - \bar{C}_3 d^2 B \exp(-CB^{-3} n) - \bar{C}_3 d^2 B \exp(-CB^{-1} n^{1/2}) \\
&\quad - \bar{C}_3 Q_0 K_{\max}^2 B \exp(-CB^{-5} L^{-4} n\epsilon^2) - \bar{C}_3 Q_0 K_{\max}^2 B \exp(-CB^{-3/2} L^{-1} n^{1/2} \epsilon^{1/2}) .
\end{aligned}$$

因此，如果 B^4L^{-2} 对数 $K_{\max} = o(n)$且 $B^{7/4}L^{-1/2}$(对数 $K_{\max})^{5/2} = o(n)$，则有

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{q\in\mathcal{H}_0} |\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)} \geq t\} - \{1-\Phi(t)\}| \\
&\quad \lesssim \epsilon^{1/3}\{\log(K_{\max}^L \epsilon^{-1})\}^{2/3} + B\exp(-CB^{-4/3}n^{1/3}L^{2/3}) \\
&\qquad + B\exp(-CB^{-7/12}n^{1/3}L^{1/6}) + n^{-1/6}B^{2/3}L^{13/6}(\log K_{\max})^{7/6} \\
&\qquad + \bar{C}_3 d^2 B\exp(-CB^{-3}n) + \bar{C}_3 d^2 B\exp(-CB^{-1}n^{1/2}) \\
&\qquad + \bar{C}_3 Q K_{\max}^2 B\exp(-CB^{-5}L^{-4}n\epsilon^2) + \bar{C}_3 Q K_{\max}^2 B\exp(-CB^{-3/2}L^{-1}n^{1/2}\epsilon^{1/2}) \\
&\quad =: \delta(\epsilon)
\end{aligned} \tag{S.23}$$

对于任意 $\epsilon = o(1)$。

令 $G(t) = 1-\Phi(t)$，且 $t_{\max} =$(2 对数 $Q-2$对数 对数 $Q)^{1/2}$。我们考虑两种情形：（i）存在$\widehat{\quad}t \in [0, t_{\max}]$ 使得 FDP$(t) \leq \alpha$；以及（ii）对于任意 $t \in [0, t_{\max}]$, FDP$(t) > \alpha$。对于情形（i），根据 $\hat{}t$ 的定义，对于任意 $t < \hat{}t$，有 $\widehat{\text{FDP}}(t) > \alpha$。注意到，对于$t < \hat{}t$，$I\{V_{n,L}^{(q)} > t\} \geq I\{V_{n,L}^{(q)} > \hat{}t\}$。因此，

$$\frac{QG(t)}{1 \vee \sum_{q\in[Q]} I\{V_{n,L}^{(q)} \geq \hat{t}\}} \geq \frac{QG(t)}{1 \vee \sum_{q\in[Q]} I\{V_{n,L}^{(q)} \geq t\}} = \widehat{\text{FDP}}(t) > \alpha\,.$$

将 $t \uparrow \hat{}t$ 代入上述不等式第一项的分子中，我们得到 $\widehat{\text{FDP}}(\hat{}t) \geq \alpha$。根据 $\hat{}t$ 的定义，存在一个序列 $\{t_i\}$，使得 $t_i \geq \hat{}t$ 且 $t_i \to \hat{}t$，并且 $\widehat{\text{FDP}}(t_i) \leq \alpha$。由于 $I\{V_{n,L}^{(q)} > \hat{}t\} \geq I\{V_{n,L}^{(q)} > t_i\}$，可推出

$$\frac{QG(t_i)}{1 \vee \sum_{q\in[Q]} I\{V_{n,L}^{(q)} > \hat{t}\}} \leq \frac{QG(t_i)}{1 \vee \sum_{q\in[Q]} I\{V_{n,L}^{(q)} > t_i\}} \leq \alpha\,.$$

在上述不等式第一项的分子中令 $t_i \downarrow \hat{}t$，可得 $\widehat{\text{错误发现比例}}(\hat{}t) \leq \alpha$。因此，在情形（i）下，成立 $\widehat{\text{错误发现比例}}(\hat{}t) = \alpha$。对于情形（ii），由 (S.23) 可得 $\hat{}t =$(2 对数 $Q)^{1/2}$，且

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big[\sum_{q\in\mathcal{H}_0} I\{V_{n,L}^{(q)} \geq \hat{t}\} \geq 1\Big] &\leq Q_0 \max_{q\in\mathcal{H}_0} \mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)} \geq \hat{t}\} \\
&\leq Q_0 G\{(2\log Q)^{1/2}\} + Q_0\delta(\epsilon)
\end{aligned}$$

$$\lesssim o(1) + Q\delta(\epsilon)$$

当 $Q \to \infty$ 时，其中 $\delta(\epsilon)$ 由 (S.23) 给出。若 $Q^{12}B^5L^4$ 对数$(nBK_{\max})$ max$\{(L$ 对数 $K_{\max})^4$,(对数 $n)^4\}$ =$o(n)$ 且 $Q^{12}B^4L^{13}$(对数 $K_{\max})^7 = o(n)$，则我们可以选择合适的 $\epsilon = o(1)$，使得 $Q^2\delta(\epsilon) \to 0$ 当$n \to \infty$，这意味着在情形（ii）下 $\mathbb{P}\{$错误发现比例$(\hat{t}) = 0\} \to 1$ 。在下文中，我们假设$Q^2\delta(\epsilon) \to 0$ 当 $n \to \infty$。于是

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{\mathrm{FDP}(\hat{t}) \le \frac{\alpha Q_0}{Q} + \varepsilon\right\} &= \mathbb{P}\left\{\mathrm{FDP}(\hat{t}) \le \frac{\alpha Q_0}{Q} + \varepsilon,\ \text{Case (i) holds}\right\} \\
&\quad + \mathbb{P}\left\{\mathrm{FDP}(\hat{t}) \le \frac{\alpha Q_0}{Q} + \varepsilon,\ \text{Case (ii) holds}\right\} \\
&= \mathbb{P}\big\{\text{Case (i) holds}\big\} + \mathbb{P}\big\{\text{Case (ii) holds}\big\} \qquad \text{(S.24)} \\
&\quad - \mathbb{P}\left\{\mathrm{FDP}(\hat{t}) > \frac{\alpha Q_0}{Q} + \varepsilon,\ \text{Case (i) holds}\right\} \\
&= 1 - \mathbb{P}\left\{\mathrm{FDP}(\hat{t}) > \frac{\alpha Q_0}{Q} + \varepsilon,\ \text{Case (i) holds}\right\}.
\end{aligned}$$

注意到在情形（i）下，$\widehat{\mathrm{FDP}}(\hat{t}) = \alpha$ 和 $\hat{t} \in [0, t_{\max}]$。如果我们能够证明

$$\sup_{t\in[0,t_{\max}]} \left|\frac{\mathrm{FDP}(t)}{\widehat{\mathrm{FDP}}(t)} - \frac{Q_0}{Q}\right| \to 0 \ \text{ in probability} \qquad \text{(S.25)}$$

当 $n,\ Q \to \infty$ 时，那么由（S.24）可得 $\lim_{n,\ Q\to\infty} \mathbb{P}\{\mathrm{FDP}(\hat{t}) \le \alpha Q_0/Q + \varepsilon\} = 1$。

下文将证明（S.25）。由于

$$\sup_{t\in[0,t_{\max}]} \left|\frac{\mathrm{FDP}(t)}{\widehat{\mathrm{FDP}}(t)} - \frac{Q_0}{Q}\right| = \sup_{t\in[0,t_{\max}]} \left|\frac{\sum_{q\in\mathcal{H}_0} I\{V_{n,L}^{(q)} > t\} - Q_0G(t)}{QG(t)}\right|,$$

（S.25）等价于

$$\sup_{t\in[0,t_{\max}]} \left|\frac{\sum_{q\in\mathcal{H}_0}[I\{V_{n,L}^{(q)} > t\} - G(t)]}{QG(t)}\right| \to 0 \ \text{ in probability}$$

如 $n,\ Q \to \infty$。令 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_s = t_{\max}$，其中 $t_i - t_{i-1} = v_*$对于 $1 \le i \le s-1$和 $t_s - t_{s-1} \le v_*$，且 $v_* = \{$(对数 Q)(对数 log $Q)^{1/2}\}^{-1/2}$和 $s \sim t_{\max}/v_*$。对于任意 $t \in [t_{i-1}, t_i]$，我们有

$$\frac{\sum_{q\in\mathcal{H}_0} I\{V_{n,L}^{(q)} > t_i\}}{QG(t_i)}\frac{G(t_i)}{G(t_{i-1})} \le \frac{\sum_{q\in\mathcal{H}_0} I\{V_{n,L}^{(q)} > t\}}{QG(t)} \le \frac{\sum_{q\in\mathcal{H}_0} I\{V_{n,L}^{(q)} > t_{i-1}\}}{QG(t_{i-1})}\frac{G(t_{i-1})}{G(t_i)}.$$

注意，存在一个普适常数 $\bar{C}_4 > 0$，使得 $e^{-t^2/2} \le \max(\bar{C}_4,\ 2t) \int_t^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$，对于任意 $t > 0$。于是

$$0 < 1 - \frac{G(t_i)}{G(t_{i-1})} = \frac{\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x}{\int_{t_{i-1}}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x} \le \frac{v_* e^{-t_{i-1}^2/2}}{\int_{t_{i-1}}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x} \le v_* \max(\bar{C}_4, 2t_{i-1})\,,$$

这意味着当 $Q \to \infty$ 时，$\max_{1\le i\le s} |1 - G(t_i)/G(t_{i-1})| \le 2v_* t_{\max} \to 0$。因此，要证明 (S.25)，只需证明

$$\max_{0\le i\le s} \left| \frac{\sum_{q\in\mathcal{H}_0} [I\{V_{n,L}^{(q)} > t_i\} - G(t_i)]}{QG(t_i)} \right| \to 0 \ \text{ in probability}$$

当 $n,\ Q \to \infty$ 时。对于任意 $\varepsilon > 0$，根据邦费罗尼不等式和马尔可夫不等式，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\bigg(\max_{0\le i\le s} \left| \frac{\sum_{q\in\mathcal{H}_0} [I\{V_{n,L}^{(q)} > t_i\} - G(t_i)]}{QG(t_i)} \right| \ge \varepsilon \bigg) \\
&\quad \le \sum_{i=0}^{s} \mathbb{P}\bigg(\left| \frac{\sum_{q\in\mathcal{H}_0} [I\{V_{n,L}^{(q)} > t_i\} - G(t_i)]}{QG(t_i)} \right| \ge \varepsilon \bigg) \\
&\quad \le \frac{\bar{C}_5}{v_*} \int_0^{t_{\max}} \mathbb{P}\bigg(\left| \frac{\sum_{q\in\mathcal{H}_0} [I\{V_{n,L}^{(q)} > t\} - G(t)]}{QG(t)} \right| \ge \varepsilon \bigg)\,\mathrm{d}t \\
&\quad \le \frac{\bar{C}_5}{v_*\varepsilon^2} \int_0^{t_{\max}} \mathbb{E}\bigg(\left| \frac{\sum_{q\in\mathcal{H}_0} [I\{V_{n,L}^{(q)} > t\} - G(t)]}{QG(t)} \right|^2 \bigg)\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{S.26}$$

对于某个常数 $C_5 > 0$，其中第二步基于积分与其对应的黎曼和之间的关系。注意到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\bigg(\left| \frac{\sum_{q\in\mathcal{H}_0} [I\{V_{n,L}^{(q)} > t\} - G(t)]}{QG(t)} \right|^2 \bigg) \\
&\quad \le 2\mathbb{E}\bigg(\left| \frac{\sum_{q\in\mathcal{H}_0} [I\{V_{n,L}^{(q)} > t\} - \mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)} > t\}]}{QG(t)} \right|^2 \bigg) \\
&\qquad + 2\mathbb{E}\bigg(\left| \frac{\sum_{q\in\mathcal{H}_0} [\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)} > t\} - G(t)]}{QG(t)} \right|^2 \bigg) \\
&\quad = 2 \sum_{q,q'\in\mathcal{H}_0} \frac{\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)} > t, V_{n,L}^{(q')} > t\} - \mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)} > t\}\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q')} > t\}}{Q^2G^2(t)} \\
&\qquad + 2\mathbb{E}\bigg(\left| \frac{\sum_{q\in\mathcal{H}_0} [\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)} > t\} - G(t)]}{QG(t)} \right|^2 \bigg)\,.
\end{aligned} \tag{S.27}$$

根据（S.23），我们有

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{\sum_{q\in\mathcal{H}_0}[\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)}>t\}-G(t)]}{QG(t)}\right|^2\right)\lesssim\left\{\frac{Q_0\delta(\epsilon)}{QG(t)}\right\}^2\leq\frac{\delta^2(\epsilon)}{G^2(t)}\,.$$

注意到 $\int_0^{t_{\max}}\{G(t)\}^{-2}\,\mathrm{d}t\lesssim t_{\max}\exp(t_{\max}^2)\lesssim Q^2(\text{对数 }Q)^{-3/2}$。回忆 $v_*=\{(\text{对数 }Q)(\text{对数对数 }Q)^{1/2}\}^{-1/2}$。于是

$$\int_0^{t_{\max}}\mathbb{E}\left(\left|\frac{\sum_{q\in\mathcal{H}_0}[\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)}>t\}-G(t)]}{QG(t)}\right|^2\right)\mathrm{d}t\lesssim\int_0^{t_{\max}}\frac{\delta^2(\epsilon)}{G^2(t)}\,\mathrm{d}t\lesssim\frac{Q^2\delta^2(\epsilon)}{(\log Q)^{3/2}}=o(v_*)\,.$$

根据 (S.26) 和 (S.27)，要证明 (S.25)，只需证明

$$\int_0^{t_{\max}}\sum_{q,q'\in\mathcal{H}_0}\frac{\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)}>t,V_{n,L}^{(q')}>t\}-\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)}>t\}\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q')}>t\}}{Q^2G^2(t)}\,\mathrm{d}t=o(v_*)\,.\tag{S.28}$$

定义 $\mathcal{H}_{01}=\{(q,q'):\ q,q'\in\mathcal{H}_0,q=q'\}$, $\mathcal{H}_{02}=\{(q,q'):\ q,q'\in\mathcal{H}_0,q\neq q',q\in\mathcal{A}_{q'}(\gamma)\text{ 或 }q'\in\mathcal{A}_q(\gamma)\}$ 以及 $\mathcal{H}_{03}=\{(q,q'):\ q,q'\in\mathcal{H}_0\}\backslash(\mathcal{H}_{01}\cup\mathcal{H}_{02})$。于是 $\sum_{q,q'\in\mathcal{H}_0}=\sum_{(q,q')\in\mathcal{H}_{01}}+\sum_{(q,q')\in\mathcal{H}_{02}}+\sum_{(q,q')\in\mathcal{H}_{03}}$.

当 $(q,q')\in\mathcal{H}_{01}$, $\mathbb{P}\{V_{(q),n,L}>t,V_{(q'),n,L}>t\}-\mathbb{P}\{V_{(q),n,L}>t\}\mathbb{P}\{V_{(q'),n,L}>t\}=\mathbb{P}\{V_{(q),n,L}>t\}[1-\mathbb{P}\{V_{(q),n,L}>t\}]\leq\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)}>t\}$。根据 (S.23),

$$\sum_{(q,q')\in\mathcal{H}_{01}}\frac{\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)}>t,V_{n,L}^{(q')}>t\}-\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)}>t\}\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q')}>t\}}{Q^2G^2(t)}\lesssim\frac{1}{QG(t)}+\frac{\delta(\epsilon)}{QG^2(t)}\,.$$

由于 $\int_0^{t_{\max}}\{G(t)\}^{-1}\,\mathrm{d}t\lesssim\exp(2^{-1}t_{\max}^2)=Q(\text{对数 }Q)^{-1}$ 以及 $\int_0^{t_{\max}}\{G(t)\}^{-2}\,\mathrm{d}t\lesssim t_{\max}\exp(t_{\max}^2)\lesssim Q^2(\text{对数 }Q)^{-3/2}$，我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^{t_{\max}}\sum_{(q,q')\in\mathcal{H}_{01}}\frac{\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)}>t,V_{n,L}^{(q')}>t\}-\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)}>t\}\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q')}>t\}}{Q^2G^2(t)}\,\mathrm{d}t\\&\quad\lesssim\int_0^{t_{\max}}\frac{\mathrm{d}t}{QG(t)}+\delta(\epsilon)\int_0^{t_{\max}}\frac{\mathrm{d}t}{QG^2(t)}\lesssim\frac{1}{\log Q}+\frac{Q\delta(\epsilon)}{(\log Q)^{3/2}}=o(v_*)\,.\end{aligned}\tag{S.29}$$

类似于 S.21 和 S.22，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big\{V_{n,L}^{(q)}>t,V_{n,L}^{(q')}>t\big\}&\leq\mathbb{P}\big[W_{n,L}^{(q)}\geq F_q^{-1}\{\Phi(t)-\bar{C}_1\mathcal{I}_n^{(q)}\},W_{n,L}^{(q')}\geq F_{q'}^{-1}\{\Phi(t)-\bar{C}_1\mathcal{I}_n^{(q')}\}\big]\\&\leq\mathbb{P}\big[W_{n,L}^{(q)}\geq F_q^{-1}\{\Phi(t)-\bar{C}_1\Omega_q\},W_{n,L}^{(q')}\geq F_{q'}^{-1}\{\Phi(t)-\bar{C}_1\Omega_{q'}\}\big]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \bar{C}_3 d^2 B \exp(-CB^{-3}n) + \bar{C}_3 d^2 B \exp(-CB^{-1}n^{1/2}) \\
&+ \bar{C}_3 Q_0 K_{\max}^2 B \exp(-CB^{-5}L^{-4}n\epsilon^2) \\
&+ \bar{C}_3 Q_0 K_{\max}^2 B \exp(-CB^{-3/2}L^{-1}n^{1/2}\epsilon^{1/2}) \qquad \text{(S.30)} \\
&\le \mathbb{P}\big[F_q\{W_{n,L}^{(q)}\} \ge \Phi(t), F_{q'}\{W_{n,L}^{(q')}\} \ge \Phi(t)\big] + \bar{C}_1\Omega_q + \bar{C}_1\Omega_{q'} \\
&+ \bar{C}_3 d^2 B \exp(-CB^{-3}n) + \bar{C}_3 d^2 B \exp(-CB^{-1}n^{1/2}) \\
&+ \bar{C}_3 Q_0 K_{\max}^2 B \exp(-CB^{-5}L^{-4}n\epsilon^2) \\
&+ \bar{C}_3 Q_0 K_{\max}^2 B \exp(-CB^{-3/2}L^{-1}n^{1/2}\epsilon^{1/2}) \\
&\le \mathbb{P}\big[F_q\{W_{n,L}^{(q)}\} \ge \Phi(t), F_{q'}\{W_{n,L}^{(q')}\} \ge \Phi(t)\big] + \delta(\epsilon)\,,
\end{aligned}
$$

其中， $\delta(\epsilon)$由 S.23 给出，第三步是由于以下事实： $F_q\{W_{(q)\,n,\ L}\}$和 $F_{q'}\{W_n^{(q')}$在 $[0,1]$上均匀分布。注意， $\Phi^{-1}[F_q\{W_{n,L}^{(q)}\}] \sim \mathcal{N}(0,1)$，且 $\Phi^{-1}[F_{q'}\{W_{(q')\,n,\ L}\}] \sim \mathcal{N}(0,1)$。定义 $\eta^{(q)} = \Phi^{-1}[F_q\{W_{n,L}^{(q)}\}]$和 $\eta^{(q')} = \Phi^{-1}[F_{q'}\{W_{(q')\,n,\ L}\}]$。当 $(q,q') \in \mathcal{H}_{02}$时，由于 $\max_{q\ ,\ q'\in[Q]} |\mathrm{Corr}\{\eta^{(q)},\eta^{(q')}\}| \le r < 1$，Berman（1962）中的引理 2 意味着，对于任意 $t > \bar{C}_6$，$\mathbb{P}\{\eta^{(q)} \ge t, \eta^{(q')} \ge t\} \lesssim t^{-2}\exp\{-t^2/(1+r)\}$，其中 $\bar{C}_6 > 0$ 是一个普适常数。如上所述，存在一个普适常数 $\bar{C}_4 > 0$，使得对于任意 $t > 0$， $e^{-t^2/2} \le \max(\bar{C}_4,\ 2t)\int_t^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$。因此，根据 S.30,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)} > t, V_{n,L}^{(q')} > t\} &\lesssim \frac{1}{t^2}\exp\bigg(-\frac{t^2}{1+r}\bigg) + \delta(\epsilon) \\
&\lesssim t^{-2}\{\max(\bar{C}_4, 2t)\}^{2/(1+r)}\{G(t)\}^{2/(1+r)} + \delta(\epsilon)\,.
\end{aligned}
$$

对于任意 $t > \max\{\bar{C}_6, \bar{C}_4/2\}$。由于 $\max_{q\in[Q]}|\mathcal{A}_q(\gamma)| = o(Q^\nu)$，我们有 $|\mathcal{H}_{02}| = O(Q^{1+\nu})$。注意，$\mathbb{P}\{V_{(q)\,n,L} > t, V_{(q')\,n,L} > t\} \le 1$对于任意 $0 < t < \bar{C}_4/2$。结合 $\nu < (1-r)/(1+r)$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{t_{\max}} \sum_{(q,q')\in\mathcal{H}_{02}} \frac{\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)} > t, V_{n,L}^{(q')} > t\} - \mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)} > t\}\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q')} > t\}}{Q^2G^2(t)}\,\mathrm{d}t \\
&\quad\lesssim \int_0^{\bar{C}_4/2} \frac{\mathrm{d}t}{Q^{1-\nu}G^2(t)} + \int_{\bar{C}_4/2}^{t_{\max}} \frac{\mathrm{d}t}{Q^{1-\nu}\{G(t)\}^{2r/(1+r)}} + \delta(\epsilon)\int_0^{t_{\max}} \frac{\mathrm{d}t}{Q^{1-\nu}G^2(t)} \\
&\quad\lesssim \frac{1}{Q^{1-\nu}} + \frac{Q^{(r-1)/(1+r)+\nu}}{(\log Q)^{(1+3r)/(2+2r)}} + \frac{Q^{1+\nu}\delta(\epsilon)}{(\log Q)^{3/2}} = o(v_*)\,. \qquad \text{(S.31)}
\end{aligned}
$$

定义 $\rho_{q,q'}$ = 相关系数$\{\eta^{(q)}, \eta^{(q')}\}$。那么 $|\rho_{q,q'}| \leq$(对数 Q)$^{-2-\gamma}$ 对于任意 $(q, q') \in \mathcal{H}_{03}$。根据 Lin 和 Bai（2010）的定理 2.1.e,

$$\mathbb{P}\big\{\eta^{(q)} > t, \eta^{(q')} > t\big\} \leq \begin{cases} G(t)G\Big\{\dfrac{(1-\rho_{q,q'})t}{(1-\rho_{q,q'}^2)^{1/2}}\Big\}, & \text{if } -1 < \rho_{q,q'} \leq 0\,; \\ (1+\rho_{q,q'})G(t)G\Big\{\dfrac{(1-\rho_{q,q'})t}{(1-\rho_{q,q'}^2)^{1/2}}\Big\}, & \text{if } 0 \leq \rho_{q,q'} < 1\,. \end{cases} \tag{S.32}$$

注意，对于任意（q, q'）$\in \mathcal{H}_{03}$，$|\rho_{q,q'}| \leq$（对数 Q）$^{-2-\gamma}$。当 $-$（对数 Q）$^{-2-\gamma} \leq \rho_{q,q'} \leq 0$ 时，由于（$1-\rho_{q,q'}$）/（$1-\rho_{q,q'}^2$）$^{1/2} \geq 1$，我们有 $G\{$（$1-\rho_{q,q'}$）t/（$1-\rho_{q,q'}^2$）$^{1/2}\} \leq G$（t），这意味着$\mathbb{P}\{\eta^{(q)} > t, \eta^{(q')} > t\} \leq G^2$（$t$）$\leq \{1+$（对数 Q）$^{-1-\gamma}\}G^2$（t）。当 $0 < \rho_{q,q'} \leq$（对数 Q）$^{-2-\gamma}$ 时，根据泰勒展开，可得

$$G\Big\{\frac{(1-\rho_{q,q'})t}{(1-\rho_{q,q'}^2)^{1/2}}\Big\} = G(t) + \phi(\tilde{t})\Big\{t - \frac{(1-\rho_{q,q'})t}{(1-\rho_{q,q'}^2)^{1/2}}\Big\}$$

对于（$1-\rho_{q,\ q'}$）t/（$1-\rho_{q,\ q'}^2$）$^{1/2} < \tilde{t} < t$，其中 ϕ（$\cdot$）是标准正态分布 $\mathcal{N}$(0，1) 的密度函数。接着，若 $\rho_{q,\ q'} > 0$,

$$\begin{aligned} G\Big\{\frac{(1-\rho_{q,q'})t}{(1-\rho_{q,q'}^2)^{1/2}}\Big\}\{G(t)\}^{-1} &= 1 + \frac{\phi(\tilde{t})}{G(t)}\Big\{t - \frac{(1-\rho_{q,q'})t}{(1-\rho_{q,q'}^2)^{1/2}}\Big\} \\ &\leq 1 + \frac{t\phi(\tilde{t})}{t\phi(t)/(1+t^2)}\Big\{1 - \frac{(1-\rho_{q,q'})}{(1-\rho_{q,q'}^2)^{1/2}}\Big\} \\ &\leq 1 + \frac{\phi(\tilde{t})}{\phi(t)} \cdot 2\rho_{q,q'}(1+t^2) \end{aligned}$$

对于任意 $t > 0$。对于 $0 < t < t_{\max}$，有

$$\begin{aligned} \frac{\phi(\tilde{t})}{\phi(t)} = \exp\Big\{\frac{1}{2}(t-\tilde{t})(t+\tilde{t})\Big\} &\leq \exp\Big\{t_{\max}^2\Big(1 - \sqrt{\frac{1-\rho_{q,q'}}{1+\rho_{q,q'}}}\Big)\Big\} \\ &\leq \exp(2\rho_{q,q'}t_{\max}^2) \leq \exp\{4(\log Q)^{-1-\gamma}\} \lesssim 1\,, \end{aligned}$$

这意味着，对于任意 $t \in [0, t_{\max}]$，若$0 < \rho_{q,q'} \leq$(对数 Q)$^{-2-\gamma}$，则 $G\{(1-\rho_{q,q'})t/(1-\rho_{q,q'}^2)^{1/2}\} \leq G(t)$ $[1 + O\{$(对数 Q)$^{-1-\gamma}\}]$，其中 $O\{$(对数 Q)$^{-1-\gamma}\}$ 在 $t \in [0, t_{\max}]$上一致成立。于是$(1+\rho_{q,q'})G(t)G\{(1-\rho_{q,q'})t/(1-\rho_{q,q'}^2)^{1/2}\} \leq G^2(t)[1 + O\{$(对数 Q)$^{-1-\gamma}\}]$ 对任意 $t \in [0, t_{\max}]$均成立，若$0 < \rho_{q,q'} \leq$(对数 Q)$^{-2-\gamma}$。因此，由 (S.32)，当 $(q, q') \in \mathcal{H}_{03}$，$\mathbb{P}\{\eta^{(q)} > t, \eta^{(q')} > t\} \leq$

$[1+O\{$(对数 $Q)^{-1-\gamma}\}]G^2($t$)$ 对于 $t\in[0,t_{\max}]$，这意味着

$$\max_{(q,q')\in\mathcal{H}_{03}}\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)}>t,V_{n,L}^{(q')}>t\}\le[1+O\{(\log Q)^{-1-\gamma}\}]G^2(t)+\delta(\epsilon)$$

对于 $t\in[0,t_{\max}]$。D 由于 $\delta(\epsilon)\int_0^{t_{\max}}\{G(t)\}^{-2}\,dt\lesssim Q^2\delta(\epsilon)$（对数 $Q)^{-3/2}=o(v_*)$，于是有 t

$$\int_0^{t_{\max}}\sum_{(q,q')\in\mathcal{H}_{03}}\frac{\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)}>t,V_{n,L}^{(q')}>t\}-\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q)}>t\}\mathbb{P}\{V_{n,L}^{(q')}>t\}}{Q^2G^2(t)}\,\mathrm{d}t$$
$$\lesssim O\{(\log Q)^{-1-\gamma}\}\cdot\int_0^{t_{\max}}\mathrm{d}t+\int_0^{t_{\max}}\frac{\delta(\epsilon)}{G^2(t)}\,\mathrm{d}t=o(v_*)\,.$$

结合（S.29）和（S.31），我们知道（S.28）成立。于是 $\lim_{n,\,Q\to\infty}\mathbb{P}\{$错误发现比例($\hat{}t$) $\le\alpha Q_0/Q+\varepsilon\}=1$。由于 错误发现率($t$) $=\mathrm{E}\{$错误发现比例(t)$\}$，可得 $\limsup_{n,\,Q\to\infty}$ 错误发现率($\hat{}t$) $\le\alpha Q_0/Q$。定理 3 的证明完成。

□

H 命题 2 的证明

令 $n_{\mathrm{dist}}=\sum_{k=1}^K M_k$。定义 $\Sigma_n^{\mathrm{dist}}=\mathrm{Cov}(n^{1/2}\,\mathrm{dist}\,\bar{U}^{\mathrm{dist}})$、$D_n^{\mathrm{dist}}=\mathrm{diag}(\Sigma_n^{\mathrm{dist}})=\mathrm{diag}\{(\sigma_1^{\mathrm{dist}})^2$、...、$(\sigma_d^{\mathrm{dist}})^2\}$、$\mathring{T}^{\mathrm{dist}}_{\ n}=n^{1/2}\,\mathrm{dist}(D_n^{\mathrm{dist}})^{-1/2}\bar{U}^{\mathrm{dist}}$ 以及 $\mathring{W}\mathrm{dist}_n$、$_L=f_L(\mathring{T}\mathrm{dist}_n)$。回顾 $\mathcal{F}=\{v=($ v_1, ..., $v_d)^\top:\ v_j\in\{0,1\}$ 对于每个 $j\in[d]$，以及 $|v|_0=L\}$。由于集合 $\mathcal{F}$具有可数性，我们可以按照某种顺序将 $\mathcal{F}$ 中的所有元素编号为 $\{\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_{|\mathcal{F}|}\}$。由于 $U^{(1)}$、$_1{}^{\mathrm{dist}}$、...、$U($1$)$、dist_{M_1}、...、$U(K)$、dist 1、...、$U(K)$、dist_{M_K} 是一个（$B-1$）相关序列，运用命题1证明中的相同论证，对于任意$\epsilon>0$，我们有

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}\big|\mathbb{P}(W_{n,L}^{\mathrm{dist}}\le z)-\mathbb{P}(g\le z\cdot 1_{|\mathcal{F}|})\big|$$
$$\lesssim\mathbb{P}\big(|W_{n,L}^{\mathrm{dist}}-\mathring{W}_{n,L}^{\mathrm{dist}}|>\epsilon\big)+\frac{B^{2/3}L^{13/6}(\log d)^{7/6}}{n^{1/6}}+\epsilon(L\log d)^{1/2}\,,\qquad\text{(S.33)}$$

其中 $g\sim\mathcal{N}(0,V^\top R_n^{\mathrm{dist}}V)$，且 $R_n^{\mathrm{dist}}=(D_n^{\mathrm{dist}})^{-1/2}\Sigma_n^{\mathrm{dist}}(D_n^{\mathrm{dist}})^{-1/2}$ 和 $V=(\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_{|\mathcal{F}|})$，条件是 $BK=o(n)$。

接下来，我们给出 $\mathbb{P}($|$W_n^{\mathrm{dist}}{}_{,L}-\mathring{W}_n^{\mathrm{dist}}{}_{,L}|>\epsilon)$ 的一个上界。令 $\hat{}\,D_n^{\mathrm{dist}}=\mathrm{diag}[n^{-1}{}_{\mathrm{dist}}\sum_{k=1}^K M_k\{\hat{}\,\sigma^{(k)}{}_{,1}{}^{\mathrm{dist}}\}^2,\dots,n^{-1}{}_{\mathrm{dist}}\sum_{k=1}^K M_k\{\hat{}\sigma^{(k)}{}_{,d}{}^{\mathrm{dist}}\}^2]=\mathrm{diag}\{(\hat{}\,\sigma_1^{\mathrm{dist}})^2,\dots,(\hat{}\,\sigma_d^{\mathrm{dist}})^2\}$。定义 T_{dist} $_n=n^{1/2}\,\mathrm{dist}(\hat{}\,D_n^{\mathrm{dist}})^{-1/2}\bar{U}^{\mathrm{dist}}$。于是我们有 $W_n^{\mathrm{dist}}{}_{,L}=f_L(T_{\mathrm{dist}n})$。与证明引理 1 中推导上界所用的论证相同，

对于任意 $z>0$，在 H_0 下有 $\mathbb{P}(|\bar{U}_{\text{dist}}|_\infty > z) \lesssim d\exp(-CB^{-1}nz^2)+d\exp(-CB^{-1/2}n^{1/2}z^{1/2})$。记 $\{\sigma_j^{(k),\text{dist}}\}^2 = \text{Var}\{\sqrt{M_k}\bar{U}_j^{(k),\text{dist}}\}$ 为任意 $k\in[K]$ 和 $j\in[d]$。于是对于 $j\in[d]$，我们有 $(\sigma_j^{\text{dist}})^2 = n^{-1}_{\text{dist}}\sum_{k=1}^K M_k\{\sigma_j^{(k),\text{dist}}\}^2$。由于 $|(\hat{\sigma}_j^{\text{dist}})^2-(\sigma_j^{\text{dist}})^2| = |n^{-1}_{\text{dist}}\sum_{k=1}^K M_k\{\hat{\sigma}^{(k)}_{,j}{}^{\text{dist}}\}^2 - n^{-1}_{\text{dist}}\sum_{k=1}^K M_k\{\sigma_j^{(k),\text{dist}}\}^2| \le \max_{k\in[K]}|\{\hat{\sigma}^{(k)}_{,j}{}^{\text{dist}}\}^2-\{\sigma_j^{(k),\text{dist}}\}^2|$ 对所有 $j\in[d]$ 均成立，因此我们有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{\max_{j\in[d]}|(\hat{\sigma}_j^{\text{dist}})^2-(\sigma_j^{\text{dist}})^2|\ge z\right\} &\le \mathbb{P}\left\{\max_{j\in[d]}\max_{k\in[K]}|\{\hat{\sigma}_j^{(k),\text{dist}}\}^2-\{\sigma_j^{(k),\text{dist}}\}^2|\ge z\right\}\\
&\le \sum_{k=1}^K \mathbb{P}\left[\max_{j\in[d]}|\{\hat{\sigma}_j^{(k),\text{dist}}\}^2-\{\sigma_j^{(k),\text{dist}}\}^2|\ge z\right] \qquad \text{(S.34)}\\
&\lesssim d^2B\sum_{k=1}^K\exp(-CB^{-3}n_kz^2)+d^2B\sum_{k=1}^K\exp(-CB^{-1}n_k^{1/2}z^{1/2})\\
&\lesssim d^2BK\exp(-CB^{-3}K^{-1}nz^2)+d^2BK\exp(-CB^{-1}K^{-1/2}n^{1/2}z^{1/2})
\end{aligned}
$$

对于任意 $z=o(B)$，在 $BK=o(n)$ 成立的条件下，其中第三步与 (S.4) 相同。与 (S.12) 相同，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{\max_{j\in[d]}|(\hat{\sigma}_j^{\text{dist}})^{-1}-(\sigma_j^{\text{dist}})^{-1}|\ge z\right\} \qquad \text{(S.35)}\\
&\quad\lesssim d^2BK\exp(-CB^{-3}K^{-1}nz^2)+d^2BK\exp(-CB^{-1}K^{-1/2}n^{1/2}z^{1/2})
\end{aligned}
$$

对于任意 $z=o(1)$。由于 $BK=o(n)$，我们知道 $n_{\text{dist}}\asymp n$。注意，$|W_{\text{dist}n,L}-\mathring{W}_{n,L}^{\text{dist}}| \le L|T_{\text{dist}}{}_n - \mathring{T}^{\text{dist}}{}_n|_\infty \le Ln^{1/2}{}_{\text{dist}}|\bar{U}^{\text{dist}}|_\infty \max_{j\in[d]}|(\hat{\sigma}_j^{\text{dist}})^{-1}-(\sigma_j^{\text{dist}})^{-1}|$。于是有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(|W_{n,L}^{\text{dist}}-\mathring{W}_{n,L}^{\text{dist}}|>\epsilon\big) &\le \mathbb{P}\left\{\max_{j\in[d]}|(\hat{\sigma}_j^{\text{dist}})^{-1}-(\sigma_j^{\text{dist}})^{-1}|>\epsilon^{1/2}L^{-1/2}K^{1/4}n^{-1/4}B^{1/2}\right\}\\
&\quad+\mathbb{P}(|\bar{U}^{\text{dist}}|_\infty>\epsilon^{1/2}L^{-1/2}K^{-1/4}n^{-1/4}B^{-1/2})\\
&\lesssim d^2BK\exp(-CB^{-2}K^{-1/2}L^{-1}n^{1/2}\epsilon)\\
&\quad+d^2BK\exp(-CB^{-3/4}K^{-3/8}L^{-1/4}n^{3/8}\epsilon^{1/4})
\end{aligned}
$$

对于任意 $\epsilon = o(1)$，假设 $B^2KL^{-2} = o(n)$成立。结合 (S.33)，我们有

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}(W_{n,L}^{\mathrm{dist}} \le z) - \mathbb{P}(g \le z\cdot 1_{|\mathcal{F}|})\right| \lesssim\ & d^2BK\exp(-CB^{-2}K^{-1/2}L^{-1}n^{1/2}\epsilon)\\ &+ d^2BK\exp(-CB^{-3/4}K^{-3/8}L^{-1/4}n^{3/8}\epsilon^{1/4})\\ &+ \frac{B^{2/3}L^{13/6}(\log d)^{7/6}}{n^{1/6}} + \epsilon(L\log d)^{1/2}\end{aligned}$$

其中 $g \sim \mathcal{N}(0, V^\top R_n^{\mathrm{dist}} V)$。选择 $\epsilon = n^{-1/6}B^{2/3}L^{5/3}$(对数 $d)^{2/3} = o(1)$，我们有 $\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(W_n^{\mathrm{dist}},$ $_L \le z) - \mathbb{P}(g \le z\cdot 1_{|\mathcal{F}|})| \lesssim d^2BK\exp\{-CB^{-4/3}K^{-1/2}L^{2/3}n^{1/3}$(对数 $d)^{2/3}\} + n^{-1/6}B^{2/3}L^{13/6}$(对数 $d)^{7/6}$ $+d^2BK\exp\{-CB^{-7/12}K^{-3/8}L^{1/6}n^{1/3}$(对数 $d)^{1/6}\}$，这意味着

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}(W_{n,L}^{\mathrm{dist}} \le z) - \mathbb{P}(g \le z\cdot 1_{|\mathcal{F}|})\right| = o(1) \tag{S.36}$$

前提是 $B^4K^{3/2}L^{-2}\{$对数$(dBK)\}^3$(对数 $d)^{-2} = o(n)$， $B^{7/4}K^{9/8}L^{-1/2}\{$对数$(dBK)\}^3$(对数 $d)$ $^{-1/2} =o(n)$ 且 B^4L^{13}(对数 $d)^7 = o(n)$。

回顾 $\tilde{D}_n^{\mathrm{dist}} =\mathrm{diag}[n^{-1}\mathrm{dist}\ \sum_{k=1}^K M_k\{\tilde{\sigma}_1^{(k),\mathrm{dist}}\}^2,\ \ldots\ldots,\ n^{-1}\mathrm{dist}\ \sum_{k=1}^K M_k\{\tilde{\sigma}_d^{(k),\mathrm{dist}}\}^2]$。对于每个 $k \in [K]$，定义 $Y_k = \varepsilon_k K^{1/2}M_k n^{-1/2}\mathrm{dist}\,(\tilde{D}_n^{\mathrm{dist}})^{-1/2}\{\bar{U}(k),\ \mathrm{dist}_-\bar{U}\mathrm{dist}\}$。于是 $\mathring{\xi} =(\tilde{D}_n^{\mathrm{dist}})$ $^{-1/2}\sum_{k=1}^K \varepsilon_k n^{-1/2}\mathrm{dist}\ \ M_k\{\bar{U}^{(k),\mathrm{dist}} - \bar{U}^{\mathrm{dist}}\} = K^{-1/2}\sum_{k=1}^K Y_k$。由于 ε_1，$\ldots\ldots$，ε_K 是独立的拉德马赫序列，我们知道 Y_1，$\ldots\ldots$，Y_K 在给定 $\mathcal{X}_n = \{X_1, \ldots, X_n\}$ 的条件下也是独立的零均值序列。令 $M_{\max} =\max_{k\in[K]} M_k$。在给定 $\mathcal{X}$ 的条件下，由于 $M_{\max} \asymp nK^{-1}$ 和 $n_{\mathrm{dist}} \asymp n,$，我们有 $\max_{v\in\mathcal{F}}$ $\max_{k\in[K]}|v^\top Y_k| \le\max_{v\in\mathcal{F}}|v|_1\cdot\max_{k\in[K]}|Y_k|_\infty \lesssim Ln^{1/2}K^{-1/2}|(\tilde{D}_n^{\mathrm{dist}})^{-1/2}|_\infty\max_{k\in[K]}|\bar{U}(k),\ \mathrm{dist}_-\bar{U}$ $\mathrm{dist}|_\infty$。定义 $\hat{}\, R_n^{\mathrm{dist}} =\mathrm{Cov}(K^{-1/2}\sum_{k=1}^K Y_k \,|\, \mathcal{X}_n)$。稍后我们将证明 $\max_{v_1,\ v_2\in\mathcal{F}}|v_1(R_n^{\mathrm{dist}} - \hat{}\, R_n^{\mathrm{dist}})$ $v_2| = o_{\mathrm{p}}(1)$。由于 $\min_{v\in\mathcal{F}} v^\top R_n^{\mathrm{dist}} v \ge c_2$，我们有 $\min_{v\in\mathcal{F}} v^\top\hat{}\, R_n^{\mathrm{dist}} v \ge c_2/2$，其概率趋近于 1。回顾 $V =(\tilde{v}_1,\ \ldots\ldots,\ \tilde{v}_{|\mathcal{F}|})$，其中 $\mathcal{F} = \{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{|\mathcal{F}|}\}$。与 (S.7) 相同，以趋近于 1 的概率有

$$\begin{aligned}&\sup_{y\in\mathbb{R}^{|\mathcal{F}|}}\left|\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\sum_{k=1}^K V^\top Y_k \le y\,\middle|\,\mathcal{X}_n\right) - \mathbb{P}(\hat{g} \le y\,|\,\mathcal{X}_n)\right|\\ &\qquad\lesssim \frac{L^{13/6}n^{1/2}(\log d)^{7/6}}{K^{2/3}}|(\tilde{D}_n^{\mathrm{dist}})^{-1/2}|_\infty\max_{k\in[K]}|\bar{U}^{(k),\mathrm{dist}} - \bar{U}^{\mathrm{dist}}|_\infty\end{aligned} \tag{S.37}$$

其中 $\hat{}g \,|\, \mathcal{X}_n \sim \mathcal{N}(0,\ V^\top \hat{}R_n^{\mathrm{dist}} V)$。正如我们已经证明的，对于任意 $z>0$，有 $\mathbb{P}(|\bar{U}^{\mathrm{dist}}|_\infty > z) \lesssim d\exp(-CB^{-1}nz^2) + d\exp(-CB^{-1/2}n^{1/2}z^{1/2})$，因此我们有 $|\bar{U}^{\mathrm{dist}}|_\infty = O_{\mathrm{p}}\{n^{-1/2}B^{1/2}(\log d)^{1/2}\}$。类似地，我们也可以证明，对于任意 $z>0$，$\max_{k\in[K]} \mathbb{P}\{|\bar{U}^{(k),\mathrm{dist}}|_\infty > z\} \lesssim d\exp(-CB^{-1}K^{-1}nz^2) + d\exp(-CB^{-1/2}K^{-1/2}n^{1/2}z^{1/2})$，这意味着

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\max_{k\in[K]} |\bar{U}^{(k),\mathrm{dist}}|_\infty > z\right\} &\le \sum_{k=1}^K \mathbb{P}\{|\bar{U}^{(k),\mathrm{dist}}|_\infty > z\} \\ &\lesssim dK\exp(-CB^{-1}K^{-1}nz^2) + dK\exp(-CB^{-1/2}K^{-1/2}n^{1/2}z^{1/2})\end{aligned}$$

对于任意 $z>0$。于是，$\max_{k\in[K]} |\bar{U}^{(k),\mathrm{dist}}|_\infty = O_{\mathrm{p}}[n^{-1/2}K^{1/2}B^{1/2}\{\text{对数}(dK)\}^{1/2}] + O_{\mathrm{p}}\{n^{-1}KB(\text{对数}\, dK)^2\}$。因此，$\max_{k\in[K]} |\bar{U}^{(k),\mathrm{dist}} - \bar{U}^{\mathrm{dist}}|_\infty \le \max_{k\in[K]} |\bar{U}^{(k),\mathrm{dist}}|_\infty + |\bar{U}^{\mathrm{dist}}|_\infty = O_{\mathrm{p}}[n^{-1/2}K^{1/2}B^{1/2}\{\text{对数}(dK)\}^{1/2}] + O_{\mathrm{p}}\{n^{-1}KB(\text{对数}\, dK)^2\}$。注意，对于任意 $k\in[K]$，$\varepsilon_k^2 = 1$。根据 $\tilde{\sigma}^{(k)}$ 的定义，$_j{}^{\mathrm{dist}}$，我们知道 $\tilde{\sigma}^{(k)}{}_{,j}{}^{\mathrm{dist}} = \hat{}\sigma^{(k)}{}_{,j}{}^{\mathrm{dist}}$ 对于任意 $k\in[K]$ 和 $j\in[d]$。正如我们在 (S.34) 中所证明的，$\max_{k\in[K]} \mathbb{P}[\max_{j\in[d]} |\{\hat{}\sigma^{(k)}{}_{,j}{}^{\mathrm{dist}}\}^2 - \{\sigma_j^{(k),\mathrm{dist}}\}^2| \ge z] \lesssim d^2B\exp(-CB^{-3}K^{-1}nz^2) + d^2B\exp(-CB^{-1}K^{-1/2}\cdot n^{1/2}z^{1/2})$ 对任意 $z = o(B)$，我们有 $\max_{j\in[d]}\max_{k\in[K]} |\{\hat{}\sigma(k)_j{}^{,}{}^{}\}^2 - \{\sigma^{\mathrm{dist}}(k)_j{}^{,}{}^{}\}^2| = o_{\mathrm{p}}(1)$，前提是 $B^3K\log(dBK) = o(n)$ 且 $B^2K(\log dBK)^2 = o(n)$。由于 $\min_{j\in[d]}\min_{k\in[K]}\{\sigma(k)_j{}^{,}{}^{}\}^2 \ge c_2\mathrm{dist}$，我们以趋近于 1 的概率有 $\min_{j\in[d]}\min_{k\in[K]}\{\tilde{\sigma}(k)_j{}^{,}{}^{}\}^2 \ge c_2/2$ dist，这意味着 $\min_{j\in[d]} n^{-1}$ dist $\sum_{k=1}^K M_k\{\tilde{\sigma}(k)_j{}^{,}{}^{}\}^2 \ge c_2/2\mathrm{dist}$。因此，$|(\tilde{D}\mathrm{dist}_n)^{-1/2}|_\infty = [\min_{j\in[d]} n^{-1}$ dist $\sum_{k=1}^K M_k\{\tilde{\sigma}(k)_j{}^{,}{}^{}\}^2]^{-1/2} = \mathrm{dist}\, O_{\mathrm{p}}(1)$。根据 (S.37)，有

$$\begin{aligned}&\sup_{y\in\mathbb{R}^{|\mathcal{F}|}} \left|\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\sum_{k=1}^K V^\top Y_k \le y \,\middle|\, \mathcal{X}_n\right) - \mathbb{P}(\hat{g}\le y \,|\, \mathcal{X}_n)\right| \\ &\quad = O_{\mathrm{p}}\left[\frac{B^{1/2}L^{13/6}\{\log(dK)\}^{1/2}(\log d)^{7/6}}{K^{1/6}}\right] + O_{\mathrm{p}}\left[\frac{BK^{1/3}L^{13/6}(\log dK)^2(\log d)^{7/6}}{n^{1/2}}\right].\end{aligned}$$

结合以下事实：对于任意 $z\in\mathbb{R}$，$\{f_L(\mathring{\xi}) \le z\} = \{\max_{j\in[|\mathcal{F}|]} \tilde{v}_j^\top \mathring{\xi} \le z\} = \{K^{-1/2}\sum_{k=1}^K V^\top Y_k \le z\cdot 1_{|\mathcal{F}|}\}$，我们得到

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} \left|\mathbb{P}\{f_L(\mathring{\xi}) \le z \,|\, \mathcal{X}_n\} - \mathbb{P}(\hat{g} \le z\cdot 1_{|\mathcal{F}|} \,|\, \mathcal{X}_n)\right| = o_{\mathrm{p}}(1) \tag{S.38}$$

假设 $B^3L^{13}\{\log(dK)\}^3(\log d)^7 = o(K)$ 且 $B^2K^{2/3}L^{13/3}(\log dK)^4(\log d)^{7/3} = o(n)$。

定义 $\Delta_n^{\mathrm{dist}} = \max_{v_1,\ v_2\in\mathcal{F}} |v_1^\top(R_n^{\mathrm{dist}} - \hat{R}_n^{\mathrm{dist}})v_2|$。回顾 $\Sigma_n^{\mathrm{dist}} = \mathrm{Cov}(n^{1/2}\bar{U}^{\mathrm{dist}})$。我们记 $\Gamma_n^{\mathrm{dist}} = (D_n^{\mathrm{dist}})^{-1/2}$、$\hat{\Gamma}_n^{\mathrm{dist}} = (\tilde{D}_n^{\mathrm{dist}})^{-1/2}$和 $\hat{\Sigma}_n^{\mathrm{dist}} = n^{-1}\sum_{k=1}^K M_k^2\{\bar{U}_{(k),\ \text{距离}} - \bar{U}^{\mathrm{dist}}\}\{\bar{U}^{(k),\mathrm{dist}} - \bar{U}^{\mathrm{dist}}\}^\top$。那么$R_n^{\mathrm{dist}} = \Gamma_n^{\mathrm{dist}}\Sigma_n^{\mathrm{dist}}\Gamma_n^{\mathrm{dist}}$且 $\hat{R}_n^{\mathrm{dist}} = \mathrm{Cov}(K^{-1/2}\sum_{k=1}^K Y_k \mid \mathcal{X}_n) = \hat{\Gamma}_n^{\mathrm{dist}}\hat{\Sigma}_n^{\mathrm{dist}}\hat{\Gamma}_n^{\mathrm{dist}}$。对于任意 $\check{v}_1,\ \check{v}_2 \in \mathcal{F}$，根据三角不等式可得

$$
\begin{aligned}
|\check{v}_1^\top(R_n^{\mathrm{dist}} - \hat{R}_n^{\mathrm{dist}})\check{v}_2| &\le |\check{v}_1^\top\Gamma_n^{\mathrm{dist}}\Sigma_n^{\mathrm{dist}}(\Gamma_n^{\mathrm{dist}} - \hat{\Gamma}_n^{\mathrm{dist}})\check{v}_2| + |\check{v}_1^\top\Gamma_n^{\mathrm{dist}}(\Sigma_n^{\mathrm{dist}} - \hat{\Sigma}_n^{\mathrm{dist}})\hat{\Gamma}_n^{\mathrm{dist}}\check{v}_2| \\
&\quad + |\check{v}_1^\top(\Gamma_n^{\mathrm{dist}} - \hat{\Gamma}_n^{\mathrm{dist}})\hat{\Sigma}_n^{\mathrm{dist}}\hat{\Gamma}_n^{\mathrm{dist}}\check{v}_2| \\
&=: I_1^{\mathrm{dist}} + I_2^{\mathrm{dist}} + I_3^{\mathrm{dist}}\,.
\end{aligned}
$$

注意到 $I_1^{\mathrm{dist}} \le |\Sigma_n^{\mathrm{dist}}|_\infty \max_{\check{v}_1\in\mathcal{F}} |\Gamma_n^{\mathrm{dist}}\check{v}_1|_1 \max_{\check{v}_2\in\mathcal{F}} |(\Gamma_n^{\mathrm{dist}} - \hat{\Gamma}_n^{\mathrm{dist}})\check{v}_2|_1 \lesssim BL^2|\Gamma_n^{\mathrm{dist}} - \hat{\Gamma}_n^{\mathrm{dist}}|_\infty$ 以及 $\tilde{D}_n^{\mathrm{dist}} = \hat{D}_n^{\mathrm{dist}}$。由 (S.35)，在满足 $B^3K\log(dBK) = o(n)$ 和 $B^2K\{\log(dBK)\}^2 = o(n)$ 的条件下，我们有 $|\Gamma_n^{\mathrm{dist}} - \hat{\Gamma}_n^{\mathrm{dist}}|_\infty = O_{\mathrm{p}}[n^{-1/2}B^{3/2}K^{1/2}\{\log(dBK)\}^{1/2}] + O_{\mathrm{p}}[n^{-1}B^2K\{\log(dBK)\}^2]$。于是

$$
I_1^{\mathrm{dist}} = O_{\mathrm{p}}[n^{-1/2}B^{5/2}L^2K^{1/2}\{\log(dBK)\}^{1/2}] + O_{\mathrm{p}}[n^{-1}B^3L^2K\{\log(dBK)\}^2]\,. \tag{S.39}
$$

注意，$\Sigma_n^{\mathrm{dist}} = n^{-1}\sum_{k=1}^K M_k^2\mathbb{E}[\bar{U}^{(k),\mathrm{dist}}\{\bar{U}_{(k),\ \text{距离}}\}^\top]$。对于任意 $i,\ j \in [d]$，根据三角不等式，我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n_{\mathrm{dist}}}\sum_{k=1}^K M_k^2\mathbb{E}\{\bar{U}_i^{(k),\mathrm{dist}}\bar{U}_j^{(k),\mathrm{dist}}\} - \frac{1}{n_{\mathrm{dist}}}\sum_{k=1}^K M_k^2\{\bar{U}_i^{(k),\mathrm{dist}} - \bar{U}_i^{\mathrm{dist}}\}\{\bar{U}_j^{(k),\mathrm{dist}} - \bar{U}_j^{\mathrm{dist}}\}\right| \\
&\quad\le \left|\frac{1}{n_{\mathrm{dist}}}\sum_{k=1}^K M_k^2[\bar{U}_i^{(k),\mathrm{dist}}\bar{U}_j^{(k),\mathrm{dist}} - \mathbb{E}\{\bar{U}_i^{(k),\mathrm{dist}}\bar{U}_j^{(k),\mathrm{dist}}\}]\right| + |\bar{U}_j^{\mathrm{dist}}|\left|\frac{1}{n_{\mathrm{dist}}}\sum_{k=1}^K M_k^2\bar{U}_i^{(k),\mathrm{dist}}\right| \\
&\qquad + |\bar{U}_i^{\mathrm{dist}}|\left|\frac{1}{n_{\mathrm{dist}}}\sum_{k=1}^K M_k^2\bar{U}_j^{(k),\mathrm{dist}}\right| + |\bar{U}_i^{\mathrm{dist}}||\bar{U}_j^{\mathrm{dist}}|\left(\frac{1}{n_{\mathrm{dist}}}\sum_{k=1}^K M_k^2\right) \qquad \text{(S.40)} \\
&\quad\le \max_{i,j\in[d]}\left|\frac{1}{n_{\mathrm{dist}}}\sum_{k=1}^K M_k^2[\bar{U}_i^{(k),\mathrm{dist}}\bar{U}_j^{(k),\mathrm{dist}} - \mathbb{E}\{\bar{U}_i^{(k),\mathrm{dist}}\bar{U}_j^{(k),\mathrm{dist}}\}]\right| \\
&\qquad + 2\max_{j\in[d]}|\bar{U}_j^{\mathrm{dist}}| \cdot \max_{j\in[d]}\left|\frac{1}{n_{\mathrm{dist}}}\sum_{k=1}^K M_k^2\bar{U}_j^{(k),\mathrm{dist}}\right| + \left(\frac{1}{n_{\mathrm{dist}}}\sum_{k=1}^K M_k^2\right)\max_{j\in[d]}|\bar{U}_j^{\mathrm{dist}}|^2 \\
&\quad=: J_1 + J_2 + J_3\,.
\end{aligned}
$$

注意，$\max_{k\in[K]}\max_{i,j\in[d]}|M_k^2\bar{U}^{(k)}_{i,}{}^{\top}\bar{U}^{(k)}_{j}{}^{\top}|=O_{\mathrm{p}}\{K^{-1}nB_{\text{距离}}\log(dK)\}+O_{\mathrm{p}}[B^2\{\log(dK)\}^4]$。对于任意 $\delta_n\to\infty$，当 $n\to\infty$ 时，我们有 $\max_{k\in[K]}\max_{i,j\in[d]}|M_k^2\bar{U}_{(k)i}{}^{\top}\bar{U}_{\text{距离}\,(k)j}{}^{\top}|\le K^{-1}nB\delta_{n\,\text{距离}}\log(dK)+B^2\delta_n\{\log(dK)\}^4$，且该结论以趋近于 1 的概率成立。令 $Z_i^{(k)}{}_{,j}=M_k^2\bar{U}_{(k)i}{}^{\top}\bar{U}_{\text{距离}\,(k)j}{}^{\top}I[|M_k^2\bar{U}_{\text{距离}\,(k)i}{}^{\top}\bar{U}_{\text{距离}\,(k)j}{}^{\top}|\le_{\text{距离}}K^{-1}nB\delta_n\log(dK)+B^2\delta_n\{\log(dK)\}^4]$ 以及 $\tilde{Z}_i^{(k)}{}_{,j}=M_k^2\bar{U}^{(k)}_{i,}{}^{\mathrm{dist}}\bar{U}^{(k),\mathrm{dist}}_{j}I[|M_k^2\bar{U}_i^{(k),\mathrm{dist}}\bar{U}_j^{(k),\mathrm{dist}}|>K^{-1}n$

$\cdot B\delta_n$ 对数$(dK)+B^2\delta_n\{$对数$(dK)\}^4]$。由于对于任意 $z>0$，$\max_{k\in[K]}\mathbb{P}\{|\bar{U}_{(k),\text{距离}}|_\infty>z\}\lesssim d\exp(-CB^{-1}K^{-1}nz^2)+d\exp(-CB^{-1/2}K^{-1/2}n^{1/2}z^{1/2})$，我们有 $\max_{i,j\in[d]}|n^{-1}{}_{\text{距离}}\sum_{k=1}^K\mathbb{E}\{\tilde{Z}_{(k)\,i,}{}_{j}\}|\lesssim K^{-1}B+n^{-1}B^2$，前提是 $BK\{$对数$(dK)\}^3=o(n)$。根据霍夫丁不等式，我们有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(|J_1|>z)&\le\mathbb{P}\left[\max_{i,j\in[d]}\left|\frac{1}{n_{\mathrm{dist}}}\sum_{k=1}^K[Z_{i,j}^{(k)}-\mathbb{E}\{Z_{i,j}^{(k)}\}]\right|>\frac{z}{2}\right]\\
&\quad+\mathbb{P}\left[\max_{i,j\in[d]}\left|\frac{1}{n_{\mathrm{dist}}}\sum_{k=1}^K[\tilde{Z}_{i,j}^{(k)}-\mathbb{E}\{\tilde{Z}_{i,j}^{(k)}\}]\right|>\frac{z}{2}\right]\\
&\le d^2\max_{i,j\in[d]}\mathbb{P}\left[\left|\sum_{k=1}^K[Z_{i,j}^{(k)}-\mathbb{E}\{Z_{i,j}^{(k)}\}]\right|>\frac{n_{\mathrm{dist}}z}{2}\right]\\
&\quad+\mathbb{P}\left[\max_{k\in[K]}\max_{i,j\in[d]}|M_k^2\bar{U}_i^{(k),\mathrm{dist}}\bar{U}_j^{(k),\mathrm{dist}}|>K^{-1}nB\delta_n\log(dK)+B^2\delta_n\{\log(dK)\}^4\right]\\
&\le 2d^2\exp\left[-\frac{CKn^2z^2}{n^2B^2\delta_n^2\log^2(dK)+K^2B^4\delta_n^2\{\log(dK)\}^8}\right]+o(1)
\end{aligned}
$$

对于任意 $z\ge C'(K^{-1}B+n^{-1}B^2)$，其中 $C'>0$ 是一个足够大的常数。因此，有 $|J_1|=O_{\mathrm{p}}\{K^{-1/2}B\delta_n$对数 $d)^{1/2}$对数$(dK)\}+O_{\mathrm{p}}[n^{-1}K^{1/2}B^2\delta_n$对数 $d)^{1/2}\{$对数$(dK)\}^4]$。注意到我们可以选择任意缓慢发散的 δ_n，根据概率论中的一个标准结果，有 $|J_1|=O_{\mathrm{p}}\{K^{-1/2}B$对数 $d)^{1/2}$对数$(dK)\}+O_{\mathrm{p}}[n^{-1}K^{1/2}B^2$对数 $d)^{1/2}\{$对数$(dK)\}^4]$。使用推导 $\mathbb{P}(|\bar{U}^{\mathrm{dist}}|_\infty>z)$ 上界时的相同论证，我们有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{\max_{j\in[d]}\left|\frac{1}{n_{\mathrm{dist}}}\sum_{k=1}^K M_k^2\bar{U}_j^{(k),\mathrm{dist}}\right|>z\right\}&=\mathbb{P}\left\{\max_{j\in[d]}\left|\frac{1}{n_{\mathrm{dist}}}\sum_{k=1}^K\frac{M_k}{M_{\max}}M_k\bar{U}_j^{(k),\mathrm{dist}}\right|>\frac{z}{M_{\max}}\right\}\\
&\lesssim d\exp(-CB^{-1}n^{-1}K^2z^2)+d\exp(-CB^{-1/2}K^{1/2}z^{1/2})
\end{aligned}
$$

对于任意 $z>0$，这意味着 $\max_{j\in[d]}|n^{-1}{}_{\text{分布}}\sum_{k=1}^K M_k^2\bar{U}_{(k)j}{}^{\top}|=O_{\mathrm{p}}\{B^{1/2}K^{-1}n^{1/2}{}_{\text{分布}}$(对数 $d)^{1/2}\}$。由于 $|\bar{U}^{\mathrm{dist}}|_\infty=O_{\mathrm{p}}\{n^{-1/2}B^{1/2}$(对数 $d)^{1/2}\}$，我们有 $|J_2|=O_{\mathrm{p}}(BK^{-1}$对数 $d)$ 和 $|J_3|=O_{\mathrm{p}}(BK^{-1}$对数 $d)$。

(S.40) 得出 $|\Sigma_n^{\mathrm{dist}} - \hat{\Sigma}_n^{\mathrm{dist}}|_\infty = O_{\mathrm{p}}\{K^{-1/2}B(\text{对数 } d)^{1/2}\log(dK)\} + O_{\mathrm{p}}[n^{-1}K^{1/2}B^2(\text{对数 } d)^{1/2}\{\log(dK)\}^4]$，这意味着

$$
\begin{aligned}
I_2^{\mathrm{dist}} &\le |\Sigma_n^{\mathrm{dist}} - \hat{\Sigma}_n^{\mathrm{dist}}|_\infty \max_{\check{v}_1 \in \mathcal{F}} |\Gamma_n^{\mathrm{dist}} \check{v}_1|_1 \max_{\check{v}_2 \in \mathcal{F}} |\hat{\Gamma}_n^{\mathrm{dist}} \check{v}_2|_1 \qquad \text{(S.41)} \\
&= O_{\mathrm{p}}\{K^{-1/2}BL^2(\log d)^{1/2}\log(dK)\} + O_{\mathrm{p}}[n^{-1}K^{1/2}B^2L^2(\log d)^{1/2}\{\log(dK)\}^4]\,,
\end{aligned}
$$

Usi沿用推导 I_1^{dist} 收敛速率的相同论证，我们得到

$$
I_3^{\mathrm{dist}} = O_{\mathrm{p}}[n^{-1/2}B^{5/2}L^2K^{1/2}\{\log(dBK)\}^{1/2}] + O_{\mathrm{p}}[n^{-1}B^3L^2K\{\log(dBK)\}^2]
$$

在 $\{\text{对数}(dK)\}^2$ 对数 $d = o(K)$ 且 $BK^{1/2}(\text{对数 } d)^{1/2}\{\text{对数}(dK)\}^4 = o(n)$ 的条件下。结合 (S.39) 和 (S.41)，可得

$$
\Delta_n^{\mathrm{dist}} \le I_1^{\mathrm{dist}} + I_2^{\mathrm{dist}} + I_3^{\mathrm{dist}} = o_{\mathrm{p}}\{L^{-2}(\log d)^{-2}\}
$$

在 $B^2L^8\{\text{对数}(dK)\}^2(\text{对数 } d)^5 = o(K)$、$B^3L^4K\{\text{对数}(dBK)\}^2(\text{对数 } d)^2 = o(n)$、$B^2L^4K^{1/2}(\text{对数 } d)^{5/2}$ 的条件下 $\cdot\{\text{对数}(dK)\}^4 = o(n)$ 且 B^5L^8K 对数$(dBK)(\text{对数 } d)^4 = o(n)$。与 (S.15) 相同，我们有

$$
\sup_{y \in \mathbb{R}^{|\mathcal{F}|}} \left|\mathbb{P}(g \le y) - \mathbb{P}(\hat{g} \le y \,|\, \mathcal{X}_n)\right| \lesssim (\Delta_n^{\mathrm{dist}})^{1/3}\{1 \vee \log(d^L/\Delta_n^{\mathrm{dist}})\}^{2/3} = o_{\mathrm{p}}(1)\,.
$$

结合 (S.36) 和 (S.38)，可得

$$
\begin{aligned}
\sup_{z \in \mathbb{R}} \left|\mathbb{P}(W_{n,L}^{\mathrm{dist}} > z) - \mathbb{P}\{f_L(\mathring{\xi}) > z \,|\, \mathcal{X}_n\}\right| \le{}& \sup_{z \in \mathbb{R}} \left|\mathbb{P}(W_{n,L}^{\mathrm{dist}} \le z) - \mathbb{P}(g \le z \cdot 1_{|\mathcal{F}|})\right| \\
&+ \sup_{z \in \mathbb{R}} \left|\mathbb{P}(g \le z \cdot 1_{|\mathcal{F}|}) - \mathbb{P}(\hat{g} \le z \cdot 1_{|\mathcal{F}|} \,|\, \mathcal{X}_n)\right| \\
&+ \sup_{z \in \mathbb{R}} \left|\mathbb{P}\{f_L(\mathring{\xi}) \le z | \mathcal{X}_n\} - \mathbb{P}(\hat{g} \le z \cdot 1_{|\mathcal{F}|} \,|\, \mathcal{X}_n)\right| \\
={}& o_{\mathrm{p}}(1)\,.
\end{aligned}
$$

命题 2 的证明至此完成。 □

参考文献

Barch, D. M., Burgess, G. C., Harms, M. P., Petersen, S. E., Schlaggar, B. L., Corbetta, M. 等（2013）。人类连接组中的功能：任务功能磁共振成像与行为中的个体差异。

Neuroimage 80，169–189。

Berman, S. M. (1962). 平稳高斯序列最大值的一个大数定律。《数学统计年刊》，**33**，93–97。

Becker, B., Androsch, L., Jahn, R. T., Alich, T., Striepens, N., Markett, S. 等（2013）。在去甲肾上腺素信号受损的情况下，额下回可维持工作记忆和情绪学习。《行为神经科学前沿》**7**，197。

Borell, C. (1975). 高斯空间中的布伦–明可夫斯基不等式。《数学新进展》，**30**，207–216。

Chang, J., Chen, X. 和 Wu, M. (2021). 高维相关数据的中心极限定理。arXiv:2104.12929v2。

Chernozhukov, V., Chetverikov, D. 和 Kato, K. (2013). 高维随机向量和的最大值的高斯近似与乘子自助法。《统计学年刊》，**41**，2786–2819。

Chernozhukov, V., Chetverikov, D. 和 Kato, K.（2017）。高维中心极限定理与自助法。《概率年刊》，**45**，2309–2352。

Lenartowicz, A. 和 McIntosh, A. R.（2005）。前扣带皮层在工作记忆中的作用受功能连接塑造，《认知神经科学杂志》**17**，1026–1042。

Lin, Z. 和 Bai, Z.（2010）。概率不等式。北京科学出版社，北京。

Saulis, L. 和 Statulevi˘cius, V. A.（1991）。大偏差极限定理。Springer Nether- lands。