# 关于整数上的一类不可约多项式的札记*

WeilinZhang, Pingzhi Yuan†华南师范大学数学科学学院，广州，510631，中国

arXiv:2303.03605v1 [math.NT] 7 Mar 2023

**摘要**：在本札记中，我们证明了形如 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_m x^m + p^u \in \mathbb{Z}[x]$ 的多项式的一个不可约性判别准则，其中 $p$是一个素数， $u \geqslant 1$，最大公约数$(u, m) = 1$, $p \nmid a_m$和 $p^u > |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_m|$。特别地，我们证明了 Koley 和 Reddy 猜想成立。

**关键词**：不可约多项式；牛顿多边形
**2020年数学主题分类**：11R09, 11C08

## 1 引言

许多研究人员研究了 $\mathbb{Z}[x]$ 中常数项为素数或素数幂的多项式的不可约性。例如，Weisner [19] 证明了：如果 $p$ 是素数且 $n \geqslant 2$、 $u \geqslant 1$，那么只要 $p^u > 2$, $x^n \pm x \pm p^u$ 就是不可约的。Jonassen[14] 证明了，除六类不同的多项式族外，$x^n \pm x^m \pm 4$ 都是不可约的。最近，Koley 和 Reddy [16] 证明了，除分圆因子外，$x^n \pm x \pm 2$ 恰好有一个非互反不可约因子。

关于这一问题的更一般情形，Panitopol 和 Stefänescu [17] 证明了以下命题 1.1。

**命题 1.1**。设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + p \in \mathbb{Z}[x]$, 其中 $p$ 是素数。如果 $p > |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1|$, 那么 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

注意到 $f(x)$ 和 $-f(x)$ 具有相同的不可约性。为使表述简洁，我们总是假设 $f(x)$ 的常数项为正。A. I. Bonciocat 和 N. C. Bonciocat 将命题 1.1 推广到了 [4] 和 [3]中的素数幂。在 [4], 中，他们

*本工作得到国家自然科学基金（项目编号：12171163）的资助。
†通讯作者：yuanpz@scnu.edu.cn

证明了如果 $p \nmid a_0a_1$, $p^u > |a_1|p^{2e} + \sum_{i=2}^{n} |a_0^{i-1}a_i|p^{ie}$, $u \geqslant 1$, $e \geqslant 0$，那么 $a_nx^n + \cdots + a_2x^2 + a_1p^ex + a_0p^u$ 在 $\mathbb{Q}$上不可约。令 $e = 0$ 和 $a_0 = 1$，得到如下命题1.2。

**命题1.2**。设 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + p^u \in \mathbb{Z}[x]$，其中 $p$是素数且 $u \geqslant 1$。若 $p \nmid a_1$ 且 $p^u > |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1|$，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$上不可约。

值得一提的是，命题1.2中的条件 $p \nmid a_1$ 不能去掉。例如， $x^3 - x^2 - 10x + 16 = (x - 2)(x^2 + x - 8)$。

在 [3], 中，他们证明了：若 $p \nmid a_0a_2$、 $p^u > |a_0a_2|p^{3e} + \sum_{i=3}^{n} |a_0^{i-1}a_i|p^{ie}$ 且 $u \not\equiv e \pmod 2$，$u \geqslant 1$、 $e \geqslant 0$，则 $a_nx^n + \cdots + a_3x^3 + a_2p^ex^2 + a_0p^u$ 在 $\mathbb{Q}$上不可约。令 $e = 0$和 $a_0 = 1$，可得以下命题1.3。

**命题1.3**。设 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + p^u \in \mathbb{Z}[x]$，其中 $p$是素数且 $u \geqslant 1$。若 $p \nmid a_2$、 $2 \nmid u$和 $p^u > |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1|$，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$上不可约。

与命题1.2一样，命题1.3中的条件 $p \nmid a_2$ 和 $2 \nmid u$ 也不能去掉。例如，

$$2x^3 - 3x^2 - 27 = (x - 3)(2x^2 + 3x + 9),$$

$$x^4 + (2^{k+1} - 1)x^2 + 2^{2k} = (x^2 + x + 2^k)(x^2 - x + 2^k), \text{ where } k \geqslant 1.$$

最近，Koley 和 Reddy 试图为形如 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + p^u \in \mathbb{Z}[x]$ 的多项式寻找类似的不可约性判别准则，其中 $p$ 是素数且 $u \geqslant 1$。在 [15], 中，他们巧妙地运用互反多项式的技巧，证明了以下命题 1.4。

**命题 1.4**。设 $f\ (x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + p^u \in \mathbb{Z}[x]$，其中 $p$是素数，且 $u \geqslant 1$。若 $p \nmid a_na_3$、 $3 \nmid u$和 $p^u > |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_3|$，则 $f\ (x)$ 在 $\mathbb{Q}$上不可约。

从 [15], 中命题 1.4 的证明可知，条件 $p \nmid a_na_3$ 不能替换为 $p \nmid a_3$。在这篇札记中，我们将证明这种替换是可行的。

根据命题 1.2–1.4 以及 [15], 中的一些例子，作者提出了以下猜想 1.5。

**猜想 1.5**。 令 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_q x^q + p^u \in \mathbb{Z}[x]$, 其中 $p$和 $q$是两个素数，且 $u \geqslant 1$。如果 $p \nmid a_n a_q$、 $q \nmid u$且 $p^u > |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_q|$, 那么 $f(x)$在 $\mathbb{Q}$上不可约。

在这篇札记中，我们将证明猜想 1.5 成立，并且条件 $p \nmid a_n a_q$可以替换为 $p \nmid a_q$。为此，我们证明下面的定理 1.6。

**定理 1.6**。 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_m x^m + p^u \in \mathbb{Z}[x]$, 其中 $p$是一个素数，且 $u \geqslant 1$。若 $p \nmid a_m$，最大公约数$(u, m) = 1$且 $p^u > |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_m|$, 则 $f(x)$在 $\mathbb{Q}$上不可约。

显然，设 $m = q$是一个素数。那么，最大公约数$(q, m) = 1$推出 $q \nmid u$。因此，我们得到下面的推论 1.7，它表明猜想 1.5 成立。

**推论 1.7**。 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_q x^q + p^u \in \mathbb{Z}[x]$, 其中 $p$和 $q$是两个素数，且 $u \geqslant 1$。若 $p \nmid a_q$、 $q \nmid u$和 $p^u > |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_q|$, 则$f(x)$在 $\mathbb{Q}$上不可约。

定理 1.6 的证明将在第 3 节给出，该证明依赖于牛顿多边形法。第 2 节中，我们简要回顾一个关于牛顿多边形的有用结果，不再提供更多证明细节。

# 2 牛顿多边形法

本文中凡是涉及牛顿多边形法的记号和术语，虽未在此定义，均可直接使用；读者可参阅 [1, 2, 5]。下面介绍 Dumas 的著名结果 [6]，它在牛顿多边形法中起着核心作用。

*Dumas* 定理。设 $p$ 是一个素数，且 $f(x) = g(x)h(x)$, 其中 $f(x)$ $g(x)$和 $h(x)$是 $\mathbb{Z}[x]$中的多项式。那么，相对于 $p$ ， $f(x)$的牛顿多边形各边段的向量系，等于 $g(x)$和 $h(x)$的牛顿多边形各边段的向量系的并集，相对于 $p$。

关于牛顿多边形法在研究各类多项式的不可约性中的应用，例如贝塞尔多项式和拉盖尔多项式，可参阅 Filaseta [7], Filaseta、Finch 和 Leidy [8], Filaseta 的相关著作，

Kidd 和 Trifonov [9], Filaseta 和 Lam [11], Filaseta 和 Trifonov [12], Filaseta 和 Williams [10],Hajir [13],以及 Sell [18]。

# 3 定理 1.6 的证明

In 本节首先证明引理3.1，它对我们的证明很有用 of.

**引理3.1** (注 4, [15])。 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ 是任意一个次数为 $n$ 的多项式，且 $|a_0| > |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1|$。那么 $f(x)$的每个根都位于单位圆之外。

证明。 设 $z$是 $f(x)$ 的一个根，且 $|z| \leqslant 1$。那么 $f(z) = 0$，即

$$-a_0 = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z. \tag{3.1}$$

对（3.1）两边取模并应用绝对值不等式，得到

$$\begin{aligned} |a_0| &= |a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z| \\ &\leqslant |a_n||z|^n + |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| \\ &\leqslant |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1|, \end{aligned}$$

这与假设矛盾。

因此， $f(x)$ 的所有根都位于单位圆之外。 □

下面的引理3.2是我们证明中的另一个关键点。关于引理3.2的更多细节，请读者参见 [5] 中引理1.4的证明。

**引理3.2.** 设 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 是平面上的两个整点。那么，如果最大公约数$(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) = 1$，则线段 $AB$ 上不存在其他整点，除了$A$ 和 $B$。

现在，我们给出主要结果的证明。

定理 *1.6* 的证明。 假设 $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ 是 $f(x)$ 的一个非平凡因式分解。我们称

$$f_1(x) = b_s x^s + b_{s-1}x^{s-1} + \cdots + b_0 \in \mathbb{Z}[x],$$

$$f_2(x) = c_t x^t + c_{t-1}x^{t-1} + \cdots + c_0 \in \mathbb{Z}[x],$$

其中 $b_s c_t \neq 0$、 $s \geqslant 1$、 $t \geqslant 1$ 和 $s + t = n$。

由于 $f(x) = f_1(x) f_2(x)$，比较等式两边的常数项，得到

$$p^u = b_0 c_0.$$

不失一般性，我们可以假设 $|b_0| = p^\alpha$, $|c_0| = p^{u-\alpha}$，其中 $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{u}{2}$。现在我们断言 $\alpha = 0$。假设 $0 < \alpha \leqslant \frac{u}{2}$。那么 $p \mid b_0$和 $p \mid c_0$。由于$p \nmid a_m$，存在 $b_{i_0}$ 和 $c_{j_0}$，使得 $p \nmid b_{i_0} c_{j_0}$，其中 $1 \leqslant i_0 \leqslant s$ 和 $1 \leqslant j_0 \leqslant t$。因此，关于 $p$ 的 $f_1(x)$ 的牛顿多边形至少包含一条斜率为负的线段。类似地，对于 $p$ 的 $f_2(x)$ 也同样如此。然而，由于 $p \nmid a_m$，关于 $p$ 的 $f(x)$ 的牛顿多边形的前两个点为 $A(0, u)$ 和 $B(m, 0)$。根据最大公约数$(u, m) = 1$ 以及引理3.2，线段 $AB$ 上没有其他整点，除了 $A$和 $B$。因此，关于 $p$ 的 $f(x)$ 的牛顿多边形恰好包含一条斜率为负的线段。这与 Dumas 定理矛盾。因此，我们得到 $\alpha = 0$和 $|b_0| = 1$。

假设 $z_1$、 $z_2$、 $\cdots$、 $z_s \in \mathbb{C}$ 都是 $f_1(x)$的根，它们也是$f(x)$的根。对 $f_1(x)$应用韦达定理，我们得到

$$\prod_{i=1}^{t} |z_i| = \frac{|b_0|}{|b_t|} \leqslant 1,$$

这意味着 $f(x)$在单位闭圆内有一个根。

另一方面，由于 $p^u > |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_m|$，根据引理3.1， $f(x)$的所有根都位于单位圆之外。这是矛盾的。

因此， $f(x)$在 $\mathbb{Q}$上不可约。 □

# 参考文献


[1] E. J. Barbeau，《多项式》，数学问题丛书（施普林格出版社，纽约，2003年）。

[2] N. C. Bonciocat，利用任意多个素数的舍讷曼–艾森斯坦–杜马型不可约性判别条件，《代数通讯》**43** (2015)，第 8 期，3102–3122。

[3] A.I. Bonciocat 和 N.C. Bonciocat，《若干类不可约多项式》，《算术学报》*Some classes of irreducible polynomials*，**123**(2006)，349–360。[4] A.I. Bonciocat 和 N.C. Bonciocat，《关于首项系数被大素数幂整除的多项式的不可约性》，《美国数学月刊》*On the irreducibility of polynomials with leading coefficient divisible by a large prime power*，**116**(8)(2009)，743–745。

[5] N.C. Bonciocat、Y. Bugeaud、M. Cipu 和 M. Mignotte，两个互素多项式之和的不可约性判据，《国际数论杂志》9(6)（2013），1529–1539。[6] G. Dumas，关于有理数系数多项式的若干不可约情形，《纯粹与应用数学杂志》2（1906），191–258。[7] M. Filaseta，除有限多个贝塞尔多项式外其余均不可约，《数学学报》174（1995），383–397。[8] M. Filaseta、C. Finch 和 J. R. Leidy，T.N. Shorey 对不可约多项式理论的影响，载于《丢番图方程》，N. Saradha 编（Narosa 出版社，新德里，2005），第77–102页。[9] M. Filaseta、T. Kidd 和 O. Trifonov，具有伽罗瓦群 $A_m$for each $m$ 的拉盖尔多项式，《数论杂志》132（2012），776–805。[10] M. Filaseta 和 R. L. Williams, Jr.，关于某一类拉盖尔多项式的不可约性，《数论杂志》100（2003），229–250。[11] M. Filaseta 和 T. Y. Lam，关于广义拉盖尔多项式的不可约性，《算术学报》105（2002），177–182。[12] M. Filaseta 和 O. Trifonov，贝塞尔多项式的不可约性，《纯粹与应用数学杂志》550（2002），125–140。[13] F. Hajir，由广义拉盖尔多项式得到的一些交错群扩张，《数论杂志》50（1995），206–212。[14] A. T. Jonassen，关于三项式 $x^n \pm x^m \pm 4$ 的不可约性，《斯堪的纳维亚数学》21（1967），177–189。[15] B. Koley 和 A. S. Reddy，整数上的一类不可约多项式，《拉马努金数学学会杂志》37（2022），第4期，319–330。[16] B. Koley 和 A. S. Reddy，整数上多项式的一个不可约性判别准则，《罗马尼亚数学科学学会数学通报》，待刊。[17] L. Panitopol、D. Stefänescu，多项式不可约性的若干判据，《罗马尼亚数学科学学会数学通报》（新系列）29（1985），69–74。[18] E. A. Sell，关于某族广义拉盖尔多项式，《数论杂志》107（2004），266–281。[19] L. Weisner，多项式不可约性的判据，《美国数学学会通报》40（1934），864–870。