arXiv:2303.03607v1 [math.GR] 7 Mar 2023

关于与底群为小Ree群的几乎单群具有相同特征标次数的群

SEYED HASSAN ALAVI

摘要。设 G 为一个有限群，cd(G)表示 G的复不可约特征标次数集。本文证明，若 G 为一个有限群，且 H 是底群为 $H_0 = {}^2\mathrm{G}_2(q)$的几乎单群，其中 $q = 3^f$ 为奇数且$f \geqslant 3$ 满足.....，使得cd(G) =cd(H)，则 G 是非可解群，且 G 的主因子 G'/M 同构于 H_0。特别地，若 f 与3互素，则 G' 同构于 H_0 ，且 $G/\mathbf{Z}(G)$同构于 H。

1. 引言

设 G 为一个有限群，Irr(G)表示 G的复不可约特征标集。用cd(G)表示 G 的特征标次数集；在上下文允许时，不可约特征标次数集简称为特征标次数集。有许多例子表明，即使对于幂零群和可解群， G 的特征标次数集也不能完全确定 G 的结构。例如，非同构群D_8 和Q_8 不仅具有相同的特征标次数集，而且特征标表也相同，并且cd(Q_8) = cd(S_3) = {1,2}。然而，在20世纪90年代末，Huppert [15] 提出了一个猜想；若该猜想成立，将强化非阿贝尔单群的特征标次数集与群结构之间的联系。

猜想 1.1（Huppert）。设 G 是一个有限群， H 是一个非阿贝尔单群，并且 G 与 H 的特征标次数集合相同。那么 $G \cong H \times A$，其中 A 是一个阿贝尔群。

该猜想断言，非阿贝尔单群基本上可由其特征标次数集合刻画。对于交错群、散在单群以及一些李型有限单群（包括 Ree 群 ${}^2\mathrm{G}_2(q)$），这一猜想已得到验证，参见例如 [1, 7, 8, 15, 16, 24, 30, 31]。自 2016 年以来，我们开始研究与几乎单群具有相同特征标次数的群的结构，包括底群为 $\mathrm{PSL}_2(q)$ 的群、[2, 12], Suzuki 群 [6], Ree 群 [3] 以及散在单群 [4, 5]。[4, 5, 12] 中给出了若干例子，表明 Huppert猜想无法推广到几乎单群。若 H 是一个底群为 $H_0 = \mathrm{PSL}_2(2^f)$ 的几乎单群，其中 f为素数，则 Daneshkhah [12] 证明，存在一个阿贝尔群 A ，使得 G/A与 H同构。特别地，她证明了 $G' = H_0$ 和 $A = \mathbf{Z}(G)$，但有一个例外：当 $H = \mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}_2(4))$ 时， $G' = H_0$ 或 $2 \cdot H_0$，参见 [12,定理 1.1]。似乎若 G 是一个与几乎单群 H 具有相同特征标次数、且底群为 H_0 的群，则 $G' = H_0$ 与 $G/\mathbf{Z}(G)$ 同构于

日期：2023年3月8日。2010年 数学主题分类。主要分类号：20C15；次要分类号：20D05。关键词和短语。Huppert猜想，几乎单群，特征标次数。 1

H 只有少数例外情形，此时 G' 是 G 的阿贝尔正规子群与 H_0 的扩张；在这些情形下，我们仍有 $G/A \cong H$，且 A 在 G 中心化。本文继续探讨这一说法，以支持它；该说法是 Huppert猜想在几乎单群情形下的版本。我们还研究特征标次数与底群为 Ree 群的几乎单群相同的群：

定理 1.1. 假设 H 是一个底群为 $H_0 = {}^2\mathrm{G}_2(q)$ 的几乎单群，其中 $q = 3^f$ 为奇数。设 G 是满足 $\mathsf{cd}(G) = \mathsf{cd}(H)$ 的有限群。那么 G不可解，且 G 的主因子 G'/M 同构于 H_0。若 f 与 3 互素，则 $G' \cong H_0$，并且 $G/\mathbf{Z}(G)$ 同构于 H。

注意，Wakefield [31], 已经证明了 $H = {}^2\mathrm{G}_2(q)$的定理 1.1，因此我们只需关注 ${}^2\mathrm{G}_2(q) \neq H \leqslant \mathrm{Aut}({}^2\mathrm{G}_2(q))$ 的情形。为了证明定理 1.1，值得指出的是，我们无需确定 H的所有特征标次数。我们利用引理3.2中关于 G特征标次数的若干有用结论。例如，关键结果之一是 G 的特征标次数的 2-部分整除 2^3。遗憾的是，我们的方法在 $3 \mid f$ 时不适用；在这种情况下，我们认为 G' 可能不同构于 H_0，但仍相信对于 G的某个阿贝尔子群 A， G/A 同构于 H。

2. 预备知识

本节给出一些用于证明定理 1.1 的有用结果。首先建立一些定义并介绍相关记号。本文中所有群均为有限群。阶为 n 的有限群记作“n”。我们用 C_n 表示阶为 n 的循环群，A_n 和 S_n 分别表示作用于 n 个字母上的交错群和对称群。有限单群的标准记号沿用 [11] 中的记法。若群 H 满足 $H_0 \leqslant H \leqslant \mathrm{Aut}(H_0)$，其中 H_0 是非阿贝尔单群，则称 H 为以 H_0 为底群的几乎单群。若 $N \trianglelefteq G$ 且 $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$，则 θ 在 G 中的惯性群（或稳定子群）$\mathrm{I}_G(\theta)$ 定义为 $\mathrm{I}_G(\theta) = \{g \in G \mid \theta^g = \theta\}$。若特征标 $\chi = \sum_{i=1}^{k} e_i\chi_i$，其中每个 χ_i 都是 G 的不可约特征标，且 e_i 是非负整数，则满足 $e_i > 0$ 的那些 χ_i 称为 χ 的不可约成分。其余所有记号和定义均为标准用法，可参见 [14, 17]。计算部分使用 GAP [13]。

Le引理 2.1 ([14, 定理 19.5 和 21.3])。 设 $N \trianglelefteq G$ 且 $\chi \in$ 不可约特征标集(G) .

(i)若 $\chi_N = \theta_1 + \cdots + \theta_k$且 $\theta_i \in$不可约特征标集(N)，则 k整除 $|G/N|$。特别地，若$\chi(1)$与 $|G/N|$互素，则 $\chi_N \in$不可约特征标集(N)。(ii) （*Gallagher* 定理）若 $\chi_N \in$不可约特征标集(N)，则对所有 $\psi \in$不可约特征标集(G/N)，都有 $\chi\psi \in$不可约特征标集(G)。

引理 2.2 ([14, 定理 19.6 和 21.2])。 设 $N \trianglelefteq G$ 且 $\theta \in$ 不可约特征标集(N)。令 $I = \mathrm{I}_G(\theta)$。

(i) 若 $\theta^I = \sum_{i=1}^{k} \phi_i$ 且 $\phi_i \in$ 不可约特征标集*(I)*，则 $\phi_i^G \in$ 不可约特征标集*(G)*。特别地，$\phi_i(1)|G : I| \in cd(G)$。*(ii)* 若 θ可延拓为 $\varphi \in$不可约特征标集*(I)*，则对所有 $\tau \in$不可约特征标集(I/N)，$(\varphi\tau)^G \in$不可约特征标集*(G)*。特别地，$\theta(1)\tau(1)|G : I| \in cd(G)$。

若特征标 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 在 G 中满足：$\chi(1)$ 不被 G 的任何真非平凡特征标次数整除，并且 $\chi(1)$ 的任何真倍数都不是 G 的特征标次数，则称其为孤立的。在这种情况下，我们也称 $\chi(1)$ 是 G 的孤立度。我们将 G 的真幂次数定义为 G 中形如 c^a 的特征标次数，其中 c

表 1. 李型有限单群的特征标次数。

S	条件	标记	次数
$\mathrm{PSL}_m(q)$	$m \geqslant 2, q \geqslant 5$ 若 $m = 2$, $(m,q) \neq (3,2),(4,2)$	St	$q^{\frac{m(m-1)}{2}}$
	$m \geqslant 4$	$(1,m)$	$\frac{q(q^{m-1}-1)}{q-1}$
$\mathrm{PSU}_m(q)$	$m \geqslant 3, (m, q) \neq (3, 2), (4, 2)$	St	$q^{\frac{m(m-1)}{2}}$
	$m \geqslant 4$	$(1, m)$	$\frac{q(q^{m-1}-(-1)^{m-1})}{q+1}$
$\mathrm{PSp}_{2m}(q)$	$m \geqslant 2, (m,q) \neq (2,2)$	St	q^{m^2}
	$m \geqslant 2$	$\binom{0 \quad m}{1}$	$\frac{q(q^m-1)(q^{m-1}+1)}{q-1}$
$\mathrm{P\Omega}_{2m+1}(q)$	$m \geqslant 3$, q 奇数	St	q^{m^2}
	$m \geqslant 3$, q 奇数	$\binom{0 \quad m}{1}$	$\frac{q(q^m-1)(q^{m-1}+1)}{q-1}$
$\mathrm{P\Omega}^{\epsilon}_{2m}(q)$	$m \geqslant 4, \epsilon = \pm$	St	$q^{m(m-1)}$
${}^2\mathrm{B}_2(q)$	$q = 2^{2a+1} \geqslant 8$	St	q^2
${}^3\mathrm{D}_4(q)$		St	q^{12}
$\mathrm{E}^{\epsilon}_6(q)$	$\epsilon = \pm$	St	q^{36}
$\mathrm{E}_7(q)$		St	q^{63}
		$\Phi_{7,46}$	$q^{46}\Phi_7\Phi_{12}\Phi_{14}$
$\mathrm{E}_8(q)$		St	q^{120}
$\mathrm{F}_4(q)$		St	q^{24}
${}^2\mathrm{F}_4(q)$	$q = 2^{2a+1} \geqslant 8$	St	q^{12}
$\mathrm{G}_2(q)$	$q \geqslant 3$	St	q^6
${}^2\mathrm{G}_2(q)$	$q = 3^{2a+1} \geqslant 27$	St	q^3

注： Φ_i 是关于 q的第 i个圆分多项式。

且 $a > 1$。 G 的混合次数是指可被至少两个不同素数整除的特征标次数。

引理 2.3 ([30, 引理 3])。 设 G/N 是 G 的一个可解因子群，且在非阿贝尔这一性质下极小。则可能出现两种情况。

(i) G/N 是某个素数 r 的 r 群。在此情况下， G 具有一个素数幂次数。因此，存在 $\psi \in \mathit{Irr}(G/N)$，使得 $\psi(1) = r^b > 1$。如果 $\chi \in \mathit{Irr}(G)$ 且 $r \nmid \chi(1)$，那么对于所有 $\tau \in \mathit{Irr}(G/N)$，都有 $\chi\tau \in \mathit{Irr}(G)$；*(ii)* G/N 是一个具有初等阿贝尔弗罗贝尼乌斯核 F/N 的 *Frobenius*群。那么， $e := |G : F| \in \mathit{cd}(G)$，并且对于某个素数 r， a 是满足 $r^a \equiv 1$ 模 e 的最小整数。如果 $\psi \in \mathit{Irr}(F)$，那么或者 $f\psi(1) \in \mathit{cd}(G)$，或者 r^a 整除 $\psi(1)^2$。在后一种情况下， r 整除 $\psi(1)$。*(1)* 如果 $\chi \in \mathit{Irr}(G)$，使得 $\chi(1)$ 的任何真倍数都不属于 $\mathit{cd}(G)$，那么或者 e 整除 $\chi(1)$，或者 r^a 整除 $\chi(1)^2$；*(2)* 如果 $\chi \in \mathit{Irr}(G)$ 是孤立的，那么 $e = \chi(1)$ 或 $r^a \mid \chi(1)^2$。

引理 2.4 ([9, 引理 5]). 设 N 是 G 的极小正规子群，且满足 $N \cong S^k$，其中 S 是一个非阿贝尔单群。若 $\theta \in$不可约特征标集(S) 可扩张至自同构群(S)，则 $\theta^k \in$ 不可约特征标集(N) 可扩张至 G。

引理 2.5 ([15, 引理 6])。 假设 $M \trianglelefteq G' = G''$，且对每个 $\lambda \in$不可约特征标集(M)中满足 $\lambda(1) = 1$ 的特征标， $\lambda^g = \lambda$对所有 $g \in G'$ 均成立。那么 $M\prime = [M, G']$，且 $|M/M'|$整除 G'/M 的舒尔乘子的阶。

引理 2.6。若 S 是非阿贝尔单群，则存在一个 S 的非平凡不可约特征标可扩张至自同构群 $Aut(S)$。此外，以下结论成立：

(i) 若 S 是次数至少为 *8* 的交错群 A_n，则 S 有一个可被 *16* 整除的不可约特征标次数；*(ii)* 若 S 是表 *1* 中的李型单群，且 χ 是 S 的不可约特征标，其标记如表 *1* 第三列所示，则 χ 可扩张至 *Aut(S)*；*(iii)* 若 S 是蒂茨群 $^2F_4(2)'$，或是除 M_{22}, 外的散在单群，则 S 有一个可被 *16* 整除的不可约特征标次数，除非 S 是 J_1 或 M_{22}。

此外，*(i)* 和 *(iii)* 中的所有特征标都可扩张至 *Aut(S)*。

证明。由 [9,引理 5]可知， S 可扩张至 Aut(S)。

(i) 对于 $n \geqslant 8$的一个分拆 $(n-s-r, s+1, r-1)$，由 [23] 可知，S_n 有一个标记为 $\chi_{r,s}$的不可约特征标，其中 $r \geqslant 1$、$s \geqslant 0$ 和 $r+2s+1 \leqslant n$。特征标 $\chi_{r,s}$ 限制到 A_n 后仍不可约，除非 $s=0$ 且 $n=2r+1$，或 $s=1$且 $n=2r+2$，其次数为

$$\chi_{r,s}(1) = \binom{n}{s}\binom{n-s-1}{r-1}\frac{n-2s-r}{r+s}.$$

若 $n=4t+1$ 对某个 $t \geqslant 2$成立，则 16 整除 $8t(t-1)$，因此 χ_1,2(1) $= 8t(t-1)(4t+1)/3$ 可被 16 整除。若 $n=4t+3$ 对某个 $t \geqslant 2$成立，则 16 整除χ_3,2(1) $= 8t(t-1)(2t+1)(4t+3)(4t-1)/5$；若 $n=2t$ 对某个 $t \geqslant 4$成立，则 16 整除 χ_2,1(1) $= 8t(t-1)(t-2)/3$。因此，对于给定的 n，次数 χ_1,2(1)、χ_2,1(1) 和 χ_3,2(1) 中至少有一个可被 16 整除。

(ii) 对于有限单群 S（列于表1第一列），表 1 中标记为 St S 的不可约特征标是 [27, 28],的 Steinberg 特征标，并且可扩张到 自同构群(S)。表1中次数如表所列的其余特征标，是 S 的幺正特征 G，根据[22,定理 2.4–2.5]，它们可扩张到。

（iii）该部分可由 ATLAS [11] 和 GAP [13]得到。 □

引理 2.7。设 G 为一个有限群，其中 G' 为一个非阿贝尔有限单群。则 $G'\mathbf{C}_G(G') = G' \times \mathbf{C}_G(G')$、$\mathbf{C}_G(G') = \mathbf{Z}(G)$ 和 $G/\mathbf{Z}(G)$ 是一个底群为 G' 的几乎单群。

证明。设 $A := \mathbf{C}_G(G')$ 且 $T := G'A$。由于 G' 是一个非阿贝尔单群，$G' \cap A = 1$，因此 $G'A = G' \times A$。由于 $G' \cap A = 1$，同样可得 $[G, A] = 1$，从而 $A = \mathbf{Z}(G)$。此外，$G' \cong G'\mathbf{Z}(G)/\mathbf{Z}(G) \trianglelefteq G/\mathbf{Z}(G)$ 6 Aut(G')，也就是说，$G/\mathbf{Z}(G)$ 是一个底群为 G' 的几乎单群。□

3. 主要结果的证明

本节中，我们证明定理1.1。我们用 $^2\mathrm{G}_2(q)$ 表示小李群，且 $q = 3^{2n+1} \geqslant 27$。Ree 在[25, 26]中引入了这些群。除记号方面的少数例外，我们主要遵循 [18, 21, 32] 中对这些群及其子群的描述。接下来，我们介绍小李群及其特征标次数的一些信息。

引理 3.1 ([19, 表 5.1.A 和定理 5.1。4])。设 $H_0 = {}^2\mathrm{G}_2(q)$ 满足 $q = 3^f \geqslant 27$且 f 为奇数。那么，H_0 的外自同构群 Out(H_0) 同构于由域自同构生成的循环群 Cf，而 H_0 的舒尔乘子 $M(H_0)$ 是平凡的。

表2。有限单群 ${}^2\mathrm{G}_2(q)$ 的特征标次数，其中 $q = 3^f \geqslant 27$ 且 f 为奇数。

行	次数	注释
1	1	
2	$(q - \sqrt{3q} + 1)(q + \sqrt{3q} + 1)$	
3	$\frac{\sqrt{3q}}{6}(q - 1)(q - \sqrt{3q} + 1)$	该特征标可扩张至自同构群(${}^2\mathrm{G}_2(q)$)
4	$\frac{\sqrt{3q}}{6}(q - 1)(q + \sqrt{3q} + 1)$	该特征标可扩张至自同构群(${}^2\mathrm{G}_2(q)$)
5	$\frac{\sqrt{3q}}{3}(q - 1)(q + 1)$	该特征标可扩张至自同构群(${}^2\mathrm{G}_2(q)$)
6	$(q - 1)(q + 1)(q - \sqrt{3q} + 1)$	
7	$(q - 1)(q - \sqrt{3q} + 1)(q + \sqrt{3q} + 1)$	
8	$q(q - \sqrt{3q} + 1)(q + \sqrt{3q} + 1)$	
9	q^3	该特征标可扩张到 Aut(${}^2\mathrm{G}_2(q)$)
10	$(q + 1)(q - \sqrt{3q} + 1)(q + \sqrt{3q} + 1)$	
11	$(q - 1)(q + 1)(q + \sqrt{3q} + 1)$	

引理3.2。设 $H_0 = {}^2\mathrm{G}_2(q)$ 满足 $q = 3^f \geqslant 27$ 且 f 为奇数，并设 $H_0 \leqslant H \leqslant$自同构群$(H_0)$ 满足 $|H : H_0| = d$。那么

(i) H_0 的不可约特征标次数记录在表*2*中，且次数如第*2*、*3*、*4*和*9*行之一所示的不可约特征标可扩张到 H，因此它们是 H的特征标次数；*(ii)* 若 χ 是 H 的一个素数幂次数不可约特征标，则 $\chi(1) = q^3$；*(iii)* 若 χ 是 H的一个不可约特征标，则 $\chi(1)$的*2*-部分整除 2^3；*(iv)* H 的最小偶数次数为$\sqrt{3q}(q - 1)(q + 1)/3$；*(v)* 群 H 有一个次数为$(q^3 + 1)d$的不可约特征标。

证明。(i) H_0 的不可约特征标次数可从 [32]中读出。次数如第 2、3、4 和 9 行之一所示的不可约特征标，是 H_0的幺正特征标，参见 [10, 第 488-489]页。因此，根据 H 的[22, 定理 2.4-2，5]这些特征标可延拓到该群。

(ii) 根据引理 2.1，我们知道 H 的每个次数都是 H_0的某个特征标次数的倍数。我们还注意到

$$\begin{aligned}(q - 1, q + 1) &= 2,\\ (q + \epsilon_1 1, q + \epsilon_2\sqrt{3q} + 1) &= 1,\\ (q - \sqrt{3q} + 1, q + \sqrt{3q} + 1) &= 1,\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $\epsilon_1 = \pm$ 且 $\epsilon_2 = \pm$。因此，H_0 唯一的素数幂次数是 q^3，它也可延拓到 H。这表明，H 唯一的素数幂次数是 q^3。

(iii) 由 [32, 定理] 可知，H_0 的 Sylow 2-子群是阶为 8 的初等阿贝尔群。事实上，$q - 1 = 3^f - 1$ 的 2-部分为 2，而 $q + 1 = 3^f + 1$ 的 2-部分为 4。由于 f是奇数，且 $\chi(1)$ 是 H的一个因子的倍数，也是 f 的一个不可约特征标次数，因此 H_0可知 $\chi(1)$ 的 2-部分整除 8。

(iv) 注意到 $q - 1 = 3^f - 1$ 的 2-部分是 2。因此，表 2 第 3 行和第 4 行中的次数均为奇数。此外，H 中次数为 $(q - \sqrt{3q} + 1)(q + \sqrt{3q} + 1$ 的倍数且为 f 的因子的不可约特征标也是奇数。因此，

表 3. 有限单群 ${}^2\mathrm{G}_2(q)$ 的极大子群，其中 $q = 3^f \geqslant 27$ 且 f 为奇数。

极大子群结构	阶	指数
$[q^3] : \mathrm{C}_{q-1}$	$q^3(q-1)$	q^3+1
$2 \times \mathrm{PSL}_2(q)$	$q(q^2-1)$	$q^2(q^2-q+1)$
$2^2 \times \mathrm{D}^{(q+1)/2} : \mathrm{C}_3$	$6(q+1)$	$\frac{1}{6}q^3(q-1)(q^2-q+1)$
$\mathrm{C}^{q+\sqrt{3q}+1} : \mathrm{C}_6$	$6(q+\sqrt{3q}+1)$	$\frac{1}{6}q^3(q+1)(q-1)(q-\sqrt{3q}+1)$
$\mathrm{C}^{q-\sqrt{3q}+1} : \mathrm{C}_6$	$6(q-\sqrt{3q}+1)$	$\frac{1}{6}q^3(q+1)(q-1)(q+\sqrt{3q}+1)$
${}^2\mathrm{G}_2(q_0)$，$q = q_0^r$，r 素数	$q_0^3(q_0^3+1)(q_0-1)$	$\frac{q_0^{3r}(q_0^{3r}+1)(q_0^r-1)}{q_0^3(q_0^3+1)(q_0-1)}$

$\sqrt{3q}(q-1)(q+1)/3$ 是 H_0 的最小偶不可约特征标次数，根据 (i) 部分，它也是 H 的一个次数。

(v) 设 ι 是 H_0中的一个对合。那么， ι 的中心化子是（同构于）$\langle\iota\rangle \times \mathrm{PSL}_2(q)$。现在考虑 $\mathrm{PSL}_2(q)$中的一个元素 x，其阶为 $(q-1)/2$，且它与其逆元共轭，但与其他任何幂都不共轭。将 R 替换为 x，并将 r 替换为ε，根据 [32, 定理]， H_0 具有次数为 q^3+1的不可约特征标 η_ε，其中 ε 是 $(q-1)/2$次单位根。根据 [32, 第一章]，我们还注意到 $\eta_\varepsilon(x^a) = \varepsilon^a + \varepsilon^{-a}$，它由 $\mathrm{PSL}_2(q)$的不可约特征标得到，在 [32,第一章]中记作 θ_ε。此外，不同特征标 η_ε 仅在 $x^a \neq 1$ 和 $\iota x^a \neq \iota$的共轭类上不同，见 [32, 第五章]。回顾引理 3.1， H_0上的域自同构 φ 由 $\mathbb{F}_q$ 的Frobenius自同构诱导，其阶为 f，并生成 $\mathrm{Out}(H_0)$；其中 $q = 3^f \geqslant 27$ 为奇数。现在证明 η_ε 在 H_0的任何外自同构下都不保持不变。反设对于某个$1 \leqslant i < f$， φ^i 稳定了 η_ε。那么对于所有 $g \in H_0$，都有 $\eta_\varepsilon^{\varphi^i}(g) = \eta_\varepsilon(g)$。特别地， $\eta_\varepsilon^{\varphi^i}(x) = \eta_\varepsilon(x)$。于是$\varepsilon^{3^i} + \varepsilon^{-3^i} = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$。根据 [33, 引理 4.7]，，这等价于 $3^i \equiv \pm 1$ (模 $\frac{q-1}{2}$)。因此，$(q-1)/2 = (3^f-1)/2$整除 $3^i \mp 1$，这是不可能的。所以， H_0 的元素是 H 中唯一能稳定 η_ε的元素，换言之，$\mathrm{I}_H(\eta_\varepsilon) = H_0$。因此， $\eta_\varepsilon^H \in \mathrm{Irr}(H)$，从而 $(q^3+1)d = \eta_\varepsilon^H(1) \in \mathrm{cd}(H)$，证毕。□

引理 3.3。 设 $H_0 = {}^2\mathrm{G}_2(q)$ 满足 $q = 3^{2n+1} \geqslant 27$，且 $H_0 \leqslant H \leqslant$ 自同构群(H_0)满足 $|H : H_0| = d$。若 K 是 H_0 的极大子群，且其在 H_0 中的指数整除 H 的某个次数 $\chi(1)$，则对于某个 d的因子a，有 $K = [q^3] : \mathrm{C}_{q-1}$，且 $\chi(1) = (q^3+1)a$。

证明。 ${}^2\mathrm{G}_2(q)$的极大子群列表由 Kleidman [20]给出。我们在表 3 中总结了这些子群的列表。首先假设 K 既不是抛物子群 $[q^3]$: C_{q-1}，也不是子域子群 ${}^2\mathrm{G}_2(q_0)$。那么子群 K 在 H_0 中的指数必定整除 H的某些混合次数。容易看出，这些子群的指数的 p-部分在 p 上的指数过大，无法整除 H的混合次数。若 $K = {}^2\mathrm{G}_2(q_0)$，其中 $q = q_0^r$ 和 r 为素数，则$|H_0 : K|_3 = q^{3r-3}$ 整除 $qd_3 = q_0^r d_3$。由于 $d_3 < q = q_0^r$，可得 $3r-3 < r$，这意味着 $r = 1$，这是不可能的。因此， K 是抛物子群$[q^3] : \mathrm{C}_{q-1}$，其指数整除次数（q^3+1）a，其中 a 是 d的某个因子。□

命题 3.4. 设 G 是一个有限群， H 是一个几乎单群，其底群为 $H_0 = {}^2\mathrm{G}_2(q)$，其中 $q = 3^f \geqslant 27$ 和 f 均为奇数，且 $|H : H_0| = d \neq 1$。若$\mathrm{cd}(G) = \mathrm{cd}(H)$，则 $G' = G''$。

证明。 反设 $G' \neq G''$。那么存在 N 的一个正规子群 G，其中 N 是极大的，使得 G/N 是一个非阿贝尔可解群。现在应用引理 2.3，得到以下两种可能之一，而这将导致矛盾。

(i) G/N 是一个 r-群，其中 r 为素数。在这种情况下， G/N 有一个次数为 $r^b > 1$的不可约特征标ψ， G也有。引理3.2(ii)表明， $\psi(1) = q^3$。对某个正整数 $a > 1$，我们考虑$\chi(1) = (q-1)(q+1)(q+\sqrt{3q}+1)a \in \mathrm{cd}(G)$。于是，由引理 2.1(i)，我们有 $\chi_N \in \mathrm{Irr}(N)$，从而引理 2.1(ii)表明， G有一个次数为 $q^3(q-1)(q+1)(q+\sqrt{3q}+1)a$的不可约特征标，这就产生矛盾。

(ii) G/N是一个以 F/N为核的Frobenius群。则 $|G:F| \in \mathrm{cd}(G)$整除 r^a-1，其中 $|F/N| = r^a$。注意， q^3 是 G的一个孤立度。于是引理2.3(ii.2)表明， $|G:F| = q^3$ 或 $r = 3$。设 χ_1 为 G 的一个不可约特征标，其次数为 $\chi_1(1) = \frac{\sqrt{3q}}{3}(q-1)(q+1)$。再设 c_1 和 c_2 为 $d = |H:H_0|$ 的最大素因子，使得 $\chi_2(1) = q(q-\sqrt{3q}+1)(q+\sqrt{3q}+1)c_1$ 和 $\chi_3(1) = (q-1)(q+1)(q+\sqrt{3q}+1)c_2$ 是 G的不可约特征标次数。则每个 $\chi_i(1)$的任意真倍数均不属于$\mathrm{cd}(G)$。

假设 $|G:F| = q^3$。由引理2.3(ii.1)，我们得出 r^a 整除 $\chi_i(1)^2$，（ $i = 1$、2、3）的最大公因数，因此由 (3.1)， r^a 整除 $(c_1, c_2)^2$。于是， r^a 整除 d^2。另一方面， $|G:F| = q^3$ 整除 r^a-1。因此， $q^3 \leqslant r^a - 1 \leqslant d^2 - 1$，从而 $3^{3f} \leqslant f^2 - 1$，这就产生了矛盾。

假设 $r = 3$。由于 $|G:F| \in \mathrm{cd}(G)$，且 $\chi_1(1)^2$、 $\chi_2(1)^2$ 与 $\chi_3(1)^2$ 的最大公因数整除 d^2，由引理2.3(ii.1)可知， r^a 整除d^2。注意到， d 是 $|\mathrm{Out}(H_0)| = f$ 的一个因子。我们再次应用引理 2.3(ii)，得出 $|G:F| \leqslant r^a - 1 \leqslant f^2 - 1$，但此时 $|G:F|$ 太小，不可能是 G 的特征标次数，这就产生了矛盾。□

命题 3.5。 设 G 是一个有限群， H 是一个几乎单群，其底群为 $H_0 = {}^2\mathrm{G}_2(q)$，其中 $q = 3^f \geqslant 27$ 和 f 均为奇数，且 $|H:H_0| = d \neq 1$。那么， G 的主因子 G'/M 同构于 H_0。

证明。 设 G'/M 是 G的一个主因子。由于 G' 是完美群， G'/M 是非阿贝尔的，因此 G'/M 同构于 S^k，其中某个非阿贝尔单群为 S，且 $k \geqslant 1$是某个整数。注意，每个有限单群都有一个偶数次的不可约特征标。于是， 2^k 整除 G的某些次数。由引理 3.2(iii)，可得 $k \leqslant 3$。

假设 S 是次数为 $n \geqslant 8$的交错群、蒂茨群 ${}^2\mathrm{F}_4(2)'$，或除马蒂厄群 M_{22} 和扬科群 J_1以外的散在单群。由引理 2.6(i) 和 (iii)， S 有一个被 16 整除的不可约特征标次数，因此 G 有一个被 16 整除的特征标次数，但这与引理 3.2(iii) 矛盾。现在讨论 S 为 A_n 且 $n = 5$为6、7、M_{22} 或 J_1的情形。

若 $S = \mathrm{A}_5$，则 S 有一个次数为 5 的不可约特征标，该特征标可延拓到 S_5。由引理 2.4 可知， G 有一个次数为 5^k 的不可约特征标，但这与引理3.2(ii)矛盾。若 $S = \mathrm{A}_6$，则由 S 有一个次数为 9 且可延拓到 $\mathrm{A}_6 \cdot \mathrm{C}_2^2$ 的不可约特征标可知， G 有一个次数为 3^{2k} 的不可约特征标，因此根据引理3.2(ii)，我们得到 $3^{2k} = q^3 = 3^{3f}$，其中 f 为奇数，这就产生了矛盾。若 $S = \mathrm{A}_7$，则 S 的次数为 6 的不可约特征标可延拓到 $\mathrm{Aut}(S)$，因此由引理 2.4， G 有一个关于 $k = 1$、2、3 的偶次数 6^k。由引理3.2(iv)，我们得出 $6^3 \geqslant 6^k \geqslant \sqrt{3q}(q^2-1)/3$，但这是不可能的，因为 $q = 3^f \geqslant 27$ 且 f 为奇数。

若 $S = \mathrm{J}_1$, ，则 56, $120 \in \mathrm{cd}(S)$。这意味着 $k = 1$ ，因为否则 G 有一个不可约特征标次数被 56 · $120 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ 整除，这与引理3.2(iii)矛盾。因此， $k = 1$, 从而 G 有一个偶不可约次数 56。现在应用引理3.2(iv)，于是 $56 \geqslant \sqrt{3q}(q^2 - 1)/3$, 但对于 $q = 3^f \geqslant 27$，这个不等式无解。类似地，若 $S = \mathrm{M}_{22}$, ，则由于 S 有次数为 210 和 280 的偶不可约特征标，我们得到 $k = 1$。次数为 210 的不可约特征标可延拓到 $\mathrm{Aut}(S) = \mathrm{M}_{22} : 2$，因此引理 2.4 蕴含 $210 \in \mathrm{cd}(G)$，而这与引理3.2(iv)矛盾，因为对于所有$q = 3^f \geqslant 27$，都有 $210 < \sqrt{3q}(q^2 - 1)/3$ 。

现在假设 $S = S(q_0)$ 是一个有限李型单群，但不包括蒂茨群 ${}^2\mathrm{F}_4(2)'$，其中 $q_0 = p^e$ 是某个正整数 e。下文中，我们频繁使用引理 2.6(ii) 以及表 S 1 中记录的特征标次数。由引理 2.6(ii)，次数为 $\mathrm{St}(1) = |S|_p$ 的 Steinberg 特征标可扩张到 $\mathrm{Aut}(S)$，因此引理 2.4蕴含 G 具有一个非平凡的素数幂特征标次数$|S|_p^k$。于是，引理 3.2(v) 推出

$$|S|_p^k = 3^{3f}. \tag{3.2}$$

这尤其意味着 $p = 3$。由于 f 是奇数且 k 是 1、2 或 3，也可推出 k 是 1 或 3。现在我们分别讨论 S 的各种可能性。

设 S 为 $\mathrm{PSL}_m(q_0)$，其中 $m \geqslant 2$ ，或为 $\mathrm{PSU}_m(q_0)$，其中 $m \geqslant 3$。由 (3.2) 得到 $|S|_p^k = \mathrm{St}(1)^k = 3^{3f}$，因此 $3^{em(m-1)k/2} = q_0^{m(m-1)k/2} = 3^{3f}$。于是$em(m-1)k = 6f$, 其中 $k = 1$ 为 3，因此 e 和 $m(m-1)/2$ 都是奇数。所以 $m \geqslant 5$，或者 S 为 $\mathrm{PSL}_2(q_0)$、$\mathrm{PSL}_3(q_0)$ 或 $\mathrm{PSU}_3(q_0)$。若 $m \geqslant 5$，则由引理 2.6(ii)， S 有一个幺幂特征标 χ ，其次数为 $q_0(q_0^{m-1} - 1)/(q_0 - 1)$ 或$q_0(q_0^{m-1} - (-1)^{m-1})/(q_0 + 1)$，分别对应 S 为 $\mathrm{PSL}_m(q_0)$ 或 $\mathrm{PSU}_m(q_0)$ 的情形。特征标 χ 可扩张到 $\mathrm{Aut}(S)$，故由引理 2.4 可知 $\chi(1)^k \in \mathrm{cd}(G)$。因此，$\chi(1)$ 的 3-部分 q_0^k 等于 G 的某个非素数幂不可约次数的 3-部分。于是 $q_0^k \geqslant \sqrt{3q}/3$，从而 $3^{2ek+1} \geqslant 3^f$，这意味着 $2ek + 1 \geqslant f$。由于 $em(m-1)k = 6f$，可得 $m(m-1) \leqslant 18$，而对于 $m \geqslant 5$ 这没有解，矛盾。因此， $m = 2$ 或 3，也就是说， S 为 $\mathrm{PSL}_2(q_0)$、$\mathrm{PSL}_3(q_0)$ 或 $S = \mathrm{PSU}_3(q_0)$。设 $S =$ 为 $\mathrm{PSL}_2(q_0)$。由 (3.2) 得 $q_0^k = q^3$。若 $k = 3$，则 $q_0 = q$，因此 S 有不可约特征标次数 q 和 $q - 1$。所以， $q^2(q-1)$ 整除 G 的某个次数，这是不可能的。若 $k = 1$，则 $q_0 = q^3$，因此 G 的某个次数被 $q_0 - 1 = q^3 - 1$ 整除，矛盾。设 $S =$ 为 $\mathrm{PSL}_3(q_0)$，其中 $q_0 = 3^e \geqslant 3$ 和 e 为奇数。由 [29] 可知， S 有一个不可约特征标次数 $(q_0 - 1)^2(q_0 + 1)$，它能被 16 整除。因此， G 的某个次数被 16 整除，这与引理 3.2(iii) 矛盾。设$S =$ 为 $\mathrm{PSU}_3(q_0)$，其中 $q_0 = 3^e \geqslant 3$ 和 e 为奇数。由 [29]， S 有一个不可约特征标次数 $(q_0 - 1)(q_0 + 1)^2$，它能被 16 整除，这与 G 的任意次数的 2-部分都整除 2^3 矛盾。

令 S 为 $\mathrm{PSp}_{2m}(q_0)$，其中 $m \geqslant 2$ ；或令 $_{2m+1}$ 为 $\mathrm{P\Omega}q_0(\ m \geqslant 3)$，其中 $q_0^{m^2k} = |S|_p^k =$ 。由 (3.2) 可知 $^k = q^3\mathrm{St}(1)$ $3^{em^2k} = 3^{3f}$, 因此 $em^2k = 3f$, 这意味着 $k = 1$， 3。于是 e 和 m 均为奇数。根据引理 2.6(ii)， S 具有一个幺幂特征标χ , 其次数为 $q_0(q_0^m - 1)($ $q_0^{m-1} - 1)/(q_0 - 1)$，且可延拓至 $\mathrm{Aut}(S)$；因此应用引理 2.4，我们得到 $\chi(1)^k \in$cd(G)。这特别意味着， $\chi(1)^k$ 的 3-部分 q_0^k 等于 G 的某个非素数幂不可约次数的 3-部分。于是 $q_0^k \geqslant \sqrt{3q}/3$，从而 $2ek + 1 \geqslant f$。回顾 $em^2k = 3f$。于是

$6ek+1 \geqslant em^2k$，因此 $m^2 < 7$。这仅对 $m = 2$ 成立；由于 m 为奇数，故产生矛盾。

设 $S = \mathrm{P}\Omega^{\pm}_{2m}(q_0)$ 满足 $m \geqslant 4$。则 (3.2) 表明 $3^{em(m-1)} = q_0^{m(m-1)} = 3^{3f}$。因此 $em(m-1) = 3f$，这与 f 为奇数而 $m(m-1)$ 为偶数矛盾。同理，S 为例外单群且不属于 $\mathrm{E}_7(q_0)$ 和 ${}^2\mathrm{G}_2(q_0)$ 的情形也可排除；特征标次数见表 1。令 $S = \mathrm{E}_7(q_0)$。则由 (3.2)，$q_0^{63k} = \mathrm{St}(1)^k = q^3$，因此 $q_0 = q^{\frac{3}{63k}}$。由引理 2.6(ii)，S 的幺幂特征标 Φ_7,46 可延拓到 $\mathrm{Aut}(S)$，故由引理 2.4 得 Φ_7,46(1)$^k \in \mathrm{cd}(G)$。注意，Φ_7,46(1)^k 的 3-部分为 $q_0^{46k} = q^{3\cdot 46/63}$，大于 q^2。因此 q^2 整除 G 的某个非素数幂不可约次数的 3-部分，这是不可能的。

因此，$S = {}^2\mathrm{G}_2(q_0)$，其中 $q_0 = 3^e \geqslant 27$ 且 e 为奇数。于是 $q_0^{3k} = |S|_3^k = q^3$，因此 $q_0 = q^{1/k}$。若 $k = 3$，则 $q_0^3 \cdot q_0^2(q_0^2 - q_0 + 1)^2$ 整除 G的某个次数，因此这个数的 3 部分（即 $q_0^5 = q^{5/3}$ ）必须整除 G某个非素数幂次数的 3 部分。于是 $q^{5/3} \leqslant qf$，进而 $q^2 < f^3$，或等价地，$3^{2f} < f^3$，但对于奇正整数 $f \geqslant 3$，这个不等式无解。因此，$k = 1$，进而 $q_0 = q$，也就是说，G'/M 同构于 ${}^2\mathrm{G}_2(q)$，如所声称。□

推论 3.6. 设 G 是一个有限群，满足 $\mathrm{cd}(G) = \mathrm{cd}(H)$，其中 H 是一个几乎单群，其底群为 $H_0 = {}^2\mathrm{G}_2(q)$，且 $q = 3^f \geqslant 27$ 和 f 为奇数。那么存在 G 的一个正规子群 N，使得 G/N 是一个底群为H_0的几乎单群。

证明。由命题 3.5，主因子 G'/M 同构于 H_0。令 N 为 G的一个正规子群，使得 $\mathbf{Z}(G/M) = N/M$。将引理 2.7应用于 G/M，我们得到 G/N 是一个底群为 H_0 的几乎单群。□

命题 3.7。设 G是一个有限群，满足 $\mathrm{cd}(G) = \mathrm{cd}(H)$，其中 H 是一个底群为 $H_0 = {}^2\mathrm{G}_2(q)$ 的几乎单群，且 $q = 3^f \geqslant 27$ 和 f 为奇数，并且$|H : H_0| = d \neq 1$。另设主因子 G'/M 同构于 H_0。若 f 与3互素，则 $M = 1$，从而 $G' \cong H_0$。

证明。我们首先证明，M 的每个线性特征标 θ 都是 G'-不变的，即 $\mathrm{I}_{G'}(\theta) = G'$。反设存在 $\theta \in \mathrm{Irr}(M)$，满足 $\theta(1) = 1$，使得 $I := \mathrm{I}_{G'}(\theta) < G'$。令 $\theta^I = \sum_{i=1}^k \phi_i$，其中对 $i = 1, 2, \ldots, k$，$\phi_i \in \mathrm{Irr}(I)$。设$\overline{U} := U/M$ 是 $\overline{G'} := G'/M \cong H_0$ 的一个包含 $\overline{I} := I/M$的极大子群，并令 $t := |U : I|$。由引理 2.2(i)可知，$\phi_i(1)|G' : I| \in \mathrm{cd}(G')$，因此$t\phi_i(1)|G' : U|$ 整除 G的某个特征标次数。于是，$|G' : U|$ 必整除 G的某个特征标次数，因此由引理 3.3，$|G' : U|$ 整除 $(q^3+1)a \in \mathrm{cd}(G)$，其中 a 是 $d = |H : H_0|$ 的某个因子，且群 $\overline{U}$ 为 $\overline{Q} : \mathrm{C}_{q-1}$，其中 $\overline{Q} := [q^3]$。因此，$t\phi_i(1)$整除 d，而后者是 f的一个因子。所以，$t = |U : I| = |\overline{U} : \overline{I}|$ 整除f，而后者与 3 互素，从而 $\overline{Q}$ 包含于 $\overline{I}$中。令 $s := |\overline{I} : \overline{Q}|$。则$q - 1 = |\overline{U} : \overline{Q}| = ts$。由于 f 为奇数且 t 是 f的一个因子，我们注意到 s 为偶数，从而 $\overline{I} = \overline{Q} : \mathrm{C}_s$，其中 $s = (q-1)/t$ 为偶数。

若 $\varphi_i(1) = 1$ 对某个 i成立，则 θ 可扩张到 φ_i，因此由引理 2.2(ii)可知，对所有 $\tau \in \mathrm{Irr}(\overline{I})$，$(\varphi_i\tau)^{G'}$ 是 G'的不可约特征标。我们知道$|G' : I| = (q^3+1)t$，且 $\overline{I}$ 含有一个 Frobenius 子群 $\overline{J} := \overline{Q} : \mathrm{C}_{s/2}$，它有一个次数为 $s/2$的不可约特征标，见 [32, 定理(3)]。因此，$(q^3+1)ts$ 或 $(q^3+1)ts/2$ 是 G'的一个不可约特征标次数，从而 G的某个次数可被 $(q^3+1)(q-1)/2$整除，这就矛盾了。因此，$\varphi_i(1) > 1$

是 a的一个奇因子，对所有 i均成立。由于 f 与 3 互素，每个 $\varphi_i(1)$ 都与 3 互素。我们断言 $Q/\ker(\theta)$ 是阿贝尔群。为证明这一点，只需证明对所有 i，$Q' \leqslant \ker(\varphi_i)$；若此成立，则 $Q' \leqslant \cap_{i=1}^{k} \ker(\varphi_i) = \ker(\theta^I) = \ker(\theta)$，这意味着 $Q/\ker(\theta)$ 是阿贝尔群。假设对某个 j，Q' 不包含 $\ker(\varphi_j)$。则 $(\varphi_j)_Q = \sum_i \sigma_i$，其中 σ_i 在 $\mathrm{Irr}(Q)$ 中是非线性的。由于 $M/\ker(\theta)$ 是 $I/\ker(\theta)$ 的中心，由伊藤定理 [14, 定理 19.9], 可知，$Q/\ker(\theta)$ 的非平凡次数都是 3 的幂，因此 $\varphi_j(1)$ 可被 3 整除，这就矛盾了。因此，$Q/\ker(\theta)$ 如所断言是阿贝尔群。这意味着$Q' \leqslant \ker(\theta)$，从而 $Q' \leqslant M$。于是 $\overline{Q} = Q/M$ 是阿贝尔群，这与 $\overline{Q}'$ 是一个阶为 q^2的群这一事实矛盾，见 [32, 定理]。因此，$\mathrm{I}_{G'}(\theta) = G'$。

现在证明 $M = M'$。由于 M 的每个线性特征标 θ 都是 G'-不变的，我们应用引理 2.5，得出 $|M/M'|$ 整除 H_0 的舒尔乘子 $\mathrm{M}(H_0)$ 的阶。根据引理 3.1，该乘子是平凡的，因此 $M = M'$。假设 M 是非阿贝尔群，且设 $N \leqslant M$ 是 G' 的一个正规子群，使得 M/N 是 G' 的一个主因子。那么，对于某个非阿贝尔单群 S，有 $M/N \cong S^k$。由引理 2.6 可知，S 有一个非平凡不可约特征标 θ，使得 $\chi := \theta^k \in \mathrm{Irr}(M/N)$ 可延拓到 G'/N。根据引理 2.1(ii)，对于所有 $\psi \in \mathrm{Irr}(G'/M)$，必有 $\chi(1)\psi(1) \in \mathrm{cd}(G'/N) \subseteq \mathrm{cd}(G')$。现在可选取 $\psi \in G'/M$，使得 $\psi(1) = q^3$；又由于 θ 非平凡，$\chi(1)\psi(1) = \theta(1)^k \cdot q^3$ 整除 G 的某个次数，这就产生了矛盾。因此，M 是阿贝尔群；又由于 $M = M'$，我们得出 $M = 1$。因此，G' 同构于 H_0。□

现在我们可以证明定理 1.1。下文中，设 G 是一个有限群，其 $\mathrm{cd}(G) = \mathrm{cd}(H)$，其中 H 是一个底群为$H_0 = {}^2\mathrm{G}_2(q)$ 的几乎单群，且 $q = 3^f \geqslant 27$ 并且 f 为奇数。另设 $|H : H_0| = d$。

定理 1.1 的证明 当 $H = H_0$ 时的情形已在 [31] 中处理。这里我们假设 $H \neq H_0$。由命题 3.4 可知 $G' = G''$，因此 G 不可解。此外，命题 3.7 表明主因子 G'/M 同构于 H_0。现在假设 f 与 3 互素。于是由命题 3.7 可得 $G' \cong H_0 = {}^2\mathrm{G}_2(q)$。由引理 2.7 可知 $T := G'\mathrm{Z}(G) = G' \times \mathrm{Z}(G)$，且 $G/\mathrm{Z}(G)$ 同构于 $H_0 : \mathrm{C}_s \leqslant \mathrm{Aut}(H_0)$，其中 s 是 $d = |H : H_0|$的一个因子。由引理 3.2(v)，群 H 有一个次数为 $(q^3+1)d$ 的不可约特征标 χ。于是由引理 2.1(i)，存在 $\theta \in \mathrm{Irr}(T)$，使得对于 $|G : T| = s$ 的某个因子 k，有 $\chi(1) = k\theta(1)$。注意，$\mathrm{cd}(T) = \mathrm{cd}(G') = \mathrm{cd}({}^2\mathrm{G}_2(q))$。然后通过考察 ${}^2\mathrm{G}_2(q)$ 的次数，我们得到 $\theta(1) = q^3 + 1$，因此 $k = d$。这尤其意味着 $d \leqslant s$。若 $s > d$，则 $G/\mathrm{Z}(G) \cong H_0 : \mathrm{C}_s$ 有一个次数为 $(q^3+1)s$ 的不可约特征标，G 也有，这与此矛盾。因此，$s = d$，从而 $G/\mathrm{Z}(G)$ 同构于 $H = H_0 : \mathrm{C}_d$。□

声明

作者确认，本手稿未曾在其他地方发表，也未在其他期刊接受审议。作者还确认，据其所知，与本文发表相关的利益冲突不存在，也没有为本研究提供可能影响其结果的重大经费支持。作者声明，其不存在与本文内容相关的竞争性利益，并确认数据和材料不适用。

致谢

作者感谢编辑和匿名审稿人认真审阅手稿，并提出更正意见和建议。

参考文献

[1] S. H. Alavi、A. Daneshkah、H. P. Tong-Viet 和 T. P. Wakefield。关于 Fi_{23} 的 Huppert 猜想。《帕多瓦大学数学研讨会论文集》，126:201–211，2011年。1[2] S. H. Alavi 和 A. Daneshkhah。关于与底群为 $PSL_2(q)$ 的几乎单群具有相同特征标次数的群。准备中。1[3] S. H. Alavi 和 A. Daneshkhah。与底群为 ${}^2F_4(q)$ 的几乎单群具有相同特征标次数的群。准备中，2021年。1[4] S. H. Alavi、A. Daneshkhah 和 A. Jafari。与散在几乎单群具有相同特征标次数的群。澳大利亚数学会通报，94(2):254–265，2016年。1[5] S. H. Alavi、A. Daneshkhah 和 A. Jafari。关于与底群为马蒂厄群的几乎单群具有相同特征标次数的群。《帕多瓦大学数学研讨会论文集》，138:115–127，2017年。1[6] S. H. Alavi、A. Daneshkhah 和 Y. Moment Zafarabad。与几乎单 Suzuki群具有相同特征标次数的群。《代数及其应用杂志》，已接受，2022年。1[7] S. H. Alavi、A. Daneshkhah、H. P. Tong-Viet 和 T. P. Wakefield。关于 Conway族和 Fischer族散在单群的 Huppert 猜想。《澳大利亚数学会杂志》，94(3):289–303，2013年。1[8] C. Bessenrodt、H. P. Tong-Viet 和 J. Zhang。关于交错群的 Huppert 猜想。《Journal of Algebra》，470:353–378，2017年。1[9] M. Bianchi、D. Chillag、M. L. Lewis 和 E. Pacifici。为完全图的特征度图。《美国数学会会刊》，135(3):671–676（电子版），2007年。3, 4[10] R. W. Carter。李型有限群。《纯粹与应用数学》（纽约）。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1985年。共轭类与复特征标，Wiley-Interscience出版物。5[11] J. H. Conway、R. T. Curtis、S. P. Norton、R. A. Parker 和 R. A. Wilson。《有限群图谱》。牛津大学出版社，Eynsham，1985年。单群的极大子群和普通特征标，J. G. Thackray 提供计算协助。2, 4[12] A. Daneshkhah。Huppert 猜想与几乎单群。《帕多瓦大学数学研讨会论文集》，已接受，2020年。1[13]GAP Group。GAP——群、算法与编程，4.11.0版，2020年。2, 4[14] B. Huppert。《有限群的特征标理论》，de Gruyter 数学丛书第25卷。Walter de Gruyter & Co.，柏林，1998年。2, 10[15]B. Huppert。由特征标次数集合确定的某些单群。I。《伊利诺伊数学杂志》，44(4):828–842，2000年。1, 3[16] B. Huppert。由其特征标次数确定的某些单群。埃森大学实验数学研究所，2000年。1

[17] I. M. Isaacs。《有限群的特征标理论》。AMS Chelsea Publishing，普罗维登斯，罗得岛州，2006年。1976年原版的修订重印本 [Academic Press，纽约；MR0460423]。2[18] G. Kemper、F. L ¨ubeck 和 K. Magaard。Ree群的矩阵生成元${}^2G_2(q)$。《Communications in Algebra》，29(1):407–413，2001年。4[19]P. Kleidman 和 M. Liebeck。《有限经典群的子群结构》，伦敦数学会讲义系列第129卷。剑桥大学出版社，剑桥，1990年。4[20] P. B. Kleidman。Chevalley群 $G_2(q)$（其中q 为奇数）、Ree群 ${}^2G_2(q)$及其自同构群的极大子群。《Journal of Algebra》，117(1):30–71，1988年。6[21]V. M. Levchuk 和 Y. N. Nuzhin。Ree群的结构。《Algebra i Logika》，24(1):26–41，122，1985年。4[22] G. Malle。幺幂特征标的扩张与归纳 McKay 条件。《Journal of Algebra》，320(7):2963–2980，2008年10月。4, 5 [23] O. Manz、R. Staszewski 和 W. Willems。关于一个与特征标次数相关的图的连通分支数。《美国数学会会刊》，103(1):31–37，1988年。4[24] H. N. Nguyen、H. P. Tong-Viet 和 T. P. Wakefield。射影特殊线性群 $\mathrm{PSL}_4(q)$ 可由其特征标次数集合确定。《Journal of Algebra and Its Applications》，11(6):1250108，26，2012年。1[25] R. Ree。与类型为 (G_2) 的单李代数相关的一族单群。《美国数学会通报》，66:508–510，1960年。4[26] R. Ree。与类型为 (G_2) 的单李代数相关的一族单群。《American Journal of Mathematics》，83:432–462，1961年。4 [27]P. Schmid。一类特殊的有理矩阵群。《Linear Algebra and Its Applications》，71:289–293，1985年。4[28] P. Schmid。扩张 Steinberg 表示。《Journal of Algebra》，150(1):254–256，1992年。4[29] W. A. Simpson 和 J. S. Frame。SL(3, q)、SU(3, q^2)、PSL(3, q)、PSU(3, q^2) 的特征标表。《Canadian Journal of Mathematics》，25:486–494，1973年。8[30] H. P. Tong-Viet 和 T. P. Wakefield。关于怪兽群和婴儿怪兽群的 Huppert 猜想。《Monatshefte für Mathematik》，167(3-4):589–600，2012年。1, 3[31] T. P. Wakefield。验证关于 ${}^2G_2(q^2)$ 的 Huppert 猜想。《Algebra and Representation Theory》，14(4):609–623，2011年。1, 2, 10[32]H. N. Ward。关于 Ree 单群系列。《美国数学会汇刊》，121:62–89，1966年。4, 5, 6, 9, 10[33] D. L. White。$\mathrm{PSL}_2(q)$ 和 $\mathrm{SL}_2(q)$ 的扩张的特征标次数。《Journal of Group Theory》，16(1):1–33，2013年。6 SEYED HASSAN ALAVI，布阿里·西纳大学理学院数学系，哈马丹，伊朗。电子邮件地址： alavi.s.hassan@basu.ac.ir电子邮件地址：
alavi.s.hassan@gmail.com