复杂三维表面除粉的几何感知覆盖路径规划

Van-Thach Do 和 Quang-Cuong Pham

arXiv:2303.03616v3 [cs.RO] 8 Jun 2023

摘要——本文提出一种新方法，利用网格模型在三维一般曲面上生成几乎完整且重叠率较低的覆盖路径（CP）。该方法使用约束质心Voronoi镶嵌（CCVT）将网格模型分割为给定数量的簇，并通过测地度量高效地求取簇质心之间的最短路径。我们提出一种新的代价函数，以协调实现所得簇的面积均匀性，并在构建CCVT时限制三角形法向量的变化。所得簇可用于构建高质量的视觉覆盖任务视点（VP）。在此，我们将规划得到的VP用作清洁构型，利用机械臂机器人去除增材制造中的残留粉末。我们将一种用于为每个VP寻找一组候选射线的基于优化的策略集成到运动规划阶段，从而处理VP的自遮挡问题并确保机器人构型无碰撞。我们开展了覆盖路径规划基准测试和物理实验，以验证所提方法的有效性。结果表明，我们的方法能够在合理时间内计算出包含海量三角形的各种网格模型的CP和VP。

索引词—工业机器人、运动与路径规划、增材制造、危险领域中的机器人学。

I. 引言

COVERAGE盖路径规划（CPP）旨在计算一条能够遍历给定区域内所有点的路径。覆盖路径规划的若干标准包括实现完整覆盖、避免重叠，以及满足基于任务的其他要求[1]。设计出满足所有这些标准的覆盖路径规划算法颇具挑战性，在实践中可能无法实现。因此，为满足特定任务的质量要求，选择这些标准的优先级时需要权衡取舍。

许多早期的覆盖路径规划方法旨在目标表面上生成作业幅宽近乎恒定的折线，以确保实现完整且均匀的覆盖。这些覆盖路径可用于多种任务，例如室内清洁、监控、农业服务等。此外，覆盖路径规划在利用机器人末端执行器进行基于感知的表面处理任务中发挥着关键作用，包括检测和三维重建；在这些任务中，所选视点（VP）的质量会显著影响执行效果。现有的大多数视点选择方法，要么在物体周围随机生成一组候选视点，要么依据法向来选择视点

本研究由RIE2020产业协同基金—产业合作项目（IAF-ICP）资助，并获得产业合作伙伴HP Inc.通过HP-NTU数字制造企业实验室提供的现金及实物支持。（通讯作者：Van-Thach Do）

作者来自新加坡南洋理工大学惠普—南洋理工大学数字制造企业实验室及机械与航空航天工程学院。{thach.do,cuong}@ntu.edu.sg。

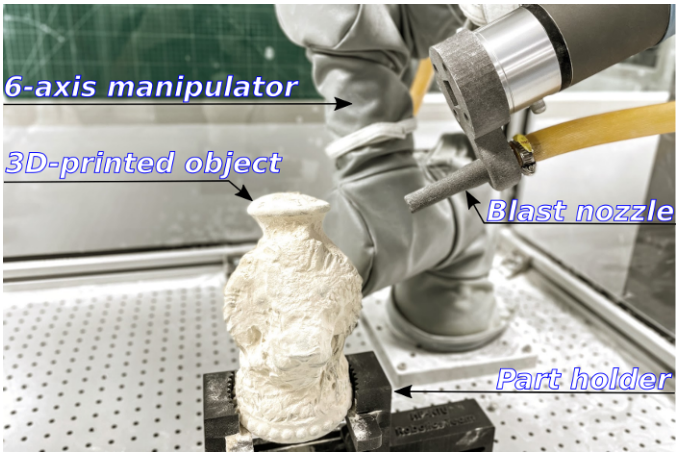


图1. 用于3D打印物体的除粉系统实验装置。

网格中每个三角形面的方向 [2]。虽然这些方法在简单网格上可能表现良好，但它们可能导致复杂几何形状的覆盖率不足、重叠率过高；当采样视点数量较多时，还可能增加计算时间。此外，由于这些方法未考虑自碰撞，也未考虑机器人与周围物体之间的碰撞，因此无法确保视觉传感器能够到达物体表面。

与以往方法不同，本研究提出了一种新的覆盖路径规划算法，能够实现物体表面近乎完整的覆盖率和较低的重叠率，同时生成高质量的视点，用于清洁、基于模型的检测或三维重建任务。我们还处理了自遮挡（视点与网格中其他三角形面之间的遮挡），以及机器人本体与周围环境之间的碰撞问题。随后，我们利用获得的视点，采用机械臂机器人执行工业清洁任务。我们的方法主要有以下三项贡献：

(i) 我们为约束质心Voronoi镶嵌（CCVT）方法提出了一种新的能量函数 [3] ，用于将网格模型 $\mathbb{M}$ 划分为 m 个簇，使各簇在面积和三角面法向量方面的标准差（SD）较低。视点根据所得簇的质量质心和代理法向量[4] （平均三角面法向量）构建。

(ii) 我们提出一种高效方法，即测地线分解计算，该方法时间复杂度低，可计算质心之间的精确测地距离（GD）。随后，根据所得质心间的距离代价，计算表面上的覆盖路径。

(iii) 与以往研究相比，我们解决了在将机器人末端工具定位到所获得的视点时可能遇到的两个问题：

(1) 视点处的射线与 $\mathbb{M}$ 中其他三角形之间的自遮挡；以及 (2) 由于关节限制或与周围物体发生碰撞，在计算出的位姿处无法实现的机器人构型（这类情况下，视点处的射线称为无效射线）。我们提出了一种高效的修正算法，通过利用优化策略生成的一组候选射线，获得方向尽可能接近无效射线的有效机器人构型。我们将所提出的方法应用于自动去除具有复杂几何形状的三维打印（3DP）零件上的残留粉末；据我们所知，此前尚无此类工作。

A. 相关工作

覆盖路径规划问题已得到广泛研究，并应用于各种机器人应用 [5]–[9], ，其中大多数目标表面为平面或具有低曲率几何形状。在 [10],中，提出了一种基于全局曲面参数化的覆盖路径规划方法，以确保在具有复杂拓扑的一般曲面上生成不相交且覆盖率高的路径。通过考虑最小化由重力引起的能耗，提出了一种覆盖路径规划算法，用于为移动机器人在一般地形曲面上规划费马螺旋路径 [11]。在这些方法中，覆盖路径规划结果可在目标表面上实现近乎完整的覆盖路径。

基于覆盖路径规划的机器人机械臂表面清洁解决方案已得到广泛发展。在 [12] [13], 中，提出了表面清洁应用，其中覆盖路径分别通过从二维投影到三维以及与等间距平行平面相交获得。然而，由于失真，所生成覆盖路径的质量可能会在高曲率曲面上下降。在 [14],中，研究了最小化表面清洁任务关节空间中代价函数的问题。这里，物体表面被建模为一组平面片。然而，在构建曲面片期间从获取的点云中随机选取点，所获得的机器人构型可能会产生较高的重叠率。此外，未解决由关节限制导致的自遮挡和不可行构型问题。在 [15], 中，介绍了一种新方法，用于在由不自相交自由曲线形成的三类三维自由曲面上生成UV网格。该方法旨在生成均匀的覆盖路径，同时考虑末端执行器位姿的任务约束。然而，该方法需要人工操作员提供变换后的坐标轴，并且由此产生的任务约束可能不适用于存在自遮挡现象的高曲率曲面。

在三维检测和重建任务中，视点规划对于确定最优传感器位姿集至关重要。最优集合指以较高覆盖率捕获目标物体或场景所需的最少视点数。在基于模型的方法中，视点可以通过不同方式获得。视点是随机生成的[16], [17]。对于高曲率网格，需要大量视点样本才能确保完全覆盖。在 [18], [19],中，视点从网格顶点采样。这种方法存在视点冗余。另一种视点生成方法是面片采样 [20], ，该方法通过在指定约束下将网格模型划分为多个子区域。与我们的工作最相关的是 [21], ，其中使用B样条并在一组特征泛函的引导下对网格模型进行分割。由于不受网格分辨率影响，与随机采样方法相比，这种方法可以减少视点数量。然而，在细分片段步骤中计算出的视点高度依赖于B样条曲面的处理。这可能导致高曲率B样条曲面的交界处出现大量冗余视点。此外，该研究没有处理视点的自遮挡。在[22], 中，提出了一种定向视点采样策略，用于寻找下一个最优视点。该方法通过迭代地重新表述并求解搜索问题，在确保机器人运动学要求并避免碰撞的同时，力求将视点数量和移动成本降至最低。然而，对于高分辨率网格，迭代搜索并对每个三角形面进行采样可能导致计算时间过长。我们提出的方法对网格进行全局分割，并从得到的簇中提取视点；该方法兼具面片采样的高效计算优势，同时对于低曲率网格，还能使所得簇的面积近乎均匀。此外，我们处理了视点的自遮挡，并计算出一组用于执行任务的最优无碰撞机器人构型。

增材制造因其能够根据CAD模型快速制造复杂物体而广受欢迎。然而，3D打印零件的后处理，例如支撑物和粉末去除以及表面精加工，既耗时又昂贵，并且可能对工人造成潜在危害。为辅助并自动化这些过程，已有研究提出利用视觉系统识别被粉末部分遮挡的3D打印零件的六维位姿 [23]–[25]。在 [24], 中，提出了一套用于执行残余粉末去除的完整流程。然而，所设计的机构旨在清洁平坦或低曲率物体。在 [25],中，提出了一种基于视觉的方法，用于对位于粉末床中的3D打印零件进行除粉。然而，以儿童玩沙替代黏附性很强的实际粉末材料，使得该工作相较于真实世界场景有所简化。在他们的工作中，操作期间保持机器人末端工具的滚转和俯仰运动不变，限制了其处理复杂物体的能力。他们未来的工作，即研究先进的路径规划算法以提高除粉自动化程度，已在我们的研究中得到解决。

*B. 3D*打印零件自动化除粉平台

图1展示了用于3D打印零件的实验清理系统，该系统由一台六轴机械臂、一个喷砂喷嘴工具、一个零件夹具和一个3D打印零件组成。喷砂喷嘴连接在机器人末端执行器上，高压压缩空气流中含有微小玻璃珠，经喷嘴头喷出以去除残留粉末。我们的目标是提出一种高效的覆盖路径规划算法，生成无碰撞的机器人轨迹，从而自动去除3D打印零件从3D打印站拆包后残留的粉末。

II. 方法

A. 使用 *CCVT* 方法计算低曲率簇

设 $\mathbb{M} = \{\mathbb{F}, \mathbb{N}\}$ 为输入网格，其中 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{N}$ 分别为三角形面及其对应的法向量，

我们的目标是通过在 $\mathbb{M}$ 上计算带有三角形法线约束的离散约束质心 Voronoi 镶嵌，将 $\mathbb{M}$ 划分为 m 个连通的低曲率面簇 $\{\mathbb{V}_i\}_{i=1}^m$。

定义 1： 离散 Voronoi 镶嵌。给定点的离散集合 $\mathbb{W}=\{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^{n_t}\subset\Re^N$，其中，$\mathbf{y}_i$ 是 n_t 中 $\mathbb{F}$面的质心。集合 $\{\mathbb{V}_i\}_{i=1}^m$ 是 $\mathbb{W}$ 的镶嵌，当且仅当$\mathbb{V}_i\cap\mathbb{V}_j=\emptyset$, $\forall i\neq j$ 且 $\cup_{i=1}^k\mathbb{V}_i=\mathbb{W}$。Voronoi 集定义为

$$\mathbb{V}_i=\{\mathbf{y}\in\mathbb{W}|\|\mathbf{y}-\mathbf{z}_i\|<\|\mathbf{y}-\mathbf{z}_j\|,j=1,...,m,j\neq i, \quad (1)$$

其中，$\{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^m\subset\Re^N$ 称为生成元。$\mathbb{V}_i$ 称为 Voronoi 镶嵌或 Voronoi 图。

定义 2： 离散质心 Voronoi 镶嵌。质心 Voronoi 镶嵌（CVT）是一种 Voronoi 镶嵌，其中 $\{\mathbf{z}_i\}$ 同时也是其 Voronoi 区域的质量质心。通过选择均匀密度函数，我们可以得到离散形式的 CVT [26] [27]的 $\{\mathbf{z}_i\}$，其定义为

$$\mathbf{z}_i=\frac{\sum_{\tau\in\mathbb{V}_i}\zeta_c(\tau)\zeta_a(\tau)}{\sum_{\tau\in\mathbb{V}_i}\zeta_a(\tau)}, \quad (2)$$

其中，$\zeta_c(\tau)$ 和 $\zeta_a(\tau)$ 分别是用于求取面 τ 的质心和面积的函数。质心 Voronoi 图将以下能量函数最小化

$$E_{l2}=\sum_{i=1}^m\sum_{\tau\in\mathbb{V}_i}(\zeta_a(\tau)\|\zeta_c(\tau)-\mathbf{z}_i\|^2) \quad (3)$$

定义 3： 离散受限质心 Voronoi 图。若且唯若 $\{\mathbb{V}_i\}_{i=1}^m$ 是 $\mathbb{W}$ 的CCVT，$\{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^m$ 是这些区域的受限质量质心。连续紧集$\mathbf{S}\subset\Re^N$ 上 $\mathbb{V}_i$ 的受限质心$\mathbf{z}_i^c$，由将$\mathbf{z}_i$ 沿 $\mathbb{V}_i$的代理法向量投影到$\mathbf{S}$ 中的面上确定。对于$\mathbb{M}$的一组离散面质心，该投影近似确定为

$$min_{\mathbf{z}_i^c\in\mathbb{V}_i}(\|\mathbf{z}_i-\mathbf{z}_i^c\|^2) \quad (4)$$

针对不同应用，人们提出了各种能量函数。已有研究提出了一种度量，用于刻画各向异性和分割 [28]。通过结合球面空间和双曲空间中的度量，文献 [29]提出了万有覆盖空间中的统一框架，以获得均匀划分和高质量的重新网格化结果。然而，这些方法与我们的研究范围不符，因此我们引入一种结合距离代价和法向代价的新能量函数。在针对3D表面的 CVT 公式中，测地距离是自然的选择 [30]，但其计算开销可能很大，因此通常使用欧几里得度量作为近似。然而，这种近似在高曲率曲面上可能会产生显著误差 [26]。与 l_2 范数相比，l_1 范数在高维空间中更为合适，并已在多个领域中得到有效应用，用于近似测地距离 [31] [32]。受此启发，我们在距离代价中选用 l_1 度量来评估3D表面上的距离。法向代价用于限制三角形法向量的变化。所提出的能量函数定义如下：

$$E=\sum_{i=1}^m\sum_{\tau\in\mathbb{V}_i}\xi(\mathbf{z}_i,\tau) \quad (5)$$

其中，代价函数 ξ 定义为

$$\xi(\mathbf{z}_i,\tau)=(\alpha_1^{-1}\alpha_2\zeta_a(\tau)\|\zeta_c(\tau)-\mathbf{z}_i\|_1+\overline{\alpha}_2\zeta_a(\tau)\Upsilon_n), \quad (6)$$

其中，α_1 是用于归一化第一项的正常数，根据网格对角包围盒的长度确定。α_2 在 $\in[0,1]$、$\alpha_2=1-\alpha_2$的范围内选取。Υ_n 是法向代价，其确定方式为

$$\Upsilon_n=\beta(\zeta_n(\tau),\zeta_n(\mathbf{z}_i))(1-\zeta_n(\tau)\cdot\zeta_n(\mathbf{z}_i))/2 \quad (7)$$

其中，$\zeta_n(\tau)$ 和 $\zeta_n(\mathbf{z}_i)$ 分别是面 τ的法向量和 $\mathbb{V}_i$的代理法向量。如果点积 $\zeta_n(\tau)\cdot\zeta_n(\mathbf{z}_i)>\alpha_3$，则函数 β 取值为 $\beta=1$；否则取值为 $\beta=\alpha_4$。$\alpha_3\in(-1,1)$ 和 $\alpha_4>1$ 是调节常数。α_3 是阈值；当达到该阈值时，会提高法向代价的权重（α_4），以便从指定簇中移除并重新组织那些与对应簇的代理法向量差异较大的三角形。CCVT 根据距离代价与法向代价之间的权衡计算得出，如式（5）所述。对于曲率较高的网格表面，我们会减弱法向代价的影响，以避免每个簇包含多个连通分量，从而简化后处理步骤 [26]。这可以通过增大 α_2 并减小 α_3 和 α_4 来实现。相反，对于曲率较低的网格表面，我们会减小 α_2 并增大 α_3 和 α_4，以获得低曲率簇。

CCVT按如下Lloyd算法计算。(i) 随机选择 m 个点 $\mathbf{z}_i\in\mathbb{W}$。(ii) 更新Voronoi区域：将 $\mathbb{F}$中的一个面及其对应的质心 $\{\mathbf{y}_v\}_{v=1}^{n_t}$分配给 $\mathbb{V}_q$，$q=1,.....m$，如果

$$\mathbf{z}_q=\underset{\mathbf{z}_i\in\{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^m}{\operatorname{argmin}}\ \xi(\mathbf{z}_i,\mathbf{y}_v) \quad (8)$$

(iii) 使用公式（2）更新计算得到的CCVT的质量质心。(iv) 使用公式（4）将$\mathbf{z}_i$ 更新为CCVT $\mathbb{V}_i$ 的受限质量质心。(v) 检查是否满足收敛准则；否则，重复步骤(ii)。

B. 使用测地度量确定覆盖路径

清洁任务通过将喷嘴轴线对准位于 m 处的点来执行，$-\zeta_n$法向方向为$\mathbf{z}_i$（$\mathbf{z}_i$），且喷嘴到$\mathbf{z}_i$ 的距离为 r_s。该任务的覆盖路径规划旨在找到一条遍历所有$\mathbf{z}_i$的最短路径。网格 $\mathbb{M}$ 上$\mathbf{z}_i$ 之间的距离使用测地度量计算。然而，在整个 $\mathbb{M}$ 上计算测地距离的计算成本很高，且不切实际，尤其是在高分辨率网格上。为解决这一问题，我们提出一种新方法，将整个网格上的计算分解为在 m 个子图上的计算；这些子图由每个 $\mathbb{V}_i$ 的边及其邻接连通簇构成，如算法1第1-7行所示。这里，**获取邻接项(·)** 和 $\epsilon(\cdot)$ 分别用于获取邻接连通簇（·）及簇的边（·）。精确测地距离及其路径使用**`ExactGeodesic`** [33]计算。$\mathbb{C}_d$ 和 $\mathbb{P}_d$ 是字典映射，包含基于图 $\mathcal{G}_g$，使用多源多目的地 Dijkstra算法计算最短路径所获得的生成元之间的代价和巡回路径。需要注意的是，Dijkstra算法仅用于计算

获取覆盖路径$(\{\mathbb{V}_i\}_{i=1}^m, \{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^m)$

1 $\mathcal{P}_{geo} = \emptyset; \mathbb{E}_g = \emptyset;$
2 **对于** $i = 1$ **到** m，**执行**
3 $\mathbb{V}_a, \mathbf{z}_a =$ **获取邻接项**$(\mathbb{V}_i)$; $\mathbb{E}_p = \epsilon(\mathbb{V}_i \cup V_a)$;
4 **对于** $\mathbf{z}$ **中的** $\mathbf{z}_a$ **do**
5 **如果**$(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_a)$ **不在** $\mathbb{E}$ **中** $_g$ **then**
6 $c, p =$ **ExactGeodesic**$(\mathbb{E}_p, \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_a)$;
7 $\mathbb{E}_g \xleftarrow{+} ((\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_a), c)$; $\mathcal{P}_{geo} \xleftarrow{+} p$;
end
end
end
8 $\mathbb{N}_g = \{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^m$; $\mathcal{G}_g = (\mathbb{N}_g, \mathbb{E}_g)$;
9 $\mathbb{C}_d, \mathbb{P}_d =$ **迪杰斯特拉算法**$(\mathcal{G}_g)$;
10 **对于** $i = 1$ **到** m，**执行**
11 **对于** $j = i + 1$ **到** m，**执行**
12 **如果** $(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j)$ **不属于** $\mathbb{E}_g$，**则**
13 $\mathbb{E}_g \xleftarrow{+} ((\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j), \mathbb{C}_d[i, j])$;
14 $\mathcal{P}_{geo} \xleftarrow{+} P_d[i, j]$;
end
end
end
15 **返回 3-opt地理路径**$(\mathbb{E}_g, \mathcal{P}_{geo})$;

算法 1： 覆盖路径的计算。

在 $\mathbb{E}_g$中不存在的边的距离和路径。最后，通过寻找恰好访问每个生成元 $\mathbf{z}_i$ 一次的最短路径来确定覆盖路径。该问题被建模为旅行商问题（TSP），这是一个NP难问题。很可能无法在多项式时间内找到最优解 [34]。根据在 $\mathbb{E}_g$ 中获得的测地距离代价，采用 3-opt算法（算法1，第15行）在三维空间中求解旅行商问题的近似最优解。由此，我们得到一条近似最优巡回路径，它经过 $\mathbb{M}$ 上的$\{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^m$，以及相应的测地路径；该路径从 $\mathcal{P}_{geo}$中提取，代表覆盖路径。符号 $\mathbb{X} \xleftarrow{+} x$ 和 $\mathbb{X} \leftarrow x$ 分别表示将元素 x 追加到列表 $\mathbb{X}$，以及将 x 赋值给列表 $\mathbb{X}$。$\mathbb{C}_d[i, j]$ 返回从 $\mathbf{z}_i$ 到 $\mathbf{z}_j$的代价长度。$\mathbb{P}_d[i, j]$ 用于获取 $\mathbf{z}_i$ 与 $\mathbf{z}_j$之间的测地路径。复杂度。假设经过处理的三角网格 $\mathbb{M}$是闭合的。面数与边数n_e [35] 之间的关系为 $n_e = 3/2n_t$。精确测地算法的复杂度为 $\mathcal{O}(n_e^2 log(n_e))$ [33]。为计算覆盖路径，需要计算簇质心之间的测地距离（算法1，第2-7行）。假设每个簇平均有 ϖ个邻居，我们的方法的复杂度为 $\mathcal{O}(m(\varpi/2)((\varpi + 1)2n_e/(3m))^2 log((\varpi + 1)2n_e/(3m))$，所需空间为 $\mathcal{O}((\varpi + 1)2n_e/(3m))$。若不采用我们提出的方法，这些距离需要在 $\mathbb{M}$ 的全部边上进行计算，复杂度为 $\mathcal{O}((m(m-1)/2)n_e^2 log(n_e))$，所需空间为 $\mathcal{O}(n_e^2)$。与所提出的分解计算相比，这种方法需要大得多的空间，计算成本也更高，尤其是在高分辨率网格上。其余计算的复杂度为 $\mathcal{O}(m^3)$（第 8 行，Dijkstra） $+\mathcal{O}(m(m-1)/2)$（第9-14行） $+ \mathcal{O}(m^3)$（3-opt）。因此，采用所提出的覆盖路径规划方法，可以在合理的时间内获得覆盖路径。

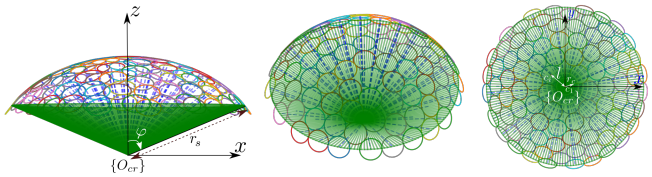


图2. 不同视角下的候选射线集合。

C. 不可行机器人构型的修正与最终机器人轨迹的计算

设$\mathbf{r}_i = \{\mathbf{z}_i, \zeta_n(\mathbf{z}_i)\}$, $\zeta_n(\mathbf{z}_i) = [n_{cx}, n_{cy}, n_{cz}]^T$，以及 $\mathbb{R}_{opt} = \{\mathbf{r}_i\}_1^m$。对于清洁任务，射线$\mathbf{r}_i$ 没有障碍物至关重要，这样才能确保气流从喷嘴畅通无阻地到达$\mathbf{z}_i$（或者在感兴趣区域执行基于模型的检测或三维重建任务时，确保相机视野不受阻挡）。然而，仅凭获得的代理法向量 $\zeta_n(\mathbf{z}_i)$无法保证这一性质。此外，还需要存在一个机器人构型，即一个逆运动学（IK）解，使工具与$\mathbf{r}_i$ 对齐，且不会与周围环境发生碰撞。我们提出了一个优化问题（见附录A），用于构建一组候选射线，以表示喷嘴在$\mathbf{z}_i$ 处可能的方向，如图2所示。得到的结果是一组 $\mathbb{C}_{cr} = \{c_1, c_2, ..., c_{N_c}\}$，其中包含 N_c 个半径为 r_c（喷嘴半径）的圆的中心点。这些圆几乎均匀地分布在球面半径为 r_s、由仰角 φ限定的指定区域内。此外，返回的 $\mathbb{C}_{cr}$ 中心点随后按与 c_1的距离升序排列。使用算法2计算近似最优的无碰撞逆运动学解集合。这些解用于计算覆盖轨迹，以执行清洁任务。由于绕射线的旋转与清洁任务无关，因此我们可以将绕每条射线的旋转离散为一组角度 Θ，即

$$\Theta = \{2\pi(i-1)/I\}, i = 1, .., I, \tag{9}$$

其中，I 是离散化步长，因此，对于每个 $\mathbf{r}_i$，有 I 种可能的构型。我们使用 OpenRAVE [36]计算逆运动学解、检查相应机器人构型与环境之间的碰撞（getIKs 和 isValidCfg，算法2），并执行运动规划以获得最终的机器人轨迹。当射线 $\mathbf{r}$ 的仰角小于 θ_r，且得到的构型与周围环境无碰撞时，有效机器人构型（即 isValidCfg($\mathbf{r}$ θ_r)）返回 True。使用 Trimesh [37] 库检查自碰撞 $\mathbf{r}_i \cap \mathbb{F}$，算法2。如果射线 $\mathbf{r}_x$ 与网格发生碰撞，或没有与该射线对齐的逆运动学解，则视为无效射线。对于无效射线，可使用 getIKs 修正（如果可能），并在 AlignCR 中将候选射线对齐到新的位姿，使得 O_{cr} 位于 $\mathbf{z}_i$ 处，且 c_1沿 $\mathbf{r}_x$的方向。通过应用算法2第1–7行，得到一组有效机器人构型 $\mathcal{C}_{free}$。$\overrightarrow{\mathbf{z}_x o_k}$是从 $\mathbf{z}_x$ 指向 o_k的归一化向量。$\mathcal{R}_a(b) \in SO(3)$是表示绕 a轴旋转 b角度的旋转矩阵。$\mathcal{T}(b) \in SE(3)$是将点从原点平移到位置 b的平移矩阵。基于无碰撞的逆运动学解集合 $\mathcal{C}_{free}$，构建无向图 $\mathbb{G}$，以在构型空间中寻找一组最优机器人构型

GetOptRobotCfgs($\mathbb{R}_{opt}$, $\mathbb{C}_{cr}$)

$\mathcal{C}_{free} = \emptyset$;
对于 $i = 1$ **到** m，**执行**
  如果 $\mathbf{r}_i \cap \mathbb{F} == \emptyset$ **且 isValidCfg**($\mathbf{r}_i, \theta_r$) **则**
    $\mathcal{C}_{free} \xleftarrow{+}$ **getIKs**($\mathbf{r}_i$);
  else
    $\mathbf{r}_t =$ **GetFreeRay**($\mathbf{r}_i, \mathbb{C}_{cr}$);
    如果 $\mathbf{r}_t \neq$ **None 则**
      $\mathcal{C}_{free} \xleftarrow{+}$ **getIKs**($\mathbf{r}_t$);
    end
  end
返回 ComputeOptCfg($\mathcal{C}_{free}$);

GetFreeRay($\mathbf{r}_x, \mathbb{C}_{cr}$)

$\overline{\mathbb{C}}_{cr} =$ **AlignCR**($\mathbf{r}_x, \mathbb{C}_{cr}$)
对于 $k = 1$ **到** N_c **do**
  $o_k = \overline{\mathbb{C}}_{cr}^{[k]}$; $\mathbf{r}_c = \{\overline{\mathbf{z}}_x, \overrightarrow{\overline{\mathbf{z}}_x o_k}\}$;
  if $\mathbf{r}_c \cap \mathbb{F} == \emptyset$ **and isValidCfg**($\mathbf{r}_c, \theta_r$) **then**
    返回 $\mathbf{r}_c$;
  end
end
返回 None;

AlignCR($\mathbf{r}_x, \mathbb{C}_{cr}$)

$\phi_y =$ 反余弦(n_{cz}); $\phi_z =$ 双参数反正切(n_{cy}, n_{cx});
$\mathbb{C}_{tmp} \leftarrow \emptyset$; $\mathcal{T}_a = \mathcal{T}(\mathbf{z}_x)\mathcal{R}_z(\phi_z)\mathcal{R}_y(\phi_y)$;
对于 $k = 1$ **到** N_c **do**
  $\mathbb{C}_{tmp} \xleftarrow{+} \mathcal{T}_a \mathbb{C}_{cr}^{[k]}$;
end
返回 $\mathbb{C}_{tmp}$;

算法2： 近似最优、有效且无碰撞机器人构型。

其中，巡回路径代价在构型空间度量下长度最小。使用函数 **ComputeOptCfg**($\mathcal{C}_{free}$) 可以获得覆盖线 $\mathcal{C}_{free}$ 上逆运动学解的最优巡回路径；算法2（以与 [38]相同的方式使用 Dijkstra算法求解$\mathbb{G}$ ）。

III. 实验

我们使用一台配备 Intel Xeon® W-2255 CPU（3.70GHz x 20）和 24 GB RAM 的 Ubuntu 工作站，在复杂度和尺寸依次递增的四个物体上对所提出的算法进行基准测试（如图5从左到右所示），包括 Bunny（69,451 个面）、Deer（139,306 个面）、Nene（193,254 个面）和 Lion（206,328 个面）。参数选取为 $\alpha_1 = 1/6 d_{dgn}$，$\alpha_2 = 0.93$、$\alpha_4 = 7$，其中 d_{dgn} 为物体包围盒的对角线长度。对于 Bunny、Deer 和 Nene，我们选择 $\alpha_3 = 1/1.9$ 。对于 Lion，由于其几何形状粗糙度较高，我们选择$\alpha_3 = 1/3$ 。簇的数量 m根据喷嘴半径$r_c = 5\sqrt{2} \times 10^{-3}$ m 确定，即 $m = \zeta_a(\mathbb{F})/\sigma_e$，其中 $\zeta_a(\mathbb{F})$为所有三角形面的总面积，$\sigma_e = \pi r_c^2$ 为机器人构型处的预期清洁面积。

A. 覆盖路径规划结果

为评估所提出的能量函数在生成均匀簇区域方面的有效性，我们进行网格分割—示。我们通过计算四个对象所得簇面积的标准差（SD）来评估其均匀性，如图3所示。结果表明，在 Bunny 对象（曲率最低）上，l_2 的 SD 最低。然而，对于曲率较高的网格，基于 l_1的范数在生成面积更均匀的簇方面表现更好。尤其是，与 l_{2n}相比，使用带法向代价的 l_{1n} 可使簇面积显著更加均匀。图4展示了所有对象的能量函数 l_{1n} 在经过16次迭代后的收敛情况。CCVT 的计算结果如图5第二行所示。蓝线为连接邻接连通簇的所有生成元的测地路径。每个簇上的三角形法向量变化范围有限，同时簇在网格上的分布近乎均匀。

网格上的接触点显示在图5的第三行，其中一条唯一的最短路径连接所有生成元，从而在网格模型上形成接触点。我们的覆盖路径规划的计算时间主要取决于精确测地距离的计算（算法1，第2—7行）。采用所提出的分解方法后，四个对象的分割簇之间的测地距离分别在10秒（271个簇）、23秒（209个簇）、37秒（233个簇）和33秒（332个簇）内计算完成。与不采用分解方法时分别需要39,240秒、56,160秒、91,908秒和225,828秒的计算时间相比，这是一项显著改进。由于 Lion 的复杂几何形状更加复杂，需要更多的分割簇，因此对于 Nene，所提出的方法产生的计算时间略长于 Lion。

我们进一步通过表 I 中的其他覆盖路径规划指标，将所提出的方法（l_{1n}）与传统的 CCVT 方法（l_2）以及基线 [17] 进行比较。 bl 和 $bl_{\times 3}$ 分别是基线方法在使用与我们方法相同数量的视点以及使用我们方法生成的视点数量三倍时得到的结果。在此，我们使用从感兴趣三角形到相邻簇生成元的测地距离，并使用由 r_c 确定的阈值来估计覆盖率和重叠率。RSD 是基于簇面积和 σ_e计算得到的每簇期望面积的相对标准差。 $\mathbb{F}_{\text{unreach}}$ 是根据法向代价定义的每个对象中无法到达的三角形集合。如果某个三角形的法向与对应生成元的法向所构成的角度大于某一特定值 θ_0，则将该三角形添加到 $\mathbb{F}_{\text{unreach}}$ 中，即 $\theta = \arccos(\zeta_n(\tau) \cdot \zeta_n(\mathbf{z}_i)) > \theta_0$。 $\mathbb{F}_{\text{unreach}}$ 的物理含义是，如果 θ 大于该值，则任务性能将下降。对于清洁任务，我们选择 $\theta_0 = \pi/3$ 弧度。对于每个对象， $\mathbb{F}_{\text{unreach}}$ (%)由 $\mathbb{F}_{\text{unreach}}/n_t$确定。表 I 显示，与我们提出的方法（$l_{1n}$）相比，基线方法 bl 具有显著更高的重叠率和无法到达特征率（$\mathbb{F}_{\text{unreach}}$），以及显著更低的覆盖率。通过 $bl_{\times 3}$可以提高覆盖率；但是，重叠率会明显恶化。 l_2 和我们提出的方法（l_{1n}）都实现了近乎完整的覆盖率，同时其重叠率远低于基线方法。

图6展示了从不同视角观察到的 Deer 左耳周围计算得到的 CCVT。耳朵上的生成元标记为

表 I 对比结果。

	覆盖率 (%)				重叠率 (%)				RSD (%)				$\mathbb{F}_{\text{unreach}}$ (%)			
	bl	$bl_{\times 3}$	l_2	Ours	bl	$bl_{\times 3}$	l_2	Ours	bl	$bl_{\times 3}$	l_2	Ours	bl	$bl_{\times 3}$	l_2	Ours
Bunny	64.6	95.1	97.7	97.6	44.1	86.3	10.7	11.5	0.8	0.43	1.1	1.3	5.7	1.6	5.4	0.5
Deer	80.6	97.6	98.9	97.5	63.6	92.7	26.9	28.8	2.1	1.2	2.2	2.4	21.3	5.9	21.3	5.9
Nene	67.3	95.3	94.4	92.3	45.1	87.9	10.7	8.3	1.4	0.86	2.0	2.4	16.7	5.8	15.0	2.5
Lion	69.0	93.6	95.1	92.4	57.8	86.1	11.3	11.4	2.1	1.2	1.6	1.9	19.7	5.1	17.7	13.7

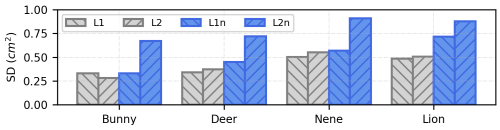


图3。 四个物体的簇面积标准差 物体。

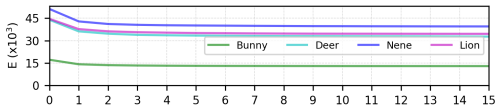


图4。四个物体的能量函数收敛情况。

黄色。对于每个簇，未覆盖三角形的边缘以比其对应簇颜色更深的颜色显示。通过使用所提出的能量函数，我们的方法显著降低了未覆盖元素的比例。在 l_2 方法中，较大且数量更多的深色区域（较高的 $\mathbb{F}_{\text{unreach}}$ 率）会降低清洁任务的性能，因为气流对目标簇的作用会减弱或完全消失。对于基于模型的检测和三维重建任务，在计算出的视点处捕获整个簇并不可行，因此使用集合覆盖问题进行视点规划 [17] 并不有效。凭借近乎完整的覆盖率以及显著较低的 RSD 和$\mathbb{F}_{\text{unreach}}$比率，我们提出的方法能够为基于表面的覆盖任务生成高质量的视点集合。

B. 实际清洁演示

使用协作机器人（UR3e）对几何复杂度较高的 Deer、Nene 和 Lion 物体进行实际清洁演示。从打印站（HP MJF5200）取出后未清理的 3D打印物体如图8(a)所示。喷吹压力设为 60 psi、 $\theta_r = \pi/3$rad 和 $r_s = 0.05$ m。图7展示了使用算法2寻找一组有效机器人构型的结果。物体与 UR3e 的相对位置为 (0.24 m, 0.2 m, 0.08 m)，如图7(a)所示。使用算法2后， $\mathbb{R}_{opt}$ 中的部分射线（图 7(b)）要么通过校正其法线方向以获得可行的逆运动学解 $\mathcal{C}_{free}$（如图7(c)和(d)所示），要么因不存在满足算法2第5行条件的可行逆运动学解而被移除（如图7(e)所示）。不可恢复射线的数量可通过增大 θ_r 来减少，具体取决于机械臂的臂长和物体的摆放位置。然而，较大的 θ_r也会增加规划和执行时间，因为校正射线以及在高度伸展的构型之间切换都需要更多时间。基于$\mathcal{C}_{free}$，最终轨迹

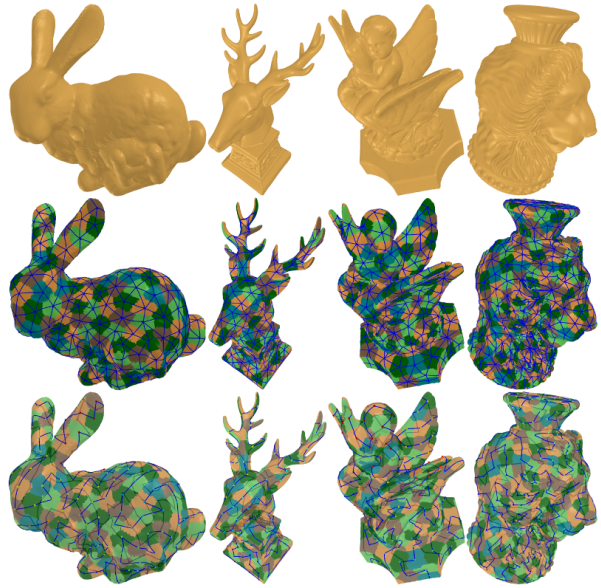


图5.规划覆盖路径的结果（算法 1).

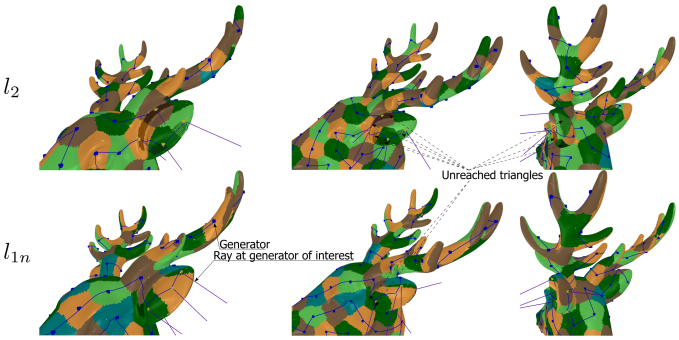


图6.Deer 左耳周围不同视角下的 CCVT 结果。

使用 OpenRAVE 中的内置函数计算，并通过 Universal Robots ROS Driver 发送给机器人。图8(c)展示了 Lion 清洁动作的连续快照，机器人将其构型恰当地调整为生成元处计算得到的无碰撞构型。因此，Lion 嘴部以及整个物体表面上的残留粉末均被清除，证明了我们方法的有效性。清洁时间约为 300 s。尽管计算得到的覆盖率并不完整，但由于喷嘴的实际作用区域超过 r_c，实际实施仍实现了近乎完整的覆盖。

在除粉任务中，物体表面的残留粉末会在清洁过程中被吹走，其分布也随之变化。此外，受影响的清洁区域在

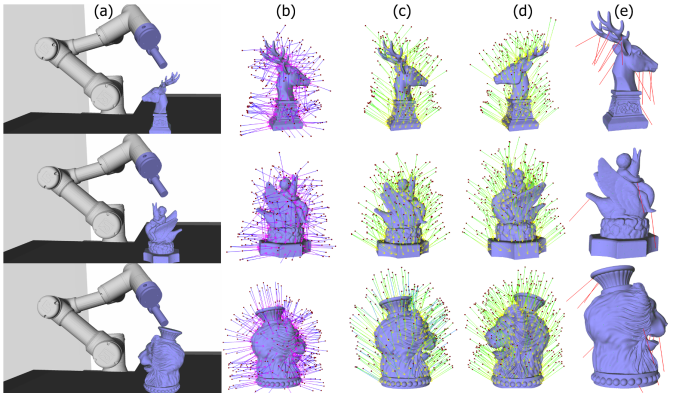


图7. 寻找有效构型集合的结果（算法2）。(a) OpenRAVE 中的物体和机器人。(b) 预先计算的射线。(c) 和 (d) 应用算法2后有效构型对应的射线。(e) 不可恢复射线。

特定构型下的大小取决于多种因素，例如表面属性（材料、几何复杂度）、未熔融粉末的附着特性以及气流功率，因此无法通过解析方法确定每个 VP 受影响的清洁区域大小。在我们的方法中，我们从实际应用角度选择 r_s、σ_e、θ_r 和喷吹压力，以确保在计算得到的机器人构型下有足够的气流有效清除残留粉末，同时始终保持这些构型下r_s 的距离。不过，在构型之间转换时，我们会放宽这一距离限制，从而使喷嘴及其连接软管的移动更加灵活、迅速。

IV. 结论

在本研究中，我们提出了一种新方法，利用从网格模型中提取的信息，在一般曲面上生成近乎完整的覆盖路径和高质量的视点。通过引入新的能量函数，采用 CCVT 方法将网格模型分割为多个簇，从而兼顾覆盖质量（簇面积均匀）和三角形法向量的变化。结果表明，在所提出的能量函数中使用 l_1-范数，相较于 l_2-范数，能在复杂曲面上实现更低的簇面积标准差。我们提出了一种分解计算方法，以加快利用测地度量求解遍历所有分割簇的最短路径。由此，我们能够在合理的时间内获得高覆盖率、低重叠率且曲率较低的分割簇覆盖路径。随后，我们提出了一种有效的基于优化的策略，以解决视点的自遮挡问题，并支持寻找有效的机器人构型。接着，计算出一条无碰撞机器人轨迹，使覆盖路径规划能够应用于清洁和基于模型的检测。我们在一套用于增材制造的工业清洁平台上验证了该方法的有效性。未来的工作包括：（1）研究先进方法 [30] [39]，加速 CCVT 的构建。（2）实现更快速且能生成高质量近似测地距离的方法 [40]，加快覆盖路径规划的计算。（3）基于所获得的高质量视点，开发先进的基于模型的检测和三维重建算法。

附录

附录A. 使用优化构造候选射线集合。

我们提出以下优化问题来构建候选射线集合：

$$\begin{aligned} \underset{c_i}{\text{minimize}} \quad & \textstyle\sum_{i=2}^{N_c} x_i^2 + y_i^2 && (10)\\ \text{subject to} \quad & (x_1, y_1) = (0,0), && (11)\\ & z_i \geq R\cos(\varphi), && (12)\\ & \|c_i - c_j\|_2 \geq l, && (13)\\ & i = 1,...,N_c, j = i+1,...,N_c, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{z}_i = \sqrt{R^2 - x_i^2 - y_i^2},\ c_i = [x_i, y_i, z_i]^T$，$l$ 是由下式确定的两个相邻圆之间的距离

$$l = 2r_c\cos(\arctan(\frac{r_c}{r_s})), \tag{14}$$

目标函数 (10) 和 (13) 左侧的函数均为凸函数。因此，上述形式并非凸优化问题。该问题可以使用有纪律的凸-凹规划 [41]求解。

致谢

我们谨此感谢刘阳博士就 CCVT 主题分享了深刻见解，也感谢 Daren Ho 慷慨协助操作清洁平台。

参考文献

[1] E. Galceran 和 M. Carreras，“机器人覆盖路径规划综述”，机器人与自主系统，第 61 卷，第 12 期，第 1258–1276 页，2013 年。[2] M. Peuzin-Jubert、A. Polette、D. Nozais、J.-L. Mari 和 J.-P. Pernot，“面向逆向工程与自动控制应用的视图规划问题综述”，计算机辅助设计，第 141 卷，文章编号 103094，2021 年。[3] H. Nguyen、J. Burkardt、M. Gunzburger、L. Ju 和 Y. Saka，“受约束的 CVT 网格及三角形网格生成器的比较”，计算几何，第 42 卷，第 1 期，第 1–19 页，2009 年。[4] M. Skrodzki、E. Zimmermann 和 K. Polthier，“点集曲面的变分形状近似”，《计算机辅助几何设计》，第 80 卷，文章编号 101875，2020 年。[5] D. Gleeson、S. Jakobsson、R. Salman、F. Ekstedt、N. Sandgren、F. Edelvik、J. S. Carlson 和 B. Lennartson，“生成用于机器人喷涂的优化轨迹”，*IEEE*自动化科学与工程汇刊，第 19 卷，第 3 期，第 1380–1391 页，2022 年。[6] R. Bormann、F. Jordan、J. Hampp 和 M. H¨agele，“室内覆盖路径规划：综述、实现与分析”，载于*2018*年*IEEE*国际机器人与自动化会议（*ICRA*）。IEEE，2018 年，第 1718–1725 页。[7] R. Almadhoun、T. Taha、L. Seneviratne 和 Y. Zweiri，“面向模型重建与制图的多机器人覆盖路径规划综述”，*SN*应用科学，第 1 卷，第 8 期，第 1–24 页，2019 年。[8] I. A. Hameed，“面向三维地形上的农业机器人与自主机器的智能覆盖路径规划”，智能与机器人系统杂志，第 74 卷，第 3–4 期，第 965–983 页，2014 年。[9] C. S. Tan、R. Mohd-Mokhtar 和 M. R. Arshad，“采用经典算法与启发式算法的机器人覆盖路径规划综合综述”，*IEEE Access*，第 9 卷，第 119 310–119 342 页，2021 年。[10] Y.-Y. Lin、C.-C. Ni、N. Lei、X. David Gu 和 J. Gao，“利用二次微分进行一般曲面的机器人覆盖路径规划”，载于*2017*年*IEEE*国际机器人与自动化会议（*ICRA*），2017 年，第 5005–5011 页。[11] C. Wu、C. Dai、X. Gong、Y.-J. Liu、J. Wang、X. D. Gu 和 C. C. Wang，“一般地形曲面的节能覆盖路径规划”，*IEEE*机器人与自动化快报，第 4 卷，2019 年，第 3 期，第 2584–2591 页。

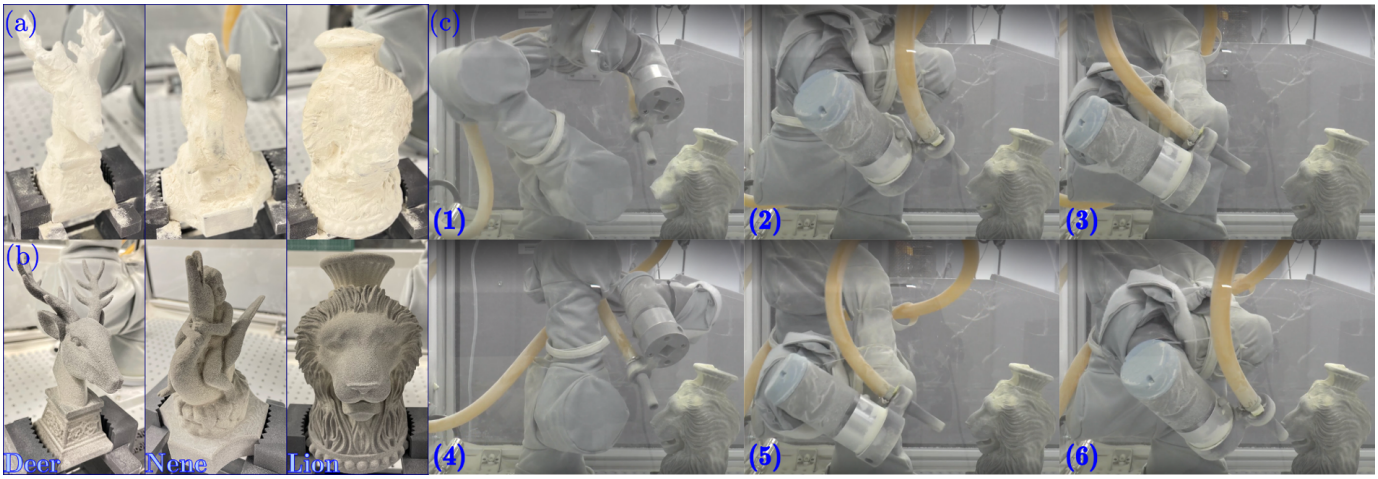


图 8. 3D打印样品的实拍照片。(a) 从3D打印设备中拆包后。(b) 执行清洁过程后。(c) 尝试清除Lion口中的残留粉末时实际清洁动作的快照。完整视频请见 https://youtu.be/eD5AjJKkEaI。

[12] J. Moura、W. Mccoll、G. Taykaldiranian、T. Tomiyama 和 M. S. Erden，“利用机器人机械臂自动清洁列车驾驶室前部”，*IEEE*机器人与自动化快报，第 3 卷，第 4 期，第 3058–3065 页，2018 年。[13] A. M. Kabir、K. N. Kaipa、J. Marvel 和 S. K. Gupta，“利用多种布置和振荡式工具运动进行机器人清洁的自动规划”，*IEEE*自动化科学与工程汇刊，第 14 卷，第 3 期，第 1364–1377 页，2017 年。[14] J. Hess、G. D. Tipaldi 和 W. Burgard，“利用冗余机械臂有效覆盖三维表面的零空间优化”，载于*2012*年*IEEE/RSJ*智能机器人与系统国际会议，2012 年，第 1923–1928 页。[15] S. McGovern 和 J. Xiao，“面向受约束机器人覆盖路径规划的三维自由曲面 UV 网格生成”，载于*2022*年*IEEE*第*18*届自动化科学与工程国际会议（*CASE*）。IEEE，2022 年，第 1503–1509 页。[16] C. Dornhege、A. Kleiner 和 A. Kolling，“三维覆盖搜索”，载于*2013*年*IEEE*安全、防护与救援机器人国际研讨会（*SSRR*），2013 年，第 1–8 页。[17] W. Jing、J. Polden、P. Y. Tao、C. F. Goh、W. Lin 和 K. Shimada，“面向工业三维形状检测应用的基于模型的覆盖运动规划”，载于*2017*年第*13*届*IEEE*自动化科学与工程会议（*CASE*）。IEEE，2017 年，第 1293–1300 页。[18]M. Gronle 和 W. Osten，“用于多传感器表面检测的视点与传感器规划”，表面形貌：计量学与特性，第 4 卷，第 2 期，文章编号 024009，2016 年 4 月。 [在线]。可查阅：https://dx.doi.org/ 10 1088 2051 672 4 2 024009 。/ - X/ / / B. J. Englot，[19]“复杂三维结构的基于采样的覆盖路径规划”，博士学位论文，麻省理工学院，2012 年。[20] F. Prieto、R. Lepage、P. Boulanger 和 T. Redarce，“用于检测的基于CAD的三维数据采集策略”，机器视觉与应用，第 15 卷，第 76–91 页，2003 年。[21] D. Mosbach、P. Gospodneti´c、M. Rauhut、B. Hamann 和 H. Hagen，“面向基于模型的表面检测的特征驱动视点布置”，机器视觉与应用，第 32 卷，第 1–21 页，2021 年。[22] E. Glorieux、P. Franciosa 和 D. Ceglarek，“采用目标视点采样的机器人自由曲面检测覆盖路径规划”，机器人与计算机集成制造，第 61 卷，文章编号 101843，2020 年。[23] J. X.-Y. Lim 和 Q.-C. Pham，“3D打印部件的自动化后处理：用于深度分类与定位的人工撒粉”，虚拟与物理原型，第 1–14 页，2021 年。[24] H. Nguyen、N. Adrian、J. L. X. Yan、J. M. Salfity、W. Allen 和 Q.-C. Pham，“用于3D打印部件自动除粉的机器人系统开发”，载于*2020*年*IEEE*国际机器人与自动化会议（*ICRA*）。IEEE，2020 年，第 8202–8208 页。[25] Z. Liu、J. Geng、X. Dai、T. Swierzewski 和 K. Shimada，“通过位姿跟踪实现增材制造的机器人除粉”，*IEEE*机器人与自动化快报，第 7 卷，第 4 期，第 10 770–10 777 页，2022 年。[26] S. Valette 和 J.-M. Chassery，“近似质心 Voronoi 图-用于均匀多边形网格粗化”，发表于《计算机图形论坛》，第23卷，第3期。Wiley在线图书馆，2004年，第381–389页。[27] Q. Du、V. Faber和M. Gunzburger，“质心Voronoi镶嵌：应用与算法”，发表于《*SIAM*评论》，第41卷，676，1999 4，第637no. pp. – 。[28] D. Cohen-Steiner、P. Alliez和M. Desbrun，“变分形状近似”，发表于*ACM SIGGRAPH 2004*论文集，2004年，第905–914页。[29] G. Rong、M. Jin、L. Shuai和X. Guo，“流形曲面万有覆盖空间中的质心Voronoi镶嵌”，发表于《计算机辅助几何设计》，第28卷，第8期，第475–496页，2011年。[30] Y. Liu、W. Wang、B. L´evy、F. Sun、D.-M. Yan、L. Lu和C. Yang，“关于质心Voronoi镶嵌——能量光滑性与快速计算”，发表于《*ACM*图形学汇刊（*ToG*）》，第28卷，17，2009 4，第1no. pp. – 。[31] M. G. Mozerov 和 J. van de Weijer，“用于边缘保留滤波器的改进型递归测地距离计算”，发表于《*IEEE*图像处理汇刊》，第26卷，第8期，第3696–3706页，2017年。[32] F. Briggs、R. Raich和X. Z. Fern，“鸟类物种的音频分类：一种统计流形方法”，发表于*2009*年第九届*IEEE*国际数据挖掘会议，2009年，第51–60页。[33] J. S. Mitchell、D. M. Mount和C. H. Papadimitriou，“离散测地线问题”，发表于《*SIAM*计算杂志》，第16卷，第4期，第647–668页，1987年。[34] U. A. Brodowsky、S. Hougardy和X. Zhong，“欧几里得旅行商问题中 *k*-Opt启发式算法的近似比”，发表于*arXiv*预印本 *arXiv:2109.00069*，2021年。[35] J. B. Allan、B. Wyvill和I. H. Witten，“多边形网格直接操控的方法论”，发表于《计算机图形学新进展：*CG International'89*论文集》。Springer，1989年，第451–469页。[36] R. Diankov，“机器人操控程序的自动构建”，博士学位论文，卡内基梅隆大学机器人研究所，2010年。[37] Dawson-Haggerty等，“trimesh”。 [在线]。可访问：https://trimsh. org/[38] F. Su´arez-Ruiz、T. S. Lembono和Q.-C. Pham，“RoboTSP——机器人任务排序问题的快速求解方案”，发表于*2018 IEEE*国际机器人与自动化会议（*ICRA*），2018年，第1611–1616页。[39] G. Rong、Y. Liu、W. Wang、X. Yin、D. Gu和X. Guo，“质心Voronoi镶嵌的GPU辅助计算”，发表于《*IEEE*可视化与计算机图形学汇刊》，第17卷，第3期，第345–356页，2010年。[40] Y. Y. Adikusuma、Z. Fang和Y. He，“离散测地图的快速构建”，发表于《*ACM*图形学汇刊（*TOG*）》，第39卷，第2期，第1–14页，2020年。[41] X. Shen、S. Diamond、Y. Gu和S. Boyd，“规范化凸凹规划”，发表于*2016 IEEE*第五十五届决策与控制会议（*CDC*），2016年，第1009–1014页。