基于乔列斯基因子近似逆的大型图有效电阻计算

Zhiqiang Liu、Wenjian Yu，清华大学计算机科学与技术系、BNRist，北京 100084，中国 电子邮箱：liu-zq20@mails.tsinghua.edu.cn, yu-wj@tsinghua.edu.cn

arXiv:2303.03617v1 [math.NA] 7 Mar 2023

摘要—**有效电阻源自电路分析领域，是谱图论中的一种重要图距离。它已在多个领域得到广泛应用，例如图数据挖掘、谱图稀疏化和电路仿真等。然而，准确计算有效电阻可能难以实现，而且我们仍缺乏能够高效估算大型图中有效电阻的方法。本文基于稀疏近似逆技术，提出了一种用于计算一般加权图有效电阻的高效算法。与近期的一种竞争方法相比，所提出的算法速度提升数百倍，结果精度也提高了一个至两个数量级。将该算法与基于图稀疏化的电网（PG）降阶框架相结合，我们开发了一种快速电网降阶方法，在不损失降阶精度的情况下，降阶时间平均提速 6.4 倍。在电网暂态分析和直流增量分析的应用中，与采用基于精确有效电阻的电网降阶方法相比，所提出的方法使总耗时分别提速 1.7 倍和 2.5 倍，且解的误差没有增加。**

索引词—**有效电阻、电网降阶、直流增量分析、暂态分析。**

I. 引言

有效电阻是衡量图中顶点相似性的重要指标，在众多领域有着广泛应用，包括图数据挖掘 [1]–[3],、谱图稀疏化 [4]–[7] 和电路仿真 [8]–[10]，等。在大型图中计算许多节点对之间的有效电阻是一项计算上极具挑战性的任务。文献中提出了多种估算有效电阻的方法。 [1],提出了一种基于随机投影的方法，但要以高精度计算有效电阻仍需耗费大量时间。 [2]，[3]，提出了基于随机游走或随机生成生成树的方法，但这些方法只能处理无权图。 [10], 提出了一种基于无穷镜像技术的方法，但该方法假设图具有二维网格结构。尽管有效电阻十分重要，我们仍缺乏能够在一般大型图上高效计算有效电阻的方法。

电网（PG）降阶的目标是将原始的大型电网缩减为较小的电网，同时保留端口节点的电气特性。文献中主要有三类电网降阶方法：基于矩匹配的方法 [11], [12],基于节点消除的方法 [13], [14] 以及类似多重网格的方法 [15], [16]。基于矩匹配的方法 [11], [12] 无法高效地缩减电网，因为典型电网中有数十万个端口节点。基于节点消除的方法 [13], [14] 已成功用于缩减树状 RC 网络，但在处理网格状电网时，往往会生成更稠密的模型，其边数甚至比原始模型还多。类似多重网格的方法 [15], [16] 能够生成可实现且稀疏的降阶模型，但其误差难以控制。

有效电阻已被用于开发更高效的电网降阶方法 [8]，[9]。这些方法采用基于有效电阻的采样方法 [4] 对稠密降阶模型进行稀疏化。 [9] 中提出的方法由于计算复杂性高，无法很好地扩展到大型问题，这一点也在 [9]中得到承认。 [8] 中提出的方法具有更好的可扩展性，因为它利用了图划分技术和基于有效电阻的端口合并。然而，该方法需要精确计算有效电阻，对于大型电网而言仍然耗时很长。

本文旨在开发一种高效算法，用于计算大规模图中的有效电阻，并提出一种快速的电网降阶方法。我们的主要贡献总结如下。

1）我们提出了一种高效算法，用于计算一般加权图中的有效电阻。该算法基于针对拉普拉斯矩阵乔列斯基因子的稀疏近似逆技术。

2）将所提出的有效电阻计算算法与 [8], 中提出的电网降阶框架相结合，我们开发了一种快速电网降阶方法。

我们进行了大量实验，以验证所提出的有效电阻计算算法的效率和准确性。结果表明，与近期的竞品 [1] 相比，该算法的速度平均提升了 168 倍，误差也显著降低。所提出的算法具有很强的可扩展性。对于包含 6.0E7 个节点和 1.0E8 条边的图，可以在约 8 分钟内计算出所有边的有效电阻，估计平均相对误差仅为 0.17%。此外，该算法还推导出一种快速 PG 降阶方法。与基于精确有效电阻的方法相比，该方法的速度平均提升了 6.4 倍，且不会增加降阶误差。所得快速 PG 降阶方法可用于许多下游应用。例如，它使电网暂态分析和直流增量分析的总耗时分别提速 1.7 倍和 2.5 倍。

本研究得到国家自然科学基金委员会项目编号 62090025及北京市科学技术计划（编号：Z221100007722025）的资助。

II. 背景

A. 有效电阻及其应用

设 $G=(V, E, w)$ 表示一个加权无向图，其中 V 和 E 分别是顶点（节点）集和边集，w 是一个正权重函数。令 $n=|V|$ 和$m=|E|$。关联矩阵 B 定义为一个 $m\times n$矩阵，其中 B 的每一行对应 E中的一条边，B 的每一列对应 V中的一个节点。B 的各元素满足：

$$B(e,v)=\begin{cases}1, & v\ is\ e's\ head\\ -1, & v\ is\ e's\ tail\\ 0, & \text{otherwise}\ .\end{cases} \tag{1}$$

令 W表示一个 $m\times m$对角矩阵，其中 $W(e, e)=w(e)$。则拉普拉斯矩阵 $L_G\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 定义为：

$$L_G=B^TWB\ . \tag{2}$$

给定两个节点 p 和 q，$R_G(p, q)$ 表示跨越 p 和 q 的有效电阻，即单位电流经由 p 流入 G 并经由q流出时，p 与 q之间的电压差。形式化地，它可以定义为：

$$R_G(p,q)=e_{p,q}^TL_G^\dagger e_{p,q}\ . \tag{3}$$

这里 $L_G^\dagger$ 表示 L_G 的伪逆，$e_{p,\ q}=e_p-e_q$，其中 e_p 是单位矩阵的第 p列。由于最小特征值为 0，L_G 是奇异的。为处理 L_G的奇异性，我们引入一个接地节点，并将其连接到 G的每个连通分量中随机选取的一个节点。这相当于向 L_G的对角元素加上若干小的正值。为简化记号，我们仍用 L_G 表示由此得到的对称对角占优（SDD）矩阵。

下面简要回顾 [8], 中提出的采用基于有效电阻的图稀疏化的电网降阶方法。

电网降阶 [17]旨在将原始的大型电网缩减为一个包含所有端口节点的小型电网。端口节点定义为与电压源或电流源相连的节点。通过分析缩减模型可以获得端口节点的电压降，从而能够更高效地分析大型电网。基于舒尔补的方法 [14] 被用于消除非端口节点，且不会损失精度，但往往会生成稠密得多的模型。为解决这一问题，文献 [8],提出了一种基于图稀疏化的电网降阶方法，该方法包括电路划分、基于舒尔补的降阶、基于有效电阻的端口合并以及基于有效电阻的图稀疏化。需要指出的是，所有端口节点都包含重要的物理信息，应当予以保留。尽管 [8],中至少消除了半数端口节点，但该算法可以轻松扩展到所有端口节点都必须保留的案例。我们将修改后的版本总结为算法 1。

在所有这些步骤中，计算有效电阻耗时最长。因此，为了获得快速的电源

算法 1 基于有效电阻的电网降阶图稀疏化 [8]

输入： 原始电网。

输出： 降阶后的电网。

1：将原始电网划分为许多块。节点分为三类：端口节点、非端口接口节点和非端口内部节点。2：对于每个块，使用基于舒尔补的方法消除非端口内部节点。3：对于每个约化块，使用公式（3）精确计算所有边的有效电阻。4：对于每个约化块，根据有效电阻合并节点，然后使用基于有效电阻的采样方法对约化电网进行稀疏化。5：将所有约化且经过稀疏化的模型拼接在一起，形成最终的约化电网。

电网约化算法，需要更高效的有效电阻计算方法。

B. 有效电阻的计算方法

准确计算有效电阻在计算上具有挑战性。对于每个查询 (p, q)，计算 $R_G(p, q)$ 需要求解线性方程，其系数矩阵为 L_G。值得注意的是，许多应用要求计算每条边 $(p, q)\in E$ 的有效电阻。求解 $|E|$ 个线性方程至少需要 $\Omega(|E|^2)$ 时间，这对于大规模问题而言可能难以承受。

为了更高效地计算有效电阻， [4]提出了一种基于随机投影的方法。该方法基于这样一个事实：有效电阻 $R_G(p, q)$ 可以表示为两个向量之间的距离：

$$\begin{aligned}R_G(p,q)&=e_{p,q}^TL_G^\dagger e_{p,q}=e_{p,q}^TL_G^\dagger L_GL_G^\dagger e_{p,q}\\&=e_{p,q}^TL_G^\dagger B^TWBL_G^\dagger e_{p,q}\\&=\|W^{1/2}BL_G^\dagger e_p-W^{1/2}BL_G^\dagger e_q\|_2^2\ .\end{aligned} \tag{4}$$

对于每个节点 p，$W^{1/2}BL_G^\dagger e_p$ 是一个 m 维向量。利用 Johnson-Lindenstrauss引理，可以将这些向量投影到 k 维空间，使得：

$$R_G(p,q)\approx\|QW^{1/2}BL_G^\dagger e_p-QW^{1/2}BL_G^\dagger e_q\|_2^2\ , \tag{5}$$

其中，$k=O(logm)$，且 $Q\in R^{k\times m}$ 是一个随机矩阵，其元素从 $\pm\frac{1}{\sqrt{k}}$ 中均匀采样。注意，利用式 (5)，只需求解 k 个线性方程即可构造矩阵 $QW^{1/2}BL_G^\dagger$，之后每次有效电阻查询都可在 $O(k)=O(logm)$ 时间内完成。 [1], 提出了该算法的一个更实用版本，将基于随机投影的方法与快速线性方程求解器[18]结合起来。然而，由于隐藏常数较大，要以足够高的精度计算大型图上的有效电阻仍然非常耗时。

III. 基于乔列斯基因子的近似逆高效计算有效电阻

A. The Idea

Suppose L_G is factorized with Cholesky factorization:

$$L_G=LL^T\ , \tag{6}$$

其中 L 是一个下三角矩阵。于是，查询 (p,q) 的有效电阻可写为：

$$R_G(p,q) = e_{p,q}^T L_G^{-1} e_{p,q} = e_{p,q}^T L^{-T} L^{-1} e_{p,q} = \|L^{-1} e_{p,q}\|_2^2 = \|L^{-1} e_p - L^{-1} e_q\|_2^2 . \quad (7)$$

式（7）表明，有效电阻 $R_G(p, q)$ 可以表示为 L^{-1} 的第 p 列与第 q 列之间的距离。若已知 L^{-1}，即可高效地计算有效电阻，但对于大规模问题，显式计算并存储稠密的 L^{-1} 可能代价过高。因此，我们的思路是推导出 L 的稀疏近似逆。

B. 乔列斯基因子的稀疏近似逆

基于 L^{-1} 中大多数元素都非常小这一观察，我们提出一种计算 L^{-1} 稀疏近似的方法。设 $Z = L^{-1}$ 和 z_j 为 Z 的第 j 列。回顾一下， L 是 L_G 的乔列斯基因子，可以证明， L 中所有对角元素均为正，且 L 中所有非对角元素均为非正 [19]。

矩阵 Z 具有一些有用的结构性质，概述如下引理。这里，矩阵非负是指其中所有元素均非负。

引理 1. 假设 $Z = L^{-1}$，其中 L 是拉普拉斯矩阵的乔列斯基因子。那么， Z 非负，且 Z 的各列满足：

$$z_j = \frac{1}{L_{j,j}} e_j + \sum_{i>j \& L_{i,j} \neq 0} \frac{-L_{i,j}}{L_{j,j}} z_i , \quad (8)$$

证明. 将 L 左乘等式 (8) 两边即可得到该式。假设 z_i 非负。由于 $L_{i,\,j} \leq 0$ 且 $L_{j,\,j} > 0$，等式 (8) 表明 z_j 非负。因此，利用简单的数学归纳法即可证明 Z 非负。 □

等式 (8) 表明，我们可以先计算 L^{-1} 的第 n 列，然后依次计算第 (n-1)、(n-2)、 $\cdots$ 列以及第 1 列。假设我们有 z_i 的一些稀疏近似，记作 $\tilde{z}_i$。那么， z_j 可以近似计算为：

$$z_j \approx z_j^* = \frac{1}{L_{j,j}} e_j + \sum_{i>j \& L_{i,j} \neq 0} \frac{-L_{i,j}}{L_{j,j}} \tilde{z}_i . \quad (9)$$

由于 $\tilde{z}_i$ 是稀疏的，因此可以高效地计算 z_j^*。注意， z_j^* 中有许多元素非常小，可以将它们设为 0。这里我们采用一种剪枝策略，以控制 1-范数意义下的误差。注意，对于向量 x， x 的 1-范数记作 $\|x\|_1$，定义为各元素绝对值之和。令 $trunc_k(x)$ 表示将 x 中绝对值最小的 k 个元素设为 0 后得到的向量。我们的策略是找到最大的 k，并令 $\tilde{z}_j = trunc_k(z_j^*)$，使得：

$$\frac{\|\tilde{z}_j - z_j^*\|_1}{\|z_j^*\|_1} \leq \epsilon , \quad (10)$$

其中 ϵ 是用户定义阈值。可以先对 z_j^* 中的非零元素排序，再找出满足上述约束的最大 k。我们总结用于计算乔列斯基因子的稀疏近似逆的算法，如算法 2。

算法 2 乔列斯基因子的稀疏近似逆**输入：** L_S的乔列斯基因子： L，用户定义阈值 ϵ。**输出：** L^{-1}的稀疏近似： $\tilde{Z}$。

1: **对于**$j = n$ 至 1 **执行**
2: Compute $z_j^* = \frac{1}{L_{j,j}} e_j + \sum_{i>j \& L_{i,j} \neq 0} \frac{-L_{i,j}}{L_{j,j}} \tilde{z}_i$.
3: **if** $nnz(z_j^*) \leq \log n$ **then**
4: $\tilde{z}_j = z_j^*$.
5: Continue.
6: **end if**
7: Find the largest k such that $\frac{\|trunc_k(z_j^*) - z_j^*\|_1}{\|z_j^*\|_1} \leq \epsilon$. Set $\tilde{z}_j = trunc_k(z_j^*)$.
8: **end for**

现在，我们分析用 Z 近似 L^{-1}~所引起的误差。具体而言，下面给出一个定理，将近似误差 $\|z_p - \tilde{z}_p\|_1$ 与节点 p 在填充图中的深度联系起来。 G 的填充图是与矩阵 L [19] 对应的无向图。令 $G_L = (V, F)$ 表示填充图，其中 $F = \{(i, j) | i \neq j \ and \ L_{i,j} \neq 0\}$。节点 p 的深度记为 $depth(p)$，定义如下：

$$depth(p) = \begin{cases} 0, & L(p+1:n, p) = \mathbf{0} \\ 1 + \max\limits_{i>p \& L(i,p) \neq 0} depth(i), & \text{otherwise} . \end{cases} \quad (11)$$

~~**定理 1**。设 L 和 $Z = [\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, ..., \tilde{z}_n]$ 分别为算法 *2* 的输入和输出。 $Z = L^{-1} = [z_1, z_2, ..., z_n]$。 $depth(p)$ 定义为式 *(11)*。那么，对于任意节点 p：

$$\frac{\|z_p - \tilde{z}_p\|_1}{\|z_p\|_1} \leq depth(p) \times \epsilon . \quad (12)$$

证明。我们通过归纳法证明该定理。首先注意，对于节点 q，其 $L(q+1:n, q) = \mathbf{0}$ 或 $depth(q) = 0$，有：

$$z_q = z_q^* = \tilde{z}_q = \frac{1}{L_{q,q}} e_q , \quad (13)$$

因此 $\|z_q - \tilde{z}_q\|_1 = 0$，满足式 (12)。现在考虑节点$p$，其 $L(p+1:n, p) \neq \mathbf{0}$。假设对于节点 i，其 $i > p \ and \ L(i, p) \neq 0$，有 $\frac{\|z_i - \tilde{z}_i\|_1}{\|z_i\|_1} \leq depth(i) \times \epsilon$。

误差 $\|z_p - \tilde{z}_p\|_1$ 可以分为两部分：

$$\|z_p - \tilde{z}_p\|_1 = \|(z_p - z_p^*) + (z_p^* - \tilde{z}_p)\|_1 \leq \|z_p - z_p^*\|_1 + \|z_p^* - \tilde{z}_p\|_1 . \quad (14)$$

对于第二部分，算法 2 保证 $\|z_p^* - \tilde{z}_p\|_1 \leq \epsilon \times \|z_p^*\|_1$。回顾一下， z_p 是一个所有元素均非负的向量，而 z_p^*是 z_p的截断版本，很容易证明 $\|z_p^*\|_1 \leq \|z_p\|_1$，因此有：

$$\|z_p^* - \tilde{z}_p\|_1 \leq \epsilon \times \|z_p\|_1 . \quad (15)$$

现在考虑第一部分。回顾一下：

$$z_p^* = \frac{1}{L_{p,p}} e_p + \sum_{i>p \& L_{i,p} \neq 0} \frac{-L_{i,p}}{L_{p,p}} \tilde{z}_i . \quad (16)$$

这里 $L_{i,\ p}<0$, $L_{p,\ p}>0$ 和 $\sum_{i}\frac{-L_{i,\ p}}{L_{p}}{}_{,\ p}\leq 1$。在本证明的其余部分，我们用 $\sum_i$ 代替 $\sum_{i>p\&L_{i,\ p}\neq 0}$。于是

$$\|z_p-z_p^*\|_1=\|\sum_i\frac{-L_{i,p}}{L_{p,p}}(z_i-\tilde{z}_i)\|_1\leq\sum_i\frac{-L_{i,p}}{L_{p,p}}\|(z_i-\tilde{z}_i)\|_1. \tag{17}$$

根据归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}\|z_p-z_p^*\|_1&\leq\sum_i\frac{-L_{i,p}}{L_{p,p}}\|z_i\|_1\times depth(i)\times\epsilon\\&\leq\max_i depth(i)\times\epsilon\times\sum_i\frac{-L_{i,p}}{L_{p,p}}\|z_i\|_1\ .\end{aligned} \tag{18}$$

注意，对于非负向量 z_is，我们有

$$\sum_i\frac{-L_{i,p}}{L_{p,p}}\|z_i\|_1=\|\sum_i\frac{-L_{i,p}}{L_{p,p}}z_i\|_1\leq\|z_p\|_1\ . \tag{19}$$

将 (19) 代入 (18)，得到

$$\|z_p-z_p^*\|_1\leq\max_i depth(i)\times\epsilon\times\|z_p\|_1\ . \tag{20}$$

So

$$\frac{\|z_p-\tilde{z}_p\|_1}{\|z_p\|_1}\leq(\max_i depth(i)+1)\times\epsilon=depth(p)\times\epsilon\ . \tag{21}$$

根据数学归纳法，式 (12) 对所有节点都成立。证明至此完成。□

请注意，对于大多数源自现实世界的图，填充图中的最大节点深度并不太大，下一节将对此进行说明。通过设置一个足够小的 ϵ，$\tilde{Z}$ 可以很好地近似 L^{-1}。

C. 整体算法与讨论

基于近似逆技术，有效电阻 $R_G(p,\ q)$ 可计算为：

$$R_G(p,q)=\|L^{-1}e_p-L^{-1}e_q\|_2^2\approx\|\tilde{z}_p-\tilde{z}_q\|_2^2\ . \tag{22}$$

现在我们分析有效电阻的误差。设 $z_{p,\ q}=z_p-z_q$、$\tilde{z}_{p,\ q}=\tilde{z}_p-\tilde{z}_q$、$\Delta z_p=\tilde{z}_p-z_p$、$\Delta z_q=\tilde{z}_q-z_q$ 和 $\Delta z_{p,\ q}=\tilde{z}_{p,\ q}-z_{p,\ q}$。式（12）表明：

$$\begin{aligned}\|\Delta z_{p,q}\|_1&\leq\|\Delta z_p\|_1+\|\Delta z_q\|_1\\&\leq(\|z_p\|_1 depth(p)+\|z_q\|_1 depth(q))\epsilon\end{aligned} \tag{23}$$

我们可以假设 $\|\Delta z_{p,\ q}\|_1$ 很小，且 $\Delta z_{p,\ q}$ 接近**0**。那么忽略二阶项后，有：

$$\|\tilde{z}_{p,q}\|_2^2=\|z_{p,q}+\Delta z_{p,q}\|_2^2\approx\|z_{p,q}\|_2^2+2z_{p,q}^T\Delta z_{p,q}\ . \tag{24}$$

设 $\tilde{R}_{p,\ q}=\|\tilde{z}_{p,\ q}\|_2^2$ 表示近似有效电阻，则可得：

$$\begin{aligned}|\frac{\tilde{R}_{p,q}}{R_{p,q}}-1|\approx|\frac{2z_{p,q}^T\Delta z_{p,q}}{\|z_{p,q}\|_2^2}|&\leq\frac{2\|z_{p,q}\|_1\|\Delta z_{p,q}\|_1}{\|z_{p,q}\|_2^2}\\&\leq\frac{2\|z_{p,q}\|_1(\|z_p\|_1 depth(p)+\|z_q\|_1 depth(q))}{\|z_{p,q}\|_2^2}\epsilon\ .\end{aligned} \tag{25}$$

如果我们记为 $\alpha_{p,\ q}=\frac{2\|z_{p,\ q}\|_1(\|z_p\|_1 depth(p)+\|z_q\|_1 depth(q))\|z_{p,\ q}\|_2^2}{}$，则

$$1-\alpha_{p,q}\epsilon\leq\frac{\tilde{R}_{p,q}}{R_{p,q}}\leq 1+\alpha_{p,q}\epsilon\ . \tag{26}$$

这意味着，有效电阻的相对误差与参数 ϵ 呈线性关系。ϵ 越小，$R_{p,\ q}$ 就越接近 $R_{p,\ q}$。

使用式（22）计算有效电阻需要对 L_G 进行乔列斯基分解。然而，对于大规模图，尤其是源自社交网络的图，对 L_G 进行乔列斯基分解的代价可能非常高。在本文中，我们提出使用不完全 Cholesky 分解来替代。在不完全 Cholesky 分解中，会舍弃一些绝对值非常小的填充项，这相当于将一些具有较大电阻的支路断开，并且不会对有效电阻引入较大误差。下面总结计算有效电阻的总体算法。

算法3 基于乔列斯基因子的稀疏近似逆计算有效电阻

输入： 加权无向图：G，一组有效电阻查询 Q_r。

输出： Q_r中每个查询对应的有效电阻。

1: 对 L_G 执行不完全乔列斯基分解，得到：$L_G\approx LL^T$。
2: 使用算法2计算稀疏近似逆 $\tilde{Z}\approx L^{-1}$ 对于 L:.
3: **对于**每个查询 $(p,\ q)$，在 Q_r **中执行**
4: 计算有效电阻：$R_G(p,\ q)\approx\|\tilde{z}_{p}-\tilde{z}_q\|_2^2$。
5: **结束循环**

所提出算法的时间复杂度与 Z 中非零元的数量密切相关。在我们的实验中，Z 中的非零元数量约为 $Cnlogn$，其中 C 是一个较小的常数（例如 $C<20$）。这一现象背后的原因可能是 L^{-1} [20]的衰减性质。这里我们仅假设 Z 每列中的平均非零元数为 $O(logn)$。不完全 Cholesky 分解需要 $O(n)$ 时间，且 L 中的非零元数量为 $O(n)$。算法2的每次迭代需要 $O(\frac{nnz(L)}{n}logn+logn\cdot loglogn)=O(\overline{logn\cdot loglogn})$ 时间，算法2的时间复杂度为 $O(nlogn\cdot loglogn)$。因此，算法3的总体时间复杂度为 $O(nlogn\cdot loglogn)+O(|Q_r|logn)$。

IV. 数值结果

我们首先将所提出的有效电阻计算算法（算法3）与[1]中提出的算法进行比较。由于 [1] 的作者分享的代码是用 MATLAB 编写的，我们也用 MATLAB 实现了算法3。随后，我们实现基于图稀疏化的电网降阶算法（算法1），并比较以下情形：准确计算有效电阻、使用基于随机投影的方法 [1] 进行近似计算，以及使用所提出的算法3进行计算。最后，我们利用所得的快速电网降阶算法解决直流增量分析和暂态分析问题。这些程序使用 C++ 编写。所有实验均在一台计算机上使用单个中央处理器核心进行，该计算机配备 Intel Xeon E5-2630 CPU @2.40 GHz 和 256 GB 随机存取存储器。

A. 有效电阻计算结果

在本小节中，我们将所提出的算法（算法 3）与基于随机投影的方法 [1], 进行比较，该方法的

结果是通过运行在 [21]上共享的代码获得的。我们不比较 [2], [3] 中的算法，因为这些算法只能处理无权图。结果列于表 I 中。测试案例涵盖了种类繁多的图，这些图来自社交网络、有限元分析和电路仿真问题 [22]–[24]。对于每个案例，都会计算所有边的有效电阻，即有效电阻查询集合 $Q_r = E$。T 表示计算有效电阻的运行时间

表 I 在大型图上计算有效电阻的结果。

Case	$\|V\|(\|E\|)$	dpt	WWW15 [1]				Alg. 3			
			$T(s)$	E_a	E_m	$\frac{nnz(Q)}{nlogn}$	$T(s)$	E_a	E_m	$\frac{nnz(Z)}{nlogn}$
com-DBLP	3.2E5(1.0E6)	464	517	2.6E-2	1.4E-1	108	4.14	7.1E-5	1.9E-3	5.40
com-Amaz	3.3E5（9.3E5）	590	719	2.2E-2	1.4E-1	149	4.71	8.0E-5	3.9E-3	7.47
com-Yout	1.1E6(3.0E6)	1370	926	3.5E-2	2.1E-1	32.6	21.0	1.5E-4	2.1E-2	1.63
coAuDBLP	3.0E5(1.0E6)	1040	513	2.5E-2	1.1E-1	108	3.87	7.1E-5	4.0E-3	5.43
coAuCite	2.3E5(8.1E5)	774	414	2.4E-2	1.0E-1	129	2.32	5.6E-5	7.9E-3	6.45
fe_tooth	7.8E4(4.5E5)	1892	322	1.8E-2	7.4E-2	304	1.73	8.6E-4	1.1E-2	15.2
fe_rotor	1.0E5(7.6E5)	2448	488	1.7E-2	7.0E-2	344	2.84	8.3E-4	2.1E-2	17.2
NACA0015	1.0E6(3.1E6)	543	2447	2.2E-2	7.5E-2	163	12.1	1.0E-3	3.6E-3	8.17
ibmpg5	1.1E6(1.6E6)	513	691	2.2E-2	1.2E-1	123	3.16	1.7E-3	2.7E-2	6.17
ibmpg6	1.7E6（2.5E6）	602	934	2.3E-2	1.2E-1	109	4.64	1.8E-3	2.2E-2	5.44
thupg1	5.0E6(8.2E6)	1097	7158	1.8E-2	8.1E-2	122	36.6	1.7E-3	1.4E-2	6.10
G2电路	1.5E5(2.9E5)	720	214	2.0E-2	1.2E-1	166	1.15	1.3E-3	4.4E-2	8.30
G3_电路	1.6E6(3.1E6)	1237	2388	2.0E-2	9.8E-2	140	13.3	3.1E-3	4.0E-2	7.02
thupg10	6.0E7(1.0E8)	3725	-	-	-	-	481	1.7E-3	1.7E-2	1.24

电阻。 E_a 和 E_m 分别表示平均相对误差和最大相对误差，这些误差通过随机选取1000条边，计算这些边的精确有效电阻，然后计算误差来估计。对于算法3， T 包括不完全 Cholesky 分解、计算近似逆和计算有效电阻所需的时间。不完全 Cholesky 分解中的丢弃容限设为1E-3，算法2中的参数 ϵ 也设为1E-3。我们还记录了填充图的最大深度（定义见上一节，记为 dpt），以及随机投影矩阵 Q 和近似逆矩阵$\tilde{}$的非零元数 Z，二者均除以 $nlogn$。“-”表示耗时超过10小时。

从结果可以看出，所提出的算法3相比基于随机投影的方法 [1]平均提速**168X**。尽管随机投影矩阵 Q 中的非零元数量远大于近似$\tilde{}$逆矩阵 Z中的非零元数量，但所提出的算法使平均相对误差降低了一个到两个数量级，同时也显著降低了最大相对误差。对于名为“thupg10”的最大案例，其包含 6.0E7 个节点和 1.0E8 条边，可在仅 481 秒内计算多达 1.0E8 个节点对的有效电阻，平均相对误差约为 0.17%，这表明所提出的算法具有极强的可扩展性。

B. 基于图稀疏化的电网降阶结果

将所提出的有效电阻计算算法（算法3）与基于图稀疏化的电网降阶框架（算法1）相结合，我们得到了一种快速的电网约化算法。测试案例取自广为人知的 IBM 电网基准测试集 [23]。对于图划分，我们使用广泛采用的图划分器 METIS [25]，并将块数设置为$\#_{50}^{ports}$ 。对于暂态分析，每个案例均采用固定步长进行 1000 个时间步的仿真，并对原始模型和降阶模型使用直接求解器 CHOLMOD [26] 进行分析（仅执行一次矩阵分解）。对于直流增量分析，每个基准测试集的 10% 块会被修改，以模拟这样一种设计过程：修改初始电网以修复违规项。我们比较了三种电网降阶方法，它们的唯一区别在于有效电阻的计算方式。第一种方法精确计算有效电阻，而另外两种方法则采用近似方式计算有效电阻，分别使用基于随机投影的方法 [1] 和所提出的方法（算法3）。

结果列于表 II。 $|V|$ 和 $|E|$ 分别表示节点数和电阻器数。 T_{red} 表示电网降阶所需时间。请注意，在直流增量分析中，只需对修改过的模块进行降阶，因此增量分析中的 T_{red} 约为暂态分析中的 10%。 T_{tr} 和 T_{inc} 分别表示暂态分析和直流增量分析所需时间。Err 为平均绝对误差，Rel 为相对误差，计算方式为 Err 除以最大电压降。

从结果可以看出，采用所提出的有效电阻计算算法（算法3），电网降阶所需时间大幅缩短；与基于精确有效电阻的电网降阶方法相比，平均加速比达到 6.4 倍。在降阶精度方面，降阶误差几乎没有增加。这验证了所提出的电网降阶方法的效率和有效性。另一方面，采用基于随机投影的方法仍需花费大量时间生成降阶模型。同时，降阶精度也有所下降，这是由有效电阻误差较大所致。

对于暂态分析的总耗时（包括电网降阶的时间和分析降阶后电网的时间），所提出的方法相比基于精确有效电阻的电网降阶方法，平均加速比达到 1.7 倍。与分析原始电网相比，所提出的方法平均加速 2.9 倍，且所有案例的相对误差均低于 1.51%。图 1 绘出了“ibmpg3t”案例中节点 n0 20706300 8937900 和节点 n1 29561400 9521100 的瞬态波形。这些结果验证了采用所提出的快速电网降阶方法进行暂态仿真的准确性。

在直流增量分析的应用中，所提出的方法在增量电网降阶阶段实现了显著提升，因此，相较于基于精确有效电阻的电网降阶方法，总耗时平均加速了 2.5 倍。与使用 CHOLMOD 直接分析修改后的电网（表 II 中的“原始”）相比，所提出的方法平均加速了 4.2 倍，且所有案例的相对误差均低于 1.34%。

V. 结论

本文提出了一种高效算法，用于计算大规模加权图上的有效电阻。该算法基于乔列斯基因子的稀疏近似逆技术，平均可实现 168 倍加速，并且

表 II
基于图稀疏化的结果 用于暂态分析（上）和直流增量分析（下）的电网降阶 .

Case	原始		采用准确效率结果					采用近似效率结果（ [1]）					使用近似效率结果（算法3）				
	$\|V\|(\|E\|)$	T_{tr}	$\|V\|(\|E\|)$	T_{red}	T_{tr}	误差(mV)	相对误差(%)	$\|V\|(\|E\|)$	T_{red}	T_{tr}	误差(mV)	相对误差(%)	$\|V\|(\|E\|)$	T_{red}	T_{tr}	误差(mV)	相对误差(%)
ibmpg2t	1.3E5(2.08E5)	13.3	5.1E4(1.49E5)	6.55	4.33	0.801	1.52	5.1E4(1.47E5)	3.51	4.23	2.300	4.28	5.1E4(1.49E5)	0.951	4.20	0.796	1.51
ibmpg3t	8.5E5(1.40E6)	201	3.0E5(8.59E5)	67.2	35.1	0.153	0.78	3.0E4(8.54E5)	29.4	34.7	0.253	1.29	3.0E4(8.59E5)	7.70	35.8	0.162	0.83
ibmpg4t	9.5E5(1.55E6)	310	4.0E5(1.35E6)	81.9	132	0.006	0.93	4.0E5(1.35E6)	36.3	133	0.034	4.85	4.0E5(1.35E6)	10.6	129	0.006	0.93
ibmpg5t	1.1E6(1.62E6)	141	5.1E5(1.04E6)	24.1	48.0	0.124	0.87	5.1E5(1.03E6)	21.5	47.4	0.137	0.96	5.1E5(1.04E6)	5.59	48.8	0.125	0.87
ibmpg6t	1.7E6(2.48E6)	179	7.7E5(1.64E6)	39.4	67.7	0.173	1.02	7.7E5(1.66E5)	33.5	67.0	0.334	1.97	7.7E5(1.64E6)	8.76	67.5	0.173	1.02

Case	原始		使用准确效率结果					使用近似效率结果（ [1]）					使用近似效率结果（算法3）				
	$\|V\|(\|E\|)$	T_{inc}	$\|V\|(\|E\|)$	T_{red}	T_{inc}	误差(mV)	相对误差(%)	$\|V\|(\|E\|)$	T_{red}	T_{inc}	误差(mV)	相对误差(%)	$\|V\|(\|E\|)$	T_{red}	T_{inc}	误差(mV)	相对误差(%)
ibmpg2	1.3E5(2.08E5)	0.627	5.1E4(1.49E5)	0.784	0.159	6.052	1.21	5.1E4(1.47E5)	0.381	0.149	14.10	2.81	5.1E4(1.49E5)	0.115	0.158	6.020	1.20
ibmpg3	8.5E5(1.40E6)	20.4	3.0E5(8.59E5)	6.73	1.54	1.612	0.66	3.0E4(8.54E5)	2.66	1.46	3.004	1.22	3.0E4(8.59E5)	0.769	1.57	1.734	0.71
ibmpg4	9.5E5(1.55E6)	36.3	4.0E5(1.35E6)	8.85	11.7	0.093	0.76	4.0E5(1.35E6)	3.94	11.5	1.159	9.45	4.0E5(1.35E6)	1.04	11.6	0.089	0.73
ibmpg5	1.1E6(1.62E6)	10.5	5.1E5(1.04E6)	2.32	1.78	0.929	1.34	5.1E5(1.03E6)	2.11	1.74	5.257	7.59	5.1E5(1.04E6)	0.538	1.81	0.929	1.34
ibmpg6	1.7E6(2.48E6)	8.68	7.7E5(1.64E6)	3.98	2.42	1.503	0.73	7.7E5(1.66E5)	3.53	2.45	3.181	1.54	7.7E5(1.64E6)	0.888	2.41	1.512	0.73

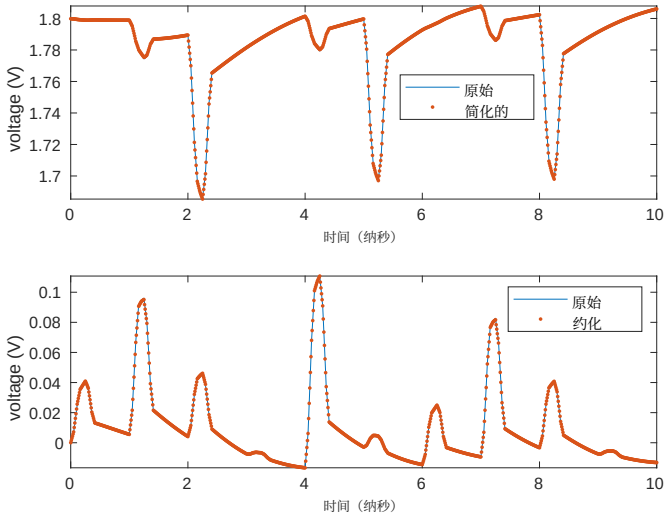


图 1。“ibmpg3t”案例中一个 VDD 节点（上）和一个 GND节点（下）的瞬态仿真结果，通过分析原始电网和简化电网获得。

与基于随机投影的方法相比，误差也显著降低。将所提出的算法与基于图稀疏化的电网降阶框架相结合，我们得到了一种快速电网降阶方法，平均加速 6.4 倍，同时降阶精度几乎不变。在电网瞬态分析和增量分析等下游应用中，与采用基于精确有效电阻的降阶方法相比，所提出的快速电网降阶方法使整体运行时间分别加速 1.7 倍和 2.5 倍。鉴于有效电阻的广泛应用，我们希望这项工作能够推动未来更多领域的发展。

参考文献

[1] C. Mavroforakis、R. Garcia-Lebron、I. Koutis 和 E. Terzi，《生成边中心性：大规模计算与应用》，载于*WWW*论文集，2015年，第732–742页。[2] T. Hayashi、T. Akiba 和 Y. Yoshida，《生成树中心性的高效算法》，载于*IJCAI*论文集，2016年，第3733–3739页。[3] P. Peng、D. Lopatta、Y. Yoshida 和 G. Goranci，《用于估算有效电阻的局部算法》，载于*SIGKDD*论文集，2021年，第1329–1338页。[4] D. A. Spielman 和 N. Srivastava，《基于有效电阻的图稀疏化》，《SIAM计算杂志》，第40卷，1926，2011 6，第1913页起。

[5] I. Koutis、G. L. Miller 和 R. Peng，《求解SDD线性系统的逼近最优方法》，载于ACM FOCS论文集，2010年，第235–244页。[6] Z. Liu、W. Yu 和 Z. Feng，《feGRASS：面向可扩展电网分析的快速高效图谱稀疏化》，《IEEE计算机辅助设计汇刊》，第41卷，第3期，第681–694页，2022年。[7] Z. Liu 和 W. Yu，《通过近似迹约简获得更有效的图谱稀疏化器》，载于DAC论文集，2022年，第613–618页。[8] X. Zhao、Z. Feng 和 C. Zhuo，《一种高效的谱图稀疏化方法，用于大规模倒装芯片电网的可扩展降阶》，载于ICCAD论文集，2014年，第218–223页。[9] C. Antoniadis、N. Evmorfopoulos 和 G. Stamoulis，《一种用于RLC电路降阶建模中稠密矩阵稀疏化的严谨方法》，载于DAC论文集，2019年。[10] R. Bairamkulov 和 E. G. Friedman，《基于无穷镜像技术的有限二维网格有效电阻》，《IEEE电路与系统汇刊I》，第67卷，第9期，第3224–3233页，2020年。[11] P. Feldmann 和 F. Liu，《具有大量端子的线性子电路的稀疏高效降阶建模》，载于ICCAD论文集，2004年，第88–92页。[12] P. Li 和 W. Shi，《通过频率相关端口打包对具有海量端口的线性网络进行模型阶数约简》，载于DAC论文集，2006年，第267–272页。[13] B. Sheehan，《TICER：寄生提取RC电路的可实现降阶》，载于ICCAD论文集，1999年，第200–203页。[14] Z. Ye、D. Vasilyev、Z. Zhu 和 J. R. Phillips，《用于一般多端网络降阶的稀疏隐式投影（SIP）》，载于ICCAD论文集，2008年，第736–743页。[15] H. Su、E. Acar 和 S. R. Nassif，《基于代数多重网格原理的电网降阶》，载于DAC论文集，2003年，第109–112页。[16] Y. Su、F. Yang 和 X. Zeng，《AMOR：一种高效的、基于聚合的多端互连电路模型阶数约简方法》，载于DAC论文集，2012年，第295–300页。[17] A. Chandra、P. Raghavan、W. Ruzzo、R. Smolensky 和 P. Tiwari，《图的电阻刻画了其往返时间与覆盖时间》，《计算复杂性》，第6卷，第312–340页，1996年。[18] I. Koutis、G. L. Miller 和 D. Tolliver，《用于计算机视觉与图像处理问题的组合预条件子和多层求解器》，《计算机视觉与图像理解》，第115卷，第12期，第1638–1646页，2011年。[19] T. A. Davis，《稀疏线性系统直接方法》。SIAM出版社，2006年。[20] S. Demko、W. F. Moss 和 P. W. Smith，《带状矩阵逆矩阵的衰减率》，《计算数学》，第43卷，第491–491页，1984年。[21] I. Koutis，《快速有效电阻》，2022年。 [在线]。网址：https://web.njit.edu/~ikoutis/software.htm [22] J. Yang 和 Z. Li，《清华大学电源网格基准测试集》，2012年。 [在线]。网址：http://tiger.cs.tsinghua.edu.cn/PGBench/ [23] S. R. Nassif，《IBM 电网基准测试集》，2008年。 [在线]。网址：https://web.ece.ucsb.edu/~lip/PGBenchmarks/ibmpgbench.html [24] T. A. Davis 和 Y. Hu，《佛罗里达大学稀疏矩阵集合》，《ACM数学软件汇刊》，第38卷，第1期，2011年12月。[25] G. Karypis 和 V. Kumar，《一种用于划分不规则图的快速高质量多层方案》，《SIAM科学计算杂志》，第20卷，第1期，第359–392页，1998年。[26] Y. Chen、T. A. Davis、W. W. Hager 和 S. Rajamanickam，《算法887：CHOLMOD，超节点稀疏乔列斯基分解与

更新/降阶”，*ACM*数学软件汇刊，第35卷第3期，第22页，2008年。