arXiv:2303.03623v1 [math.DG] 7 Mar 2023

欧几里得、双曲和洛伦兹三维空间中的多项式 Weingarten 管状曲面

A.P.Barreto 和 F.Gasparotto 圣卡
洛斯联邦大学

2023年3月8日

摘要

本文完整分类了欧几里得、洛伦兹和双曲三维空间中高斯曲率与平均曲率 K 和 H 满足多项式关系的正则管状曲面。更确切地说，我们确定了集合 $\mathcal{S}(Q)$，其中包含曲率满足给定多项式关系 $Q(K,H)=0$的所有正则管状曲面；还确定了集合 $\mathcal{Q}(S)$，其中包含给定管状曲面的曲率所满足的所有多项式关系 S。

1 引言

经典微分几何中的一个重要研究问题，是寻找浸入曲面的整体几何／拓扑性质与其曲率假设之间的关系。在这一研究方向上，多年来备受关注的一个主题是魏因加滕曲面，即在三维空间中，高斯曲率K 与平均曲率 H （或其主曲率 $k_1 \leq k_2$）满足非平凡光滑关系的二维曲面

$$\Phi(K,H)\equiv 0 \qquad (\text{or } \Phi(k_1,k_2)\equiv 0).$$

当 Φ 是 $\mathbb{R}[x,y]$的多项式时，这类曲面称为多项式魏因加滕曲面。值得注意的是，多项式魏因加滕曲面这一类包含一些重要且研究充分的曲面族，例如极小曲面（$H\equiv 0$）、常平均曲率曲面（$H\equiv c\neq 0$）、常高斯曲率曲面（$K\equiv c$）、线性 Weingarten 曲面（$aK+bH\equiv c$），以及第二基本形式长度恒定的曲面（$4H^2-2K\equiv c>0$）。

尽管这是一个古老的课题，关于魏因加滕曲面仍有许多有待发现之处。给定一个三维空间，该领域的研究者关注以下（一些）问题：

i.（$\mathcal{S}(Q)$问题）给定一个光滑关系 $\Phi(x,y)$，描述所有其曲率满足 $\Phi(K,H)\equiv 0$ 的正则曲面所构成的集合 $\mathcal{S}(Q)$。ii.（$\mathcal{Q}(S)$问题）给定一个正则曲面 S，描述所有满足 $\Phi(K,H)\equiv 0$ 的光滑关系$\Phi(x,y)$所构成的集合 $\mathcal{Q}(S)$。iii.（线性问题）判断给定的正则曲面 S 是否为线性温加滕曲面，也就是说，是否存在一个非平凡线性关系 $\Phi(x,y)=ax+by+c$ in $\mathcal{Q}(S)$。

iv.（真正非线性问题）判断给定正则曲面 S的曲率是否满足一个真正非平凡的线性关系，也就是说， $\mathcal{Q}(S)$ 中是否存在一个光滑关系，该关系不能被 $\mathcal{Q}(S)$ 中另一个非常数关系整除。

v.（第二基本形式问题）确定所有第二基本形式具有恒定长度的正则曲面的集合。特别是，确定在欧几里得三维空间中，除球面和直圆柱面之外，是否还存在此类正则曲面。

由于问题 (i) 和 (ii) 复杂，相关研究成果非常少。一般而言，文献中的结果只是在经典环境下，对某一特定曲面族进行分类，并验证一种特定的（通常为线性）关系。例如，在 [BFH] 中，第一作者及其合作者对欧几里得空间中第二基本形式具有恒定长度的旋转曲面进行了分类（此类其他研究成果参见，例如， [HW], [KS], [KT], [L2], [L3],[RE], [V]）。然而，在 [K], [DK] 和 [DGW1], 中，作者成功处理了欧几里得和洛伦兹三维空间中的直纹曲面与平移型温加滕曲面的 $\mathcal{S}(Q)$ 问题。遗憾的是，他们的方法无法有效处理 $\mathcal{Q}(S)$ 问题。

本文采用了一种替代性的代数方法，使我们能够处理上述关于正则管状曲面的五个问题（定义见第3节）。更准确地说，我们完整分类了欧几里得、双曲和洛伦兹三维空间中高斯曲率与平均曲率满足任意多项式关系的正则管状曲面（关于管状曲面的相关研究成果示例见 [ASK],[KT], [KzT], [KYT], [L1], [S], ）。在欧几里得三维空间中，我们的结果如下：

定理1（欧几里得 $\mathcal{S}(Q)$ 问题）给定一个多项式 $Q(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$，记$\mathcal{S}_E(Q)$为欧几里得三维空间中所有满足 $Q(K,H) \equiv 0$ 的正则管状曲面所组成的集合。那么， $\mathcal{S}_E(Q)$ 的元素为：

i. 半径属于集合的直圆柱面（称为 Q 的欧几里得半径）

$$Rad_E(Q) = \left\{ r \in (0,+\infty) \ ; \ Q\left(0, \tfrac{1}{2r}\right) = 0 \right\};$$

ii. 半径属于集合的正则管状曲面（称为 Q 的欧几里得星半径）

$$Rad_E^*(Q) = \left\{ r \in Rad_E(Q) \ ; Q(x,y) \in \left\langle xr^2 - 2ry + 1 \right\rangle \right\}.$$

推论2（欧几里得）设 $Q(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ 是一个多项式。当且仅当 $Rad_E(Q) \neq \emptyset$ 时，欧几里得三维空间中存在满足 $Q(K,H) \equiv 0$ 的正则管状曲面。此外，所有此类曲面的半径属于 $Rad_E(Q)$。

不同于 Kh¨unel 和 Dillen 在上述文章中提出的技术，我们的代数方法能够确定 $\mathbb{R}[x,y]$ 中所有使给定正则管状曲面的高斯曲率和平均曲率为零的多项式所构成的集合。

定理3（欧几里得 $\mathcal{Q}(S)$ 问题）给定欧几里得三维空间中的一个半径为 $r > 0$ 的正则管状曲面 S，记 $\mathcal{Q}_E(S)$ 为满足$Q(K,H) \equiv 0$的所有多项式 $Q \in \mathbb{R}[x,y]$ 所组成的集合。

i. If S is a right cylinder, then $\mathcal{Q}_E(S) = \{Q_2 \in \mathbb{R}[x,y] \ ; r \in Rad_E(Q)\}$;

ii. 如果 S 不是直圆柱面，则 $\mathcal{Q}_E(S)$ 是由多项式$xr^2-2ry+1$生成的 $\mathbb{R}[x,y]$ 中的理想。

推论 4（欧氏线性问题）欧几里得三维空间中的每个正则管状曲面都是线性温加滕曲面。更确切地说，它们的曲率满足

$$Kr^2-2rH+1=0,$$

其中 $r>0$ 是它们的半径。

推论 5（欧氏非线性问题）直圆柱面是欧几里得三维空间中唯一其高斯曲率和平均曲率满足非线性多项式关系的管状曲面。更确切地说，若 S 是一个非直圆柱面的正则管状曲面，且Q 是关于 $\mathcal{Q}(S)$ 的多项式，那么 Q 在 $\mathcal{Q}(S)$ 中有一个非平凡因子。

许多具体结果都可以作为主要定理的推论得到。这里我们重点介绍满足线性关系的正则管状曲面的分类，以及第二基本形式具有恒定长度的管状曲面的分类。更多细节及其他结果，请读者参见第 5 节。

推论 6（欧氏）给定实数 a、b、c，使得 $(a,b)\neq(0,0)$，考虑多项式

$$Q(x,y)=ax+by-c\in\mathbb{R}[x,y].$$

于是，$\mathcal{S}_E(Q)\neq\emptyset$ 当且仅当 b、$c=0$ 或 $bc>0$。更准确地说，对于 $\Delta=b^2+4ac$，我们有 $e:$

i. 如果 b、$c=0$，那么 $\mathcal{S}_E(Q)$ 是任意半径的所有直圆柱面的集合；

ii. 如果 $bc>0$ 且 $\Delta=0$，那么 $\mathcal{S}_E(Q)$ 是半径为 $\frac{b}{2c}$ 的所有管状曲面的集合；

iii. 如果 $bc>0$ 且 $\Delta\neq0$，那么 $\mathcal{S}_E(Q)$ 是半径为 $\frac{b}{2c}$ 的所有直圆柱面的集合。

推论 7（欧几里得）直圆柱面是欧几里得三维空间中第二基本形式具有恒定长度的唯一非退化正则管状曲面。更准确地说，在洛伦兹三维空间中满足 $|\mathcal{A}|=c>0$ 的唯一非退化正则管状曲面是半径为 $\frac{1}{c}$ 的直圆柱面

本文的组织如下：第2节回顾洛伦兹空间和双曲空间的基本概念。第3节给出管状曲面的定义，讨论其参数化的正则性，并以计算其曲率作为结束。第4节是技术性章节，专门介绍本文所使用的所有多项式结果。最后，在第5节中，我们给出主要定理及其一些应用。

2 洛伦兹空间与双曲空间中的曲线与曲面

洛伦兹 n-空间（$n\geq2$），本文记作 $\mathbb{L}^n$，是通过在 $\mathbb{R}^n$ 上赋予指标为 1 的双线性形式而得到的半黎曼流形，其形式为

$$\langle u,v\rangle_1=\sum_{i=1}^{n-1}u_iv_i-u_nv_n,$$

对任意 $u=(u_1,\dots,u_n)$ 和 $v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$。当度量允许具有指标 **1** 时，会出现一种称为因果性的向量类三分法。$u\in\mathbb{L}^n$ 的因果性称为

i. 类空，当 $\langle u,u\rangle_1>0$ 或 $u=0$时；

ii. 类时，当 $\langle u,u\rangle_1<0$时；

iii. 类光，当 $u\neq 0$ 且 $\langle u,u\rangle_1=0$时。

若浸入 $i\colon M\longrightarrow\mathbb{L}^n$ 的所有法向量均为类时（分别地，类空或类光），则称该浸入具有类空（分别地，类时或类光）因果性。最后，当浸入$i:M\longrightarrow\mathbb{L}^n$ 为类空浸入或类时浸入时，称其为非退化浸入。

通常，向量 $u\in\mathbb{L}^n$ 的范数定义为$\|u\|_1=\sqrt{|\langle u,u\rangle_1|}$。洛伦兹叉积是由下式确定的算子

$$u_1\times_1\ldots\times_1 u_{n-1}=\det\begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_{n-1} & -e_n\\ u_1^1 & \cdots & u_1^{n-1} & u_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ u_{n-1}^1 & \cdots & u_{n-1}^{n-1} & u_{n-1}^n\end{pmatrix},$$

其中 $e_1,\dots,e_n$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的标准基，而 $u_i=\left(u_i^1,\dots,u_i^n\right)$ 是$\mathbb{L}^n$中的任意向量，对于每个 $i=1,\dots,n-1$。

非退化光滑曲线 $\gamma:(a,b)\to\mathbb{L}^3$ 若是按弧长 \($\|\gamma'\|_1\equiv 1$)参数化的双正则（$\|\gamma''\|_1\neq 0$）曲线，则称为弗雷内曲线。在此情况下，我们可以将 γ 的切向量、主法向量和副法向量定义为

$$T=\gamma',\qquad N=\frac{\gamma''}{\|\gamma''\|_1}\qquad\text{and}\qquad B=T\times_1 N.$$

弗雷内曲线的曲率和挠率 γ 定义为

$$\kappa=\|\gamma''\|_1\qquad\text{and}\qquad\tau=\langle N',B\rangle_1$$

γ 的洛伦兹弗雷内公式可用矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix} T'\\ N'\\ B'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0\\ -\varepsilon_T\varepsilon_N\kappa & 0 & \tau\\ 0 & \varepsilon_T\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T\\ N\\ B\end{pmatrix},\tag{1}$$

其中 $\varepsilon_T=\langle T、\ T\rangle_1$ 以及 $\varepsilon_N=\langle N、\ N\rangle_1$。注意，洛伦兹弗雷内公式是众所周知的欧几里得弗雷内公式的自然推广（因为在欧几里得三维空间中，$\varepsilon_T、\ \varepsilon_N\equiv 1$）。

最后，注意，当 $\varepsilon_T\equiv 1$ （分别为$\varepsilon_T\equiv -1$）时，弗雷内曲线 γ 是类空的（分别为类时的）。相应地，当 $\varepsilon_N\equiv 1$ （分别为 $\varepsilon_N\equiv -1$）时，我们可以将 γ 的法向因果性定义为类空的（分别为类时的）。出于技术原因，定义 $\varepsilon_B=\langle B、\ B\rangle_1=-\varepsilon_T\varepsilon_N$也很方便。

双曲三维空间是由以下集合构成的

$$\mathbb{H}^3=\left\{x=(x_1,\dots,x_4)\in\mathbb{L}^4\ ;\ \langle x,x\rangle_1=-1\text{ where }x_4>0\right\}$$

它带有由典范嵌入 $\mathbb{L}^4$ 诱导的度量。注意， $\mathbb{H}^3$ 是一个黎曼流形，因为 $\mathbb{H}^3$ 的所有切向量都是类空向量。

与洛伦兹情形一样，若光滑曲线 $\gamma:(a,b)\to\mathbb{H}^3$ 以弧长 $(\|\gamma'\|_1\equiv 1)$ 为参数且满足 $\|\gamma''-\gamma\|_1\neq 0$, 则称其为弗雷内曲线。在这种情况下，我们也可以定义 γ 的切向量、主法向量和副法向量为

$$T=\gamma'\,,\qquad N=\frac{\gamma''-\gamma}{\|\gamma''-\gamma\|_1}\qquad\text{and}\qquad B=\gamma\times_1 T\times_1 N.$$

弗雷内曲线 γ 的曲率和挠率定义为

$$\kappa=\|\gamma''-\gamma\|_1\qquad\text{and}\qquad\tau=\langle N',B\rangle_1$$

γ 的双曲弗雷内公式可用矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix}\gamma'\\T'\\N'\\B'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&\kappa&0\\0&-\kappa&0&\tau\\0&0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\\T\\N\\B\end{pmatrix}\tag{2}$$

给定洛伦兹三维空间中的非退化正则曲面 S （分别地，双曲三维空间中的正则曲面），其局部由浸入 $\psi(s,t)$ 参数化，我们将 S 的典范法向量场（与 ψ相关联）定义为

$$\mathcal{N}=\frac{\psi_s\times_1\psi_t}{\|\psi_s\times_1\psi_t\|_1}\qquad\left(\text{resp. }\mathcal{N}=\frac{\psi\times_1\psi_s\times_1\psi_t}{\|\psi\times_1\psi_s\times_1\psi_t\|_1}\right).$$

S 的高斯曲率和平均曲率为

$$K=\varepsilon\frac{eg-f^2}{EG-F^2}\qquad\text{and}\qquad H=\varepsilon\frac{eG-2fF+gE}{2\left(EG-F^2\right)}$$

其中

$$\begin{aligned}E&=\langle\psi_s,\psi_s\rangle_1\,,\qquad F=\langle\psi_s,\psi_t\rangle_1\,,\qquad G=\langle\psi_t,\psi_t\rangle_1\,,\\ e&=\langle\psi_{ss},\mathcal{N}\rangle_1\,,\qquad f=\langle\psi_{st},\mathcal{N}\rangle_1\,,\qquad g=\langle\psi_{tt},\mathcal{N}\rangle_1\,,\end{aligned}$$

and

$$\varepsilon=\langle\mathcal{N},\mathcal{N}\rangle\in\{-1,1\}\,.$$

注意，数值 ε 称为 S 的符号，是曲面 S 的一个属性，也就是说，它与参数化 ψ 无关。我们指出，上述曲率是欧几里得曲率的自然推广（因为 $\varepsilon\equiv 1$ 在欧几里得空间中）。

3 $\mathbb{E}^3$、 $\mathbb{L}^3$ 和 $\mathbb{H}^3$中的管状曲面

设光滑曲线 $\gamma:(a,b)\to\mathbb{E}^3$ （称为中心曲线）具有非零切向量。半径为 $r>0$ 、围绕 γ 的管状曲面，是由所有半径为 r 、圆心为 $\gamma(s)$，且位于 γ的法平面 $T_s^{\perp}\gamma$ 内的圆 $S_r(\gamma(s))$ 的并集构成的。5

当 γ 以弧长为参数，且

$$\xi(s,t) = 1 - r\kappa(s)\cos t \neq 0, \tag{3}$$

for 每个 $(s,t) \in (a,b) \times \mathbb{R}$。在 γ 为弗雷内曲线的区间内，我们观察到技术 1
con条件 (3) 正是使其成为浸入的必要且充分条件

$$\psi : (s,t) \in (a,b) \times \mathbb{R} \longmapsto \gamma(s) + r\cos(t) N(s) + r\sin(t) B(s) \in \mathbb{R}^3 \tag{4}$$

在这样的区间内，通过上述参数化进行简单计算，可得正则管状曲面的高斯曲率、平均曲率和主曲率的以下表达式：

$$K = \frac{\kappa\cos t}{r(r\kappa\cos t - 1)}, \qquad H = \frac{2r\kappa\cos t - 1}{2r(r\kappa\cos t - 1)},$$
$$k_1 = \frac{\kappa\cos t}{r\kappa\cos t - 1} \qquad \text{and} \qquad k_2 = \frac{1}{r}.$$

不难看出，上述表达式在 $\kappa(s) =$ 的点处同样成立 0.

在洛伦兹空间中，管状曲面的定义方式相同，但我们也接受双曲法截面。更确切地说，所有法截面都可以是洛伦兹圆

$$S_r(\gamma(s)) = \left\{ x \in T_s\gamma^{\perp} \ ; \ \langle x - \gamma(s), x - \gamma(s) \rangle_1 = r^2 \right\},$$

或者所有法截面都可以是洛伦兹双曲线

$$S_r(\gamma(s)) = \left\{ x \in T_s\gamma^{\perp} \ ; \ \langle x - \gamma(s), x - \gamma(s) \rangle_1 = -r^2 \right\}.$$

请注意，洛伦兹双曲线也是欧几里得双曲线，但洛伦兹圆并非欧几里得圆。

在中心曲线 $\gamma : (a,b) \to \mathbb{L}^3$ 是弗雷内曲线的区间内，管状曲面存在一种全局参数化，其形式取决于 γ 的因果性和法因果性。下表列出了所有可能情况：

曲线	法向量	截面	参数化
类空	类空	洛伦兹圆	$\gamma \pm r$ 双曲余弦 $(t)\ N + r$ 双曲正弦 $(t)\ B$
类空	类时	洛伦兹圆	$\gamma + r\sinh(t)\ N \pm r\cosh(t)\ B$
类时	类空	洛伦兹圆	$\gamma + r$ 余弦 $(t)\ N + r$ 正弦 $(t)\ B$
类空	类空	洛伦兹双曲线	$\gamma + r\sinh(t)\ N \pm r\cosh(t)\ B$
类空	类时	洛伦兹双曲线	$\gamma \pm r$ 双曲余弦 $(t)\ N + r$ 双曲正弦 $(t)\ B$
类时	类空	洛伦兹双曲线	不存在

(5)

为了同时涵盖并处理所有可能的局部参数化，我们将使用一对函数（$\mu(t)\ \eta(t)$）来表示以下各对之一

$$(\delta\cos t, \sin t), \ (\delta\cosh t, \sinh t), \ (\sinh t, \delta\cosh t), \tag{6}$$

其中 $\delta \in \{-1,1\}$。于是，式（5）中给出的每个管状曲面都可改写为

$$\psi(s,t) = \gamma(s) + r\mu(t) N(s) + r\eta(t) B(s), \tag{7}$$

对于（6）中的给定对（μ（t） η（t）），注意到

$$\mu'(t) = \delta\varepsilon_T \eta(t) \qquad \text{and} \qquad \eta'(t) = \delta\mu(t). \tag{8}$$

作为欧几里得情形的推广，我们称洛伦兹空间中的管状曲面是正则的，当 γ 按弧长参数化且

$$\xi(s,t) = 1 + \varepsilon_B r\kappa(s)\mu(t) \neq 0, \tag{9}$$

对于每个（s,t） $\in$ （a,b） $\times \mathbb{R}$。在中心曲线 γ 是弗雷内曲线的区间上，由（1）和（7）可得

$$\psi_t(s,t) = r\varepsilon_T \eta(t) N(s) + r\mu(t) B(s)$$

and

$$\psi_s(s,t) = \xi(s,t) T(s) + \delta\tau\psi_t(s,t),$$

对于每个（s,t） $\in$ （a,b） $\times \mathbb{R}$。于是，不难看出，当且仅当条件（9）成立时，ψ 是浸入。最后，在这些区间上，管状曲面的一个单位法向量为

$$\mathcal{N}(s,t) = -\mu(t) N(s) - \eta(t) B(s).$$

利用上述参数化进行标准计算，可得到洛伦兹空间中正则管状曲面的高斯曲率和平均曲率的以下表达式：

$$K = \varepsilon \frac{\varepsilon_B \kappa(s)\mu(t)}{r(1+\varepsilon_B r\kappa(s)\mu(t))} \qquad \text{and} \qquad H = \varepsilon \frac{2\varepsilon_B r\kappa(s)\mu(t)+1}{2r(1+\varepsilon_B r\kappa(s)\mu(t))}, \tag{10}$$

其中，ε 是由 ψ参数化的曲面的符号。再次指出，上述表达式在 κ（s） $=0$的点处同样成立。

在双曲三维空间中，管状曲面的定义与欧几里得情形相同。在 γ 是弗雷内曲线的区间内，不难证明，以弗雷内中心曲线为中心的管状曲面可参数化为以下形式

$$\psi(s,t) = (\cosh r)\gamma + \sinh r(\cos t N + \sin t B). \tag{11}$$

在此情形下，管状曲面的正则性条件为

$$\xi_{\mathbb{H}}(s,t) = \cosh r - \kappa\cos t \sinh r \neq 0,$$

对每个 $(s,t) \in (a,b) \times \mathbb{R}$ 均成立。正则管状曲面的高斯曲率、平均曲率和主曲率可表示为：

$$K = -\frac{\kappa\cos t}{\xi_{\mathbb{H}}\sinh r}, \qquad H = \frac{\cosh r - 2\kappa\cos t\sinh r}{2\xi_{\mathbb{H}}\sinh r}$$

$$k_1 = -\frac{\kappa\cos t}{\xi_{\mathbb{H}}} \qquad \text{and} \qquad k_2 = \frac{1}{\sinh r}.$$

最后，我们称上述三种空间中的任意一种里的（非退化）正则管状曲面为直圆柱，当中心曲线的曲率为零（$\kappa \equiv 0$）时，也就是说，当中心曲线是环境空间中的测地线时。7

4 管状曲面的多项式结果

本次技术讨论的目标是获得一个（相对容易检验的）条件，用以确定多项式 $Q(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ 是否含有形如 $xr^2 - 2yr + 1$ 的因子，其中$r \in \mathbb{R} - \{0\}$。研究这类特定多项式的兴趣，自然源于对（半径为 r 的）多项式魏因加滕管状曲面的研究，并将在下一节中变得更加明晰。事实上，我们得到如下定理。

定理8 设 $Q(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$，且 r 是非零常数。那么，当且仅当 $Q\left(\frac{x}{r}, \frac{xr+1}{2r}\right) \in \mathbb{R}[x]$ 恒等为零时， Q属于由 $xr^2 - 2yr + 1$ 生成的理想。

下面的数值示例将说明应用上述定理的一种初步方法。

例 9 考虑多项式

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= 4x^4 + 8x^2y^2 - 12xy^3 + 9x^3 + 9x^2y - 9xy^2 - 4y^3 \\ &\quad + 22x^2 - 8xy - 7y^2 - 91x + 98y - 24 \end{aligned}$$

并注意到

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{x}{r}, \frac{xr+1}{2r}\right) &= \left(\frac{-3r^3 + 4r^2 + 8}{2r^4}\right)x^4 - \left(\frac{2r^3 + 9r^2 - 52}{4r^3}\right)x^3 \\ &\quad - \left(\frac{7r^4 + 22r^3 - 70r^2 - 8}{4r^4}\right)x^2 \\ &\quad - \left(\frac{-196r^4 + 378r^3 + 22r^2 + 9r + 6}{4r^4}\right)x \\ &\quad - \left(\frac{96r^3 - 196r^2 + 7r + 2}{4r^3}\right). \end{aligned}$$

那么，对于 $r = 2$，我们有

$$Q\left(\frac{x}{2}, \frac{2x+1}{4}\right) \equiv 0.$$

根据定理8，多项式 $Q(x,y)$ 可以被 $4x - 4y + 1$ 整除。事实上，多项式 $Q(x,y)$ 可以改写为

$$Q(x,y) = (4x - 4y + 1)\left(x^3 + x^2y + 3xy^2 + 2x^2 + 4xy + y^2 + 5x + 2y - 24\right).$$

处理多项式时，我们面临的首要困难是找到一种便于考察它们的表达式。为此，我们提出一个命题，给出多项式 $Q\left(\frac{x}{r}, \frac{xr+1}{2r}\right) \in \mathbb{R}[x]$ 的系数的显式表达式。在证明中，我们将使用以下（容易验证的）恒等式：

$$\sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n+1-i} M_{i,j} = \sum_{i=0}^{n+1} M_{i,n+1-i} + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} M_{i,j} \tag{12}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n+1-k} M_{i,j,k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-k} M_{i,j,k} + \sum_{k=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{k} M_{i,n+1-k,k} \tag{13}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{k} M_{k,i} = \sum_{i=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1-i} M_{k+i,i} \tag{14}$$

$_{n\ \ n-i}$命题 10 设 $Q(x,y)=\sum\sum a_{i,j}x^iy^j \in \mathbb{R}[x,y]$ 是一个多项式。对于每个 $r \in_{i=0\ j=0}$ $\mathbb{R}-\{0\}$，都有

$$Q\left(\frac{x}{r},\frac{xr+1}{2r}\right)=\sum_{k=0}^{n}\Gamma_k^n(r)\,x^k,$$

其中

$$\Gamma_k^n(r)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-k}\tbinom{k-i+j}{j}\tfrac{a_{i,k-i+j}}{2^{k-i+j}r^{j+i}}. \tag{15}$$

证明。按照证明的思路，我们将证明

$$\Psi_n(r):=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}a_{i,j}\left(\tfrac{x}{r}\right)^i\left(\tfrac{xr+1}{2r}\right)^j-\sum_{k=0}^{n}\Gamma_k^n(r)\,x^k=0, \tag{16}$$

通过对 n 进行归纳。容易看出，上述等式对 $n\in\{0,1\}$ 成立。

因此，假设关系 (16) 对某个 $n\in\mathbb{N}$ 成立。将 $\Gamma_k^{n+1}(r)$ 替换为 (15) 中的表达式，并利用恒等式 12，我们得到

$$\begin{aligned}\Psi_{n+1}(r) &= \sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n+1-i}a_{i,j}\left(\tfrac{x}{r}\right)^i\left(\tfrac{xr+1}{2r}\right)^j-\sum_{k=0}^{n+1}\Gamma_k^{n+1}(r)\,x^k\\ &= \sum_{i=0}^{n+1}a_{i,n+1-i}\left(\tfrac{x}{r}\right)^i\left(\tfrac{xr+1}{2r}\right)^{n+1-i}+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}a_{i,j}\left(\tfrac{x}{r}\right)^i\left(\tfrac{xr+1}{2r}\right)^j\\ &\qquad-\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n+1-k}\tbinom{k-i+j}{j}\tfrac{a_{i,k-i+j}}{2^{k-i+j}r^{j+i}}x^k.\end{aligned}$$

因此，将恒等式 13 应用于最后一项，并结合归纳假设，可得

$$\Psi_{n+1}(r)=\sum_{i=0}^{n+1}a_{i,n+1-i}\left(\tfrac{x}{r}\right)^i\left(\tfrac{xr+1}{2r}\right)^{n+1-i}-\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{k}\tbinom{n+1-i}{n+1-k}\tfrac{a_{i,n+1-i}}{2^{n+1-i}r^{n+1+i-k}}x^k$$

Fin最后，对第一项应用二项式定理，并对最后一项应用恒等式 14，可得

$$\begin{aligned}\Psi_{n+1}(r) &= \sum_{i=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1-i}\tbinom{n+1-i}{k}\tfrac{a_{i,n+1-i}}{2^{n+1-i}r^{n+1-k}}x^{k+i}\\ &\qquad-\sum_{i=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1-i}\tbinom{n+1-i}{n+1-i-k}\tfrac{a_{i,n+1-i}}{2^{n+1-i}r^{n+1-k}}x^{k+i}\\ &= 0.\end{aligned}$$

■

下一个例子展示了命题 10 如何帮助我们获取关于多项式 Q 的更多信息，并说明如何选择 r 来检验 $Q\left(\frac{x}{r},\frac{xr+1}{2r}\right)$ 是否恒等于零。

例11 再次考虑例 9 中给出的多项式 $Q(x,y)$。根据命题 10， $Q\left(\frac{x}{r},\frac{xr+1}{2r}\right)$ 的常数项为

$$\begin{aligned}\Gamma_0^4(r) &= \frac{98}{2r}+\frac{-7}{4r^2}+\frac{-4}{8r^3}+\frac{0}{16r^4}-24\\ &= -\frac{24\left(r-\frac{1}{8}\right)(r-2)\left(r+\frac{1}{12}\right)}{r^3}.\end{aligned}$$

由于 $\Gamma_0^4(1)\neq 0$，根据定理8，我们可以说 $Q\left(x,\frac{x+1}{2}\right)$ 不属于由 $x-2y+1$生成的理想。

下一个命题是一个技术性结果，它给出了属于由 $xr^2-2yr+1$生成的理想的多项式$Q(x,y)$的刻画。

命题12 设 $r\neq 0$为一个实数。多项式 $Q(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}a_{i,j}x^iy^j\in\mathbb{R}[x,y]$ 可被 $xr^2-2yr+1$ 整除，当且仅当存在一个族

$$\mathcal{C}=\{c_{i,j}\in\mathbb{R}\,;\ i,j\in\mathbb{Z}\}$$

满足：

1. $c_{i,j}=0$ 当 $i<0$ 或 $j<0$ 或 $i+j\geq n$时；

2. $a_{i,j}=r^2c_{i-1,j}-2rc_{i,j-1}+c_{i,j}$, *for every* $i,j\in\mathbb{Z}$.

证明。假设 $Q(x,y)$可被 $xr^2-2yr+1$整除。那么，存在一个族 $\{c_{i,j}\in\mathbb{R}\,;\ \ i,j\in\mathbb{N}$和 $i+j\leq n-1\}$，使得

$$Q(x,y)=\left(xr^2-2yr+1\right)\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i}c_{i,j}X^iY^j. \tag{17}$$

由此可得

$$a_{i,j}=r^2c_{i-1,j}-2rc_{i,j-1}+c_{i,j}$$

对每个 $i=1,\ldots,n$ 以及每个 $j=1,\ldots,n-i$均成立。若我们令 $c_{i,\ j}=0$，并且 $i<0$ 或 $j<0$或 $i+j\geq n$时，便构造出一个满足条件 1 和 2 的族 $\mathcal{C}$。

反过来，给定一个命题陈述中所述的族 $\mathcal{C}$，定义多项式

$$R(x,y)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i}c_{i,j}x^iy^j.$$

容易验证， $Q(x,y)=\left(xr^2-2yr+1\right)R(x,y)$。 ■

在陈述本节的主要结果之前，我们先给出一个（或许并非原创的）引理，其中包含一个证明所需的二项式恒等式。回顾（帕斯卡公式）

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k},$$

对每个 n、 $k\in\mathbb{N}$。

引理13 给定 $n \in \mathbb{N}$ 和 x、$j \in \mathbb{Z}$，我们有

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{x-m}{j}\binom{n}{m} = \binom{x-n}{j-n}. \tag{18}$$

证明。对于 $n = 1$，表达式（18）可由帕斯卡公式直接推出。假设表达式（18）对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立。那么，帕斯卡公式意味着

$$\sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m \binom{x-m}{j}\binom{n+1}{m} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{x-m}{j}\binom{n}{m} - \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{x-1-m}{j}\binom{n}{m}$$

对右侧的两项分别应用归纳步骤，得到

$$\sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m \binom{x-m}{j}\binom{n+1}{m} = \binom{x-n}{j-n} - \binom{x-n-1}{j-n}.$$

Not因此，我们无法直接对上述表达式应用帕斯卡公式，从而得出

$$\binom{x-n}{j-n} - \binom{x-n-1}{j-n} = \binom{x-(n+1)}{j-(n+1)}. \tag{19}$$

需要考虑以下几种情况:

当 $j - n \leq 0$ 时，恒等式（19）由定义成立。接着，我们可以假设 $j - n \geq 1$。要通过帕斯卡公式推出（19），必须有 $x - n - 1 \geq 0$，也就是说，必须有 $x \geq j$。因此，我们只需处理 $x < j$ 的情况。但这种情况显然成立，因为$x < j$ 意味着

$$\binom{x-n}{j-n} = \binom{x-n-1}{j-n} = \binom{x-(n+1)}{j-(n+1)} = 0$$

根据定义，恒等式（19）在所有情况下都成立，这一事实完成了证明。 ■

定理8是以下定理的直接推论，该定理阐明了前两个命题。在证明中，我们将使用以下恒等式（易于验证）：

$$\sum_{m=0}^{i} \sum_{l=0}^{n-i+m} \sum_{k=0}^{i-m} M_{k,m,l} = \sum_{k=0}^{i} \sum_{m=0}^{i-k} \sum_{l=0}^{n-i+m} M_{k,m,l}, i \in \{0, ..., n\} \tag{20}$$

$$\sum_{i=0}^{n} M_i = \sum_{i=0}^{n} M_{n-i} \tag{21}$$

$$\sum_{m=0}^{p} \sum_{l=0}^{q+p-m} \lambda_{m,l} A_{m+l} = \sum_{l=0}^{p} \sum_{m=0}^{l} \lambda_{m,l-m} A_l + \sum_{l=1}^{q} \sum_{m=0}^{p} \lambda_{m,p+l-m} A_{p+l}\ , \tag{22}$$

对于每个 p 和 q，$n \in \mathbb{N}$。

定理14 给定 $n \in \mathbb{N} - \{0\}$，考虑一个族

$$\mathcal{A} = \{a_{i,j} \in \mathbb{R}\ ;\ i, j \in \mathbb{N}\}$$

使得 $a_{i,\ j} = 0$，无论 $i < 0$、$j < 0$ 还是 $i + j > n$。那么系数 $a_{i,\ j}$ 满足

$$\Gamma_k^n(r) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{k-i+j}{j} \frac{a_{i,k-i+j}}{2^{k-i+j} r^{j+i}} = 0 \qquad , \forall k = 0, \ldots, n \tag{23}$$

当且仅当存在一个族

$$\mathcal{C}=\{c_{i,j}\in\mathbb{R}\,;\ i,j\in\mathbb{Z}\}$$

验证中

1. $c_{i,\ j}=0$ 当 $i<0$ 或 $j<0$ 或 $i+j\geq n$时；**2.** $a_{i,\ j}=r^2c_{i-1,\ j}-2rc_{i,\ j-1}+c_{i,\ j}$，对每个 $i,j\in\mathbb{N}$

证明。假设存在定理中所述的族 $\mathcal{C}$。我们需要证明，对于每个 k，$\Gamma_k^n(r)=0$。

当 $k\in\{0,n\}$ 时，所需结论可由性质（1）和性质（2）得出。事实上：

$$\begin{aligned}\Gamma_0^n(r) &= \sum_{j=0}^{n}\tfrac{a_{0,j}}{2^jr^j}=\sum_{j=0}^{n}\tfrac{-2rc_{0,j-1}+c_{0,j}}{2^jr^j}\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\tfrac{c_{0,j}}{2^jr^j}-\sum_{j=1}^{n}\tfrac{c_{0,j-1}}{2^{j-1}r^{j-1}}=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_n^n(r) &= \sum_{i=0}^{n}\tfrac{a_{i,n-i}}{2^{n-i}r^i}=\sum_{i=0}^{n}\tfrac{r^2c_{i-1,n-i}-2rc_{i,n-i-1}}{2^{n-i}r^i}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\tfrac{c_{i-1,n-i}}{2^{n-i}r^{i-2}}-\sum_{i=0}^{n-1}\tfrac{c_{i,n-i-1}}{2^{n-i-1}r^{i-1}}=0\end{aligned}$$

给定 $k\in\{1,\dots,n-1\}$，由性质（2）可得

$$\Gamma_k^n(r)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-k}\tbinom{k-i+j}{j}\tfrac{r^2c_{i-1,k-i+j}-2rc_{i,k-i+j-1}+c_{i,k-i+j}}{2^{k-i+j}r^{j+i}}.$$

由于 $k\geq1$，性质 **(1)** 告诉我们

$$\begin{aligned}\Gamma_k^n(r) &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{n-k}\tbinom{k-i+j}{j}\tfrac{c_{i-1,k-i+j}}{2^{k-i+j}r^{j+i-2}}-\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{n-k}\tbinom{k-i+j}{j}\tfrac{c_{i,k-i+j-1}}{2^{k-i+j-1}r^{j+i-1}}\\ &\quad-\sum_{j=0}^{n-k}\tfrac{c_{k,j-1}}{2^{j-1}r^{j+k-1}}+\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{n-k}\tbinom{k-i+j}{j}\tfrac{c_{i,k-i+j}}{2^{k-i+j}r^{j+i}}+\sum_{j=0}^{n-k}\tfrac{c_{k,j}}{2^jr^{j+k}}\\ &= \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{n-k}\tbinom{k-i+j-1}{j}\tfrac{c_{i,k-i+j-1}}{2^{k-i+j-1}r^{j+i-1}}-\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{n-k}\tbinom{k-i+j}{j}\tfrac{c_{i,k-i+j-1}}{2^{k-i+j-1}r^{j+i-1}}\\ &\quad+\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{n-k}\tbinom{k-i+j}{j}\tfrac{c_{i,k-i+j}}{2^{k-i+j}r^{j+i}}\\ &= \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{n-k}\left[\tbinom{k-i+j-1}{j}-\tbinom{k-i+j}{j}+\tbinom{k-i+j-1}{j-1}\right]\tfrac{c_{i,k-i+j-1}}{2^{k-i+j-1}r^{j+i-1}}.\end{aligned}$$

那么， $\Gamma_k^n(r) = 0$ 由帕斯卡公式得出。

现在假设对于每个 $k = \{0, \ldots, n\}$， $\Gamma_k^n(r) = 0$，并定义族 $\mathcal{C} = \{c_{i,j} \in \mathbb{R}; \quad i, \quad j \in \mathbb{Z}\}$如下

$$c_{i,j} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} (-1)^k \binom{l+k}{l} 2^l r^{l+2k} a_{i-k,j-l} & , \quad \text{if } i,j \in \mathbb{N} \\ 0 & , \quad \text{if } i < 0 \text{ or } j < 0 \end{cases}. \tag{24}$$

为了证明族 $\mathcal{C}$ 满足性质（2），定义

$$\Phi_{i,j}(r) = r^2 c_{i-1,j} - 2r c_{i,j-1} + c_{i,j},$$

对每个 $i,j \in \mathbb{Z}$。我们需要考虑四种情况:

容易看出，$\Phi_{0,\,0}(r) = a_{0,\,0}$。对每个 $i \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned} \Phi_{i,0}(r) &= r^2 \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k r^{2k} a_{i-1-k,0} + \sum_{k=0}^{i} (-1)^k r^{2k} a_{i-k,0} \\ &= -\sum_{k=1}^{i} (-1)^k r^{2k} a_{i-k,0} + \sum_{k=0}^{i} (-1)^k r^{2k} a_{i-k,0} \\ &= a_{i,0} \end{aligned}$$

类似地，对每个 $j \geq 1$，我们有 $\Phi_{0,\,j}(r) = a_{0,\,j}$。最后，取 $i,j \geq 1$ 并注意到

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j}(r) &= r^2 \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{j} (-1)^k \binom{l+k}{l} 2^l r^{l+2k} a_{(i-1)-k,j-l} \\ &\quad - 2r \sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j-1} (-1)^k \binom{l+k}{l} 2^l r^{l+2k} a_{i-k,(j-1)-l} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} (-1)^k \binom{l+k}{l} 2^l r^{l+2k} a_{i-k,j-l} \\ &= -\sum_{k=1}^{i} (-1)^k r^{2k} a_{i-k,j} + \sum_{k=1}^{i} \sum_{l=1}^{j} (-1)^{(k-1)} \binom{l+(k-1)}{l} 2^l r^{l+2k} a_{i-k,j-l} \\ &\quad - \sum_{l=1}^{j} 2^l r^l a_{i,j-l} - \sum_{k=1}^{i} \sum_{l=1}^{j} (-1)^k \binom{(l-1)+k}{(l-1)} 2^l r^{l+2k} a_{i-k,j-l} + a_{i,j} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{j} 2^l r^l a_{i,j-l} + \sum_{k=1}^{i} (-1)^k r^{2k} a_{i-k,j} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{i} \sum_{l=1}^{j} (-1)^k \binom{l+k}{l} 2^l r^{l+2k} a_{i-k,j-l} \\ &= a_{i,j} + \sum_{k=1}^{i} \sum_{l=1}^{j} (-1)^{(k-1)} \left[\binom{l+(k-1)}{l} - \binom{(l-1)+k}{(l-1)} + \binom{l+k}{l} \right] 2^l r^{l+2k} a_{i-k,j-l}. \end{aligned}$$

由帕斯卡公式可知，$\Phi_{i,\,j}(r) = a_{i,\,j}$。因此，性质（2）成立。13

现在让我们转而关注性质（1）。根据定义（24），还需证明对于任意满足 $i+j\geq n$ 的 i、$j\in\mathbb{N}$，有$c_{i,\ j}=0$。我们将证明分为以下两个断言：

断言1：$c_{i,\ j}=0$，对每个满足 $i+j=n$ 的 $i,j\in\mathbb{N}$。

在假设（23）成立的情况下，只需证明每个 $c_{i,\ n-i}$ 都是系数 $\Gamma_k^n(r)$ 的线性组合。更确切地说，只需证明

$$c_{i,n-i}=\sum_{m=0}^{i}(-1)^m\tbinom{n-i+m}{n-i}2^{n-i}r^{n+m}\Gamma_{i-m}^n(r)$$

对每个 $i\in\{1,\ldots,n\}$ 均成立。根据系数 $\Gamma_k^n(r)$ 的定义以及恒等式（20），我们得出只需证明

$$c_{i,n-i}=\sum_{k=0}^{i}\sum_{m=0}^{i-k}\sum_{l=0}^{n-i+m}(-1)^m\frac{2^{k+m+n}r^{m+n}}{2^{l+2i}r^{l+k}}\tbinom{n-i+m}{n-i}\tbinom{i-m-k+l}{l}a_{k,i-m-k+l}\tag{25}$$

对每个 $i\in\{1,\ldots,n\}$ 均成立。将恒等式（21）应用于定义（24），得到

$$c_{i,n-i}=\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{n-i}(-1)^{i-k}\binom{l+i-k}{l}2^lr^{l+2i-2k}a_{k,n-i-l}\tag{26}$$

对每个 $i\in\{1,\ldots,n\}$ 均成立。受表达式（25）和（26）的启发，定义

$$\Delta_i^n(r)=c_{i,n-i}-\sum_{k=0}^{i}(-1)^k\tbinom{n-i+k}{n-i}2^{n-i}r^{n+k}\Gamma_{i-k}^n=\sum_{k=0}^{i}\Delta_{i,k}^n(r)$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta_{i,k}^n(r)\ &=\ \sum_{l=0}^{n-i}(-1)^{i-k}\binom{l+i-k}{l}2^lr^{l+2i-2k}a_{k,n-i-l}\\&\quad-\sum_{m=0}^{i-k}\sum_{l=0}^{n-i+m}(-1)^m\frac{2^{k+m+n}r^{m+n}}{2^{l+2i}r^{l+k}}\tbinom{n-i+m}{n-i}\tbinom{i-m-k+l}{l}a_{k,i-m-k+l}\ ,\end{aligned}$$

对所有 $i\in\{0,\ldots,n\}$ 和 $k\in\{0,\ldots,i\}$均成立。因此，我们的目标归结为验证

$$\Delta_{i,k}^n(r)=0,$$

对所有 $i\in\{0,\ldots,n\}$ 和 $k\in\{0,\ldots,i\}$均成立。

固定 $(i,k)\in\{0,\ldots,n\}\times\{0,\ldots,i\}$ 并定义变量

$$p=i-k\in\mathbb{N}\,,\qquad q=n-i\in\mathbb{N}\qquad\text{and}\qquad A_j=a_{k,j}\in\mathbb{R}.$$

利用这些新变量以及恒等式 (21) 和 (22)，我们得到

$$\Delta_{i,k}^n(r)=\Lambda_{p,q}(r)$$

其中

$$\begin{aligned}\Lambda_{p,q}(r) &= \sum_{l=0}^{q}(-1)^p\tbinom{q-l+p}{q-l}\frac{2^q r^{q+2p}}{2^l r^l}A_l \\ &\quad -\sum_{l=0}^{p}(-1)^p\frac{2^q r^{2p+q}}{2^l r^l}\left(\sum_{m=0}^{l}(-1)^m\tbinom{q+p-m}{q}\tbinom{l}{m}\right)A_l \\ &\quad -\sum_{l=p+1}^{p+q}(-1)^p\frac{2^q r^{2p+q}}{2^l r^l}\left(\sum_{m=0}^{p}(-1)^m\tbinom{q+p-m}{q}\tbinom{l}{m}\right)A_l\,.\end{aligned} \tag{27}$$

由于

$$\binom{q+p-m}{q}=0$$

对于每个 $m>p$，我们可以将表达式 (27) 改写为

$$\begin{aligned}\Lambda_{p,q}(r) &= \sum_{l=0}^{q}(-1)^p\frac{2^q r^{2p+q}}{2^l r^l}\left(\tbinom{q-l+p}{q-l}-\sum_{m=0}^{l}(-1)^m\tbinom{q+p-m}{q}\tbinom{l}{m}\right)A_l \\ &\quad -\sum_{l=q+1}^{p+q}(-1)^p\frac{2^q r^{2p+q}}{2^l r^l}\left(\sum_{m=0}^{l}(-1)^m\tbinom{q+p-m}{q}\tbinom{l}{m}\right)A_l\,.\end{aligned} \tag{28}$$

由引理 (13) 可得

$$\sum_{m=0}^{l}(-1)^m\binom{q+p-m}{q}\binom{l}{m}=\binom{q+p-l}{q-l} \tag{29}$$

对于每个 $l\in\mathbb{N}$。结合表达式 (28) 和 (29) 以及以下事实

$$\binom{q+p-l}{q-l}=0$$

对于每个 $l>q$，我们得到 $\Lambda_{p,q}(r)=0$。

断言 2：$c_{i,j}=0$，对于每个满足 $i+j>n$ 的 $i,j\in\mathbb{N}$。

给定 i、$j\in\mathbb{N}$ 使得 $i+j>n$，定义 $l=i+j-n\in\mathbb{N}-\{0\}$。由性质（2）和族 $\mathcal{A}$ 的定义可知

$$c_{i,j}=c_{i,n+l-i}=-r^2c_{i-1,n+l-i}+2rc_{i,n+l-i-1} \tag{30}$$

我们将对 l 进行归纳法。假设 $l=1$，并注意到（30）可重写为

$$c_{i,j}=-r^2c_{i-1,n+1-i}+2rc_{i,n-i}.$$

首先，$c_{i,\,n-i}=0$，根据断言（1）。如果 $i\geq 1$，断言（1）还允许我们得出 $c_{i-1,\,n+1-i}=0$。另一方面，在 $i=0$ 的情况下，利用定义 24，我们也可以得出同样的结论。因此，我们必有 $c_{i,\,j}=0$。

假设存在某个 $c_{i,\,n+l-i}=0$，且对于某个 $l\geq 1$ 以及每个 $i,j\in\mathbb{N}$，满足 $l=i+j-n$。由 (30) 可得

$$c_{i,j}=-r^2c_{i-1,n+l+1-i}+2rc_{i,n+l-i}$$

对于每个满足 $l+1=i+j-n$ 的 $i,j\in\mathbb{N}$。最后注意，归纳假设（结合情形 $i=0$ 和 $j=0$ 下的定义 (24)）使我们再次得出 $c_{i,\ j}=0$。

■

F最后，我们用另一个技术性结果结束本节，该结果将在下一
中用于处理洛伦兹情形。

定理 15 给定 $\varepsilon\in\{-1,1\}$ 和一个非零多项式

$$Q(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}a_{i,j}x^iy^j\in\mathbb{R}[x,y],$$

定义多项式

$$Q_\varepsilon(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\varepsilon^{i+j}a_{i,j}x^iy^j\in\mathbb{R}[x,y].$$

对于每个非零常数 $r\in\mathbb{R}$，$Q_\varepsilon(x,y)$ 属于由多项式 $xr^2-2ry+1$ 生成的理想，当且仅当 $Q(x,y)$ 属于由多项式 $xr^2-2ry+\varepsilon$ 生成的理想。

证明。假设 $Q_\varepsilon(x,y)$ 属于由 $xr^2-2ry+1$ 生成的理想。那么存在一个多项式

$$R(x,y)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i}b_{i,j}x^iy^j$$

使得

$$Q_\varepsilon(x,y)=\left(xr^2-2ry+1\right)R(x,y).$$

定义 $b_{i,\ j}=0$，当 $i<0$、$j<0$ 或 $i+j>n-1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\varepsilon^{i+j}a_{i,j}x^iy^j &= \left(xr^2-2ry+1\right)\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i}b_{i,j}x^iy^j\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i}r^2b_{i,j}x^{i+1}y^j-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i}2rb_{i,j}x^iy^{j+1}\\ &\quad+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i}b_{i,j}x^iy^j\\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\left(r^2b_{i-1,j}-2rb_{i,j-1}+b_{i,j}\right)x^iy^j\end{aligned}$$

从而得到

$$a_{i,j}=\frac{r^2b_{i-1,j}-2rb_{i,j-1}+b_{i,j}}{\varepsilon^{i+j}},\tag{31}$$

对于任意 $i\in\{0,\ldots,n\}$ 和 $j\in\{0,\ldots,n-i\}$。

要证明 $Q(x,y)$ 属于由多项式 $xr^2-2ry+\varepsilon$ 生成的理想，只需证明该多项式

$$T(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}a_{i,j}x^iy^j-\left(r^2x-2ry+\varepsilon\right)\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i}\varepsilon^{-i-j-1}b_{i,j}x^iy^j\in\mathbb{R}[x,y]$$

恒等为零。利用等式（31），我们得到

$$\begin{aligned} T(x,y) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{r^2 b_{i-1,j}}{\varepsilon^{i+j}}x^i y^j - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{2r b_{i,j-1}}{\varepsilon^{i+j}}x^i y^j \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{b_{i,j}}{\varepsilon^{i+j}}x^i y^j - \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i} r^2\varepsilon^{-i-j-1}b_{i,j}x^{i+1}y^j \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i} 2r\varepsilon^{-i-j-1}b_{i,j}x^i y^{j+1} - \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i}\varepsilon^{-i-j}b_{i,j}x^i y^j \end{aligned}$$

多项式 $T(x,y)$ 的零性是以下等式的结果，这些等式的正确性源于系数 $b_{i,j}$ 的定义：

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{r^2 b_{i-1,j}}{\varepsilon^{i+j}}x^i y^j = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i} r^2\varepsilon^{-i-j-1}b_{i,j}x^{i+1}y^j$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{2r b_{i,j-1}}{\varepsilon^{i+j}}x^i y^j = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i} 2r\varepsilon^{-i-j-1}b_{i,j}x^i y^{j+1}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{b_{i,j}}{\varepsilon^{i+j}}x^i y^j = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i}\frac{b_{i,j}}{\varepsilon^{i+j}}x^i y^j.$$

现在，假设 $Q(x,y)$ 属于由 $xr^2 - 2ry + \varepsilon$ 生成的理想。那么存在一个多项式

$$U(x,y) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i} b_{i,j}x^i y^j$$

使得

$$Q(x,y) = \left(xr^2 - 2ry + \varepsilon\right)U(x,y).$$

按照相同步骤，我们得出

$$Q_\varepsilon(x,y) = \left(r^2 x - 2ry + 1\right)\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i}\varepsilon^{i+j+1}c_{i,j}x^i y^j \in \left\langle r^2 x - 2ry + 1\right\rangle.$$

■

推论 16 设 $\varepsilon \in \{-1,1\}$ 为一个非常数多项式 $Q(x,y)$，且 $r \in \mathbb{R}$ 为非零常数。那么，当且仅当多项式 $\underline{Q\left(\frac{\varepsilon x}{r}, \varepsilon(xr+1)2r\right)} \in \mathbb{R}[x]$ 恒等于零时，$Q(x,y)$ 属于由 $xr^2 - 2yr + \varepsilon$ 生成的理想。

$n\ n-i$证明。记作 $Q(x,y) = \sum\ \sum a_{i,\ j}x^i y^j \in \mathbb{R}[x,y]$ 并定义多项式
$i=0\ j=0$

$$Q_\varepsilon(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\varepsilon^{i+j}a_{i,j}x^i y^j \in \mathbb{R}[x,y].$$

由于

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon\left(\frac{x}{r},\frac{xr+1}{2r}\right) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\varepsilon^{i+j}a_{i,j}\left(\frac{x}{r}\right)^i\left(\frac{xr+1}{2r}\right)^j \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}a_{i,j}\left(\frac{\varepsilon x}{r}\right)^i\left(\frac{\varepsilon\left(xr+1\right)}{2r}\right)^j \\ &= Q\left(\frac{\varepsilon x}{r},\frac{\varepsilon\left(xr+1\right)}{2r}\right), \end{aligned}$$

该结果由定理 8 和定理 15 得出。 ■

5 管状曲面的主要结果及应用

在本节中，我们将给出主要定理，这些定理完整地分类了欧几里得、洛伦兹和双曲三维空间中的多项式魏因加滕管状曲面。我们的论述将重点放在洛伦兹情形上。从证明中可以清楚看出，欧几里得定理和双曲定理是洛伦兹情形定理的类似但技术性较低的版本。我们先介绍一些代数定义：

给定 $\varepsilon\in\{-1,1\}$，多项式 $Q(x,y)$ 的洛伦兹 ε-半径 $\in\mathbb{R}[x,y]$ 定义为集合

$$Rad_{L,\varepsilon}(Q)=\left\{r\in(0,+\infty)\ ;\ Q\left(0,\tfrac{\varepsilon}{2r}\right)=0\right\}.$$

$Q(x,y)$ 的洛伦兹 ε-星半径定义为集合

$$Rad^*_{L,\varepsilon}(Q)=\left\{r\in Rad_{L,\varepsilon}(Q)\ ;\ Q(x,y)\in\left\langle xr^2-2ry+\varepsilon\right\rangle\right\},$$

其中，$\langle\varphi(x,y)\rangle$ 表示由多项式 $\varphi(x,y)$ 在 $\mathbb{R}[x,y]$ 中生成的理想。$Q(x,y)$ 的洛伦兹半径和洛伦兹星半径分别定义为

$$Rad_L(Q)=\bigcup_{\varepsilon\in\{-1,1\}}Rad_{L,\varepsilon}(Q)\qquad\text{and}\qquad Rad^*_L(Q)=\bigcup_{\varepsilon\in\{-1,1\}}Rad^*_{L,\varepsilon}(Q).$$

例 17 设多项式 $Q(x,y)\in\mathbb{R}[x,y]$和实数 $r>0$。根据命题 10，我们有

$$Q\left(\tfrac{x}{r},\tfrac{xr+1}{2r}\right)=\sum_{k=0}^{n}\Gamma_k(r)\,x^k,$$

其中，系数 $\Gamma_k(r)$ 定义于（15）中。于是，当且仅当 $\frac{1}{2r}$ 是多项式 Γ_0 的正根时，有 $r\in Rad_{L,1}(Q)$。特别地，由例（11）可知，例 9 中给出的多项式 $Q(x,y)$ 满足

$$Rad_{L,1}(Q)=\left\{\frac{1}{8},2\right\}.$$

现在我们给出第一个主要定理的洛伦兹版本：

定理 18（洛伦兹 $\mathcal{S}(Q)$ 问题）给定一个多项式 $Q(x,y)\in\mathbb{R}[x,y]$，记$\mathcal{S}_L(Q)$为满足$Q(K,H)\equiv0$的洛伦兹三维空间中所有非退化正则管状曲面的集合。那么，$\mathcal{S}_L(Q)$的元素为：18

i. 符号为 $\varepsilon \in \{-1,1\}$ 且半径属于 $Rad_{L,\varepsilon}(Q)$ 的直圆柱面；ii. 符号为 $\varepsilon \in \{-1,1\}$ 且半径属于 $Rad^*_{L,\varepsilon}(Q)$ 的正则管状曲面。

证明。由于高斯曲率为零，根据 $Rad_{L,\varepsilon}(Q)$ 的定义可直接得出，符号为 $\varepsilon \in \{-1,1\}$、半径属于 $Rad_{L,\varepsilon}(Q)$ 的直圆柱面属于 $\mathcal{S}_L(Q)$。

取一个正则管状曲面 S，其符号为 $\varepsilon \in \{-1,1\}$，半径属于 $Rad^*_{L,\varepsilon}(Q)$（假设该集合非空）。根据 $Rad^*_{L,\varepsilon}(Q)$ 的定义，存在一个多项式 $R(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$，使得

$$Q(x,y) = \left(xr^2 - 2ry + \varepsilon\right) R(x,y).$$

利用式 (10) 中给出的 S 的曲率表达式，得到

$$\begin{aligned} Q(K,H) &= \left(Kr^2 - 2rH + \varepsilon\right) R(K,H) \\ &= \left(\varepsilon \frac{\varepsilon_B \kappa\mu}{r(1+\varepsilon_B r\kappa\mu)} r^2 - 2r\varepsilon \frac{2\varepsilon_B r\kappa\mu + 1}{2r(1+\varepsilon_B r\kappa\mu)} + \varepsilon\right) R(K,H) \\ &= \left(\frac{\varepsilon\varepsilon_B \kappa\mu r}{1+\varepsilon_B r\kappa\mu} - \frac{2\varepsilon\varepsilon_B r\kappa\mu + \varepsilon}{1+\varepsilon_B r\kappa\mu} + \frac{\varepsilon + \varepsilon\varepsilon_B r\kappa\mu}{1+\varepsilon_B r\kappa\mu}\right) R(K,H) \\ &= 0. \end{aligned}$$

上述等式表明 $S \in \mathcal{S}_L(Q)$。

现在，在 $\mathcal{S}_L(Q)$ 中（假设该集合非空）取一个非退化的正则管状曲面 S，其符号为 $\varepsilon \in \{-1,1\}$，半径为 $r > 0$。由表达式 (10) 可得 S 的高斯曲率和平均曲率为

$$K = \varepsilon k_1 k_2 = \qquad \text{and} \qquad H = \varepsilon \frac{k_1 + k_2}{2},$$

其中

$$k_1 = \frac{\varepsilon_B \kappa\mu}{1 + \varepsilon_B r\kappa\mu} \qquad \text{and} \qquad k_2 = \frac{1}{r}.$$

需要指出的是，洛伦兹三维空间中正则曲面的主曲率并不总是定义良好的。在许多情况下，上文定义的函数 k_1 和 k_2 是 S的主曲率，但一般而言，它们只是定义在 S上的函数。

Write $Q(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} a_{i,j} x^i y^j$ and define the polynomial

$$Q_\varepsilon(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \varepsilon^{i+j} a_{i,j} x^i y^j \in \mathbb{R}[x,y].$$

注意,

$$\begin{aligned} 0 &= Q(K,H) = Q\left(\varepsilon k_1 k_2, \varepsilon \frac{k_1+k_2}{2}\right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} a_{i,j} (\varepsilon k_1 k_2)^i \left(\varepsilon \frac{k_1+k_2}{2}\right)^j \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \varepsilon^{i+j} a_{i,j} \left(\frac{k_1}{r}\right)^i \left(\frac{rk_1+1}{2r}\right)^j = Q_\varepsilon\left(\frac{k_1}{r}, \frac{rk_1+1}{2r}\right). \end{aligned}$$

因此，对于每个（s，t）$\in$（a，b）$\times\mathbb{R}$，k_1（s，t）都是 $Q_\varepsilon\left(\frac{x}{r}、\frac{xr+1}{2r}\right)\in\mathbb{R}[x]$的根。

若 $Q_\varepsilon\left(\frac{x}{r},\frac{xr+1}{2r}\right)$ 不是零多项式，则 $k_1(s,t)$ 是一个常函数。也就是说，存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得

$$\frac{\kappa(s)\mu(t)\varepsilon_B}{1+r\kappa(s)\mu(t)\varepsilon_B}=\lambda,$$

对于每个 (s,t)，$\in(a,b)\times\mathbb{R}$。若 $\lambda\neq 0$，我们可以写成

$$\mu(t)=\frac{\lambda}{\varepsilon_B\kappa(s)(1-r\lambda)},$$

对于每个 (s,t)，$\in(a,b)\times\mathbb{R}$。上述等式意味着 $\mu(t)$ 是常数，这是荒谬的，因为 $\mu(t)$ 表示一个三角函数。因此，我们必有 $\lambda=0$，而这一事实意味着 $r\in Rad_{L,\varepsilon}(Q)$，因为

$$0=Q(K,H)=Q\left(\varepsilon k_1k_2,\varepsilon\frac{k_1+k_2}{2}\right)=Q\left(0,\frac{\varepsilon}{2r}\right).$$

Mo此外，由于 μ 非零，我们还可以得出 $\kappa\equiv 0$。因此，S 是一个直圆柱面 .

现在来处理 $Q_\varepsilon\left(\frac{x}{r},\frac{xr+1}{2r}\right)$ 是零多项式的情形。由定理（8）可知，$Q_\varepsilon(x,y)$ 属于由多项式 $xr^2-2yr+1\in\mathbb{R}[x,y]$ 生成的理想；由定理（15）可知，$Q(x,y)$ 属于由多项式 $xr^2-2ry+\varepsilon\in\mathbb{R}[x,y]$ 生成的理想。因此，存在一个多项式 $R(x,y)\in\mathbb{R}[x,y]$，使得

$$Q(x,y)=\left(xr^2-2ry+\varepsilon\right)R(x,y).$$

要证明 $r\in Rad^*_{L,\ \varepsilon}(Q)$，根据定义，只需证明 $r\in Rad_{L,\ \varepsilon}(Q)$，但这显然是上面等式的直接推论。事实上

$$Q\left(0,\frac{\varepsilon}{2r}\right)=\left(0r^2-2r\frac{\varepsilon}{2r}+\varepsilon\right)R\left(0,\frac{\varepsilon}{2r}\right)=0.$$

■

下面的推论是上述定理的直接推论：

推论19（洛伦兹）设多项式 $Q(x,y)\in\mathbb{R}[x,y]$。存在满足 $Q(K,H)\equiv 0$ 的非退化正则管状曲面，且该曲面位于洛伦兹三维空间中，当且仅当$Rad_L(Q)\neq\emptyset$。此外，所有此类曲面的半径均属于 $Rad_L(Q)$。

由于欧几里得空间和双曲空间中的所有正则曲面的符号均为 $+1$，因此这些空间中的半径和星半径的定义变得更加简单。如引言中所述（见定理（1）），多项式 $Q(x,y)\in\mathbb{R}[x,y]$的欧几里得半径和星半径定义如下：

$$Rad_E(Q)=\left\{r\in(0,+\infty)\ ;\ Q\left(0,\tfrac{1}{2r}\right)=0\right\}$$
$$Rad^*_E(Q)=\left\{r\in Rad_E(Q)\,;\,Q(x,y)\in\left\langle xr^2-2ry+1\right\rangle\right\}.$$

双曲定义略显技术性，但其动机来自第3节末尾给出的双曲三维空间中正则管状曲面的曲率表达式。

给定一个多项式 $Q(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$，$Q(x,y)$ 的双曲半径和双曲星半径分别定义为

$$Rad_H(Q) = \left\{ r \in (0,+\infty) \ ; \ Q\left(0, \tfrac{1}{2\sinh r}\right) = 0 \right\}$$

$$Rad_H^*(Q) = \left\{ r \in Rad_H(Q) \ ; \ Q(x,y) \in \left\langle x\sinh^2 r - 2y(\sinh r) + 1 \right\rangle \right\}.$$

欧几里得结果已在引言中陈述。下面我们仅给出双曲版本：

定理20（双曲 $\mathcal{S}(Q)$ 问题）给定一个多项式 $Q(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$，记$\mathcal{S}_H(Q)$为双曲三维空间中所有满足 $Q(K,H) \equiv 0$ 的正则管状曲面所构成的集合。那么，$\mathcal{S}_H(Q)$ 的元素为：

i. 半径属于 $Rad_H(Q)$ 的直圆柱面；

ii. 半径属于 $Rad_H^*(Q)$ 的正则管状曲面。

推论21（双曲）考虑一个多项式 $Q(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$。双曲三维空间中存在满足 $Q(K,H) \equiv 0$ 的正则管状曲面，当且仅当 $Rad_H(Q) \neq \emptyset$。此外，所有此类曲面的半径均属于 $Rad_H(Q)$。

T下面的例子说明了上述定理（以及定理
8)过的个数值案例来阐明：

Ex例 22 考虑多项式 $Q(x,y) = 14y - 25x + 100xy - 40y^2 - 1 \in \mathbb{R}[x,y]$。由于 e

$$Q\left(0, \tfrac{1}{2r}\right) = -\frac{(r-2)(r-5)}{r^2},$$

我们有 $Rad_E(Q) = \{2,5\}$。通过简单计算可得，$Q\left(\frac{x}{5}, \frac{5x+1}{10}\right)$ 恒等于零，且 $Q\left(\frac{x}{2}, \frac{2x+1}{4}\right) = 3x(5x-1)$。因此，$\mathcal{S}_E(Q)$ 的元素是半径为 5 的任意正则管状曲面，以及半径为 2 的直圆柱面。

请注意，上述定理使我们能够仅通过研究多项式来分类管状多项式魏因加滕曲面。为了展示其功能，下面说明如何由此得到一些众所周知的结果：

例 23 设定 $c \in \mathbb{R}$，考虑多项式 $Q(x,y) = y - c \in \mathbb{R}[x,y]$，并注意到，当且仅当 $c > 0$ 时，$Rad_E(Q) \neq \emptyset$。更确切地说，

$$Rad_E(Q) = \begin{cases} \left\{\frac{1}{2c}\right\} & if\ c > 0 \\ \emptyset & if\ c \leq 0 \end{cases}.$$

因此，不存在具有负常平均曲率的正则管状曲面。此外，由于

$$Q\left(\frac{x}{\frac{1}{2c}}, \frac{x\frac{1}{2c}+1}{2\frac{1}{2c}}\right) = Q\left(2cx, \frac{x+2c}{2}\right) = \frac{x+2c}{2} - c = \frac{x}{2}$$

不为零时，具有常平均曲率 $c > 0$ 的唯一正则管状曲面是半径为 $\frac{1}{2c}$ 的直圆柱面。

例 24 给定 $c \in \mathbb{R}$，考虑多项式 $Q(x,y) = x - c \in \mathbb{R}[x,y]$，并注意到 $Rad_E(Q) \neq \emptyset$ 当且仅当 $c = 0$。更准确地说，

$$Rad_E(Q) = \begin{cases} (0,+\infty) & if\ c = 0 \\ \emptyset & if\ c \neq 0 \end{cases}.$$

当 $c = 0$ 时，我们有

$$Q\left(\frac{x}{r}, \frac{xr+1}{2r}\right) = \frac{x}{r}$$

$is\ n$ot 不为零，对每个 $r \in (0,+\infty)$ 都成立。于是，任意半径的圆柱是唯一的管状曲面 s wit具有常数高斯曲率。

如引言中所述，高斯曲率与平均曲率之间一种特殊且研究颇多的多项式关系是线性关系。引言中已陈述了欧几里得三维空间中高斯曲率与平均曲率满足线性关系的正则管状曲面的分类。下面介绍洛伦兹情形和双曲情形。我们需要以下记号：

$$\operatorname{sgn}(\lambda) = \begin{cases} +1 & \text{if } \lambda > 0 \\ 0 & \text{if } \lambda = 0 \\ -1 & \text{if } \lambda < 0 \end{cases}$$

对每个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 都成立。

推论25（洛伦兹情形）设实数 a、b、c 满足 $(a,b) \neq (0,0)$，考虑多项式

$$Q(x,y) = ax + by - c \in \mathbb{R}[x,y]$$

那么，$\mathcal{S}_L(Q) \neq \emptyset$ 当且仅当 $b, c = 0$ 或 $b, c \neq 0$。更具体地，对于 $\varepsilon = \operatorname{sgn}(bc)$ 和 $\Delta = \varepsilon b^2 + 4ac$，我们有：

i. 若 $b, c = 0$，则 $\mathcal{S}_L(Q)$ 是任意符号、任意半径的所有直圆柱面的集合；

ii. 若 $b, c \neq 0$ 且 $\Delta = 0$，则 $\mathcal{S}_L(Q)$ 是符号为 ε、半径为 $\frac{b\varepsilon}{2c}$ 的所有正则管状曲面的集合；iii. 若 $b, c \neq 0$ 且 $\Delta \neq 0$，则 $\mathcal{S}_L(Q)$ 是符号为 ε、半径为$b\varepsilon\overline{2c}$的所有直圆柱面的集合。

证明。由于 $Q\left(0, \frac{\varepsilon}{2r}\right) = b\frac{\varepsilon}{2r} - c$，简单计算可得

$$Rad_{L,\varepsilon}(Q) = \begin{cases} (0,+\infty) & \text{if } b = c = 0 \\ \frac{b\varepsilon}{2c} & \text{if } \varepsilon bc > 0 \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}.$$

首先，注意到

$$Q\left(\frac{\varepsilon x}{r}, \frac{\varepsilon(xr+1)}{2r}\right) = a\frac{\varepsilon x}{r} + b\frac{\varepsilon(xr+1)}{2r} - c = \varepsilon\frac{2a+br}{2r}x + \frac{b\varepsilon - 2cr}{2r}.$$

当 $b = c = 0$ 时，根据假设有 $a \neq 0$，因此

$$Q\left(\frac{\varepsilon x}{r}, \frac{\varepsilon(xr+1)}{2r}\right) = \frac{a\varepsilon}{r}x \neq 0,$$

对于每个 $r \in (0, +\infty)$。现在考虑 $\varepsilon bc > 0$ 的情形（这意味着 $b, c \neq 0$）。对于 $r = \frac{b\varepsilon}{2c}$，有

$$Q\left(\frac{\varepsilon x}{r}, \frac{\varepsilon(xr+1)}{2r}\right) = \varepsilon \frac{2a + b\left(\frac{b\varepsilon}{2c}\right)}{2\left(\frac{b\varepsilon}{2c}\right)} x + \frac{b\varepsilon - 2c\left(\frac{b\varepsilon}{2c}\right)}{2\left(\frac{b\varepsilon}{2c}\right)} = \frac{\Delta}{2b} x.$$

那么，对于 $r = \frac{b\varepsilon}{2c}$，多项式 $Q\left(\frac{\varepsilon x}{r}, \frac{\varepsilon(xr+1)}{2r}\right)$ 恒等于零，当且仅当判别式Δ 为零。要得出本推论所述结论，只需将上述所有事实与定理 18 和推论 16 合并起来。

■

推论 26（双曲）给定实数 a、b、c，满足 $(a, b) \neq (0, 0)$，考虑多项式

$$Q(x, y) = ax + by - c \in \mathbb{R}[x, y].$$

那么，$\mathcal{S}_H(Q) \neq \emptyset$ 当且仅当 b、$c = 0$ 或 $bc > 0$。更确切地，对于 $\Delta = b^2 + 4ac$，有：

i. 若 b、$c = 0$，则 $\mathcal{S}_H(Q)$ 是任意半径的所有直圆柱面的集合；

ii。若 $bc > 0$ 且 $\Delta = 0$，则 $\mathcal{S}_H(Q)$ 是半径为 $\sinh^{-1}\left(\frac{b}{2c}\right)$ 的所有管状曲面的集合；

iii. 如果 $bc > 0$ 和 $\Delta \neq 0$，那么 $\mathcal{S}_H(Q)$ 是所有半径为 $\sinh^{-1}\left(\frac{b}{2c}\right)$ 的直圆柱面的集合

.

曲面的第二基本形式的长度定义为

$$|\mathcal{A}| = \sqrt{4H^2 - 2K}.$$

于是，第二基本形式长度为常数（例如 $|\mathcal{A}| = c > 0$）的曲面是魏因加滕曲面，其高斯曲率和平均曲率满足多项式为零

$$Q_c(x, y) = -2x + 4y^2 - c^2.$$

A我们将在下文仅给出洛伦兹和双曲情形的分类。欧几里得

空间中

如引言中所述。

推论 27（洛伦兹）直圆柱面是洛伦兹三维空间中第二基本形式具有恒定长度的唯一非退化正则管状曲面。更确切地说，满足$|\mathcal{A}| = c > 0$ 的洛伦兹三维空间中的唯一非退化正则管状曲面是半径为 $\frac{1}{c}$ 的直圆柱面。

证明。给定 $c > 0$ 和 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$，我们有

$$Q_c\left(0, \frac{\varepsilon}{2r}\right) = 4\left(\frac{\varepsilon}{2r}\right)^2 - c^2 = \frac{1 - c^2 r^2}{r^2}$$

因此

$$Rad_{L,\varepsilon}(Q_c) = \left\{\frac{1}{c}\right\}.$$

由于

$$\begin{aligned} Q_c\left(\frac{\varepsilon x}{\frac{1}{c}}, \frac{\varepsilon\left(x\frac{1}{c} + 1\right)}{2\frac{1}{c}}\right) &= Q_c\left(cx\varepsilon, \frac{\varepsilon(x+c)}{2}\right) \\ &= -2cx\varepsilon + 4\left(\frac{\varepsilon(x+c)}{2}\right)^2 - c^2 \\ &= x^2 + 2c(1-\varepsilon)x \not\equiv 0 \end{aligned}$$

推论的陈述是由.....得出的；我们只需将上述所有事实与定理 18 和推论16结合起来。

■

推论28（双曲）具有恒定长度的第二基本形式的双曲三维空间中的非退化正则管状曲面，只有直圆柱面。更准确地说，满足$|\mathcal{A}| = c > 0$的双曲三维空间中唯一的非退化正则管状曲面，是半径为 $\sinh^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)$的直圆柱面。

剩下的问题将由我们的最后一个主要定理回答，该定理从与前一个定理相反的方向入手。更准确地说，现在我们考虑一个（固定的）正则管状曲面 S，并给出使其曲率满足条件的所有多项式组成的集合 $\mathcal{Q}(S)$。此外，我们将这些多项式的代数刻画表示为一个判别式，以分析管状多项式魏因加滕曲面。

定理 29（洛伦兹 $\mathcal{Q}(S)$ 问题）设洛伦兹三维空间中的一个非退化正则管状曲面 S，其半径为 $r > 0$，符号为 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$。记 $\mathcal{Q}_L(S)$ 为满足 $Q(K, H) \equiv 0$ 的所有多项式 $Q \in \mathbb{R}[x, y]$ 构成的集合。

i. 若 S 是直圆柱面，则 $\mathcal{Q}_L(S) = \{Q \in \mathbb{R}[x, y]\,;\ r \in Rad_{L,\ \varepsilon}(Q)\}$;

ii. 若 S不是直圆柱面，则 $\mathcal{Q}_L(S)$是 $\mathbb{R}[x, y]$ 中由多项式$xr^2 - 2ry + \varepsilon$生成的理想。

证明。首先，假设 S 是直圆柱面。众所周知， S 的曲率为 e

$$K \equiv 0 \qquad \text{and} \qquad H = \tfrac{\varepsilon}{2r}.$$

于是，等式

$$\mathcal{Q}_L(S) = \{Q \in \mathbb{R}[x, y]\ ;\ r \in Rad_{L,\varepsilon}(Q)\}$$

是由$Rad_{L,\ \varepsilon}(Q)$和 $\mathcal{Q}_L(S)$的定义直接得出的。我们注意到$\mathcal{Q}_L(S) \neq \emptyset$，因为简单计算可得 $xr^2 - 2ry + \varepsilon \in \mathcal{Q}_L(S)$。

现在假设 S 不是直圆柱面。根据第3节， S 的曲率为

$$K = \varepsilon\frac{\varepsilon_B\kappa\mu}{r\left(1 + \varepsilon_B r\kappa\mu\right)} \qquad \text{and} \qquad H = \varepsilon\frac{2\varepsilon_B r\kappa\mu + 1}{2r\left(1 + \varepsilon_B r\kappa\mu\right)}.$$

再次经过简单计算可得 $xr^2 - 2ry + \varepsilon \in \mathcal{Q}_L(S)$，因此

$$\left\langle xr^2 - 2ry + \varepsilon \right\rangle \subset \mathcal{Q}_L(S).$$

现在，取一个多项式 Q in $\mathcal{Q}(S)$。根据推论16，要证明 Q 属于由 $xr^2 - 2ry + \varepsilon$生成的 $\mathbb{R}[x, y]$中的理想，只需验证

$$Q\left(\frac{\varepsilon x}{r}, \frac{\varepsilon\left(xr + 1\right)}{2r}\right) \equiv 0.$$

然而，如果多项式 $Q\left(\frac{\varepsilon x}{r}, {}^{\varepsilon}{}_{(xr+1)}{}_{2r}\right)$并非恒等于零，我们便可以重复定理 18 中使用的论证，得出 S 必定是一个直圆柱面。这一矛盾表明 Q属于由 $xr^2 - 2ry + \varepsilon$ 生成的理想，因此

$$\mathcal{Q}_L(S) \subset \left\langle xr^2 - 2ry + \varepsilon \right\rangle.$$

■

推论30（洛伦兹线性问题）洛伦兹三维空间中的每个非退化正则管状曲面都是线性温加滕曲面。更确切地说，其曲率满足

$$Kr^2 - 2rH + \varepsilon = 0,$$

其中 $r > 0$ 和 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ 是它们的半径和符号。

设 S 是欧几里得、洛伦兹或双曲三维空间中的一个（在洛伦兹情形下非退化的）正则曲面。当 Q 在 $\mathcal{Q}(S)$ 中没有非平凡因子时，我们称非线性多项式 $Q \in \mathcal{Q}(S)$ 定义了一个真正的非线性关系（即 S的曲率之间的关系）。当然， $\mathcal{Q}(S)$ 中的非线性不可约多项式（如果存在）会产生真正的非线性关系，但是通过可约多项式也可以得到真正的非线性关系。

推论 31（洛伦兹非线性问题）直圆柱面是洛伦兹三维空间中唯一的非退化正则管状曲面，其曲率满足一个真正的非线性多项式关系。

为完整起见，下面给出上述结果的双曲版本：

定理32（双曲 $\mathcal{Q}(S)$ 问题）设 S 是双曲三维空间中半径为 $r > 0$的正则管状曲面，记 $\mathcal{Q}_H(S)$ 为所有满足$Q(K, H) \equiv 0$的多项式 $Q \in \mathbb{R}[x, y]$ 所组成的集合。

i. 若 S是直圆柱面，则 $\mathcal{Q}_H(S) = \{Q \in \mathbb{R}[x, y]; \ r \in Rad_L(Q)\}$;

ii. 若 S不是直圆柱面，则 $\mathcal{Q}_H(S)$ 是由多项式$x\sinh^2 r - 2y(\sinh\ r) + 1$在 $\mathbb{R}[x, y]$ 中生成的理想。

推论33（双曲线性问题）双曲三维空间中的每个正则管状曲面都是线性温加滕曲面。更确切地说，其曲率满足

$$K\sinh^2 r - 2H(\sinh r) + 1 = 0,$$

其中 $r > 0$ 为其半径。

推论 34（双曲非线性问题）直圆柱面是双曲三维空间中唯一的正则管状曲面，其曲率满足真正的非线性多项式关系。

为结束本节，我们注意到，本文所采用的代数方法也可用于分类满足其主曲率之间多项式关系的 Weingarten 管状曲面。下面我们仅给出定理的欧几里得版本，并将陈述其洛伦兹版本和双曲版本的任务留给读者。

定理35（欧几里得 $\mathcal{S}'(Q)$ 问题）给定一个多项式 $Q(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$，记$\mathcal{S}'_E(Q)$为欧几里得三维空间中所有主曲率 $k_1 \leq k_2$ 满足 $Q(k_1, k_2) \equiv 0$ 的正则管状曲面所组成的集合。那么， $\mathcal{S}'_E(Q)$ 的元素为：

i. 半径属于集合（称为 Q 的欧几里得主半径）的直圆柱面

$$Rad'_E(Q)=\left\{r\in(0,+\infty)\ ;\ Q\left(0,\tfrac{1}{r}\right)=0\right\};$$

ii. 半径属于集合（称为 Q 的欧几里得主星半径）的正则管状曲面

$$\left(Rad'_E\right)^*(Q)=\left\{r\in Rad_E(Q)\ ;\ Q(x,y)\in\left\langle y-\frac{1}{r}\right\rangle\right\}.$$

推论36（欧几里得）考虑一个多项式 $Q(x,y)\in\mathbb{R}[x,y]$。存在满足 $Q(k_1,k_2)\equiv 0$ 的欧几里得三维空间中的正则管状曲面，当且仅当 $Rad'_E(Q)\neq\emptyset$。此外，所有此类曲面的半径属于 $(Rad'_E)^*(Q)$。

定理37（欧几里得 $\mathcal{Q}(S)$ 问题）考虑欧几里得三维空间中半径为 $r>0$ 的正则管状曲面 S，并设 $k_1\leq k_2$ 为其主曲率。用 $\mathcal{Q}'_E(S)$ 表示所有满足 $Q(K,H)\equiv 0$ 的多项式 $Q\in\mathbb{R}[x,y]$ 的集合。

i. 若 S 是直圆柱面，则 $\mathcal{Q}'_E(S)=\{Q\in\mathbb{R}[x,y]\ ;\ r\in Rad'_E(Q)\}$;

ii. 若 S不是直圆柱面，则 $\mathcal{Q}'_E(S)$ 是由多项式$y-\frac{1}{r}$ 在 $\mathbb{R}[x,y]$ 中生成的理想。

由于 k_2 是常数，这类魏因加滕曲面的线性问题是平凡的（事实上，任意正则管状曲面的主曲率都满足多项式 $y-\frac{1}{r}$）。然而，非线性问题仍是上述定理的一个有趣推论（在此背景下，真正的非线性多项式关系的定义显而易见）。

推论38（欧氏非线性问题）直圆柱面是欧几里得三维空间中唯一其主曲率满足真正的非线性多项式关系的管状曲面。

同样，我们可以从前述结果中得出许多具体结论。例如：

推论39（欧几里得）给定实数 a、b、c，使得 $(a,b)\neq(0,0)$，考虑多项式

$$Q(x,y)=ax+by-c\in\mathbb{R}[x,y].$$

那么，$\mathcal{S}'_E(Q)\neq\emptyset$ 当且仅当 b、$c=0$ 或 $bc>0$。更确切地说，我们有：

i. 若 b、$c=0$，则 $\mathcal{S}'_E(Q)$ 是所有任意半径的直圆柱面的集合；

ii. 若 $bc>0$ 且 $a=0$，则 $\mathcal{S}'_E(Q)$ 是半径为 $\frac{b}{c}$ 的所有管状曲面的集合；

iii. 若 $bc>0$ 且 $a\neq 0$，则 $\mathcal{S}'_E(Q)$ 是半径为$\frac{b}{c}$ 的所有直圆柱面的集合。

作者谨向 Francisco Fontenele 教授致以诚挚谢意，感谢他仔细审阅本文的初稿，并提出有益的建议。

参考文献

[ASK] H. S. Abdelaziz, M. K. Saad, S. Kiziltug：《闵可夫斯基三维空间中的 Weingarten 型平行曲面》，《国际数学论坛》第 7 卷，2012年，第 46 期，2293 - 2302.[BFH] A. P. Barreto, F. X. Fontenele, L. Hartmann：《具有常数第二基本形式长度的旋转曲面》，arXiv:1812.08676v1 [math.DG] 202018年12月.[DGW1] F. Dillen, W. Goemans, I. Van de Woestyne：《三维空间中的 Weingarten 型平移曲面》，《布拉索夫特兰西瓦尼亚大学学报》· 2008 年 12 月 .[DK] F. Dillen & W. K¨uhnel：《闵可夫斯基三维空间中的直纹 Weingarten 曲面》，Manuscripta math. 98, 307 – 320 (1999) 施普林格出版社 1999年.[HW] P. Hartman & A. Wintner：《脐点与 W 曲面》，Amer. J. Math. 76 (1954), 502–508. MR 0063082.[K] W. K¨uhnel：《直纹 W 曲面》。Arch. Math. 62, 475–480 (1994).[KS] W. Kuhnel & M. Steller：《关于闭 Weingarten 曲面》，Monatsh. Math. 146 (2005), no. 2, 113–126. MR 2176338.[KT] M. K. Karacan & Y. Tuncer：《伽利略空间和伪伽利略空间中的 Weingarten 型管状曲面》，《数学分析与应用通报》ISSN: 1821-1291，网址：http://www.bmathaa.org 第 5 卷第 2 期（2013），第 87-100 页。[KzT] S. Kiziltug & O. Tarakci：《欧几里得三维空间中 Weingarten 管状曲面的平行曲面》，Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries ISSN: 2284-5569，第 2 卷，第 1 期，第 30-35 页，校样。[KYT] M. K. Karacan, D. W. Yoon, Y. Tuncer：《闵可夫斯基三维空间中的 Weingarten 类型管状曲面》，Gen. Math. Notes，第 22 卷，第 1 期，2014年5月，第 44-56 页，ISSN 2219-7184；版权归 ICSRS 出版社所有。[L1] R. L´opez：《由圆族叶状分解的特殊 Weingarten 曲面》。Monatsh Math 154, 289–302 (2008) DOI 10.1007/s00605-008-0557-x 印于荷兰。[L2] R. L´opez：《关于线性 Weingarten 曲面》，《国际数学杂志》第 19 卷，第 4 期（2008），439-448 © 世界科技出版公司。[L3] R. L´opez：《欧几里得空间与双曲空间中的线性温加滕曲面》，arXiv:0906.3302v1 [math.DG] 17 2009年6月.[L4] R. L´opez：《洛伦兹–闵可夫斯基空间中曲线与曲面的微分几何》，《国际几何电子期刊》7 (2014), 44-107.[RE] H. Rosenberg & R. Sa Earp：《R3 中适当嵌入的特殊曲面的几何，例如满足 aH + bK = 1 的曲面，其中 a 和 b 为正数》，Duke Math. J. 73 (1994), no. 2, 291–306. MR 1262209.[S] A. H. Sorour：《欧几里得三维空间中的 Weingarten 管状曲面》，Stud. Univ. Babe s-Bolyai Math. 61(2016), No. 2, 239-250..[V] K. Voss：《关于闭 Weingarten 曲面》，Math. Ann. 138 (1959), 42–54. MR 0108824.